Poglavlje 4

Skalarna i vektorska polja

4.1 Osnovni pojmovi

Neka je Ω područje u $\mathbb{R}^3$. Funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zovemo *skalarnim poljem*, npr. $f(x,y,z) = xy + z$.

Neka je Ω područje u $\mathbb{R}^3$. Funkciju $f\colon \Omega \to X_0(E)$ zovemo *vektorskim poljem*.

Dakle, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, gdje su $a_x, a_y, a_z\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Npr. $\vec{a}(x,y,z) = xyz\vec{i} + (x-y)\vec{j} + \vec{k}$. Ovdje je $a_x(x,y,z) = xyz$, $a_y(x,y,z) = x - y$, $a_z(x,y,z) = 1$.

Gradijent skalarnog polja f je vektorsko polje $\operatorname{grad} f\colon \Omega \to X_0(E)$ definirano formulom

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Primjer. Funkciji $f(x,y,z) = xy + z$ odredimo $\operatorname{grad} f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x, \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \Rightarrow \operatorname{grad} f = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$$

Divergencija vektorskog polja $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ je skalarno polje $\operatorname{div} \vec{a}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Primjer. Funkciji $\vec{a} = x^2y\vec{i} + z\vec{j} + z^3\vec{k}$ odredimo $\operatorname{div} \vec{a}$.

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 2yx, \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3z^2 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 2xy + 3z^2$$

Zadatak 4.1. Zadano je skalarno polje $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ i točka $T(2, 1, 1)$.

- Izračunajte $(\operatorname{grad} u)|_T$
- Nađite skup točaka u prostoru u kojima je $\operatorname{grad} u$ okomit na os z.

Rješenje:

- $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. Računamo parcijalne derivacije:
  $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$, pa je

  $$\operatorname{grad} u = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}, \text{ te je}$$

  $$\begin{aligned}(\operatorname{grad} u)|_{T(2,1,1)} &= (3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1)\vec{i} + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1)\vec{j} + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1)\vec{k} \\ &= 9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\end{aligned}$$

- $\operatorname{grad} u \perp \vec{k} \Rightarrow \operatorname{grad} u \cdot \vec{k} = 0$. Uvrštavanjem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ dobivamo redom

  $$\begin{aligned}(3x^2 - 3yz) \cdot 0 + (3y^2 - 3xz) \cdot 0 + (3z^2 - 3xy) \cdot 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3z^2 - 3xy = 0 \\ \Leftrightarrow z^2 = xy\end{aligned}$$

  pa je rješenje skup $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy\}$.

$\square$

Zadatak 4.2. Izračunajte div $\vec{a}$ u točki $A(1, 1, 1)$, ako je $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + e^x y\vec{j} - \vec{k}$.

Rješenje: div $\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 4xy + e^x + 0 \Rightarrow$ div $\vec{a}|_{A(1,1,1)} = 4 + e$. $\square$

Zadatak 4.3. Nađite div $(\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2))$.

Rješenje: $\text{grad}\,(x^2+y^2+z^2) = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$,
$\text{div}\ (2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}) = 2+2+2 = 6.$ $\square$

Derivacija skalarnog polja f u smjeru (jediničnog) vektora $\vec{u}$ u točki P_0:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\right)\Big|_{P_0} = (\text{grad}\, f\cdot\vec{u})|_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z\right)\Big|_{P_0}.$$

Zadatak 4.4. Zadano je skalarno polje $\varphi(x,y,z) = 3x^2-4yz$. vektor $\vec{s} = 2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ i točka $T(3,-2,1)$. Nađite usmjerenu derivaciju skalarnog polja φ u smjeru $\vec{s}$ u točki T.

Rješenje: $\vec{s}$ nije jedinični vektor, pa ga prvo normiramo:

$$\vec{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}),$$

a dalje računamo

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}\right)\Big|_T = (\text{grad}\,\varphi\cdot\vec{s_0})\Big|_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}(6x\vec{i}-4z\vec{j}-4y\vec{k})(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\right)\Big|_T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(12x+12z-4y)\Big|_{T(3,-2,1)} = \frac{1}{\sqrt{14}}(12\cdot 3+12\cdot 1-4\cdot(-2)) = \frac{56}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{56\sqrt{14}}{14} = 4\sqrt{14}.$$

$\square$

Rotacija vektorskog polja $\vec{a}$ je vektorsko polje $\text{rot}\,\vec{a}\colon \Omega\to X_0(E)$ definirano formulom

$$\text{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Primjer. $\vec{a} = xy\vec{i}+z\sin x\vec{k}$, tj. $a_x = xy, a_y = 0, a_z = z\sin(x)$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 0 & z\sin(x) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z\sin x)}{\partial y}-\frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(xy)}{\partial z}-\frac{\partial(z\sin x)}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial xy}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{a} = 0\vec{i}-z\cos(x)\vec{j}-x\vec{k} = -z\cos(x)\vec{j}-x\vec{k}.$$

Zadatak 4.5. Odredite kut između rotacije vektorskog polja $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ u točkama $A(-1, 2, 3)$ i $B(19, -4, 9)$.

Rješenje:

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} = (0 - 2z)\vec{i} + (0 - 2x)\vec{j} + (0 - 2y)\vec{k} =$$

$$= -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}$$

$\operatorname{rot} \vec{a}|_{A(-1,2,3)} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = \vec{a_1}$
$\operatorname{rot} \vec{a}|_{B(19,-4,9)} = -18\vec{i} + 38\vec{j} + 8\vec{k} = \vec{b_1}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a_1} \cdot \vec{b_1}}{|\vec{a_1}| \cdot |\vec{b_1}|} = \frac{108 - 76 - 32}{\text{nešto} \neq 0} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

Vektorsko polje $\vec{a}$ je *potencijalno* ako postoji skalarno polje φ takvo da je $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$. φ je *potencijal* od $\vec{a}$, a budući da mora mora vrijediti $\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = a_x$, $\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = a_y$, $\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = a_z$, može se računati kao

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} a_x(t, y, z)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x_0, y_0, t)dt + C,$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) bilo koja točka u domeni funkcije.

Karakterizacija potencijalnog polja: vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Vektorsko polje $\vec{a}$ je *solenoidalno* ako postoji vektorsko polje $\vec{b}$ takvo da je $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.

Karakterizacija solenoidalnog polja: vektorsko polje $\vec{a}$ je solenoidalno $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Zadatak 4.6. Dano je vektorsko polje $\vec{A} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$. Pokažite da je polje potencijalno i nađite njegov potencijal $\varphi(x, y, z)$.

Rješenje:

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = (1 - 1)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{A}$ je potencijalno polje.

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} a_x(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x_0,t,z)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x_0,y_0,t)dt\\ &= \int_{x_0}^{x}(y+z)dt + \int_{y_0}^{y}(x_0+z)dt + \int_{z_0}^{z}(x_0+y_0)dt\\ &= (y+z)(x-x_0) + (x_0+z)(y-y_0) + (x_0+y_0)(z-z_0)\end{aligned}$$

$$= xy + xz - x_0y - x_0z + x_0y - x_0y_0 + yz - y_0z + x_0z - x_0z_0 + y_0z - y_0z_0 =$$

$$= xy + xz + yz - x_0y_0 - x_0z_0 - y_0z_0$$

$$= xy + xz + yz + C$$

Provjera:

$$\vec{A} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

$\square$

Zadatak 4.7. Odredite konstante a, b, c tako da polje

$$\vec{A} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$$

bude potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje:

$$0 = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} =$$

$$= (c+1)\vec{i} + (a-4)\vec{j} + (b-2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow c = -1, a = 4, b = 2$$

Dakle, $\vec{A} = x + 2y + 4z\vec{i} + 2x - 3y - z\vec{j} + 4x - y + 2z\vec{k}$, a potencijal mu možemo izračunati po formuli, uzimajući pritom $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$:

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^x (t+2y+4z)dt + \int_0^y (-3t-z)dt + \int_0^z 2tdt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x(2y+4z) - \frac{3y^2}{2} - zy + z^2 + C$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

$\square$

Zadatak 4.8. Ispitajte je li polje $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ solenoidalno.

Rješenje: $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$, pa zaključujemo da je polje solenoidalno. $\square$

Zadatak 4.9. Dano je vektorsko polje $\vec{a} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Pokažite da je polje potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje: Treba provjeriti je li $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$, tj. $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$.
Računamo $a_x = 2xy \Rightarrow \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x$, $a_y = x^2 \Rightarrow \frac{\partial a_y}{\partial x} = 2x$, pa je $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, te je $\vec{a}$ potencijalno polje.
Tražimo potencijal, tj. funkciju $u(x, y)$ takvu da je $\operatorname{grad} u = \vec{a}$. Iz $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy \Big/ \displaystyle\int dx$ dobivamo $u(x, y) = x^2y + \varphi(y)$, gdje je φ bilo koja funkcija koja ovisi samo o y.Deriviranjem parcijalno po y dobivamo $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow u(x, y) = x^2y + C$. $\square$

Zadatak 4.10. Odredite funkciju $f(x)$ tako da polje

$$\vec{A}(x, y, z) = f(x)\vec{i} + \frac{2xy}{1 + x^2}f(x)\vec{j} - \frac{3z}{1 + x^2}\vec{k}$$

bude solenoidalno uz uvjet $f(1) = \frac{3}{2}$.

Rješenje: $\operatorname{div}\vec{A} = 0 \Rightarrow f'(x) + \frac{2x}{1+x^2}f(x) - \frac{3}{1+x^2} = 0$, pa treba riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{3}{1 + x^2}.$$

Ona je oblika $y' + \widetilde{f}(x)y = g(x)$, tj. to je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, čije rješenje možemo dobiti pomoću formule

$$y = e^{-\int \widetilde{f}(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int \widetilde{f}(x)dx} \cdot g(x)\,dx + C\right].$$

Izračunajmo prvo

$$\int \widetilde{f}(x)dx = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx = \ln(1 + x^2).$$

Sad lako dobivamo da je

$$y = e^{-\ln(1+x^2)} \cdot \left[\int e^{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{3}{1+x^2}\, dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \left[\int 3\, dx + C \right] = \frac{3x+C}{1+x^2}.$$

Konstantu C određujemo iz dodatnog uvjeta $\frac{3}{2} = f(1) = \frac{3+c}{2} \Rightarrow 3 = 3+C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

□

Zadatak 4.11. Pokažite da je polje $\vec{a} = \vec{i} + (1 + z\cos zy)\vec{j} + (y\cos zy)\vec{k}$ potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje: $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 1 + z\cos zy & y\cos zy \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(y\cos zy)}{\partial y} - \frac{\partial(1+z\cos zy)}{\partial z} \right)$

$$= \vec{i}(\cos zy - zy\sin zy - \cos zy + zy\sin zy) = \vec{0}$$

pa zaključujemo da je polje potencijalno.
Tražimo potencijal $u(x,y,z)$, tj. funkciju u takvu da je $\operatorname{grad} u = \vec{a}$, odnosno $\frac{\partial u}{\partial x} = a_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = a_y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = a_z$. Iz $\frac{\partial u}{\partial x} = a_x$ integriranjem po dx dobivamo da je

$$u(x,y,z) = x + \varphi(y,z) \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 1 + z\cos zy \quad \Big/ \int dy$$
$$\Rightarrow \varphi(y,z) = y + \sin zy + \varphi_1(z)$$

gdje je $\varphi_1(z)$ bilo koja funkcija koja ovisi samo o z (a ne o x ni o y). Dakle,

$$u(x,y,z) = x + y + \sin zy + \varphi_1(z).$$

Preostaje nam iskoristiti uvjet $\frac{\partial u}{\partial z} = a_z$, stoga deriviramo zadnji dobiveni izraz za u parcijalno po z i dobivamo $\frac{\partial u}{\partial z} = y\cos zy + \varphi_1'(z) = y\cos zy \Rightarrow \varphi_1'(z) = 0 \Rightarrow \varphi_1(z) = C$. Traženi potencijal je dakle

$$u(x,y,z) = x + y + \sin zy + C.$$

□

Zadatak 4.12. Pokažite da je ploha $F(x, y, z) = 0$ ravnina ako i samo ako je polje $\operatorname{grad} F$ konstantno.

Zadatak 4.13. Pokažite da je polje $\vec{v} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$, $a, b, c > 0$ potencijalno. Ako je F potencijal tog polja, pokažite da je skup $F(x, y, z) = 0$ elipsoid ili jedna točka.