

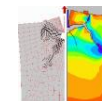
Stvarna čvrstoća materijala je **nekoliko desetaka puta manja** od **teorijske čvrstoće** koja odgovara molekularnim silama.

Razlog tome su **defekti** u svakom materijalu i na svim razinama:

- **posljedice lošeg projektiranja**
- **na mjestima koncentracije naprezanja**
- **oštećenja zbog zamora materijala**
- **oštećenja od korozije i dr.**

Djelovanje tih defekta je ekvivalentno djelovanju zareza odnosno pukotina.

Ti **defekti, odnosno pukotine, uzrokuju koncentraciju naprezanja u vrhovima što dovodi do širenja pukotine**, a konačno i do loma elementa konstrukcije.

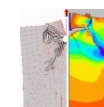
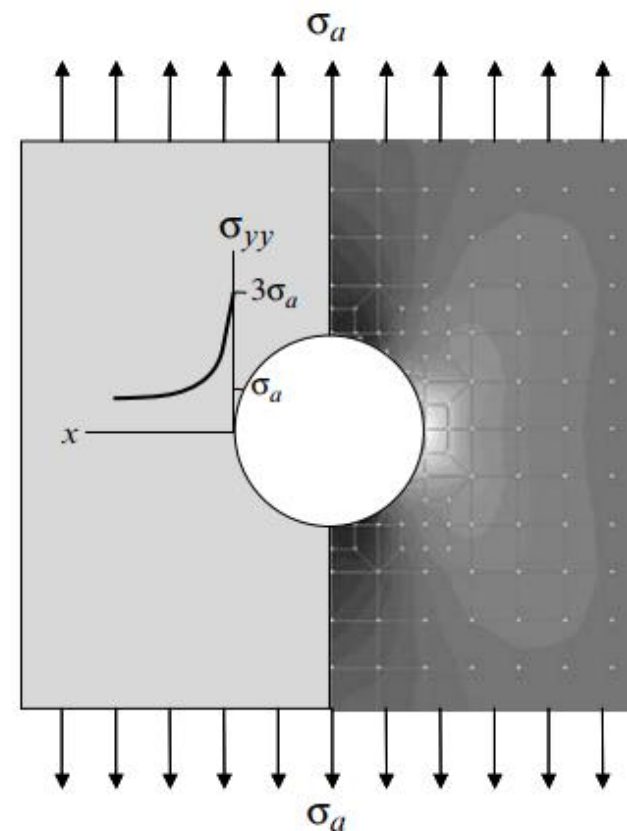


Kada dolazi do širenja pukotine u nekom elementu?

- nakon što naprezanje u elementu konstrukcije dostigne za neku pukotinu **kritičnu vrijednost**.

To naprezanje ovisi o:

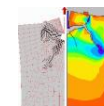
- **dimenzijama pukotine**
- **orijentaciji pukotine** u odnosu na smjer opterećenja
- **fizikalno–mehaničkim svojstvima materijala**.



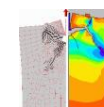
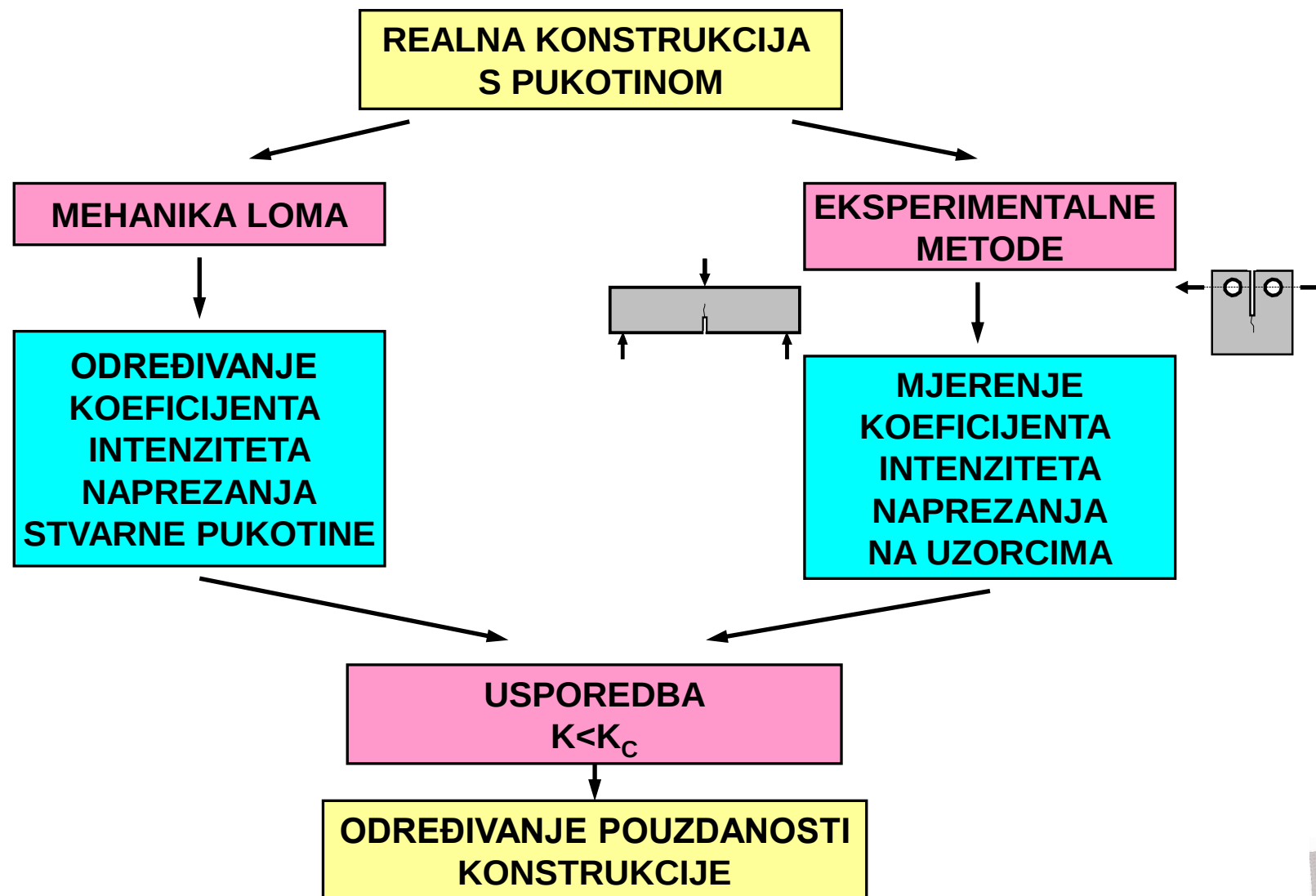
U mehaniku loma se **uvode nove veličine koje su opisuju ponašanje materijala pri pojavi pukotina.**

To su **parametri mehanike loma**:

- **koeficijent intenziteta naprezanja K** (*stress intensity faktor*)
- kritična veličina koeficijenta intenziteta naprezanja -
žilavost loma K_c (*fracture toughness*)
- **energija loma G_F**
- **žilavost materijala G_C**
- **otvaranje pukotine u korijenu $CTOD$** (*Crack Tip Open Displacement*)
- **kritična duljina pukotine a_c**
- konturni **J -integral** *Rice-a i dr.*



POSTUPAK ODREĐIVANJA POUZDANOSTI KONSTRUKCIJE PRIMJENOM MEHANIKE LOMA



Prema ponašanju materijala pod djelovanjem opterećenja mehanika loma se dijeli na:

☐ **Linearno elastičnu mehaniku loma – LEFM**

(Linear Elastic Fracture Mechanics)

☐ **Elasto plastičnu mehaniku loma – EPFM**

(Elastic-Plastic Fracture Mechanics)

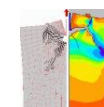
☐ **Mehaniku loma iznad granice tečenja – PYFM**

(Post Yield Fracture Mechanics)

☐ **Dinamička mehanika loma – DFM**

(Dynamic Fracture Mechanics ili Dynamic and Time-Dependent Fracture)

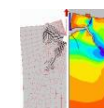
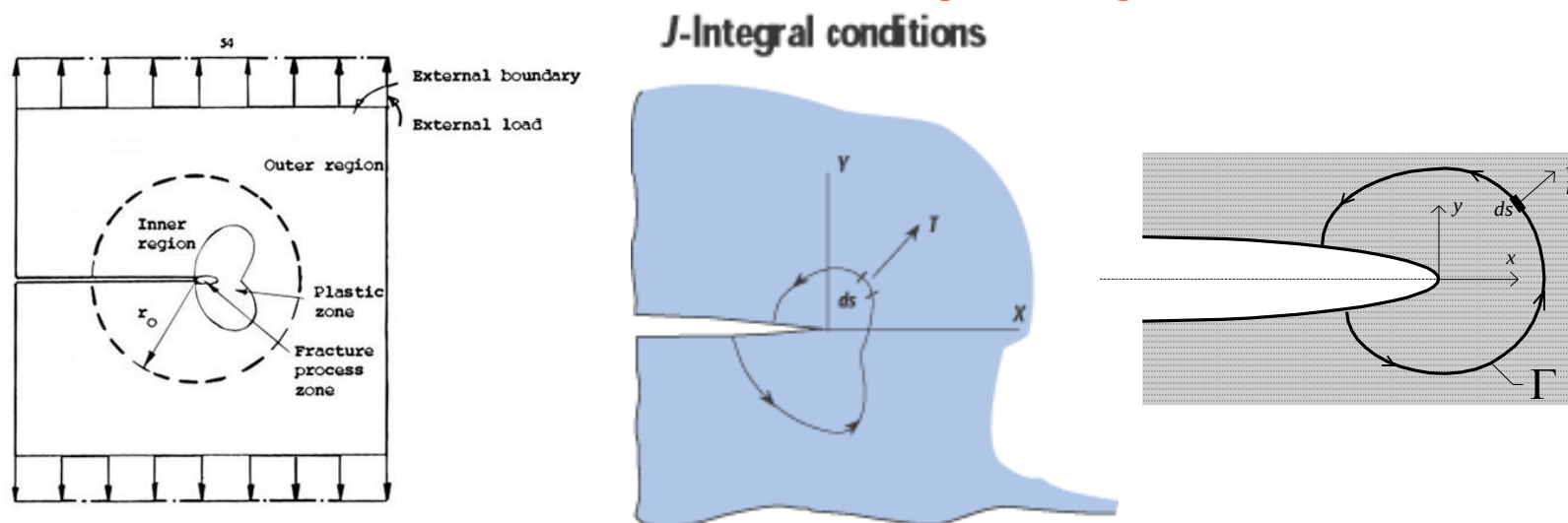
Premda je lom uzrokovan mnogim faktorima poput plastičnosti, korozije, temperature, zamora materijala, tečenja itd., često se analiza loma orijentira na **linearno elastičnu mehaniku** loma tj. na **krhki lom**.



POVIJESNI PREGLED RAZVOJA MEHANIKE LOMA

U Americi **Rice** 1968. godine dolazi do **novog parametra koji karakterizira nelinearnost materijala pri vrhu pukotine**. Nelinearna brzina oslobađanja energije može se prikazati linijskim integralom po proizvoljnoj konturi u blizini pukotine koji se zove **J integral**.

Iste godine su Hutchinson, Rice i Rosengren povezali J integral s poljem naprezanja vrha pukotine kod nelinearnih materijala. Pokazali su da J integral nije samo brzina oslobađanja energije već i **nelinearni faktor intenziteta naprezanja**.

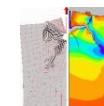


Postoje dva osnovna pristupa analize loma primjenom mehanika loma:

1. ENERGETSKI KRITERIJ

2. PRISTUP ANALIZOM INTENZITETA NAPREZANJA

Oba ta pristupa su ekvivalentna u određenim okolnostima.



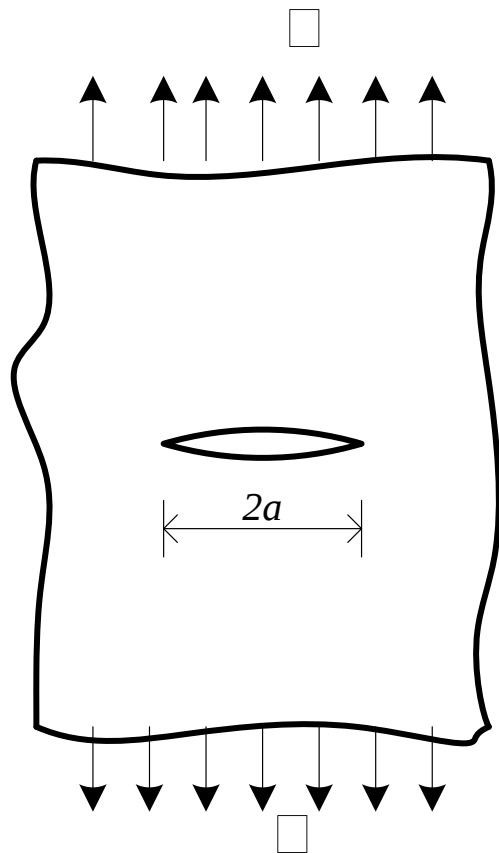
3.1 ENERGETSKI KRITERIJ

U energetskom pristupu razvijanje pukotine (lom) se događa kad energija potrebna za rast pukotine premaši otpor materijala. Otpor materijala mora uključiti **površinsku energiju, plastični rad** ili drugi tip **trošenja energije pri razvoju pukotine**.

Ovaj kriterij je predložio Griffith, a Irwin je formulirao ovaj pristup:

Brzina oslobođene energije (*Energy Release Rate*), G , je brzina promjene potencijalne energije po površini pukotine za linearno-elastičan materijal. Naziva se još i **sila razvoja pukotine** (*Crack Driving Force*). U trenutku loma, $G = G_C$, kritična brzina oslobođene energije je mjera otpora širenju pukotine, mjera žilavosti - **pukotinska žilavost** (*fracture toughness*).

Za beskonačnu ploču s pukotinom (širina ploče je $\gg 2a$):



BRZINA OSLOBOĐENE ENERGIJE

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E}$$

u čast



Alan Arnold Griffith

U trenutku loma, $G = G_C$:

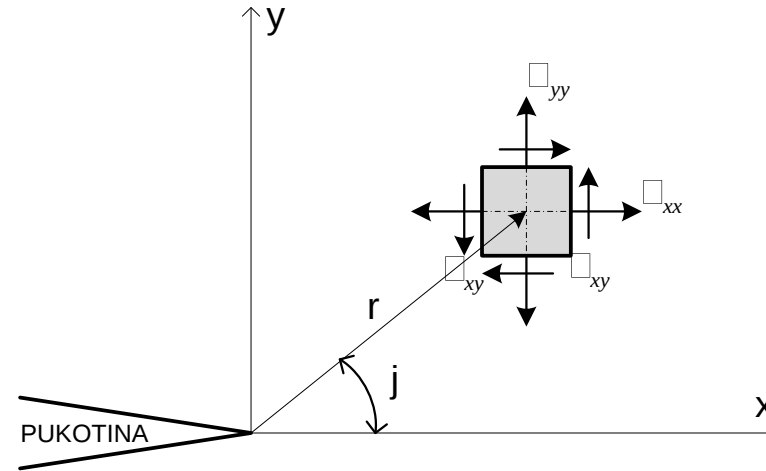
$$G_c = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a_c}{E}$$

U tom trenutku loma imamo **kritičnu kombinaciju naprezanja i veličine pukotine**.

3.2 PRISTUP PREKO INTENZITETA NAPREZANJA

Stanje naprezanja u blizini vrha pukotine:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\varphi)$$



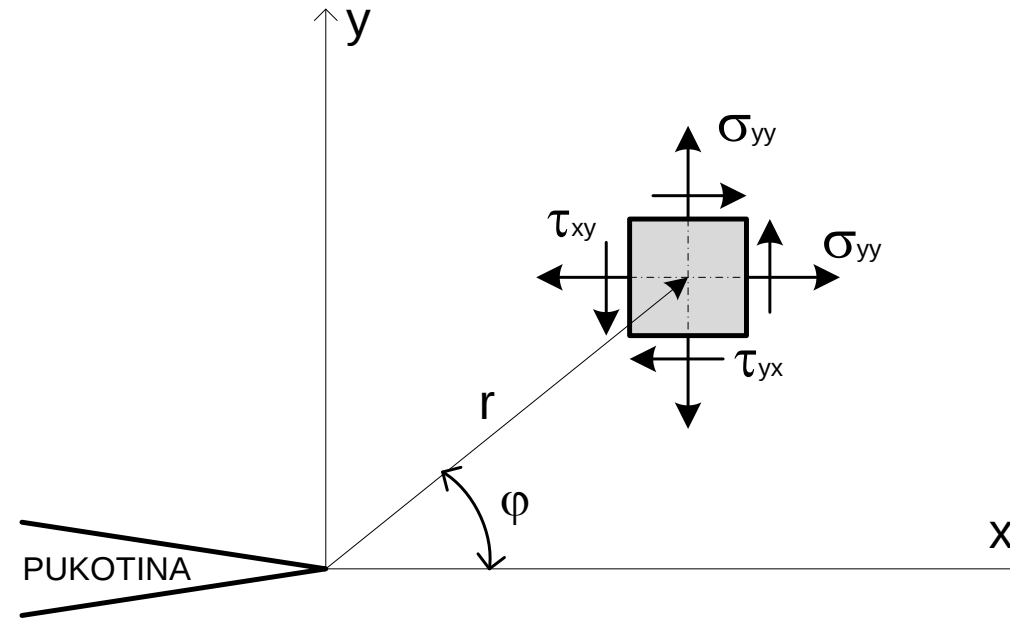
$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$

Iz tih izraza se vidi da je svaka komponenta naprezanja proporcionalna jednoj konstanti K_I .

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}}.$$

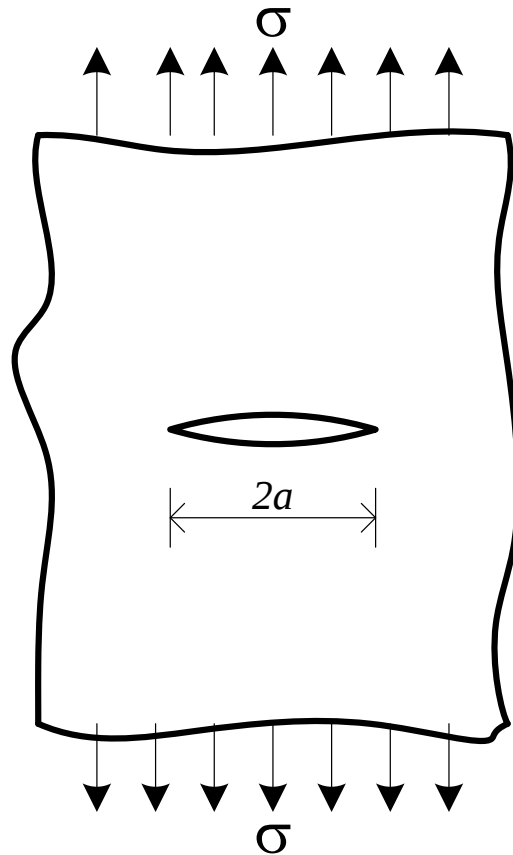


Tu konstantu K_I nazivamo **koeficijent intenziteta naprezanja**.

Ako pretpostavimo da materijal popušta lokalno pri kritičnoj kombinaciji naprezanja i deformacija, slijedi da će se lom dogoditi kod kritične veličine faktora intenziteta naprezanja, K_{IC} .

Ta veličina K_{IC} je karakteristika materijala, mjera žilavosti - **pukotinska žilavost**.

Za beskonačnu ploču s pukotinom:



KOEFICIJENT INTENZITETA NAPREZANJA

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

U ovom slučaju je:

K_I - **sila razvoja pukotine**

K_{IC} - mjera otpornosti materijala na lom
- **pukotinska žilavost**

Uspoređujući izraze Griffithove analogije (energetskog pristupa) i intenziteta naprezanja imamo:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E} \longleftrightarrow K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

dolazimo do odnosa između K_I i G :

$$G = \frac{K_I^2}{E}$$

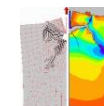
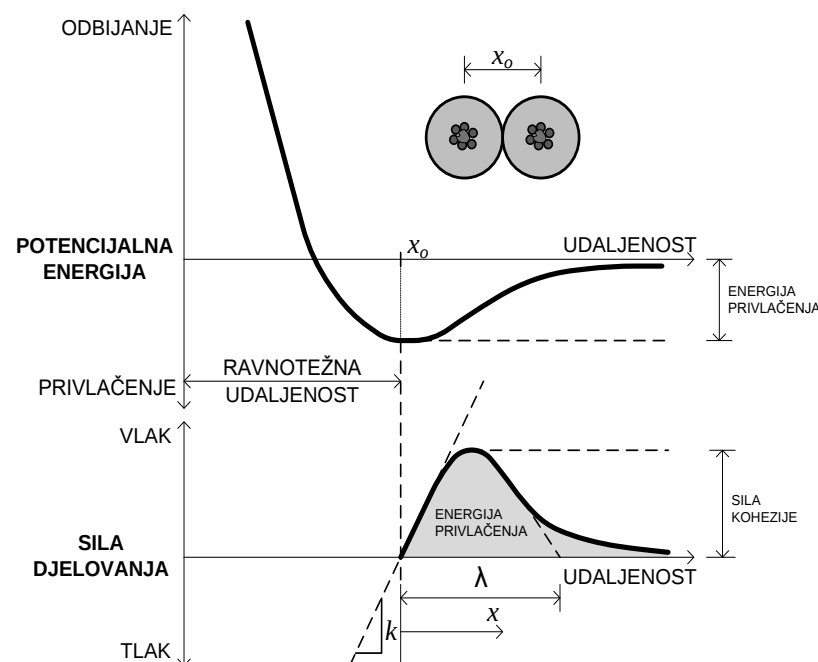
Ovi pristupi preko intenziteta naprezanja i energetski pristup su **ekvivalentni za linearno elastične materijale**.

5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.1 Atomistički pristup lomu

Materijal puca ako je naprezanje dovoljno veliko da prekine veze koje drže atome zajedno.

Kada **potencijalna energija poprimi minimalnu vrijednost, nastupa ravnotežni razmak atoma**. Da bi se **atomi rastavili potrebno je uvesti silu zatezanja koja je veća od sile kohezije**.



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

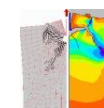
5.2 Griffithov energetska pristup

Prema I. zakonu termodinamike, **ako sistem prelazi iz neravnotežnog u ravnotežno stanje, ukupna energija se smanjuje.**

Pukotina se može formirati (ili se postojeća može povećati) samo pod uvjetom da je proces nastajanja nove ili povećanja postojeće takav da se totalna energija smanjuje ili ostaje konstanta.

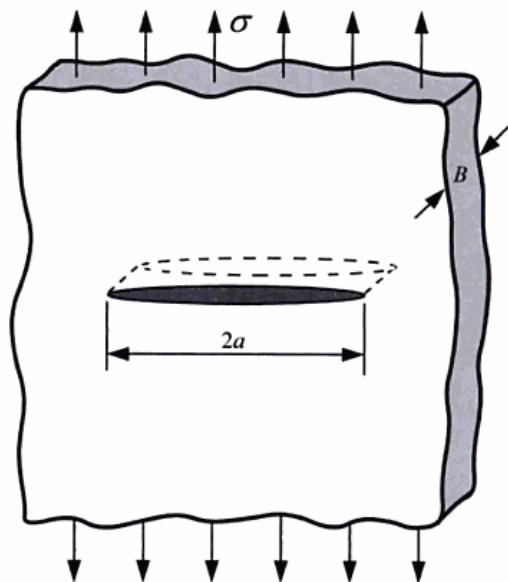
Stoga se može reći da je kritični uvjet za lom definiran razvojem pukotine u ravnotežnom stanju, tj. bez promjene totalne energije. Teorija linearno elastične mehanike loma (**Linear Elastic Fracture Mechanics – LEFM**) postoji od 1920. godine.

Temelj joj je postavio **Alan Arnold Griffith** koji zauzima posebno mjesto u razvoju mehanike loma. On je u svom radu **«The phenomena of rupture and flow in solids»**, koji je objavljen 1920. godine, prvi izveo kriterij loma za idealno krhke materijale.

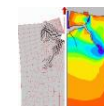


Griffith je predložio je energetski uvjet za razvoj pukotine, a teorija se zasniva na usporedbi oslobođene elastične energije zbog produljenja pukotine i energije novo stvorenih slobodnih površina pukotine.

Promatra se idealno elastična ploča beskonačne dužine i širine, jedinične debljine b , sa središnjom pukotinom duljine $2a$ po cijeloj debljini:



Ploča je opterećena jednolikim, vlačnim naprežanjem σ , koje djeluje u beskonačnosti, dovoljno daleko.



$$\text{Iz} \quad \sigma \cdot \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2 \cdot E' \cdot \gamma_s}{\pi}}$$

dobivamo **Griffithovu** formulu za veličinu kritičnog naprezanja za pukotinu zadane duljine $2a$ kod kojeg će nastupiti nestabilno širenje pukotine.

$$\sigma = \sigma_c \quad \sigma_c = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma_s \cdot E'}{\pi \cdot a}}$$

$$a_c = \frac{2 \cdot \gamma_s \cdot E'}{\pi \cdot \sigma^2}$$



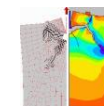
$$\frac{\pi \cdot a \cdot \sigma^2}{E'} = 2 \cdot \gamma_s$$



**nivo oslobođene
energije**



**porast površinske
energije**



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.5 Brzina oslobađanja energije (*Energy Release Rate*)

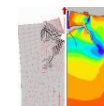
1956. godine Irwin je predložio kriterij loma, koji je u biti ekvivalentan Griffithovom, ali prikladniji za rješavanje inženjerskih problema. On je definirao **brzinu oslobađanja energije** tijekom širenja pukotine G (*Energy Release Rate*) kao:

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'}$$

Pukotina se širi kada G dostigne kritičnu vrijednost:

$$G_C = \frac{\pi \cdot \sigma_C^2 \cdot a}{E'} = \frac{dU_\gamma}{da} = 2 \cdot w_f$$

G_C mjera žilavosti materijala (*fracture toughness*)



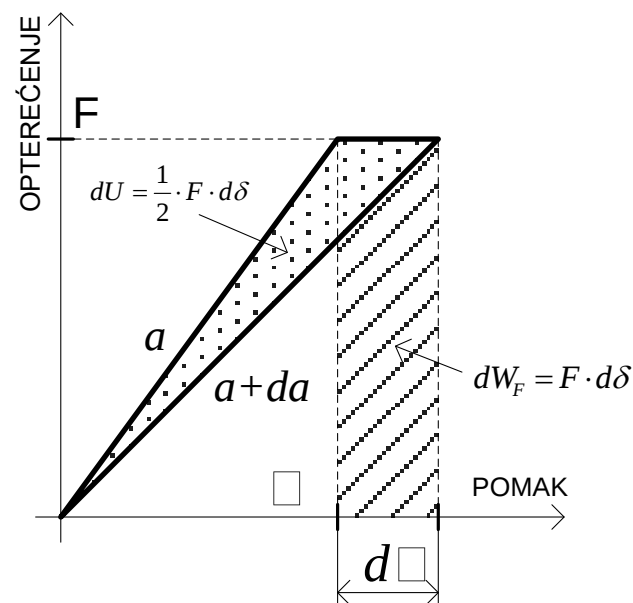
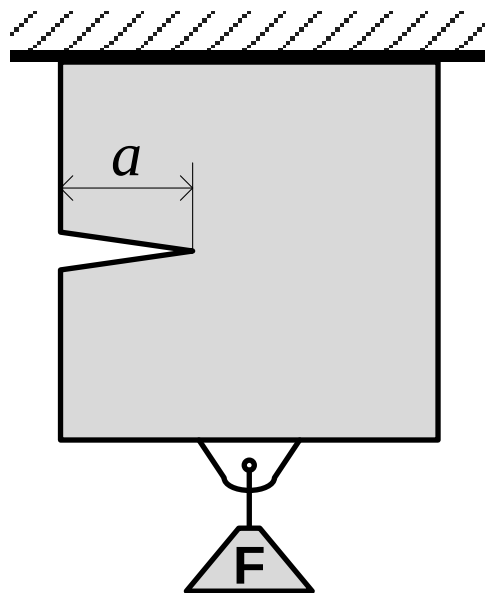
Problem kontrole opterećenja

Potencijalna energija elastičnog tijela:

$$\Pi = U - W_F \quad U \text{ energija deformacija (strain energy)}$$

$$W_F \text{ rad vanjskih sila}$$

$$F = \text{const}$$



$$W_F = F \cdot \delta$$

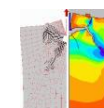
$$U = \int_0^\delta \frac{1}{2} \cdot F \cdot d\delta = \frac{F \cdot \delta}{2}$$

$$\Pi = U - W_F = -\frac{F \cdot \delta}{2} = -U$$

$$G = - \frac{dP}{dA} = \frac{1}{b} \times \frac{dU}{da} \bigg|_{F=\text{const}}$$

$$= \frac{F}{2 \times b} \times \frac{d\delta}{da} \bigg|_{F=\text{const}}$$

$$dA = b da$$



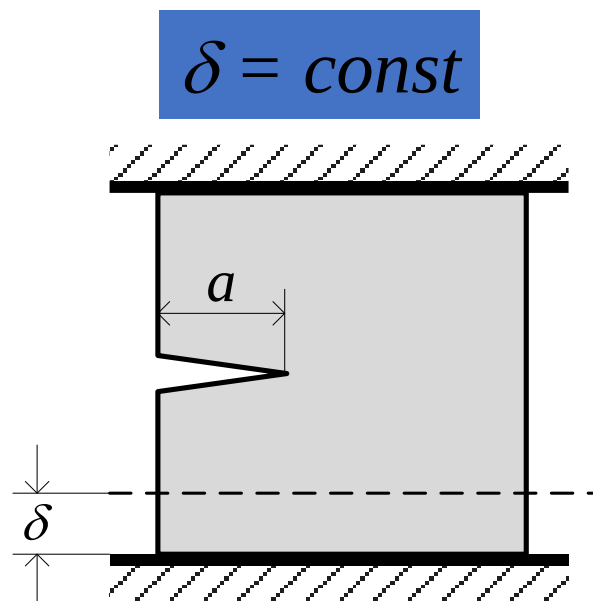
Problem kontrole pomaka

Potencijalna energija elastičnog tijela:

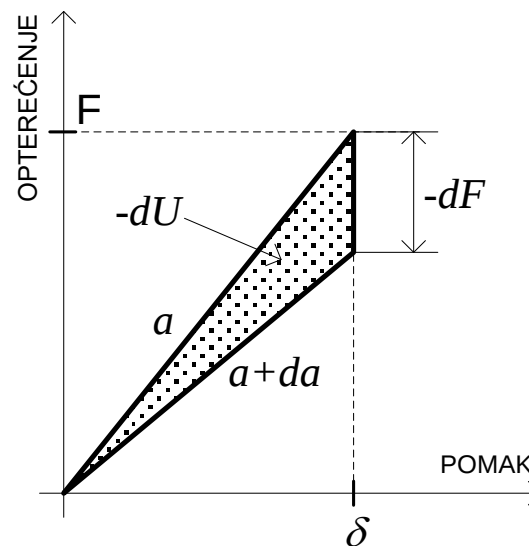
$$\Pi = U - W_F$$

U energija deformacija (*strain energy*)

W_F rad vanjskih sila



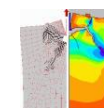
$$\delta = \text{const}$$

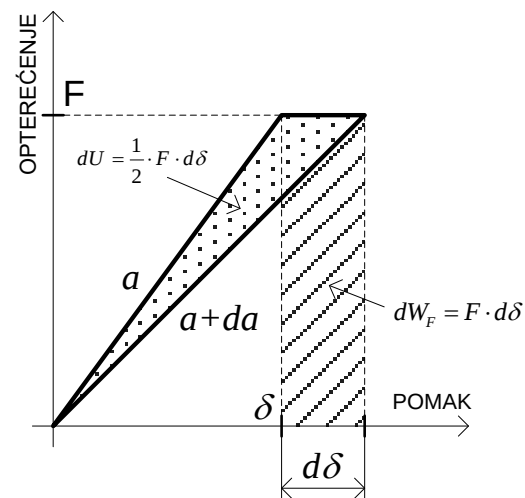
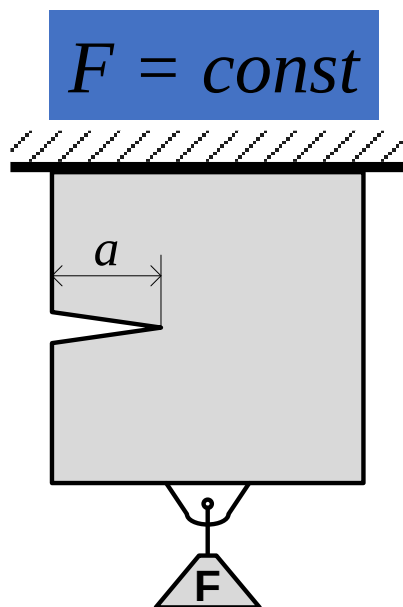


$$W_F = 0$$

$$\Pi = U$$

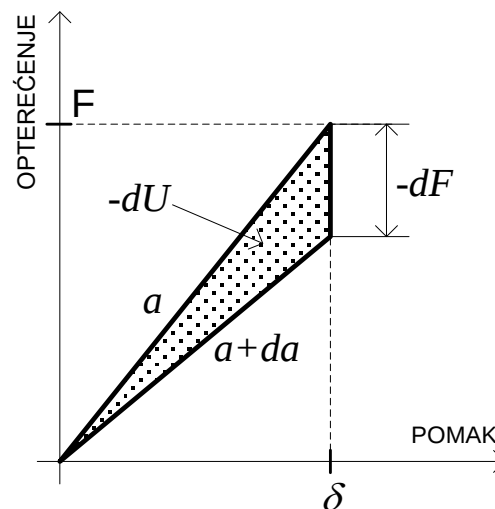
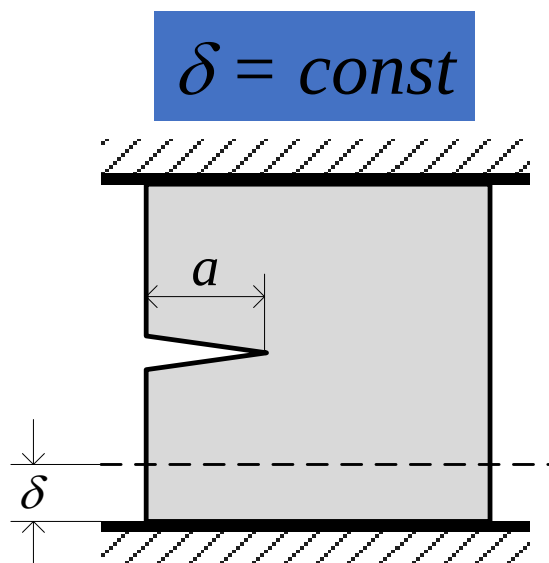
$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{dU}{da} \right)_{\delta=\text{const}} = -\frac{\delta}{2 \cdot b} \cdot \left(\frac{dF}{da} \right)_{\delta=\text{const}}$$



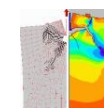


$$\left(\frac{dU}{da} \right)_{F=\text{const}} = - \left(\frac{dU}{da} \right)_{\delta=\text{const}}$$

$$(dU)_{F=\text{const}} = -(dU)_{\delta=\text{const}}$$



Pri istoj brzini oslobađanja energije **opterećenje konstantnom silom je znatno opasnije.**



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.6 Nestabilnost i R krivulja

Pukotina raste ako je $G = 2 \cdot w_f$

Prirast pukotine može biti stabilan i nestabilan, ovisno o tome kako se mijenjaju G i w_f sa veličinom pukotine.

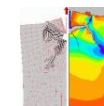
Ako uvedemo oznaku:

$$R = 2 \cdot w_f$$

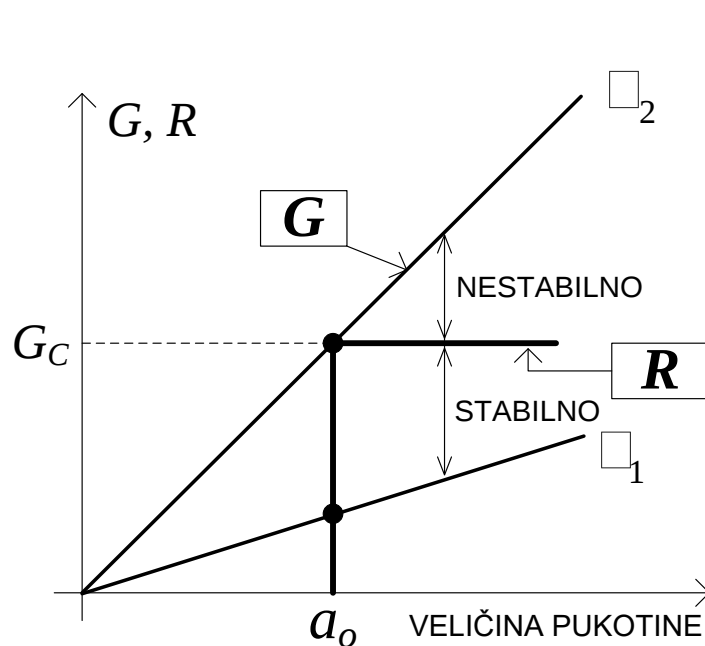
otpornost materijala prema širenju pukotine

Krivulja koja povezuje R sa povećanjem pukotine zove se **krivulja otpornosti pukotine** ili **R-krivulja**.

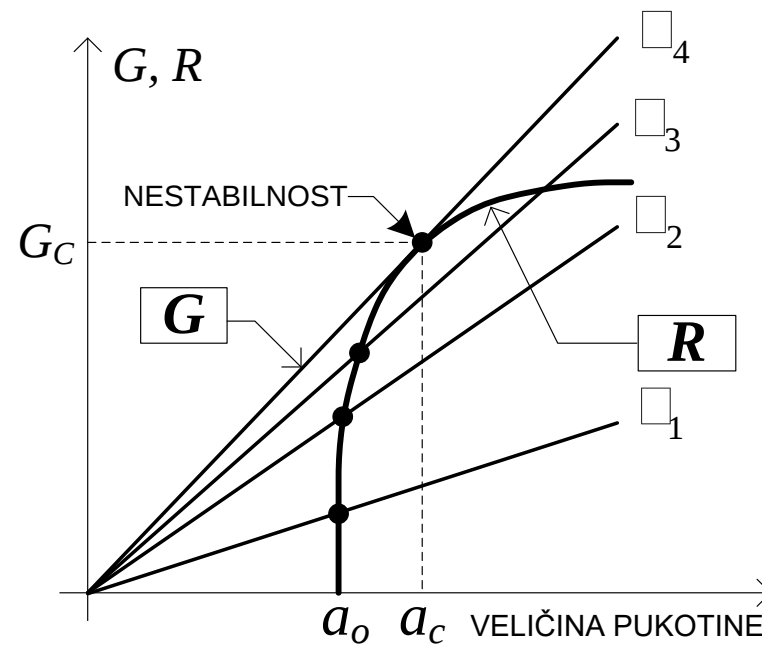
Odgovarajući dijagram koji povezuje G sa povećanjem pukotine zove se **krivulja širenja pukotine** (*Crack Driving Curve*).



Krivulja otpornosti pukotine ili R-krivulja



ravna R-krivulja

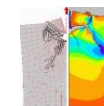


rastuća R-krivuljom

R-krivulja idealno krhkih materijala je uvijek ravna.

Duktilni lom metala obično prati rastuća R-krivulja.

Kontrola pomaka rezultira stabilnijim prirastom pukotine nego kontrola sile.



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

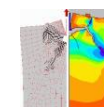
5.7 Analiza polja naprezanja i pomaka oko pukotine

Pristup analize napredovanja pukotine preko ravnoteže energije nailazi na velike probleme za većinu praktičnih situacija.

G. R. Irwin je 1957. godine formulisao uvjet za razvoj pukotine (kriterij lokalnog loma u vrhu pukotine) na osnovu intenziteta polja naprezanja u neposrednoj okolini vrha pukotine (uvjet je potpuno ekvivalentan Griffithovu energetsom uvjetu).

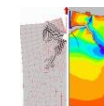
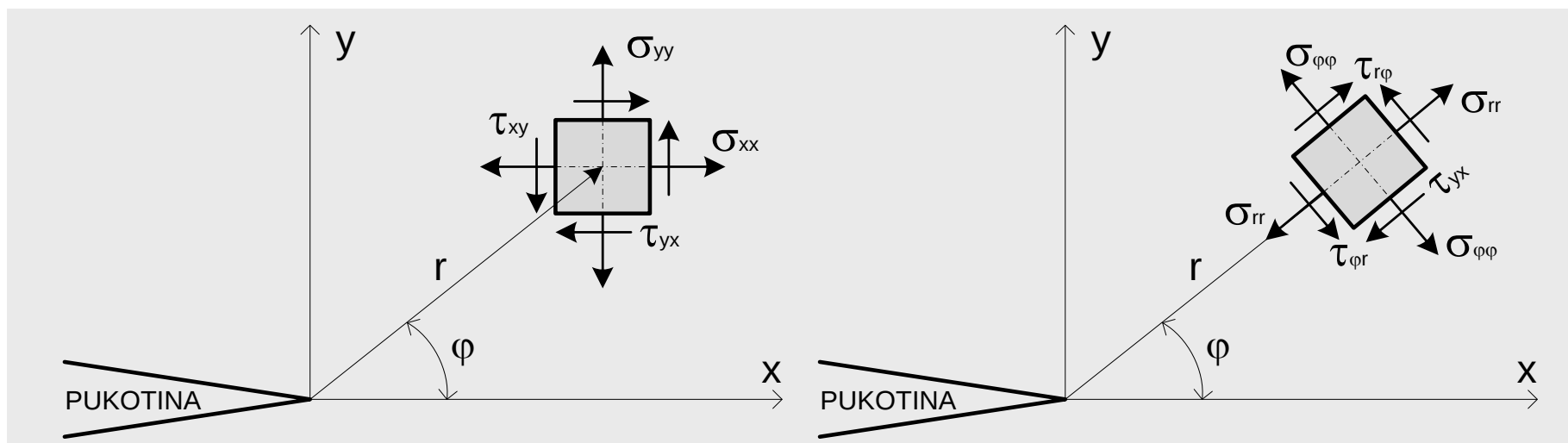
U LEFM-u se za određivanje polja naprezanja i deformacija u okolini pukotine primjenjuju rješenja dobivena metodama linearne teorije elastičnosti, na različite načine.

Najzastupljenija metoda je pomoću Mushelishvili-Kolosovljevih i Westergaardovih jednadžbi.



$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\varphi)$$

K – koeficijent intenziteta naprezanja ($MPa\sqrt{m}$)

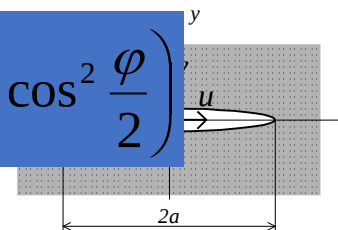
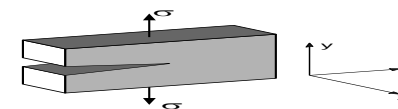


Izrazi za **elastično polje pomaka** omogućuju proračun akumulirane elastične energije, a pružaju osnovu za pomacima kontrolirane kriterije loma.

U slučaju **I oblika** otvaranja pukotine:

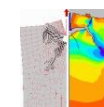
$$u = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_I \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$



$$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu \quad \text{ravninsko naprezanje}$$

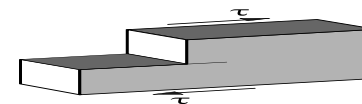
$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{ravninska deformacija}$$



U slučaju **II oblika** otvaranja pukotine:

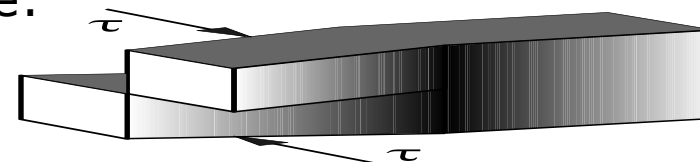
$$u = \frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$v = \frac{K_{II} \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left(\frac{\kappa - 1}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$



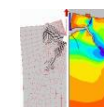
U slučaju **III oblika** otvaranja pukotine:

$$w = \frac{K_{III} \cdot (1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \sin \frac{\varphi}{2}$$



$$\kappa = 3 - 4 \cdot \nu \quad \text{ravninsko naprezanje}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{ravninska deformacija}$$



5. LINEARNO ELASTIČNA MEHANIKA LOMA

5.7.1 Koeficijent intenziteta naprezanja

Tijelo s pukotinom može biti opterećeno sa svakim od tri načina otvaranja pukotine ili kombinacijom dva ili tri oblika.

Najopasniji lomovi nastaju pri razvoju pukotine otvaranjem (**I oblik**).

Polje naprezanja ispred vrha pukotine u izotropnom linearno elastičnom materijalu, možemo napisati i u slijedećem obliku:

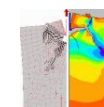
$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^I(\varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{III}(\varphi)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{II}(\varphi)$$

U slučaju kombinacije oblika otvaranja pukotine:

$$\sigma_{ij}^{ukupno} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$$



5.8 Odnos između K i G

Do sada su prikazana dva parametra koji opisuju ponašanje pukotine:

G - **brzina oslobađanja energije**

K - **koeficijent intenziteta naprezanja**

Za linearno elastične materijale K i G su jedinstveno povezani.

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E'} \quad \longleftrightarrow \quad K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$$

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad G = \frac{K_I^2}{E'}$$

$$E' = E \quad \text{za ravninsko naprezanje}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{za ravninsku deformaciju}$$

