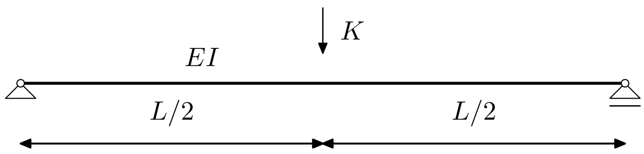
Primjer 2. *Metodom konačnih elemenata odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini proste grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E, opterećene koncentriranom silom K u sredini raspona*



Greda je identična gredi iz prethodnog zadatka. Matrica krutosti ne ovisi o opterećenju nego o fizikalnim i geometrijskim karakteristikama grede. Globalna matrica krutosti, uz dva konačna elementa, jednaka je globalnoj matrici krutosti iz prethodnog primjera

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{96}{L^3} & -\frac{24}{L^2} \\ -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} & \frac{96}{L^3} & \frac{24}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} . \tag{2.1}$$

Vanjsko opterećenje zadano je u čvoru konačnog elementa. Ako je u nepoznatom vektoru pomaka komponenta pomaka u smjeru te sile i-ta komponenta, tada su u globalnom vektoru upetosti sve komponente jednake nuli osim i-te komponente globalnog vektora upetosti koja je jednaka iznosu zadane sile.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.2}$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta, slobodno oslonjeni rubovi $x = 0$ i $x = L$, $w_0 = w_2 = 0$, slijedi sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{L} & \frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 \\ \frac{24}{L^2} & \frac{192}{L^3} & 0 & -\frac{24}{L^2} \\ \frac{4}{L} & 0 & \frac{16}{L} & \frac{4}{L} \\ 0 & -\frac{24}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{8}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.3}$$

Rješenje sustava daje vrijednosti vektora nepoznatih pomaka

$$\begin{bmatrix} \varphi_0 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{KL^2}{16EI} \\ \frac{KL^3}{48EI} \\ 0 \\ \frac{KL^2}{16EI} \end{bmatrix} \quad . \tag{2.4}$$