Matematika 1 - pismeni ispit - rješenja 13.2.2023.

1. Neka je $Q'(x_0, y_0, z_0)$ tražena točka. Odredimo prvo pravac okomit na ravninu π koji prolazi točkom Q. Vektor smjera tog pravca je vektor normale ravnine π koji je dan sa $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Jednadžba pravca okomitog na ravninu koji prolazi točkom Q je onda

$$p \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Odredimo presjek pravca p i ravnine π. Ako je točka $T \in p$, onda je $T = (t+1, t+2, -t+1)$, za neki $t \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine π dobivamo

$$t + 1 + t + 2 - (-t + 1) - 3 = 0$$

$$3t - 1 = 0$$
$$t = \frac{1}{3}.$$

Presjek pravca p i ravnine π je onda točka $S = (\frac{1}{3} + 1, \frac{1}{3} + 2, -\frac{1}{3} + 1) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3})$. Kako je Q' točka simetrična točki Q s obzirom na ravninu π imamo da je S polovište točaka Q i Q'. Vrijedi

$$x_S = \frac{x_0 + x_Q}{2} \Rightarrow x_0 = 2x_S - x_Q = 2\frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3},$$
$$y_S = \frac{y_0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_0 = 2y_S - y_Q = 2\frac{7}{3} - 2 = \frac{8}{3},$$
$$z_S = \frac{z_0 + z_Q}{2} \Rightarrow z_0 = 2z_S - z_Q = 2\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Dakle, tražena točka je $Q'(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3})$.

2. Matrica sustava dana je sa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right].$$

Zbog lakšeg računa zamjenimo prvo prvi i treći redak matrice i dobivamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}\right].$$

Sada množimo prvi redak sa -2 i dodajemo ga trećem retku te množimo prvi redak sa -1 i dodajemo ga četvrtom retku. Imamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{array}\right].$$

Množenjem trećeg retka sa 6 i dodavanjem ga četvrtom retku dobivamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}\right].$$

Preostaje rješiti sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\ 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ -13x_4 = -39. \end{cases}$$

Iz četvrte jednadžbe dobivamo $x_4 = 3$. Uvrstimo li to u treću jednadžbu dobivamo

$$3x_3 - 9 = -6 \Rightarrow x_3 = 1.$$

Uvrštavanjem u drugu sada dobivamo

$$x_2 + 1 - 2 \cdot 3 = -3 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Na kraju kada sve uvrstimo u prvu jednadžbu dobivamo

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 1 = 2 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Konačno rješenje sustava je onda jedinstveno i dano sa

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. a) Odredimo prvo točke presjeka dane krivulje sa koordinatnim osima. Kako bi dobili presjek sa x-osi uvrštavamo u jednadžbu krivulje $y = 0$. Dobivamo

$$0 = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow x = 4.$$

Dakle, presjek krivulje i x-osi je točka $(4,0)$. Kako bi dobili presjek s y-osi uvrštavamo $x = 0$ i dobivamo

$$y = \frac{0-4}{0-2} = 2.$$

Dakle, presjek krivulje i y-osi je točka $(0,2)$. Općenito, koeficijent smjera tangente na krivulju u točki $(x_0, y(x_0))$ dan je sa $y'(x_0)$. Kako bi vidjeli da su tangente u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne dovoljno je provjeriti da su im koeficijenti smjera jednaki odnosno da vrijedi $y'(0) = y'(4)$. Vrijedi

$$y' = \frac{(x-2)-(x-4)}{(x-2)^2} = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Sada je $y'(0) = \frac{2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}$ i $y'(4) = \frac{2}{(4-2)^2} = \frac{1}{2}$. Dakle, tangente u tim točkama su paralelne jer su im koeficijenti smjera jednaki.

b) Znamo da vrijedi $(e^x)' = e^x, (2^x)' = 2^x \ln 2, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x^n)' = nx^{n-1}, (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Korištenjem formula za deriviranje imamo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2e^x - 2^x + 1}} \cdot (2e^x - 2^x \ln 2) + 5 \ln^4 x \cdot \frac{1}{x}.$$

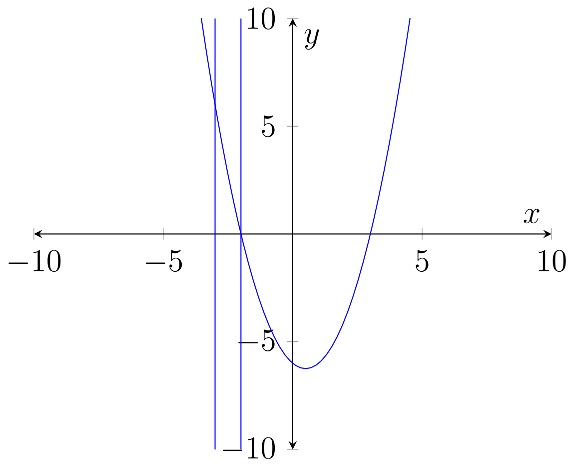
4. Koristimo identitet $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ i računamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin 2x - 3\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin 2x - \frac{3}{2}(1+\cos 2x)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{3}{2}\right) dx = -2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\cos\pi + 2\cos 0 - \frac{3}{4}\sin\pi + \frac{3}{4}\sin 0 - \frac{3\pi}{4} = 4 - \frac{3\pi}{4}.$$

5. a) Skica dane parabole i pravaca izgleda ovako



Traženu površino možemo računati kao površinu ispod dane parabole na segmentu $[-3,-2]$, pa imamo

$$P = \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{-3}^{-2}$$

$$= \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6\cdot(-2) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 6\cdot(-3)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 + \frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 18 = \frac{17}{6}.$$

b) Kugla radijusa $r > 0$ je tijelo koje nastaje rotacijom kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ oko x-osi (ili oko y-osi). Koristit ćemo formulu za volumen tijela koje nastaje rotacijom grafa funkcije oko x-osi. Iz jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ dobivamo da je

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Prema formuli za volumen imamo

$$V = 2\pi \int_{-r}^{r} (y(x))^2 dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$$

$$= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left((-r)^3 - \frac{(-r)^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$