

Zadatci za vježbu

1. Eulerovom metodom rješite:

a) $y' + 5x^4y^2 = 0$ na $[0, 1]$, $y(0) = 1$ i $h = 0.2$;

b) $y' = (y + x)^2$ na $[0, 1]$, $y(0) = 0$ i $h = 0.2$.

2. Pobjeljšanom Eulerovom metodom rješite:

a) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$ na $[0, 1]$, $y(0) = 1$ i $h = 0.2$;

b) $y' = y - y^2$ na $[0, 1]$, $y(0) = 0.5$ i $h = 0.2$.

3. Runge-Kutta metodom rješite:

a) $y' = y - y^2$ na $[0, 1]$, $y(0) = 0.5$ i $h = 0.2$;

b) $y' = (1 + x^{-1})y$ na $[1, 2]$, $y(1) = e$ i $h = 0.2$.

4. Metodom konačnih diferencija pronađite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:

a) $u''(x) - \sin xu(x) + \cos x = 0$ na $[0, \pi]$, $h = \frac{\pi}{4}$ uz rubne uvjete $u(0) = u'(\pi) = 0$;

b) $u''(x) - (1 + x^2)u(x) + \sin \pi x = 0$ na $[0, 2]$, $h = 0.5$ uz rubne uvjete $u(0) = u(2) = 0$.

5. Metodom konačnih elemenata pronađite numeričke vrijednosti ravnotežnog stanja žice:

a) $(x^2u'(x))' - x + 1 = 0$ na $[0, 1]$, $h = 0.25$ uz rubne uvjete $u(0) = u'(1) = 0$;

b) $(\sin x u'(x))' + \cos x = 0$ na $[0, \pi]$, $h = \frac{\pi}{4}$ uz rubne uvjete $u(0) = u(\pi) = 0$.

6. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti oscilacije žice:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $[0, 1]$ ako je $h = \tau = 0.2$ uz rubne uvjete $u(0, t) = u(1, t) = 0$,

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.75 \\ -3x + 3, & 0.75 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

i $u(x, 0) = 0.1x(1 - x)$;

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $[0, 1]$ ako je $h = \tau = 0.25$ uz rubne uvjete $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$ i

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -2x + 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x - 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

7. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti provođenja topline:

a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $[0, 1]$ ako je $h = 0.2$, $\sigma = 0.25$ uz rubne uvjete $u(0, t) = u(1, t) = 0$ i

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \end{cases}$$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na $[0, 2]$ ako je $h = 0.5$, $\sigma = 0.125$ uz rubne uvjete $u(0, t) = u(2, t) = 0$ i

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1.2 \\ 1.2, & 1.2 \leq x \leq 1.7 \\ -4x + 8, & 1.7 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

8. Metodom konačnih diferencija odredite numeričke vrijednosti ravnoteže membrane:

a) $\Delta u = \cos \pi xy$ na $\Omega = [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$ uz korak $h = \pi$ i rubni uvjet $u|_{\partial\Omega} = 0$;

- b) $\Delta u = 0$ na $\Omega = [0, 3] \times [0, 3]$ uz korak $h = 1$ i rubne uvjete $u(0, y) = 0$, $u(x, 3) = \cos \frac{2\pi}{3}x - 1$, $u(3, y) = 0$ i $u(x, 0) = \sin \frac{2\pi}{3}x$;
- c) $\Delta u = x^2$ na $\Omega = [0, 1.5] \times [0, 1.5]$ uz korak $h = 0.5$ i rubne uvjete $u(0, y) = 50x$, $u(x, 3) = \frac{-50}{3}x + 50$, $u(3, y) = \frac{-100}{3}x + 100$ i $u(x, 0) = \frac{100}{3}x$.