2.3 Limes i neprekidnost

Definicija 2.12. *Neka je funkcija $f(M)$ definirana na nekoj okolini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točke M_0, osim možda u samoj točki M_0. Realan broj A se zove* ***limes funkcije f u točki*** *M_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve točke $M \in \Omega$ različite od M_0 vrijedi $|f(M) - A| < \varepsilon$ kad god je $0 < d(M, M_0) < \delta$.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) t.d. (0 < d(M, M_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(M) - A| < \varepsilon)$$

To zapisujemo: $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$.

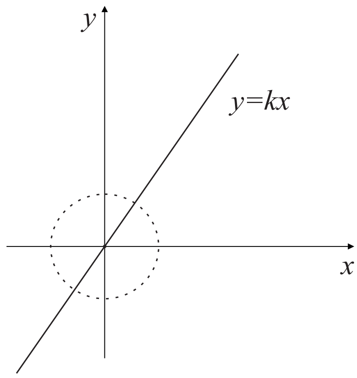
Napomena 2.1. *Kao i kod funkcija jedne varijable, ako limes postoji, on je jedinstven.*

Primjer 2.2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
Izračunajmo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
Dokažimo da je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.
Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći $\delta > 0$ takav da

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon,$$

a za to je dovoljno uzeti $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Primjer 2.3. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$
Pokušajmo izračunati $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
Kako promatramo ponašanje funkcije $f(x, y)$ na otvorenoj kugli $K((0, 0), \delta)$, možemo promatrati restrikciju na pravac $y = kx$ jer će se tu uvijek nalaziti centar kugle za svaki k.
Tada je $f(x, kx) = \dfrac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \dfrac{2k}{1 + k^2}$ *ako je* $x \neq 0$.
No $f(x, kx) \to \dfrac{2k}{1 + k^2}$ *kad* $x \to 0$, *pa bi za različite k-ove dobili drugačije ponašanje funkcije u okolini točke* $(0, 0)$.
Zaključujemo da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *ne postoji.*



Slika 2.13:

Teorem 2.1. *Neka funkcije $f(M)$ i $g(M)$ imaju limese u točki $M_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada u točki M_0 limese imaju i funkcije $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ i $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ ako je $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0$ i vrijedi*

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \cdot g(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} g(M)$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)} \quad (\lim_{M \to M_0} g(M) \neq 0)$$

Definicija 2.13. *Neka je funkcija $f(M)$ definirana u točki M_0 i na nekoj okolini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ točke M_0. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna u točki*** *M_0 ako postoji limes funkcije u toj točki i jednak je vrijednosti funkcije u toj točki*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Napomena 2.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ područje i $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada je f neprekidna u točki $M_0 \in \Omega$ ako $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ takvi da za sve $M \in \Omega$ za koje je $d(M, M_0) < \delta$ vrijedi $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.*
Ukoliko je f neprekidna u svakoj točki iz Ω, kažemo da je f ***neprekidna*** *na Ω.*

Teorem 2.2. *Ako su funkcije $f(M)$ i $g(M)$ neprekidne u točki $M_0 \in \mathbb{R}^n$, onda su u M_0 neprekidne i funkcije $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ i $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ ako je $g(M_0) \neq 0$.*

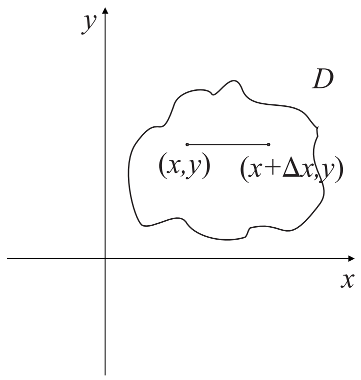
Definicija 2.14. *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Za funkciju f kažemo da je* ***ograničena*** *(na Ω) ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $|f(P)| < M$ za sve $P \in \Omega$.*

Teorem 2.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ područje i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u $M_0 \in \Omega$. Tada je f ograničena na nekoj okolini točke M_0.*

Teorem 2.4. *(Bolzano-Weierstrass) Ako je funkcija $f(M)$ neprekidna na ograničenom i zatvorenom području D, tada je $f(M)$ ograničena na D, na D poprima svoj minimum i maksimum i sve međuvrijednosti.*

2.4 Parcijalne derivacije i diferencijali

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definirana na nekom području $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $(x, y) \in D$. Promotrimo prirast Δx u x tako da je $(x + \Delta x, y) \in D$.



Slika 2.14: Prirast varijable x

Prirast $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ se zove **parcijalni prirast u** z.

Definicija 2.15. *Ako kvocijent* $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ *ima konačan limes kad* $\Delta x \to 0$ *taj limes zovemo* ***parcijalna derivacija*** *funkcije* $z = f(x, y)$ *u točki* (x, y) *po varijabli* x*. To označavamo:* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ *ili* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.
Znači
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Analogno se definira parcijalna derivacija u točki (x, y) po varijabli y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Primjer 2.4. *Izračunajte* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ *i* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *ako je* $f(x, y) = xy^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y^2 - xy^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} y^2 = y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y+\Delta y)^2-xy^2}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2xy\Delta y + x(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}(2xy+x\Delta y) = 2xy+0=2xy.\end{aligned}$$

Primjer 2.5. *Primijetimo da nam kod funkcija dviju varijabli postojanje parcijalnih derivacija ne povlači neprekidnost kao kod funkcija jedne varijable. Neka je*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Tada f nije neprekidna u $(0,0)$ jer uopće nema limes u toj točki, ali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

pa vidimo da ovdje diferencijabilnost funkcija dviju varijabli moramo nekako drugačije definirati.

Prisjetimo se da je funkcija $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, koja je definirana na nekom intervalu (a,b), derivabilna u $x_0\in(a,b)$ ako postoji

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(kojeg označavamo s $f'(x_0)$). U tom slučaju vrijedi

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{|h|}=0.$$

Nadalje, uočimo da je funkcija $l:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dana sa $l(h)=f'(x_0)h$ linearan operator. Štoviše, svaki linearan operator $l:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ je nužno oblika $l(h)=ah$ za neki $a\in\mathbb{R}$. Zaista, zbog linearnosti, $l(h)=hl(1)$ za sve $h\in\mathbb{R}$. Također, uočimo da je broj 1 baza vektorskog prostora $\mathbb{R}$. Pogledajmo što se događa u slučaju funkcija više varijabli. Neka je $l:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ linearan operator. Tada, za $\vec{h}=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, imamo

$$l(\vec{h}) = l(h_1\vec{i}+h_2\vec{j}) = h_1 l(\vec{i}) + h_2 l(\vec{j}) = (l(\vec{i}),l(\vec{j}))(h_1,h_2) = L\vec{h}^t,$$

gdje je $L=(l(\vec{i}),l(\vec{j}))$. Dakle, za svaki linearan operator $l:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ postoji matrica L tipa $(1,2)$ (koja je nužno oblika $L=(l(\vec{i}),l(\vec{j}))$) takva da sve $\vec{h}\in\mathbb{R}^2$, $l(\vec{h})=L\vec{h}^t$. Ponovno, uočimo da je $(\vec{i}, \vec{j})$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Obratno, svaka funkcija $l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ oblika $l(\vec{h}) = L\vec{h}^t$, gdje je L neka matrica tipa $(1,2)$, je očito linearan oparator. Analognom argumentacijom, svaki linaran operator $l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ je oblika $l(\vec{h}) = L\vec{h}^t$, gdje je $L = (l(\vec{e}_1), \dots, l(\vec{e}_n))$ i $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je kanonska ortonorminana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.16. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana na području Ω i neka je $P_0 \in \Omega$. Funkcija $f(P)$ je diferencijabilna u P_0 ako postoji matrica L tipa (1,2) (linearan operator l) takva da*

$$\lim_{\vec{h} \longrightarrow \vec{0}} \frac{f(P_0 + \vec{h}) - f(P_0) - L\vec{h}^t}{|\vec{h}|} = 0.$$

Napomenimo da se može pokazati da ako matrica L u gornjoj definiciji postoji, onda je ona i jedinstvena. U tom slučaju, zovemo je diferencijalom funkcije $f(P)$ u točki P_0 i označavamo s $Df(P_0)$. Uočimo da je u slučaju funkcije jedne realne varijable $Df(x_0) = f'(x_0)$. Aanalogno se definira diferencijal funkcija više realnih varijabli ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$).

Vidjeli smo da postojanje parcijalnih derivacija ne implicira neprekidnost same funkcije. Međutim, ako je funkcija diferencijabilna u točki, onda je ona nužno i neprekidna u toj točki.

Teorem 2.5. *Ako je funkcija $f(P)$ diferencijabilna u P_0, onda je ona i neprekidna u P_0.*

Dokaz. Prvo, uočimo da je svaki linearan operator neprekidna funkcija. Zaista, neka je $l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ linearan operator i neka ja $L = (l_1, l_2)$ njegova pripadna matrica. Fiksirajmo $P_0 \in \mathbb{R}^2$. Tada, za $P \in \mathbb{R}^2$, imamo

$$|l(P_0) - l(P)| = |l(P_0 - P)| = |L(P_0 - P)^t| \leq \sqrt{2}\max\{|l_1|, |l_2|\} d(P_0, P).$$

Dakle, ako su P_0 i P blizu, onda su i $l(P_0)$ i $l(P)$. Nadalje, zbog diferencijabilnosti of $f(P)$ u P_0, imamo

$$\lim_{\vec{h} \longrightarrow \vec{0}} \frac{|r(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0,$$

gdje je $r(\vec{h}) = f(P_0 - \vec{h}) - f(P_0) - Df(P_0)\vec{h}^t$. Također, uočimo da je $r(\vec{0}) = 0$. Dakle, dovoljno je pokazati neprekidnost od $r(\vec{h})$ u $\vec{0}$. Iz gornjih svojstava od $r(\vec{h})$ zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (bez smanjenja općenitosti uzmimo $\delta < 1$) takav da za sve $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$, $0 < |\vec{h}| < \delta$, vrijedi

$$\frac{|r(\vec{h})|}{|\vec{h}|} < \varepsilon.$$

Specijalno, za dani $\varepsilon > 0$ i sve $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$, $|\vec{h}| < \delta$,

$$|r(\vec{h}) - r(\vec{0})| = |r(\vec{h})| < \varepsilon|\vec{h}| < \varepsilon\delta < \varepsilon,$$

što dokazuje tvrdnju. $\square$

Postavlja se pitanje kako eksplicitno odrediti $Df(P_0)$.

Teorem 2.6. *Neka je $f(P)$ diferencijabilna u P_0. Tada, $f(P)$ ima parcijalne derivacije u P_0 i vrijedi*

$$Df(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right).$$

Dokaz. Znamo da vrijedi

$$\lim_{\vec{h} \longrightarrow \vec{0}} \frac{f(P_0 + \vec{h}) - f(P_0) - Df(P_0)\vec{h}^t}{|\vec{h}|} = 0.$$

Specijalno, uzmimo $\vec{h} = h\vec{i}$ za $h \in \mathbb{R}$. Tada imamo

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{i}) - f(P_0) - hDf(P_0)\vec{i}^t}{h} = 0,$$

tj.

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{i}) - f(P_0)}{h} = Df(P_0)\vec{i}^t.$$

Međutim, kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(P_0 + h\vec{i}) - f(P_0)}{h},$$

zaključujemo

$$Df(P_0)\vec{i}^t = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0).$$

Analogno vrijedi

$$Df(P_0)\vec{j}^t = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0),$$

što dokazuje tvrdnju. $\square$

Analogno kao u gornjem teoremu, za funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$Df(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right).$$

Vidjeli smo da postojanje parcijalnih derivacija ne implicira diferencijabilnbost funkcije (ne implicira niti njenu neprekidnost). Međutim, imamo sljedeći rezultat koji navodimo bez dokaza.

Teorem 2.7. *Neka je $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana na nekom području Ω i neka je $P_0 \in \Omega$. Ako $f(P)$ ima parcijalne derivacije na Ω koje su neprekidne u P_0, onda je $f(P)$ diferencijabilna u P_0.*

Do sada smo isključivo analizirali realne funkcije više realnih varijabli. Međutim, postavlja se pitanje kako definirati diferencijal vektorske funkcije. Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Prvo, uočimo da za takvu funkciju postoje (i jedinstvene su) funkcije $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ takve da $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Zaista, za $i = 1, \ldots, m$, neka je $\pi_i(P)$ projekcija prostora $\mathbb{R}^m$ na njegovu i-tu koordinatnu os, tj. $\pi_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ je dana formulom $\pi_i(P) = x_i$ za $P = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Sada, za $i = 1, \ldots, m$, definirajmo $f_i(P) = \pi_i(f(P))$ za $P \in \mathbb{R}^n$. Očito vrijedi $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Definicija 2.17. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definirana na području Ω i neka je $P_0 \in \Omega$. Za funkciju $f(P)$ kažemo da je diferencijabilna u P_0 ako su u P_0 diferencijabilne sve funkcije $f_1(P), \ldots, f_m(P)$ i, u tom slučaju, diferencijal od $f(P)$ u P_0, u oznaci $Df(P_0)$, definiramo kao*

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} Df_1(P_0) \\ \vdots \\ Df_m(P_0) \end{pmatrix}.$$

Pišući u terminima parcijalnih derivacija,

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Gornja matrica naziva se Jacobijeva matrica funkcije $f(P)$ u točki P_0. U slučaju kada je $n = m$, $\det Df(P_0)$ naziva se Jacobijan funkcije $f(P)$ u točki P_0. Jacobijanima ćemo se više baviti u sljedećim poglavljima.

Diferencijal realne funkcije dvije varijable se može definirati i na sljedeći način:

Definicija 2.18. *Neka je $z = f(x, y)$ funkcija definirana na nekom području D i neka je $(x, y) \in D$. Neka Δx i Δy označavaju priraste u varijablama x i y takve da je $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$. Za funkciju $z = f(x, y)$ kažemo da je*

diferencijabilna u točki *$(x, y) \in D$ ako je njezin totalni prirast $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ prikaziv u obliku*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

gdje A i B ne ovise o Δx i Δy (mogu ovisiti o x i y), a $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ i $\beta(\Delta x, \Delta y)$ teže nuli kad Δx i Δy teže nuli.
Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u točki (x, y), tada $A\Delta x + B\Delta y$ zovemo ***diferencijal*** *od $z = f(x, y)$ u točki (x, y).*
Diferencijal označavamo: $dz = A\Delta x + B\Delta y \quad \Rightarrow \quad \Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

Primjer 2.6. *Izračunajmo totalni prirast od $z = x^2 + y^2$.*
Računamo :

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y,$$

iz čega vidimo $A = 2x,\ B = 2y,\ \alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x,\ \beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$.
Očito α i β teže nuli kad $\Delta x,\ \Delta y \to 0$.
Znači funkcija $z = x^2 + y^2$ je diferencijabilna u svakoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; i vrijedi $dz = 2x\Delta x + 2y\Delta y$.

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj točki. Tada je njezin totalni prirast oblika

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

a totalni diferencijal je

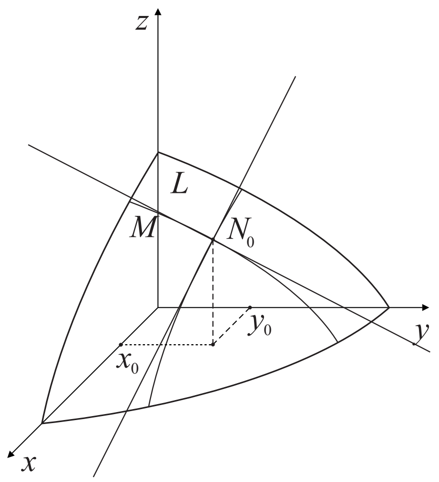
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

gdje su $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ diferencijali nezavisnih varijabli.

2.4.1 Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija

Promotrimo plohu S zadanu jednadžbom $z = f(x, y)$ u trodimenzionalnom prostoru gdje je $f(x, y)$ neprekidna funkcija koja ima parcijalne derivacije na nekom području D. Želimo interpretirati parcijalne derivacije funkcije $f(x, y)$ u točki $M_0(x_0, y_0) \in D$, koja odgovara točki $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na plohi S.

Kad računamo parcijalnu derivaciju $\frac{\partial z}{\partial x}$ u M_0 promatramo $z = f(x,y)$ kao funkciju jedne varijable x, a y tretiramo kao konstantu $y = y_0$, odnosno $z = f(x,y_0) = f_1(x)$.
Funkciju $z = f_1(x)$ definira krivulja L dobivena presjekom plohe S ravninom $y = y_0$. Jasno je $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$ što je ustvari koeficijent smjera tangente na krivulju L u točki N_0.



Slika 2.15: Tangente na presječne krivulje

Analogno je $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ koeficijent smjera tangente na krivulju M dobivenu kao presjek plohe S i ravnine $x = x_0$, u točki N_0.

2.4.2 Derivacija kompozicije funkcija

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definirana na nekom području $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka su x i y funkcije od varijable t takve da je $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \langle t_0, t_1\rangle$.
Pretpostavimo da je za svaku točku $t \in \langle t_0, t_1\rangle$ odgovarajuća točka $(x,y) = (x(t), y(t))$ sadržana u D.
Tada je $z = f(x,y) = f[\varphi(t), \psi(t)]$ funkcija u jednoj varijabli t.

Teorem 2.8. *Ako u točki t postoji derivacija $\dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ i $\dfrac{dy}{dt} = \psi'(t)$ i ako je funkcija $f(x,y)$ diferencijabilna u $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, onda funkcija*

$z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ *ima derivaciju i vrijedi*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Primjer 2.7. $z = x^2 + y^2, \quad x = \sin t, \quad y = t^3$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \dfrac{dx}{dt} = \cos t, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3t^2$
$\dfrac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 2y \cdot 3t^2 = 2 \sin t \cos t + 2t^3 \cdot 3t^2 = \sin(2t) + 6t^5.$

Primijetimo sada sljedeću kompoziciju funkcija.
$z = f(x, y), \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta)$ pa je $z = z(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$.

Neka postoje neprekidne parcijalne derivacije $\dfrac{\partial x}{\partial \xi}, \dfrac{\partial x}{\partial \eta}, \dfrac{\partial y}{\partial \xi}, \dfrac{\partial y}{\partial \eta}$ u točki (ξ, η) i

neka je $f(x, y)$ diferencijabilna u točki $(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Tada $z = z(\xi, \eta)$ ima parcijalne derivacije $\dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \dfrac{\partial z}{\partial \eta}$ i vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

i

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Primjer 2.8. $z = x^2 y - x y^2, \quad x = \xi \eta, \quad y = \dfrac{\xi}{\eta}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy, \quad \dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \eta, \quad \dfrac{\partial x}{\partial \eta} = \xi, \quad \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \dfrac{1}{\eta}, \quad \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = -\dfrac{\xi}{\eta^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \xi} &= (2xy - y^2) \cdot \eta + (x^2 - 2xy) \cdot \frac{1}{\eta} \\
&= \left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \cdot \eta + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \frac{1}{\eta} \\
&= 2\xi^2\eta - \frac{\xi^2}{\eta} + \xi^2\eta - 2\frac{\xi^2}{\eta} = 3\xi^2\eta - 3\frac{\xi^2}{\eta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \eta} &= (2xy - y^2) \cdot \xi + (x^2 - 2xy) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) \\
&= \left(2\xi\eta\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right) \cdot \xi + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right) \cdot \left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) \\
&= 2\xi^3 - \frac{\xi^3}{\eta^2} - \xi^3 + 2\frac{\xi^3}{\eta^2} = \xi^3 + \frac{\xi^3}{\eta^2}
\end{aligned}
$$