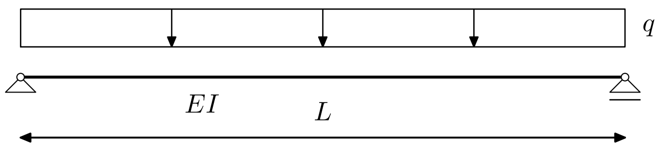
RITZOVA METODA

Primjer 1. *Ritzovom metodom odrediti progib $w_{L/2}$ u sredini proste grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem q*



Ritzovom metodom, umjesto diferencijalne jednadžbe progibne linije savijanja štapa, rješavamo problem minimizacije potencijalne energije u diskretnom obliku. Funkciju progiba aproksimiramo linearnom kombinacijom konačnog broja (k) koordinatnih funkcija ($\varphi_i, i = 1, \ldots, k$)

$$w \approx \overline{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i \quad . \tag{1.1}$$

Zadaću svodimo na rješavanje sustava jednadžbi

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{q} \quad , \tag{1.2}$$

pri čemu je $\mathbf{a}$ vektor nepoznatih koeficijenata linearne kombinacije, $\mathbf{K}$ poznata matrica sustava, a $\mathbf{q}$ poznati vektor opeterćenja,

$$K_{i,j} = \int_0^L EI \varphi_i'' \varphi_j'' dx \quad , \tag{1.3}$$

$$q_i = \int_0^L q \varphi_i dx \quad . \tag{1.4}$$

Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za prostu gredu izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točkama $x = 0$ i $x = L$. Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x(L - x) \quad , \tag{1.5}$$

$$\varphi_2(x) = x(L - x)(L - 2x) \quad . \tag{1.6}$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1'' \varphi_1'' = 4 \quad \Rightarrow \quad K_{1,1} = 4L \quad , \tag{1.7}$$

$$\varphi_1'' \varphi_2'' = 12L - 24x \quad \Rightarrow \quad K_{1,2} = K_{2,1} = 0 \quad , \tag{1.8}$$

$$\varphi_2'' \varphi_2'' = 36L^2 - 144Lx + 144x^2 \quad \Rightarrow \quad K_{2,2} = 12L^3 \quad , \tag{1.9}$$

a za vektor opterećenja

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{qL^3}{6} \quad , &(1.10)\\ q_2 &= 0 \quad . &(1.11) \end{aligned}$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 0 \\ 0 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{1.12}$$

Vidimo da su članovi matrice sustava izvan dijagonale jednaki nuli, što znači da smo odabrali ortogonalne koordinatne funkcije. Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{24EI} \ , \ a_2 = 0 \quad . \tag{1.13}$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\overline{w}(x) = \frac{qL^2}{24EI} x(L-x) \quad . \tag{1.14}$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedninim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\begin{aligned} \overline{w_{L/2}} &= \frac{qL^4}{96EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 25\% \ , &(1.15)\\ \overline{w_{L/3}} &= \frac{qL^4}{108EI} \quad , \quad \Delta_{L/3} = 18,2\% \ , &(1.16)\\ \overline{w_{L/4}} &= \frac{qL^4}{128EI} \quad , \quad \Delta_{L/4} = 15,8\% \ . &(1.17) \end{aligned}$$

Za sljedeću aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x(L-x) \quad , &(1.18)\\ \varphi_2(x) &= x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \quad . &(1.19) \end{aligned}$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\begin{aligned} \varphi_1''\varphi_1'' &= 4 \Rightarrow K_{1,1} = 4L \quad , &(1.20)\\ \varphi_1''\varphi_2'' &= 44L^2 - 216Lx + 216x^2 &(1.21)\\ &\Rightarrow K_{1,2} = K_{2,1} = 8L^3 \quad , &(1.22)\\ \varphi_2''\varphi_2'' &= 484L^4 - 4752L^3x + 16416L^2x^2 - 23328Lx^3 + 11664x^4 \\ &\Rightarrow K_{2,2} = \frac{404}{5}L^5 \quad , &(1.23) \end{aligned}$$

a za vektor opterećenja

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{qL^3}{6} \quad , &(1.24)\\ q_2 &= \frac{qL^5}{30} \quad . &(1.25) \end{aligned}$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & 8L^3 \\ 8L^3 & \frac{404}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} \\ \frac{L^5}{30} \end{bmatrix} \quad . \tag{1.26}$$

Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{11qL^2}{216EI} \; , \; a_2 = -\frac{q}{216EI} \quad . \tag{1.27}$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= \frac{11qL^2}{216EI}x(L-x) - \frac{q}{216EI}x(L-x)(L-3x)(2L-3x) \\ &= \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right) \quad . \end{aligned} \tag{1.28}$$

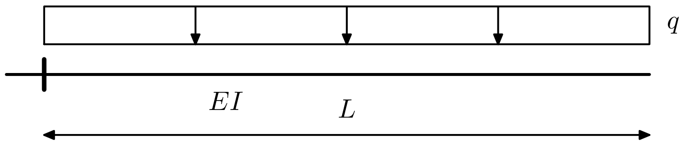
Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama dobivamo točnu vrijednost progiba

$$\overline{w_{L/2}} = \frac{5qL^4}{384EI} \; , \tag{1.29}$$

$$\overline{w_{L/3}} = \frac{11qL^4}{972EI} \; , \tag{1.30}$$

$$\overline{w_{L/4}} = \frac{57qL^4}{6144EI} \; . \tag{1.31}$$

Primjer 2. *Ritzovom metodom odrediti progib w_L na slobodnom kraju konzolne grede raspona L konstantnog poprečnog presjeka I i modula elastičnosti E opterećene jednolikim kontinuiranim opterećenjem q*



Koordinatne funkcije potrebno je tako izabrati da su neprekidne (uvjet neprekinutosti), zadovoljavaju rubne uvjete, linearno su nezavisne i da možemo aproksimirati gotovo svaki oblik progibne linije (uvjet potpunosti). Za konzolnu gredu izabrat ćemo koordinatne funkcije koje imaju nul-točke u točki $x = 0$ i nul-točku prve derivacije u točki $x = 0$ (progib i kut zaokreta na upetom lezaju jednaki su nuli). Za prvu aproksimaciju uzmemo koordinatne funkcije

$$\varphi_1(x) = x^2 \quad , \tag{2.1}$$

$$\varphi_2(x) = x^2(L-2x) \quad . \tag{2.2}$$

Potrebni izrazi za matricu sustava glase

$$\varphi_1''\varphi_1'' = 4 \quad \Rightarrow \quad K_{1,1} = 4L \quad , \tag{2.3}$$

$$\varphi_1''\varphi_2'' = 4L - 24x \quad \Rightarrow \quad K_{1,2} = K_{2,1} = -8L^2 \quad , \tag{2.4}$$

$$\varphi_2''\varphi_2'' = 4L^2 - 48Lx + 144x^2 \quad \Rightarrow \quad K_{2,2} = 28L^3 \quad , \tag{2.5}$$

a za vektor opterećenja

$$q_1 = \frac{qL^3}{3} \quad , \tag{2.6}$$

$$q_2 = -\frac{qL^4}{6} \quad . \tag{2.7}$$

Sustav jednadžbi glasi

$$EI \begin{bmatrix} 4L & -8L^2 \\ -8L^2 & 28L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} \\ -\frac{L^4}{6} \end{bmatrix} \quad . \tag{2.8}$$

Vidimo da su članovi matrice sustava izvan dijagonale jednaki nuli, što znači da smo odabrali ortogonalne koordinatne funkcije. Rješenje sustava daje vrijednosti koeficijenata linearne kombinacije koordinatnih funkcija

$$a_1 = \frac{qL^2}{6EI} \ , \ a_2 = \frac{qL}{24EI} \quad . \tag{2.9}$$

Dobili smo izraz za aproksimaciju progibne funkcije

$$\begin{aligned} \overline{w}(x) &= \frac{qL^2}{6EI}x^2 + \frac{qL}{24EI}x^2(L-2x) \\ &= \frac{q}{24EI}\left(5L^2x^2 - 2lx^3\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ako izračunamo aproksimaciju progiba u pojedinim točkama i pripadnu pogrešku dobivamo

$$\overline{w_L} = \frac{qL^4}{8EI} \quad , \quad \Delta_L = 0\% \; , \tag{2.11}$$

$$\overline{w_{L/2}} = \frac{qL^4}{24EI} \quad , \quad \Delta_{L/2} = 5,9\% \; . \tag{2.12}$$