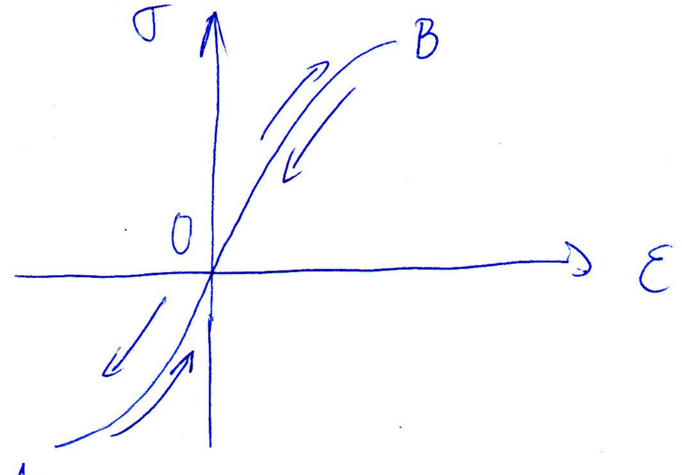
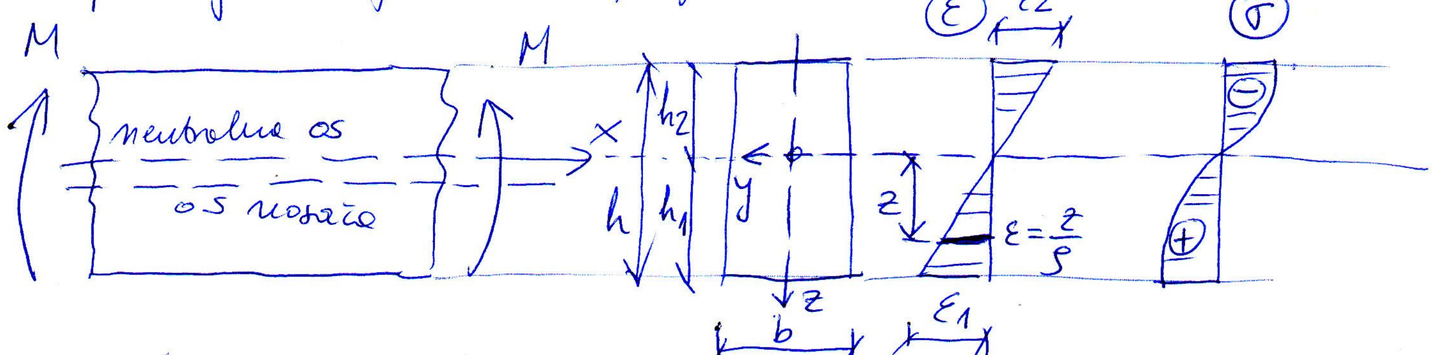
SAVIJANJE RAVNOG ŠTAPA OD NELINEARNOG ELASTIČNOG MATERIJALA

Promatramo čisto savijanje ravnog štapa od nelinearnog elastičnog materijala koji ima dijagram ovisnosti naprezanja od deformacije prikazan na slici 8.



Slika 8. Dijagram ovisnosti naprezanja o deformacijama

Pokusi pokazuju da i u ovom slučaju čistog savijanja ravnog štapa vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka, prema kojoj ravni poprečni presjeci pri čistom savijanju ostaju ravni i okomiti na os nosača. Ako pretpostavimo da između uzdužnih vlakana nema nikakvog uzajamnog djelovanja sila, onda su normalna naprezanja u smjeru okomito na os štapa jednaka nuli. Slijedi da su uzdužna vlakna u stanju jednoosnog nastezanja ili pritiska. Na osnovi hipoteze ravnih pop. presjeka i prikazanog dijagrama nastezanja-pritiska materijala možemo konstruirati dijagram relativnih deformacija i normalnih naprezanja u poprečnom presjeku nosača (slika 9)

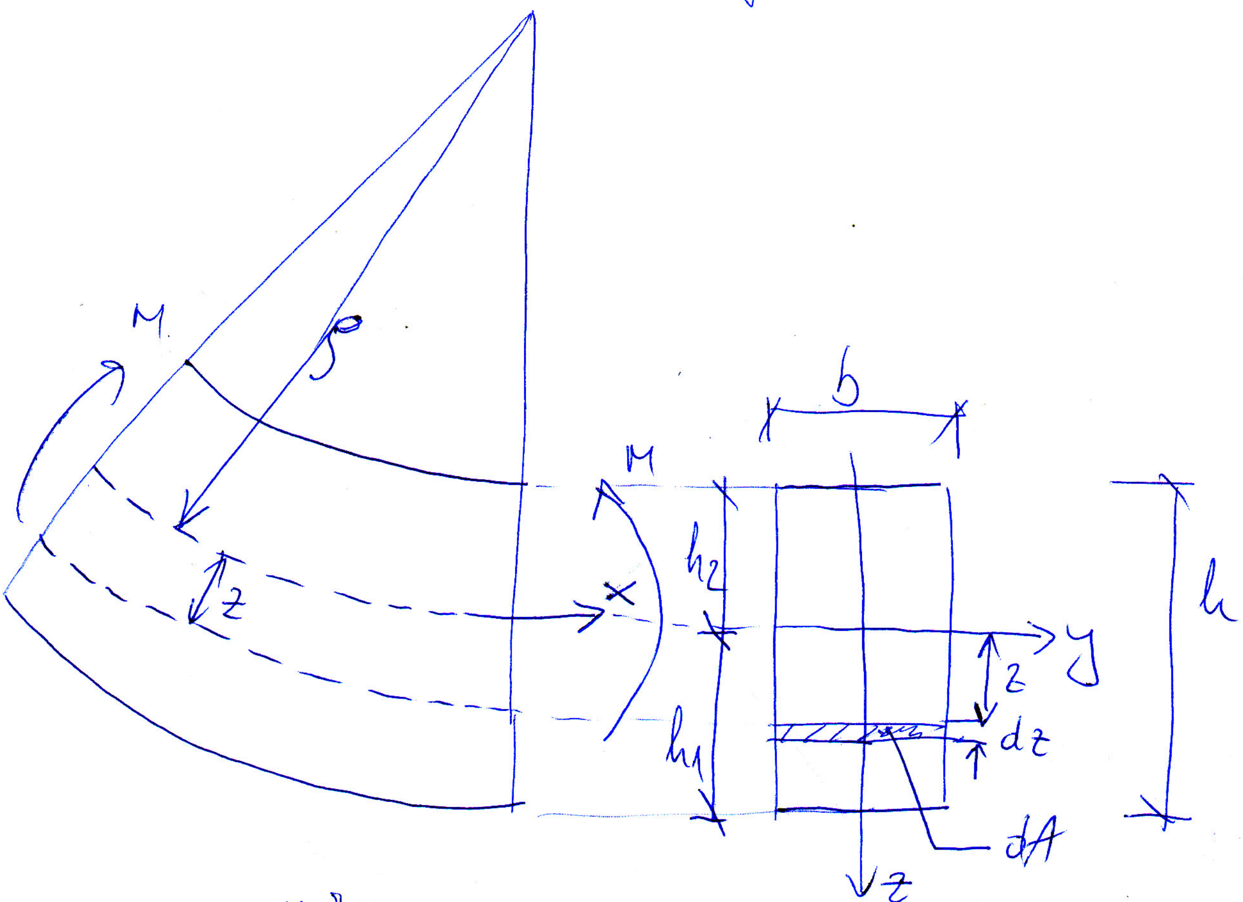


Slika 9. Savijanje ravnog štapa od nelinearnog elastičnog materijala

Ako označimo radijus zakrivljenosti neutralnog sloja sa ρ, onda je relativno produljenje vlakana na udaljenosti z od neutralnog sloja izrazimo poznatom ovisnosti

$$\varepsilon = \frac{z}{\rho} \qquad (19)$$

Za određivanje deformacija uzdužnih vlakana nosača, a zatim i normalnih naprezanja ~~po~~ neophodno je odrediti položaj neutralne osi poprečnog presjeka, radijus zakrivljenosti neutralnog sloja i izraziti analitički ili grafički vezu između deformacija i naprezanja.



Slika 10. Deformacija nosača pri savijanju

Za promatrani dio štapa (sl. 9 i 10.) možemo izraziti slijedeće uvjete ravnoteže:

- suma svih sila u smjeru osi x da je jednaka nuli:

$$\sum F_x = 0 \;; \quad \int_A \sigma \cdot dA = 0 \qquad (20)$$

- sume momenata u odnosu na neutralnu os da je jednako nuli:

$$\sum M_y = 0 \ ; \quad \int_A \sigma \cdot z \cdot dA - M = 0 \qquad (21)$$

Budući da je za pravokutni poprečni presjek $dA = b \cdot dz$ jednadžbe (20) i (21) primaju oblik

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma \, dz - \int_0^{h_2} \sigma \, dz\right) = 0 \qquad (22)$$

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma \cdot z \cdot dz + \int_0^{h_2} \sigma \cdot z \cdot dz\right) = M \qquad (23)$$

Za mnoge materijale ovisnost između naprezanja i deformacija pri natezanju i pritisku može biti s dovoljnom točnošću predstavljena potencijalnim zakonom:

- za natezanje

$$\varepsilon = K_1 \cdot \sigma^n \qquad (24)$$

- za pritisak

$$\varepsilon = K_2 \cdot \sigma^m \qquad (25)$$

gdje su K_1, K_2, n, m - konstante materijala koje karakteriziraju fizička svojstva materijala, a određuju se eksperimentalno ispitivanjem uzoraka od određenog materijala.
Uvrstimo izraz (19) u izraz (24) za normalna naprezanja dobit ćemo:

- za natezanje

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon}{K_1}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{z}{K_1 \cdot \rho}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (26)$$

– za tlak

$$\sigma=\left(\frac{\varepsilon}{K_2}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{z}{K_2\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad (27)$$

Primjenom jednadžbi (26), (27), (22) i (23) možemo odrediti položaj neutralne osi, radijus zakrivljenosti neutralnog sloja i naprezanja vlačna i tlačna).

Uvrstimo izraze (26) i (27) u jednadžbu (22), dobit ćemo

$$b\cdot\left[\int_0^{h_1}\left(\frac{z}{K_1\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot dz-\int_0^{h_2}\left(\frac{z}{K_2\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot dz\right]=\phi$$

Nakon integriranja imat ćemo:

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{h_1}{K_1\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot h_1-\frac{m}{m+1}\left(\frac{h_2}{K_2\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot h_2=\phi \qquad (28)$$

Zatim uvrstimo izraze (26) i (27) u jednadžbu (23) dobit ćemo:

$$b\cdot\left[\int_0^{h_1}\left(\frac{z}{K_1\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot z\cdot dz+\int_0^{h_2}\left(\frac{z}{K_2\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot z\cdot dz=M\right.$$

Nakon integriranja dobivamo:

$$\frac{n}{2n+1}\cdot b\cdot\left(\frac{h_1}{K_1\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot h_1^2+\frac{m}{2m+1}\cdot b\cdot\left(\frac{h_2}{K_2\cdot\rho}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot h_2^2=M \qquad (29)$$

Imajući u vidu da je

$$h_1+h_2=h \qquad (30)$$

iz jednadžbi (28), (29), (30) nađemo ρ, h_1, h_2, a zatim pomoću izraza (26) i (27) odredimo naprezanje σ u vlačnoj i tlačnoj zoni.

Možemo riješiti i obrnute zadaće, odrediti najveći dopušteni moment savijanja po dopuštenim naprezanjima na nastezanje σ_{vdop} ili pritiske σ_{tdop}. Za rješenje tog zadatka prikažimo prvo formulama (26) i (27) naprezanja vlačno i tlačno u rubnim vlaknima nosača, koji su za h_1 i h_2 udaljeni od neutralne osi:

$$\sigma_1 = \left(\frac{h_1}{K_1 \cdot \rho}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{31}$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{h_2}{K_2 \cdot \rho}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{32}$$

Na osnovi izraza (31) i (32), izraze (28) i (29) možemo prikazati u slijedećem obliku:

$$\frac{n}{n+1} \cdot \sigma_1 \cdot h_1 - \frac{m}{m+1} \cdot \sigma_2 \cdot h_2 = \phi \tag{33}$$

$$\frac{n}{2n+1} \cdot b \cdot \sigma_1 \cdot h_1^2 + \frac{m}{2m+1} \cdot b \cdot \sigma_2 \cdot h_2^2 = M \tag{34}$$

K tome, iz izraza (31) i (32) slijedi:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1^{n} \cdot K_1}{\sigma_2^{m} \cdot K_2} \tag{35}$$

Pridružimo li ovim trima postavljenim jednadžbama jednakost $h_1 + h_2 = h$, možemo izračunati po dopuštenim naprezanjima σ_{1dop} ili σ_{2dop} položaj neutralne osi i dopuštenu veličinu momenta savijanja. Za graničnu veličinu naprezanja može biti određen granični moment savijanja, veličina kojoj odgovara dostignuće granične ~~vrijednosti~~ i veličine jednog od naprezanja u vlaknu najviše udaljenom od neutralne osi u vlačnom ili tlačnom području. Postupkom koji je prikazan na pravokutnom poprečnom presjeku, možemo riješiti zadatke i za druge jednostavnije presjeke, npr. koji se sastoje iz ~~pravokutnih~~ pravokutnika kao I i ⊥ presjeci.

Progibe neelastičnog nosača možemo odrediti primjenom izraza koji daje ovisnost između zakrivljenosti i progiba

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u}{dx^2} \tag{36}$$

Izraz (36) je dobiven na osnovu čisto geometrijskih razmatranja temeljenih na pretpostavci ravnih poprečnih presjeka. Da bismo odredili progib primjenom izraza (36), moramo znati zakrivljenost $\frac{1}{\rho}$.
Za linearno elastične materijale zakrivljenost je dana izrazom

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} . \tag{37}$$

Za nelinearni elastični materijal odnos zakrivljenosti nosača i momenta savijanja određuje se metodom postupnog približavanja.