# MATEMATIKA 2, 27. 8. 2025.

Ime i prezime: ______________________________________________

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| 1. dio | 2. dio | $\sum$ |
|---|---|---|
| | | |

1. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe
   (a) (7 bodova) $xy' + (x-1)y = e^{-x}$ uz uvjet $y(1) = 0$,
   (b) (8 bodova) $y'' + 3y' - 10y = e^{2x}$.

2. (15 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-y}.$$

3. (a) (10 bodova) Skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2) + \frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{xy}}$$

   i odredite joj površinu.
   (b) (20 bodova) Neka je $\Omega$ podskup prvog oktanta unutar područja $z^2 \geq x^2 + y^2$ omeđen plohom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Skicirajte područje $\Omega$ i izračunajte integral funkcije $f(x,y,z) = xz$ po području $\Omega$.

---

4. (15 bodova) Pokažite da je vektorsko polje

$$\vec{a}(x,y,z) = \left(ye^z + \cos y, x(e^z - \sin y), xye^z + \frac{1}{z}\right)$$

   potencijalno i odredite njegov potencijal $\varphi$.

5. (a) (10 bodova) Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$$

   pri čemu je $\vec{\Gamma}$ krivulja dobivena kao presjek ploha $y^2 + z^2 = 1$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ u prvom oktantu i $\vec{a}$ polje zadano s $\vec{a}(x,y,z) = xy\vec{j} + z^2\vec{k}$.
   (b) (15 bodova) Izračunajte tok $\Phi$ vektorskog polja

$$\vec{a}(x,y,z) = xy^2e^z\vec{i} + x^2ye^z\vec{j} - e^z\vec{k}$$

   kroz zatvorenu plohu omeđenu paraboloidima $x^2 + y^2 = 1 + z$ i $x^2 + y^2 = 1 - z$. Skicirajte plohu.

**Prvi dio** čine prva tri zadatka. **Drugi dio** čine 4. i 5. zadatak.

**Zadatak 1** Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe

(a) (7 bodova) $xy' + (x-1)y = e^{-x}$ uz uvjet $y(1) = 0$;

(b) (8 bodova) $y'' + 3y' - 10y = e^{2x}$.

*Rješenje.* (a) Podijelimo li danu jednadžbu sa $x$ (uz $x \neq 0$) dobivamo

$$y' + \frac{x-1}{x}y = \frac{1}{xe^x}$$

što je linearna jednadžba prvog reda $y' + f(x)y = g(x)$ uz

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{xe^x}.$$

Rješenje takvih jednadžbi dano je formulom

$$y(x) = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left[\int e^{\int f(x)\,dx} g(x)\,dx + C\right], \quad C \in \mathbb{R}.$$

Najprije računamo

$$\int f(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)\,dx = x - \ln x.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\int e^{f(x)} g(x)\,dx &= \int e^{x-\ln x}\frac{1}{xe^x}\,dx = \int e^x \cdot \frac{1}{e^{\ln x}} \cdot \frac{1}{xe^x}\,dx \\ &= \int e^x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xe^x}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{-1}{x}\end{aligned}$$

pa slijedi da je

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{-x+\ln x}\left[\frac{-1}{x} + C\right] \\ &= e^{-x}x\left(\frac{-1}{x} + C\right) \\ &= (Cx-1)e^{-x}.\end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem $y(1) = 0$ dobivamo $0 = (C-1)\cdot 1$, odnosno $C = 1$, pa je konačno rješenje

$$\boxed{y(x) = (x-1)e^{-x}.}$$

(b) Najprije rješavamo homogenu jednadžbu

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Njena karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ čije su nultočke $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -5$. Slijedi rješenje homogene jednadžbe

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Funkcija smetnje nehomogene jednadžbe je $f(x) = e^{ax} = e^{2x}$. Budući da je $a = \lambda_1 = 2$ partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = Cxe^{2x}$. Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} y_P' &= Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} = (C + 2Cx)e^{2x} \\ y_P'' &= 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} = (4C + 4Cx)e^{2x} \end{aligned}$$

čijim uvrštavanjem u početnu jednadžbu slijedi

$$\begin{aligned} (4C + 4Cx)e^{2x} + 3(C + 2Cx)e^{2x} - 10Cxe^{2x} &= e^{2x} / : e^{2x} \\ 4C + 4Cx + 3C + 6Cx - 10Cx &= 1 \\ 7C &= 1. \end{aligned}$$

Dakle je $C = \frac{1}{7}$ pa je partikularno rješenje

$$y_P = \frac{1}{7} x e^{2x}.$$

Konačno rješenje je zbroj homogenog i partikularnog, $y = y_H + y_p$, pa je

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{7} x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

♣

**Zadatak 2** (15 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-y}.$$

*Rješenje.* Parcijalne derivacije funkcije su

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-y}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(2y - x^2 - y^2\right) e^{-y}.$$

Slijedi da su stacionarne točke rješenja sustava

$$\begin{cases} 2xe^{-y} = 0 \\ \left(2y - x^2 - y^2\right) e^{-y} = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $x = 0$ a iz druge slijedi $2y - x^2 - y^2 = 0$ pa uvrštavanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $2y - y^2 = 0$ čije su nultočke $y_1 = 0$ i $y_2 = 2$. Slijedi da su stacionarne točke $T_1 = (0,0)$ i $T_2 = (0,2)$.

Druge parcijalne derivacije funkcije $f$ su

$$f_{xx} = 2e^{-y}, \quad f_{xy} = -2xe^{-y}, \quad f_{yy} = \left(2 - 4y + x^2 + y^2\right) e^{-y}$$

pa je Hessian u točki $(x,y)$ jednak

$$\begin{aligned} H(x,y) &= f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ &= \left(4 - 8y + 2x^2 + 2y^2\right) e^{-2y} - 4x^2 e^{-2y} \\ &= \left(4 - 8y - 2x^2 + 2y^2\right) e^{-2y}. \end{aligned}$$

Za točku $T_1 = (0,0)$ imamo

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \quad \text{i} \quad H(0,0) = 2 > 0$$

iz čega zaključujemo da je $(0,0)$ lokalni minimum. Za točku $T_2 = (0,2)$ pak imamo

$$f_{xx}(0,2) = 2e^{-2} > 0 \quad \text{i} \quad H(0,2) = -4e^{-4} < 0$$

što znači da je $(0,2)$ sedlasta točka.

$$\boxed{\text{Funkcija } f \text{ ima lokalni minimum u točki } (0,0) \text{ i sedlo u točki } (0,2).}$$

♣

**Zadatak 3**

(a) (10 bodova) Skicirajte prirodnu domenu funkcije

$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) + \frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{xy}}$$

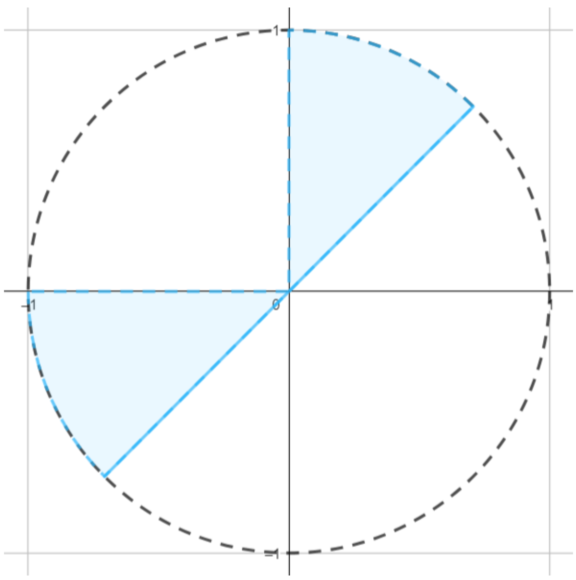
i odredite joj površinu.

(b) (20 bodova) Neka je $\Omega$ podskup prvog oktanta unutar područja $z^2 \geq x^2+y^2$ omeđen plohom $x^2+y^2+z^2=1$. Skicirajte područje $\Omega$ i izračunajte integral funkcije $f(x,y,z)=xz$ po području $\Omega$.

*Rješenje.* (a) Uvjeti na varijable su

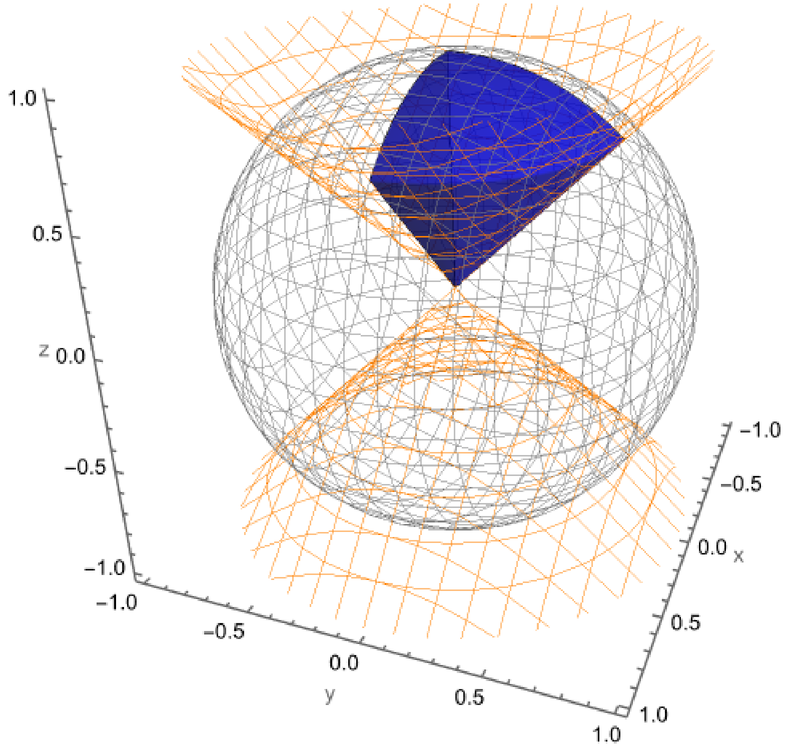
$$1-x^2-y^2>0, \quad y-x \geq 0 \quad i \quad xy>0.$$

Prva jednadžba je $x^2+y^2<1$ što je jednadžba kruga sa središtem u ishodištu polumjera 1. Druga jednadžba je $y>x$ što je poluravnina iznad simetrale prvog i trećeg kvadranta. Konačno, $xy>0$ je unija prvog i trećeg kvadranta, jer su ili oba $x,y$ pozitivni ili oba negativni. Presjekom rješenja tih triju jednadžbi dobivamo




Budući da je riječ o dvije osmine kruga polumjera $r=1$, površina je $P=\frac{\pi}{4}$.

(b) Jednadžba $z^2 = x^2 + y^2$ je dvostrani stožac čija je os rotacije $z$-os pa nejednadžba $z^2 \geq x^2 + y^2$ predstavlja dva dijela prostora određena stošcem koja zajedno sadrže $z$-os. Presiječemo li to s prvim oktantom i kuglom $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (jer je $\Omega$ omeđeno sferom) dobivamo skicu područja $\Omega$:




Integral ima smisla rješavati i u cilindričnom i u sfernom koordinatnom sustavu (sferni je nešto jednostavniji).

**Prvi način (sferni sustav)**: Polumjer ide od 0 do polumjera sfere, odnosno 1. Jer smo u prvom oktantu imamo $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ pa preostaje odrediti granice za $\theta$. Stožac $z^2 = x^2 + y^2$ rotacijska je ploha dobivena rotacijom pravca $y = x$ oko $z$-osi, a taj pravac sa $z$-osi zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$. Ukupno, područje $\Omega$ parametrizirano je s

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Slijedi da je integral jednak

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_\Omega xz \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r \sin\theta \cos\varphi)(r \cos\theta)(r^2 \sin\theta) \, d\theta \, dr \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta.
\end{aligned}$$

Za treći faktor koristimo supstituciju $\sin\theta = t$ pa imamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^4\, dr \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\, dt \\ &= [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{60}. \end{aligned}$$

**Drugi način (cilindrični sustav)**: Projiciranjem područja $\Omega$ na $xy$-ravninu dobivamo četvrtinu kruga. Kut $\varphi$ kreće se od 0 do $\frac{\pi}{2}$ dok se polumjer $r$ kreće od 0 do maksimalne vrijednosti koju trebamo izračunati. Ta je vrijednost jednaka polumjeru kružnice po kojoj se sfera i stožac sijeku. Podsjetimo se formula veza između pravokutnih i cilindričkih koordinata:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Koristeći treću navedenu formulu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $z^2 = x^2 + y^2$ pretvaramo u $r^2 + z^2 = 1$ i $z^2 = r^2$. Izjednačavanjem lako slijedi $2r^2 = 1$, odnosno $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle, imamo $0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Iz $r^2 + z^2 = 1$ slijedi da je jednadžba gornje polusfere jednaka $z = \sqrt{1 - r^2}$ dok iz $r^2 = z^2$ slijedi da je jednadžba gornje polovice stošca jednaka $z = r$ pa dobivamo $r \le z \le \sqrt{1 - r^2}$. Ukupno, područje $\Omega$ parametrizirano je sa

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r \le z \le \sqrt{1 - r^2}.$$

Preostaje postaviti integral i računati

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega xz\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} (r\cos\varphi) \cdot z \cdot r\, dz\, dr\, \varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2 \left[\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\, dz\right] dr \\ &= [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_r^{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2 \left(1 - 2r^2\right) dr = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}r^3 - \frac{2}{5}r^5\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}\right] = \frac{\sqrt{2}}{60}. \end{aligned}$$

♣

**Zadatak 4** (15 bodova) Pokažite da je vektorsko polje

$$\vec{a}(x,y,z) = \left(ye^z + \cos y, x(e^z - \sin y), xye^z + \frac{1}{z}\right)$$

potencijalno i odredite njegov potencijal $\varphi$.

*Rješenje.* Za provjeru potencijalnosti polja računamo njegovu rotaciju

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z + \cos y & x(e^z - \sin y) & xye^z + \frac{1}{z} \end{vmatrix} \\
&= (xe^z - xe^z, -ye^z + ye^z, e^z - \sin y - e^z + \sin y) \\
&= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Kako je $\text{rot}\, \vec{a} = 0$ slijedi da je vektorsko polje $\vec{a}$ potencijalno.

Sada tražimo funkciju $\varphi$ takvu da vrijedi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ye^z + \cos y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x(e^z - \sin y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xye^z + \frac{1}{z}. \tag{3}$$

Integriramo (1) po $x$:

$$\varphi(x,y,z) = \int (ye^z + \cos y)\, dx = xye^z + x\cos y + C(y,z).$$

Dobivenu jednadžbu deriviramo po $y$ i uspoređujemo s (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xe^z - x\sin y + \frac{\partial C}{\partial y} \implies \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \implies C = C(z).$$

Konačno, deriviramo po $z$ i uspoređujemo s (3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xye^z + \frac{dC}{dz} \implies \frac{dC}{dz} = \frac{1}{z} \implies C(z) = \ln z + C.$$

Slijedi da je potencijal $\varphi$ od $\vec{a}$ jednak

$$\varphi(x,y,z) = xye^z + x\cos y + \ln z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

♣

## Zadatak 5

(a) (10 bodova) Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$$

pri čemu je $\vec{\Gamma}$ krivulja dobivena kao presjek ploha $y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=5$ u prvom oktantu i $\vec{a}$ polje zadano s $\vec{a}(x,y,z)=xy\vec{j}+z^2\vec{k}$.

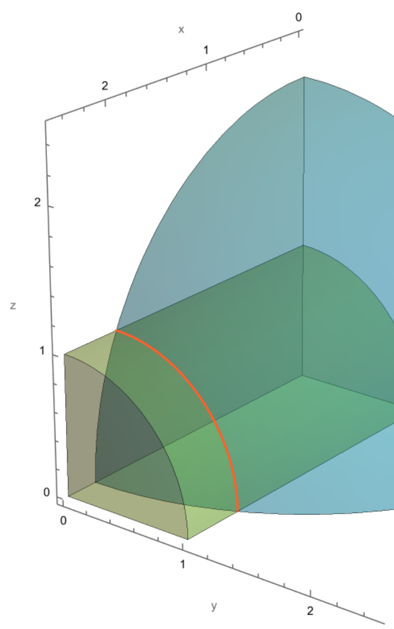
(b) (15 bodova) Izračunajte tok $\Phi$ vektorskog polja

$$\vec{a}(x,y,z)=xy^2e^z\vec{i}+x^2ye^z\vec{j}-e^z\vec{k}$$

kroz zatvorenu plohu omeđenu paraboloidima $x^2+y^2=1+z$ i $x^2+y^2=1-z$. Skicirajte plohu.

*Rješenje.* (a) Ploha $y^2+z^2=1$ je cilindar polumjera 1 čija je os rotacije $x$-os, dok je $x^2+y^2+z^2=5$ sfera oko ishodišta polumjera $\sqrt{5}$. Budući da je polumjer cilindra manji od polumjera sfere imamo proboj cilindra kroz sferu i u presjeku dobivamo dvije kružnice polumjera 1 (tj. jednakog polumjeru cilindra) sa središtima u točkama oblika $(\pm x_0,0,0)$. Nama treba ono s pozitivnom $x$ koordinatom (jer smo u prvom oktantu). Oduzimanjem jednadžbi ploha dobivamo $x^2=4$ pa je središte u $(2,0,0)$. Konačno, jer gledamo samo u prvom oktantu imamo samo četvrtinu kružnice. Krivulja je parametrizirana sa

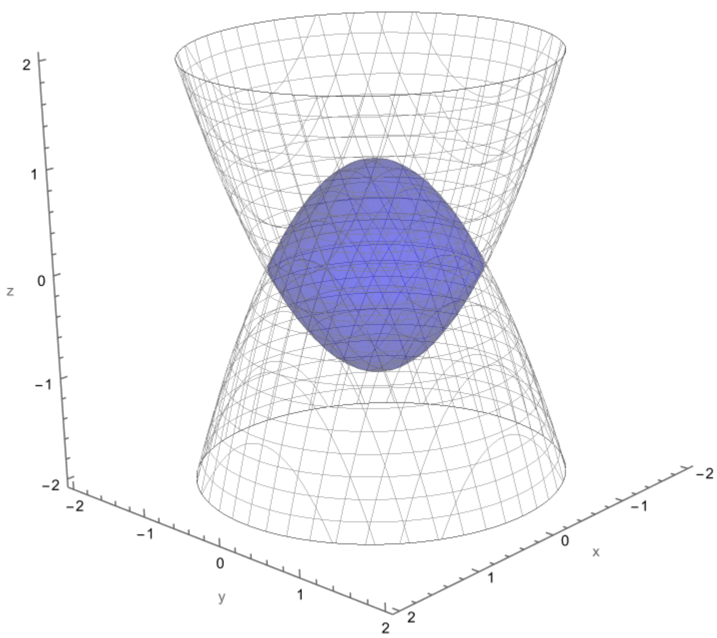
$$r(t)=(2,\cos t,\sin t),\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$



Derivacija parametrizacije je $r'(t) = (0, -\sin t, \cos t)$ pa je integral jednak

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{a}(r(t)) \cdot r'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{a}(2, \cos t, \sin t) \cdot (0, -\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 2\cos t, \sin^2 t) \cdot (0, -\sin t, \cos t)\, dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt + \int_0^1 s^2\, ds \\
&= \left[\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{-2}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Najprije skiciramo plohu




Volumen omeđen zadanom plohom najjednostavnije je opisati u cilindričnim koordinatama. Jednadžba $x^2 + y^2 = 1 - z$ prelazi u $r^2 = 1 - z$, odnosno $z = 1 - r^2$. Slično, jednadžba drugog paraboloida postaje $z = r^2 - 1$. Izjednačavanjem dobivamo polumjer kružice po kojoj se paraboloidi sijeku: $r = 1$. Slijedi je zatvoreni volumen opisan sa

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r^2 - 1 \leq z \leq -r^2 + 1.$$

Računamo divergenciju polja $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{a} &= \frac{\partial\left(xy^2e^z\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^2ye^z\right)}{\partial y} + \frac{\partial(-e^z)}{\partial z} \\
&= y^2e^z + x^2e^z - e^z \\
&= \left(r^2-1\right)e^z.
\end{aligned}$$

Sada računamo tok $\Phi$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{a}\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2-1}^{1-r^2} \left(r^2-1\right)e^z \cdot r\ dz\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(r^2-1\right)\left[\int_{r^2-1}^{1-r^2} e^z\ dz\right] dr \\
&= 2\pi\int_0^1 r\left(r^2-1\right)\left[e^{1-r^2}-e^{r^2-1}\right]\ dr = \begin{bmatrix} r^2-1=t & r=0\to t=-1 \\ 2r\,dr=dt & r=1\to t=0\end{bmatrix} \\
&= \pi\int_{-1}^0 t\left[e^{-t}-e^t\right]\ dt = \begin{bmatrix} u=t & dv=\left(e^{-t}-e^t\right)dt \\ du=dt & v=-e^{-t}-e^t\end{bmatrix} \\
&= \pi\left[-te^{-t}-te^t\right]_{-1}^0 + \pi\int_{-1}^0 e^{-t}+e^t\ dt \\
&= -\pi e - \pi e^{-1} + \pi\left[-e^{-t}+e^t\right]_{-1}^0 \\
&= -\pi e - \pi e^{-1} + \pi\left[-1+1+e-e^{-1}\right] = \frac{-2\pi}{e}.
\end{aligned}$$

♣