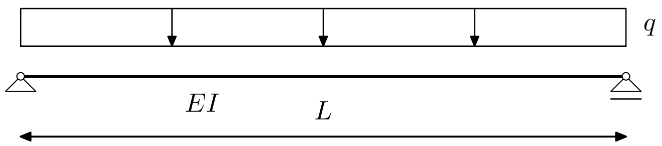
METODA KONAČIH RAZLIKA
Finite Difference Method (FDM)

Primjer 1. *Metodom konačnih razlika odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini proste grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E, opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*



Diferencijalna jednadžba progibne linije grede glasi

$$(E(x)I(x)w'')'' = q(x) \quad . \tag{1.1}$$

Ako uzmemo u obzir da su poprečni presjek i modul elastičnosti konstantni uzduž grede, a opterećenje jednoliko distribuirano, jednadžba glasi

$$EIw^{(iv)} = q \quad . \tag{1.2}$$

Prosta greda je na oba svoja kraja slobodno oslonjena što znači da su progibi i momenti u krajnjim točkama jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad M(0) = -EIw''(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \quad , \tag{1.3}$$

$$w(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \Rightarrow w''(L) = 0 \quad . \tag{1.4}$$

Gredu (područje) podijelimo na k jednakih dijelova, $h = L/k$, a čvorove ($k+1$ čvorova) podjele označimo $x_i = ih, i = 0, \ldots, k$ (diskretizacija područja).
Vrijednosti funkcije progiba i potrebne derivacije u čvorovima možemo kraće zapisati kao

$$w(x_i) = w_i \, , w'(x_i) = w_i' \; \ldots . \tag{1.5}$$

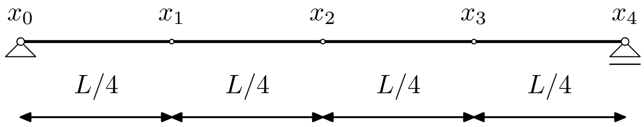
U svakoj točki područja (grede) vrijedi diferencijalna jednadžba progiba. Jednadžbu možemo zapisati za svaki čvor x_i

$$EIw_i^{(iv)} = q \quad . \tag{1.6}$$

Aproksimacija potrebne četvrte derivacije u smislu metode konačnih razlika glasi

$$w_i^{iv} \approx \frac{1}{h^4}\left[w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\right] \quad . \tag{1.7}$$

Ako za svaki čvor x_i raspišemo pripadnu jednadžbu dobivamo $k+1$ jednadžbi. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i, u jednadžbama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k+5$ nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe u čvorovima x_0 i x_k uzmemo jednadžbe za geometrijske rubne uvjete (zadane vrijednosti progiba) u ležajnim



čvorovima. Za proračun progiba u čvorovima x_{-1} i x_{k+1} izvan područja uzmemo jednadžbe za iznose momenata u ležajnim čvorovima.
Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \ldots, 4$. Za svaki čvor raspišemo pripadnu jednadžbu u smislu metode konačnih razlika

$$EI\frac{1}{h^4}\left[w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\right] = q \quad . \tag{1.8}$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{1.9}$$

U jednadžbama se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi i zadnji čvor uvodimo geometrijske rubne uvjete, $w_0 = 0$ i $w_4 = 0$. Za proračun vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove x_1 i x_3 iskoristit ćemo rubne uvjete $M_0 = 0$ i $M_4 = 0$. Momente proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EIw''(x) \quad . \tag{1.10}$$

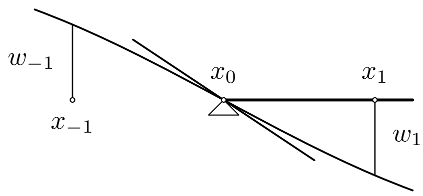
Za čvorove x_0 i x_4 slijede jednadžbe

$$M_0 = 0 \quad = \quad -EI\frac{1}{h^2}\left[w_{-1} - 2w_0 + w_1\right] \quad , \tag{1.11}$$

$$M_4 = 0 \quad = \quad -EI\frac{ }{h^2}\left[w_3 - 2w_4 + w_5\right] \quad . \tag{1.12}$$

U izrazima imamo još uvijek vrijednosti progiba u točkama izvan područja. Potrebno je izraziti vrijednosti progiba u tim točkama preko vrijednosti progiba u točkama unutar područja. U točkama u kojima je moment jednak nuli očito je i druga derivacija progiba jednaka nuli ($w'' = 0$) što znači da su to ujedno i točke infleksije. Zbog toga možemo funkciju progiba izvan podružja aproksimirati kao antimetričnu funkciji progiba unutar područja, $w_{-i} = w_i$. To znači da vrijedi $w_{-1} = w_1$ i $w_5 = w_3$. Sustav jednadžbi sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{1.13}$$



Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$w_1 = w_3 = \frac{5}{512}\frac{qL^4}{EI} \ , \ w_2 = \frac{7}{512}\frac{qL^4}{EI} \quad . \tag{1.14}$$

Pogreška rješenja dobivenog metodom konačnih razlika iznosi 5%.
Momente u čvorovima proračunavamo prema izrazu

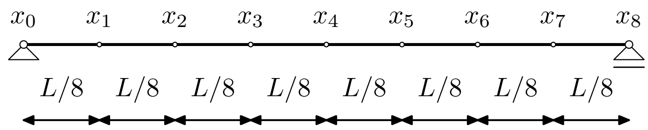
$$\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x) \quad , \\ M_i &= -EI\frac{1}{h^2}\left[w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}\right] \quad . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Na taj način momenti u sredini i četvrtini raspona iznose

$$M_{L/2} = -EI\frac{16}{L^2}\frac{qL^4}{512EI}(5 - 2\cdot 7 + 5) = \frac{qL^2}{8} \quad , \tag{1.16}$$

$$M_{L/4} = -EI\frac{16}{L^2}\frac{qL^4}{512EI}(0 - 2\cdot 5 + 7) = \frac{3qL^2}{32} \quad , \tag{1.17}$$

i jednaki su stvarnim momentima u tim točkama.
Ako podijelimo gredu na 8 dijelova, $h = L/8, x_i = ih, i = 0, \ldots, 8$, rješenje u sredini

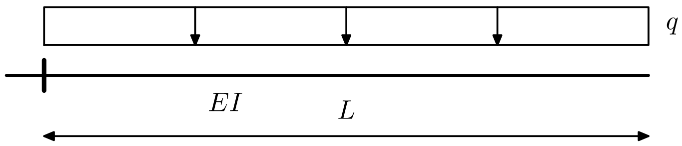


raspona glasi

$$w_4 = \frac{54}{4096}\frac{qL^4}{EI} \quad . \tag{1.18}$$

Pogreška iznosi 1,25%, što je četiri puta manje nego pogreška rješenja dobivenog podjelom na četiri dijela. Metoda konačnih razlika kvadratno konvergira, n puta manji korak povlači n^2 puta manju pogrešku, što u našem primjeru znači da dvostruko manji korak mreže čvorova povlači četiri puta manju pogrešku.

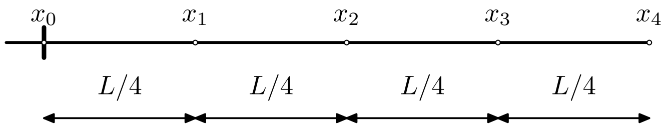
Primjer 2. *Metodom konačnih razlika odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednoliko distribuiranim opterećenjem q*



Konzolna greda je na jednom kraju upeta, a drugi kraj je potpuno slobodan, što znači da su progib i kut zaokreta na upetom ležaju jednaki nuli, a na slobodnom kraju moment i porečna sila jednaki nuli. Rubni uvjeti glase

$$w(0) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \tag{2.1}$$
$$T(L) = -EIw'''(L) = 0 \quad , \quad M(L) = -EIw''(L) = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Ako za svaki čvor x_i raspišemo pripadnu jednadžbu dobivamo $k+1$ jednadžbi. Zbog toga što četvrta derivacija u svakom čvoru aproksimirana u smislu metode konačnih razlika treba i vrijednosti dva čvora ispred i dva čvora iza čvora x_i, u jednadžbama za krajnja dva čvora javljaju se i vrijednosti $w_{-2}, w_{-1}, w_{k+1}, w_{k+2}$, koje su zapravo vrijednosti u točkama izvan našeg područja (grede $[0, L]$), te imamo $k+5$ nepoznanica. Umjesto tih jednadžbi uzimamo rubne uvjete. Umjesto diferencijalne jednadžbe za čvor x_0 uzmemo geometrijski rubni uvjet $w_0 = 0$, a za proračun vrijednosti progiba w_{-1} iskoristit ćemo prirodni rubni uvjet $w_0' = 0$. Za proračun progiba w_{k+1} i w_{k+2} izvan područja iskoristit ćemo jednadžbe za moment i poprečnu silu u čvoru na slobodnom kraju konzolne grede. Sada podijelimo područje (gredu) na četiri dijela jednake duljine (ekvidistantna mreža), $h = L/4$, $x_i = ih, i = 0, \ldots, 4$. Za svaki čvor raspišemo pripadnu jednadžbu u smislu



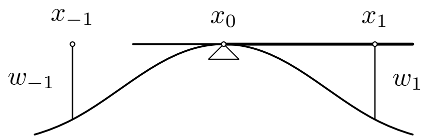
metode konačnih razlika

$$EI\left[w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\right] = q \quad . \tag{2.3}$$

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-2} \\ w_{-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.4}$$

U jednadžbi se javljaju i vrijednosti progiba izvan područja (grede $[0, L]$). Potrebno je iskoristiti rubne uvjete. Umjesto jednadžbe za prvi čvor x_0 uvodimo geometrijski rubni uvjet, $w_0 = 0$. Za proračun potrebnih vrijednosti progiba u čvorovima izvan područja u jednadžbama za čvorove x_1, x_3 i x_4 iskoristit ćemo rubne uvjete $w'_0 = 0$, $M_4 = 0$ i $T_4 = 0$. Kut zaokreta tangente na progibnu liniju u čvoru x_0 jednak je nuli. Progibnu funkciju izvan područja možemo aproksimirati kao simetričnu progibnoj funkciji unutar područja, $w_{-1} = w_1$.



Momente proračunavamo prema izrazu

$$M(x) = -EIw''(x) \quad . \tag{2.5}$$

Za moment u čvoru x_4 slijedi jednadžba

$$M_4 = 0 = -EI\frac{1}{h^2}\left[w_3 - 2w_4 + w_5\right] \tag{2.6}$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_5

$$w_5 = 2w_4 - w_3 \quad . \tag{2.7}$$

Poprečne sile proračunavamo prema izrazu

$$T(x) = -EIw'''(x) \quad . \tag{2.8}$$

Za poprečnu silu u čvoru x_4 slijedi jednadžba

$$T_4 = 0 = -EI\frac{1}{h^3}\left[w_2 - 2w_3 + 2w_5 - w_6\right] \tag{2.9}$$

na temelju koje možemo izraziti vrijednost w_6

$$\begin{aligned} w_6 &= w_2 - 2w_3 + 2w_5 \\ &= w_2 - 2w_3 + 2(2w_4 - w_3) \\ &= w_2 - 4w_3 + 4w_4 \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Jednadžba sustava sada glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \frac{qL^4}{256EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.11}$$

Rješenje sustava daje vrijednosti progiba u čvorovima mreže

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{64}\frac{qL^4}{EI} \quad , \quad w_2 = \frac{25}{512}\frac{qL^4}{EI} \; , \\ w_3 &= \frac{23}{256}\frac{qL^4}{EI} \quad , \quad w_4 = \frac{17}{128}\frac{qL^4}{EI} \quad . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pogreška rješenja dobivenog metodom konačnih razlika iznosi $6,25\%$.
Momente u čvorovima proračunavamo prema izrazu

$$\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x) \quad , \\ M_i &= -EI\frac{1}{h^2}\left[w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Na taj način moment na upetom ležaju iznosi

$$M_0 = -EI\frac{16}{L^2}\frac{qL^4}{64EI} \cdot 2 = \frac{qL^2}{2} \quad , \tag{2.14}$$

i jednak je stvarnom momentu na upetom ležaju.