Matematika 1 - pismeni ispit - rješenja 20.2.2023.

1. a) (5 bodova) Odredite parametar λ takav da vektori $\vec{a} = (\lambda+1)\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = \lambda\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ budu jednake duljine.

   b) (15 bodova) Odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

   i točku $T(1,1,1)$.

Rješenje:

a) Prema formuli za duljinu vektora računamo

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\lambda+1)^2 + 2^2} = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\lambda^2 + 1 + (-3)^2} = \sqrt{\lambda^2 + 10}.$$

Izjednačavanjem tih duljina dobivamo

$$\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 5} = \sqrt{\lambda^2 + 10}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = \lambda^2 + 10$$

$$2\lambda + 5 = 10$$

$$\lambda = \frac{5}{2}.$$

b) Označimo sa $\vec{n}$ vektor normale tražene ravnine. Kako pravac p leži u ravnini koju tražimo vektor $\vec{n}$ je okomit na vektor smjera pravca p. Vektor smjera pravca p je vektor $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Uzmimo bilo koju točku na pravcu p, na primjer $Q(1,-1,0)$. Tada točka Q također leži u ravnini π. Kako i točka T leži u toj ravnini vektor $\vec{n}$ je okomit na vektor $\overrightarrow{TQ} = -2\vec{j} - \vec{k}$. Dakle, imamo $\vec{n} \perp \vec{c}$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{TQ}$ pa je

$$\vec{n} = \vec{c} \times \overrightarrow{TQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(1,1,1)$ i ima vektor normale $\vec{n} = (1,2,-4)$ dana je sa

$$\pi \ldots (x-1) + 2(y-1) - 4(z-1) = 0.$$

Odnosno, tražena ravnina je $\pi \ldots x + 2y - 4z + 1 = 0$.

2. a) (10 bodova) Gaussovom metodom riješite sustav

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ \quad x + y + z = -2 \\ -5x - y - z = 8. \end{cases}$$

b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n .$$

Rješenje:

a) Matrica sustava dana je sa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & -1 & 8 \end{array} \right].$$

Dodavanjem prvog retka drugom te množenjem prvog retka sa -5 i dodavanjem ga trećem retku dobivamo ekvivalentnu matricu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & 3 \end{array} \right].$$

Sada množenjem drugog retka sa 3 i dodavanjem ga trećem retku dobivamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Preostaje rješiti sutav

$$\begin{cases} -x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \qquad 2y + 2z = -1 \end{cases}.$$

Stavimo $z = t, t \in \mathbb{R}$. Tada iz druge jednadžbe dobivamo $y = -t - \frac{1}{2}$, a zatim uvrštavanjem toga u prvu jednadžbu dobivamo $-x - t - \frac{1}{2} + t = 1$, odnosno $x = -\frac{3}{2}$. Traženo rješenje sustava je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -t - \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Red divergira jer opći član reda ne teži prema 0. Naime, računamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n-1}} = e^2 \neq 0.$$

3. (20 bodova) Odredite prirodno područje definicije, nultočke, intervale rasta i pada, ekstreme, asimptote te skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-2x+1}.$$

Rješenje:

Vrijedi $x^2-2x+1=(x-1)^2$, pa je $f(x)=\frac{x^2-2}{(x-1)^2}$ te je $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Imamo $x^2-2=0$ ako i samo ako $x^2=2$, odnosno $x=\pm\sqrt{2}$. Dakle, nultočke su $x=\pm\sqrt{2}$. Deriviranjem dane funkcije dobivamo

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2)}{(x-1)^4}=\frac{-2x+4}{(x-1)^3}.$$

Imamo $f'(x)=0$ ako i samo ako $-2x+4=0$, odnosno $x=2$. Zaključujemo da je $x=2$ jedina stacionarna točka, ali kako 1 nije u domeni funkcije moramo gledati mijenja li derivacija predznak u točki $x=1$. Imamo, na primjer

$$f'(0)=-4<0, f'\left(\frac{3}{2}\right)=8>0, f'(3)=-\frac{1}{4}<0.$$

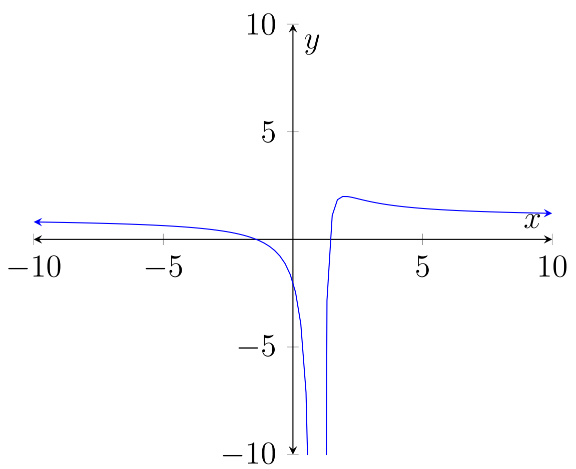
Zaključujemo da je $f'(x)<0$ za $x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\langle2,+\infty\rangle$ i $f'(x)>0$ za $x\in\langle1,2\rangle$. Dakle, funkcija pada na intervalima $\langle-\infty,1\rangle, \langle2,+\infty\rangle$ i raste na intervalu $\langle1,2\rangle$.
Funkcija f onda ima lokalni maksimum u točki $x=2$ i vrijedi $f(2)=2$. Imamo da je pravac $x=1$ vertikalna asimptota jer vrijedi

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty.$$

Također, imamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x^2-2x+1}=1.$$

Stoga je pravac $y=1$ lijeva i desna horizontalna asimptota. Kako imamo horizontalne asimptote kosih asimptota nema. Graf funkcije f izgleda ovako.



4. (15 bodova) Odredite

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^3} dx$$

Rješenje:

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^3} dx = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} & dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ \frac{1}{\pi} \to \pi & \frac{2}{\pi} \to \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -t \sin t \; dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t \; dt = \begin{bmatrix} u = t & dv = \sin t \; dt \\ du = dt & v = -\cos t \end{bmatrix} = -t \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t \; dt$$

$$= -\pi \cos \pi + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi + \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = \pi - 1.$$

5. a) (13 bodova) Odredite površinu lika u prvom kvadrantu omeđenog krivuljom $y = \ln x$, tangentom na tu krivulju u točki $(e^2, 2)$ i koordinatnim osima.

b) (12 bodova) Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2} + 2$, oko osi y.

Rješenje:

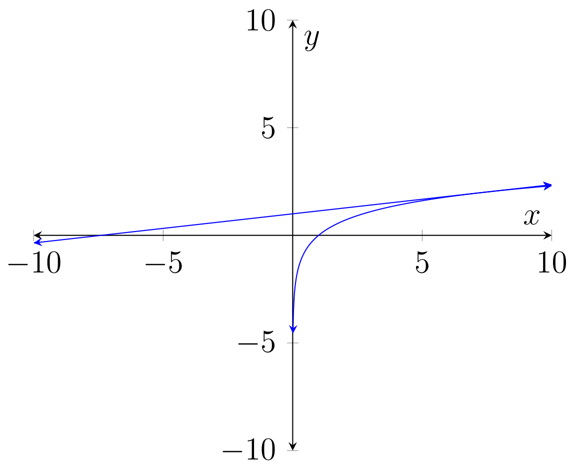
a) Odredimo prvo jednadžbu tangente na danu krivulju u točki $(e^2, 2)$. Općenito, jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) na krivulji dana je sa

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

U našem slučaju imamo $y' = \frac{1}{x}$ i $y'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Jednadžba naše tangente je onda

$$y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2).$$

Sređivanjem dobivamo $t \ldots y = \frac{1}{e^2}x + 1$. Skica izgleda ovako.



Tražena površina može se izračunati na više načina. Jedan od njih je oduzeti površinu ispod grafa od $\ln x$ na segmentu $[1, e^2]$ od površine ispod pravca na segmentu $[0, e^2]$. Dakle,

$$P = \int_0^{e^2} \left(\frac{1}{e^2}x + 1 \right) dx - \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

Izračunajmo integrale zasebno.

$$\int_0^{e^2} \left(\frac{1}{e^2}x + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{2e^2}x^2 + x \right) \Big|_0^{e^2} = \frac{e^4}{2e^2} + e^2 = \frac{3}{2}e^2.$$

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1dx$$

$$= e^2 \ln e^2 - \ln 1 - x \Big|_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

Dakle,

$$P = \frac{3}{2}e^2 - (e^2 + 1) = \frac{e^2}{2} - 1.$$

b) Odredimo prvo presjek ovih parabola.

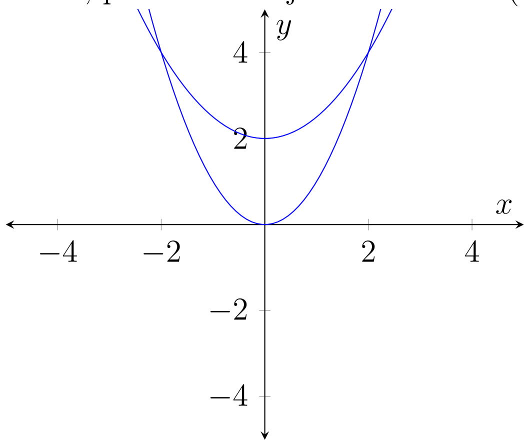
$$x^2 = \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\frac{x^2}{2} = 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2.$$

Dakle, parabole se sijeku u točkama $(-2, 4)$ i $(2, 4)$. Skica izgleda ovako.



Uočimo da je dana površina simetrična s obzirom na os y pa isti volumen dobivamo ako gledamo samo rotaciju dijela površine koji se nalazi u prvom kvadrantu. Tada je traženi volumen prema formuli jednak

$$V = 2\pi \int_0^2 x \left(\frac{x^2}{2} + 2 - x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x \right) dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{x^4}{8} + x^2 \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left(-\frac{16}{8} + 4 \right) = 4\pi.$$