Tatjana Slijepčević-Manger

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE 3

Građevinski fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Predmet MATEMATIKA 3 predaje se na prvoj godini diplomskog studija građevinarstva Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Predavanja su zapisana u internoj skripti Građevinskog fakulteta pod nazivom MATEMATIKA 3 autora prof. dr. sci. Tomislava Došlića i više asistentice dr. sci. Dore Pokaz. Pored predavanja, studenti moraju pohađati i auditorne vježbe iz spomenutog predmeta. Na tim vježbama rješavaju se zadatci vezani za pojedine cjeline opisane na predavanjima, i to tako da se postupak rješavanja naznači u osnovnim crtama i napiše konačno rješenje, dok se tehnički dio posla, kao što je na primjer integriranje, prepušta studentima da ga samostalno obave. Primiječeno je da nakon dvije ili više godina tijekom kojih nisu slušali matematičke predmete, mnogi studenti imaju poteškoće u savladavanju gradiva, tj. da nisu u stanju dovršiti zadatke s vježbi. To je bio najvažniji motiv za pisanje Zbirke zadataka iz MATEMATIKE 3 koja sadrži detaljna rješenja zadataka s auditornih vježbi te slične zadatke za samostalan rad.

Zbirka zadataka iz MATEMATIKE 3 je logična dopuna internoj skripti iz spomenutog predmeta i podijeljena je u dva poglavlja. Prvo poglavlje sadrži primjere analitičkih rješenja problema opisnih jednadžbama matematičke fizike i odgovarajuće zadatke za vježbu. Nakon uvodne točke o razvoju funkcija u Fourierove redove, slijede primjeri analitičkih rješenja rubnog problema ravnoteže žice, rubno-inicijalnog problema oscilacija žice, rubno-inicijalnog problema provođenja topline kroz štap, rubnog problema ravnoteže membrane i rubno-inicijalnog problema oscilacija membrane. U drugom poglavlju zbirke nalaze se primjeri približnih rješenja onih isth problema koji su rješavani analitički u njenom prvom poglavlju. Spomenuta približna rješenja dobivena su pomoću različitih numeričkih metoda. Drugo poglavlje podijeljeno je na tri dijela. U prvom potpoglavlju navedeni su primjeri približnih rješenja koja su dobivena Eulerovom metodom ili poboljšanom Eulerovom (Heunovom) metodom ili metodama Runge-Kutta, problema opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda. Drugo potpoglavlje sadrži primjere približnih rješenja određenih metodom konačnih razlika ili metodom konačnih elemenata, problema opisanih običnim diferencijalnim jednadžbama drugog reda. U trećem potpoglavlju navedeni su primjeri približnih rješenja koja su određena numeričkom metodom konačnih razlika, problema opisanih parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, i to za inicijalno-rubni problem oscilacija žice, inicijalno-rubni problem provođenja topline kroz štap i rubni problem ravnoteže membrane. Drugo poglavlje također sadrži nekoliko zanimljivih slika na kojima se vide sličnosti i razlike između analitičkog i numeričkog rješenja zadanog problema.

Na kraju moram posebno zahvaliti asistentu dr. sci. Nikoli Sandriću i stručnom suradniku u mirovini Bošku Kojundžiću koji su svojim iskustvom bitno utjecali na sadržaj Zbirke zadataka iz MATEMATIKE 3. Također zahvaljujem recenzentima zbirke prof. dr. sci. Aleksandri Čižmešiji, prof. dr. sci. Tomislavu Došliću i prof. dr. sci. Josipu Tambači na izuzetno korisnim primjedbama i sugestijama.

U Zagrebu, rujan 2012.

Poglavlje 2

Jednadžbe matematičke fizike

2.1 Fourierovi redovi

Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodička funkcija s periodom $2L$ ($f(x+2L) = f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$), neprekidna osim u konačno mnogo točaka na $\mathbb{R}$ i u svakoj točki iz $\mathbb{R}$ ima lijevu i desnu derivaciju. Tada se funkcija f može razviti u Fourierov red oblika

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right),$$

za svaku točku x u kojoj je funkcija f neprekidna. Fourierovi koeficijenti se računaju na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \mathsf{d}x, \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \mathsf{d}x \quad \text{i} \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \mathsf{d}x \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Ukoliko je x točka prekida funkcije f, vrijedi

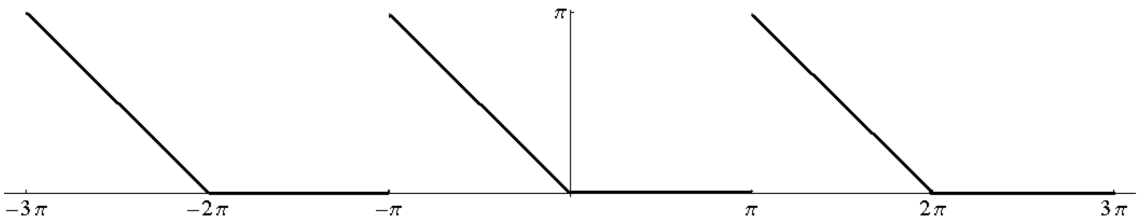
$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right).$$

1. Odredite Fourierov red periodičkog proširenja funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

na skup $\mathbb{R}$.

Rješenje: Periodičko proširenje $\tilde{f}$ funkcije f prikazano je na Slici 2.1.



Slika 2.1: Periodičko proširenje funkcije f

Računamo Fourierove koeficijente

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathsf{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\mathsf{d}x = -\frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{4}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathsf{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\mathsf{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \cos nx\mathsf{d}x & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| = -\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} \\
&+ \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathsf{d}x = -\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathsf{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\mathsf{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \sin nx\mathsf{d}x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} \\
&- \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\mathsf{d}x = \frac{1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Prema tome, za točke neprekidnosti $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, periodičkog proširenja $\tilde{f}$ funkcije f vrijedi

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right).$$

Za točke prekida $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} \cos n(2k+1)\pi + \frac{\cos n\pi}{n} \sin n(2k+1)\pi \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} (-1)^n = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Rješavajući ovaj zadatak dobili smo zgodan sporedni rezultat:

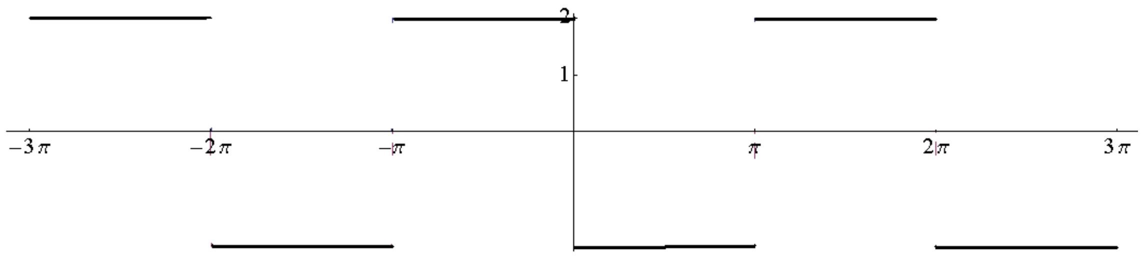
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Odredite Fourierov red periodičkog proširenja funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x \leq 0 \\ -2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

na skup $\mathbb{R}$.

Rješenje: Periodičko proširenje $\tilde{f}$ funkcije f prikazano na Slici 2.2 je neparna funkcija ($\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x), x \in \mathbb{R}$), pa je $a_n = 0, n = 0, 1, \cdots$. Naime, umnožak neparne funkcije i parne funkcije *kosinus* je neparna funkcija, a integral neparne funkcije na intervalu $(-L, L)$ simetričnom obzirom na nulu, u definiciji koeficijenata a_n, je uvijek nula. Računamo



Slika 2.2: Periodičko proširenje funkcije f

Fourierove koeficijente b_n:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathsf{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin nx\mathsf{d}x - \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\mathsf{d}x\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}\\ -\frac{8}{n\pi}, & n \text{ neparan.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Prema tome, za $x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$, vrijedi formula

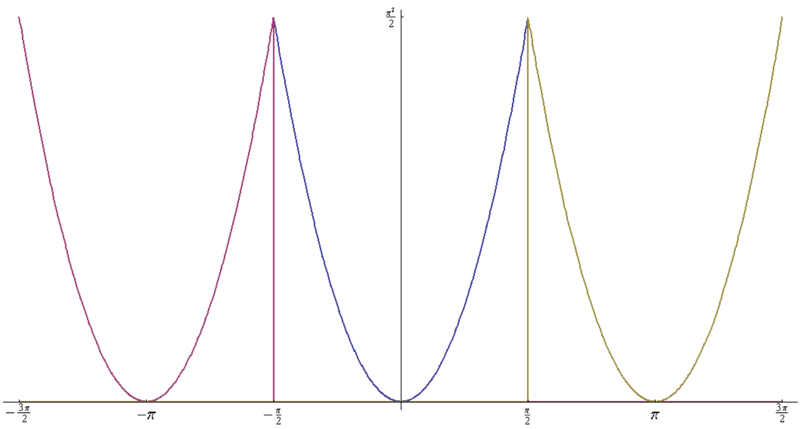
$$\tilde{f}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x.$$

Ukoliko je $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$, vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)n\pi = \frac{2+(-2)}{2} = 0.$$

3. Odredite Fourierov red periodičkog proširenja funkcije $f(x) = 2x^2$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na skup $\mathbb{R}$.

Rješenje: Periodičko proširenje $\tilde{f}$ funkcije f prikazano na Slici 2.3 je



Slika 2.3: Periodičko proširenje funkcije f

parna funkcija ($\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x), x \in \mathbb{R}$), pa je $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$. Naime, umnožak parne funkcije i neparne funkcije *sinus* je neparna funkcija, a integral neparne funkcije na intervalu $(-L, L)$ simetričnom obzirom na nulu, u definiciji koeficijenata b_n, je uvijek nula. Računamo Fourierove koeficijente a_n:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}, \\
a_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2nx \mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos 2nx \mathrm{d}x & v = \frac{1}{2n} \sin 2nx \end{array} \right| \\
&= \frac{8}{\pi} \frac{x^2}{2n} \sin 2nx \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{2n} \sin 2nx \mathrm{d}x \\
&= -\frac{8}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2nx \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \sin 2nx\mathsf{d}x & v = -\frac{1}{2n}\cos 2nx \end{array} \right| \\
&= \frac{4}{n^2\pi} x \cos 2nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx\mathsf{d}x \\
&= \frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^3\pi}\sin 2n\pi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n^2}\cos n\pi = \frac{2}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}
$$

Budući da je proširenje $\tilde{f}$ funkcije f neprekidno, za svaki realan broj x vrijedi

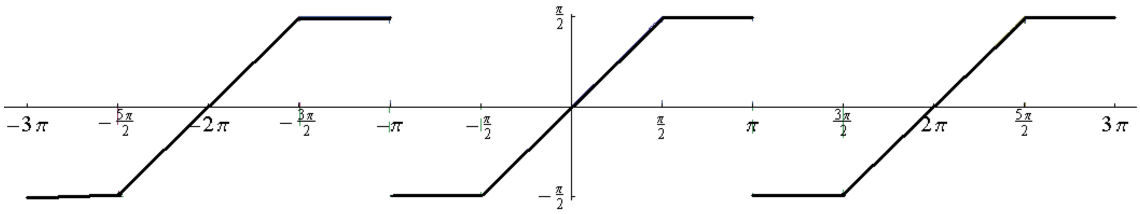
$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos 2nx.$$

4. Razvijte funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

po sinusima i kosinusima.

Rješenje: Razvijmo funkciju f u red po sinusima. Funkciju f najprije



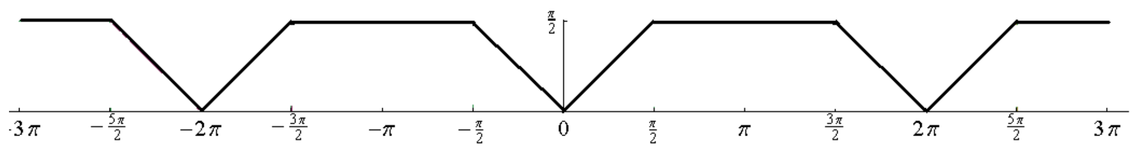
Slika 2.4: Periodičko proširenje funkcije f po neparnosti

treba periodički proširiti po neparnosti kao na Slici 2.4. Funkcija f se proširi na interval $(-\pi, 0)$ po neparnosti tako da se stavi $\tilde{f}(x) = -f(-x), x \in (-\pi, 0)$. Zatim se tako proširena funkcija $\tilde{f}$ proširi po periodičnosti na $\mathbb{R}$. U opisanom slučaju treba izračunati samo koeficijente b_n (objašnjenje se nalazi u rješenju Zadatka 2):

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \left|\begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| \\
&= -\frac{2x}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}(-1)^n.
\end{aligned}
$$

Razvoj funkcije f po sinusima glasi:

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}(-1)^n\right)\sin nx.
$$



Slika 2.5: Periodičko proširenje funkcije f po parnosti

Razvijmo sada funkciju f u red po kosinusima. Funkciju f najprije treba periodički proširiti po parnosti kao na Slici 2.5. Funkcija f se proširi na interval $(-\pi, 0)$ po parnosti tako da se stavi $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x), x \in (-\pi, 0)$. Zatim se tako proširena funkcija $\tilde{f}$ proširi po periodičnosti na $\mathbb{R}$. U opisanom slučaju treba izračunati samo koeficijente a_n (objašnjenje se nalazi u rješenju Zadatka 3):

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos nx\mathrm{d}x & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| \\
&= \frac{2x}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Razvoj funkcije f po kosinusima ima oblik:

$$
f(x) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cos nx.
$$

5. Odredite Fourireov red periodičkog proširenja funkcije

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq 0 \\ \sin\frac{\pi}{2}x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}
$$

na $\mathbb{R}$.

6. Odredite Fourierov red periodičkog proširenja funkcije $f(x) = x^3$, $x \in [-\pi, \pi]$ na $\mathbb{R}$.

7. Odredite Fourireov red periodičkog proširenja funkcije

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < -1 \\ 5, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}
$$

na $\mathbb{R}$.

8. Razvijte funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

po sinusima i kosinusima.

2.2 Ravnoteža žice

Ravnotežni položaj žice $[0, L]$ opisan je običnom diferencijalnom jednadžbom 2. reda

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), x \in [0, L],$$

pri čemu je $u(x)$ funkcija progiba žice, $p(x)$ predstavlja napetost žice, $q(x)$ je koeficijent elastičnosti sredstva u kojem se nalazi žica, a $f(x)$ je linijska gustoća vanjske sile koja djeluje na žicu u točki x. Ukoliko koeficijent elastičnosti nije zadan, smatra se da žica nije uronjena u elastično sredstvo, tj. da je $q(x) = 0$. Jednadžbu ravnoteže rješavamo uz Dirichletove rubne uvjete $u(0) = u_0$ $(u(L) = u_L)$ i/ili Neumannove rubne uvjete $u'(0) = u_0$ $(u'(L) = u_L)$.

Promotrimo homogenu žicu $[0, L]$ za koju je pričvršćen uteg mase M na lijevom (desnom) kraju. Neka je m masa žice $(m << M)$. U promatranom slučaju napetost žice računamo po formuli $p(x) = Mg$, a vanjsku silu prema $f(x) = -\rho g$. Pri tome je g konstanta gravitacije, a $\rho = \frac{m}{L}$ je linijska gustoća žice za homogenu žicu. U lijevom (desnom) kraju žice imamo $u(0) = 0$ $(u(L) = 0)$, tj. lijevi (desni) kraj žice je pričvršćen, dok desni (lijevi) kraj može biti pričvršćen, $u(L) = 0$ $(u(0) = 0)$, ili slobodan, $u'(L) = 0$ $(u'(0) = 0)$.

Mjerne jedinice za duljinu, masu i vrijeme pripadaju SI sustavu mjernih jedinica: metar, kilogram i sekunda.

1. Homogena teška žica mase $m = 2$ i duljine $L = 1$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 15$ na kraju $x = 0$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je njezin:

   a) desni kraj pričvršćen,

   b) desni kraj slobodan.

   Za konstantu gravitacije uzmite $g = 10$.

   Rješenje: Nemamo otpor elastičnog sredstva, tj. $q(x) = 0$. Rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ravnotežni položaj žice $u(x)$:

   $$-(p(x)u'(x))' = f(x).$$

   U opisanom slučaju, vanjska sila koja djeluje na žicu je sila gravitacije $f(x) = -\frac{m}{L}g = -\rho g$, gdje je $\rho = \frac{m}{L}$ linijska gustoća žice, a napetost žice je dana s $p(x) = Mg$. Prema tome, rješavamo diferencijalnu jednadžbu

   $$-Mgu''(x) = -\rho g.$$

Za konkretne podatke imamo

$$-15 \cdot 10u''(x) = -\frac{2}{1} \cdot 10,$$

tj.

$$u''(x) = \frac{2}{15}.$$

Nakon što integriramo lijevu i desnu stranu po x, dobijemo

$$u'(x) = \frac{2}{15}x + C_1.$$

Još jedna integracija po x daje funkciju progiba žice,

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 + C_1x + C_2.$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz rubnih uvjeta na sljedeći način:

a) Rubni uvjet $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) daje $C_2 = 0$, dok iz uvjeta $u(1) = 0$ (desni kraj žice je pričvršćen) dobivamo $C_1 = -\frac{1}{15}$. Prema tome, u slučaju kada su oba kraja žice pričvršćena, ravnotežni oblik žice je

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{15}x, \quad x \in [0, 1].$$

b) Iz rubnog uvjeta $u(0) = 0$ slijedi $C_2 = 0$, dok uvjet $u'(1) = 0$ (desni kraj žice je slobodan) daje $C_1 = -\frac{2}{15}$. Dakle, progib žice u ravnotežnom položaju opisan je funkcijom

$$u(x) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{15}x, \quad x \in [0, 1].$$

2. Teška homogena žica duljine $L = 2$ i mase $m = 4$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 12$ na lijevom kraju i nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 4$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je njezin drugi kraj slobodan.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu ravnoteže žice

$$-Mgu''(x) + bu(x) = -\frac{m}{L}g.$$

Konkretno, ukoliko uzmemo da je konstanta gravitacije $g = 10$, jednadžba ravnoteže ima oblik

$$-120u''(x) + 4u(x) = -20, \text{ tj.}$$

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = \frac{1}{6}.$$

Treba riješiti gornju običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Rješenje ovakve jednadžbe je oblika

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x),$$

gdje je $u_H(x)$ rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe

$$u''(x) - \frac{1}{30}u(x) = 0,$$

a $u_P(x)$ je partikularno rješenje nehomogene jednadžbe. Da bismo odredili $u_H(x)$, moramo naći rješenja pripadne karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - \frac{1}{30} = 0.$$

Karakteristična jednadžba ima dva različita realna rješenja, $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{30}}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}$, tako da je

$$u_H(x) = C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x}, \quad x \in [0, 2].$$

Desna strana diferencijalne jednadžbe je jednaka konstanti, pa možemo pretpostaviti da je $u_P(x) = A$. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u_P u diferencijalnu jednadžbu

$$u_P''(x) - \frac{1}{30}u_P(x) = \frac{1}{6}$$

dobijemo $A = -5$ jer je $u_P''(x) = 0$. Prema tome, opće rješenje jednadžbe ravnoteže jest

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x} - 5, \quad x \in [0, 2].$$

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz rubnih uvjeta. Iz $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) i $u'(2) = 0$ (desni kraj žice je slobodan) dobijemo sustav jednadžbi s nepoznanicama C_1 i C_2:

$$C_1 + C_2 = 5,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{30}} e^{-\frac{2}{\sqrt{30}}} C_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} e^{\frac{2}{\sqrt{30}}} C_2 = 0,$$

budući da je

$$u'(x) = -\frac{1}{\sqrt{30}} C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + \frac{1}{\sqrt{30}} C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x}.$$

Uvrštavanjem izraza $C_2 = 5 - C_1$ dobivenog iz prve jednadžbe u drugu jednadžbu, dobijemo rješenje sustava

$$C_1 = \frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1},$$

$$C_2 = 5 - \frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1}.$$

Prema tome, konačno rješenje postavljenog problema ima sljedeći oblik:

$$u(x) = \left(\frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1}\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{30}}x} + \left(5 - \frac{5}{e^{-\frac{4}{\sqrt{30}}} + 1}\right)e^{\frac{1}{\sqrt{30}}x} - 5, \quad x \in [0, 2].$$

3. Teška homogena žica linijske gustoće $\rho = 1$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 14$ na kraju $x = 3$ i nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 5$. Odredite ravnotežni oblik žice ako je drugi kraj pričvršćen.

   Rješenje: Rješavamo jednadžbu ravnoteže žice

   $$-Mgu''(x) + bu(x) = -\rho g, \quad x \in [0, 3].$$

   Konkretno, uzmemo li da je konstanta gravitacije $g = 10$ te zadane podatke, jednadžba ravnoteže ima oblik

   $$-140u''(x) + 5u(x) = -10, \text{ tj.}$$

   $$u''(x) - \frac{1}{28}u(x) = \frac{1}{14}.$$

   Treba riješiti gornju običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Njeno rješenje je oblika

   $$u(x) = u_H(x) + u_P(x),$$

   gdje je $u_H(x)$ rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe

   $$u''(x) - \frac{1}{28}u(x) = 0,$$

   a $u_P(x)$ je partikularno rješenje zadane nehomogene jednadžbe. Da bismo odredili $u_H(x)$, moramo naći rješenja pripadne karakteristične jednadžbe

   $$\lambda^2 - \frac{1}{28} = 0.$$

Karakteristična jednadžba ima dva različita realna rješenja, $\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, tako da je

$$u_H(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}x} + C_2 e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}x}.$$

Desna strana diferencijalne jednadžbe jednaka je konstanti $\frac{1}{14}$, tj.

$$\frac{1}{14} = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$$

za $\alpha = \frac{1}{14}$ i $\omega = 0$, pa možemo pretpostaviti da je $u_P(x) = A = const.$. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u_P u diferencijalnu jednadžbu

$$u_P''(x) - \frac{1}{28}u_P(x) = \frac{1}{14},$$

dobijemo $A = -2$ jer je $u_P''(x) = 0$. Prema tome, rješenje jednadžbe ravnoteže je

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}x} + C_2 e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}x} - 2, \quad x \in [0,3].$$

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz rubnih uvjeta. Iz $u(0) = 0$ (lijevi kraj žice je pričvršćen) i $u(3) = 0$ (desni kraj žice je pričvršćen) dobijemo sustav jednadžbi s nepoznanicama C_1 i C_2:

$$C_1 + C_2 = 2,$$

$$e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} C_1 + e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}} C_2 = 2.$$

Uvrštavanjem izraza $C_2 = 2 - C_1$ dobivenog iz prve jednadžbe u drugu jednadžbu dobijemo rješenje sustava

$$C_1 = \frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}},$$

$$C_2 = 2 - \frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}.$$

Konačno rješenje postavljenog problema ima oblik:

$$u(x) = \left(\frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}\right) e^{-\frac{1}{2\sqrt{7}}x} + \left(2 - \frac{2 - 2e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}{e^{-\frac{3}{2\sqrt{7}}} - e^{\frac{3}{2\sqrt{7}}}}\right) e^{\frac{1}{2\sqrt{7}}x} - 2,$$

za $x \in [0,3]$.

4. Teška žica sastavljena je od dva homogena materijala na $[0, 2]$ i $(2, 5]$ s linijskim gustoćama $\rho_1 = 2$ i $\rho_2 = 3$ redom. Odredite ravnotežni položaj žice napete horizontalno utegom mase $M = 20$ na desnom kraju, dok je drugi kraj žice slobodan.

   Rješenje: Otpor sredstva nije zadan pa ga smatramo zanemarivim, tj. $q(x) = 0$. Budući da se žica sastoji od dva različita materijala rješavamo dvije jednadžbe:

$$-Mgu''(x) = -\rho_1 g, \quad x \in [0, 2] \text{ i}$$

$$-Mgu''(x) = -\rho_2 g, \quad x \in (2, 5].$$

   Prema tome, rješavamo jednadžbe

$$-200u''(x) = -20, \quad x \in [0, 2] \text{ i}$$

$$-200u''(x) = -30, \quad x \in (2, 5], \text{ tj.}$$

$$u''(x) = \frac{1}{10}, \quad x \in [0, 2] \text{ i}$$

$$u''(x) = \frac{3}{20}, \quad x \in (2, 5].$$

   Iz prve jednadžbe na $[0, 2]$ dobivamo $u'(x) = \frac{1}{10}x + C_1$ i odatle

$$u(x) = \frac{1}{20}x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in [0, 2].$$

   Jednadžba na $(2, 5]$ daje $u'(x) = \frac{3}{20}x + D_1$ i odatle

$$u(x) = \frac{3}{40}x^2 + D_1 x + D_2, \quad x \in (2, 5].$$

   Iz rubnog uvjeta $u'(0) = 0$ (lijevi kraj žice je slobodan) slijedi $C_1 = 0$. Rubni uvjet $u(5) = 0$ daje $D_2 = -5D_1 - \frac{15}{8}$. Prema tome,

$$u(x) = \frac{1}{20}x^2 + C_2, \quad x \in [0, 2] \text{ i}$$

$$u(x) = \frac{3}{40}x^2 + D_1 x - 5D_1 - \frac{15}{8}, \quad \in (2, 5].$$

   Konstante C_2 i D_1 odredimo tako da iskoristimo dva prirodna uvjeta

   - neprekidnost žice na spoju dva materijala, tj. $u(2-) = u(2+)$ i
   - neprekidnost kontaktne sile (glatkoću žice) na spoju dva materijala, tj. $u'(2-) = u'(2+)$.

Imamo:

$$u(2-) = \frac{1}{5} + C_2 = \frac{3}{10} - 3D_1 - \frac{15}{8} = u(2+) \text{ i}$$
$$u'(2-) = \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + D_1 = u'(2+),$$

odakle slijedi da je $D_1 = -\frac{1}{10}$ i $C_2 = -\frac{59}{40}$. Dakle, ravnotežni položaj žice određen je funkcijom

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x^2 - \frac{59}{40}, & x \in [0,2] \\ \frac{3}{40}x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{11}{8}, & x \in (2,5]. \end{cases}$$

5. Teška homogena žica mase $m = 4$ i duljine $L = 2$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 25$ na kraju $x = 0$. Na dio $(1,2]$ djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 3$. Odredite progib ako je drugi kraj žice pričvršćen.

   Rješenje: Budući da se lijevi dio žice, $[0,1]$, nalazi u sredstvu sa $q(x) = 0$, a desni komad žice, $(1,2]$, u drugom sredstvu sa $q(x) = b = 3$, rješavamo dva problema

$$-250u''(x) = -\frac{4}{2} \cdot 10 = -20, \quad x \in [0,1] \text{ i}$$
$$-250u''(x) + 3u(x) = -20, \quad x \in (1,2], \text{ tj.}$$
$$u''(x) = \frac{2}{25}, \quad x \in [0,1] \text{ i}$$
$$u''(x) - \frac{3}{250}u(x) = \frac{2}{25}, \quad x \in (1,2].$$

   Rješenje prve jednadžbe je

$$u(x) = \frac{1}{25}x^2 + C_1 x + C_2, \quad x \in [0,1].$$

   Druga jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Rješenje takve jednadžbe tražimo u obliku

$$u(x) = u_H(x) + u_P(x),$$

   gdje je $u_H(x)$ rješenje pripadne homogene jednadžbe, a $u_P(x)$ partikularno rješenje polazne jednadžbe. Njena karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 - \frac{3}{250} = 0$$

ima rješenja $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}$ i $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}$. Prema tome,

$$u_H(x) = D_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} + D_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x},$$

za konstante $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $u_P(x) = A = const.$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo $A = -\frac{20}{3}$. Sada imamo i progib žice

$$u(x) = D_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} + D_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} - \frac{20}{3}, \quad x \in (1, 2].$$

Rubni uvjet $u(0) = 0$ daje $C_2 = 0$. Iz rubnog uvjeta $u(2) = 0$ dobivamo

$$D_1 e^{-\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} + D_2 e^{\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - \frac{20}{3} = 0,$$

tako da je

$$D_2 = \frac{20}{3} e^{-\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - D_1 e^{-\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}}.$$

Konstante C_1 i D_1 određujemo iz prirodnih uvjeta:

- neprekidnost žice u točki $x = 1$, tj. $u(1-) = u(1+)$,
- neprekidnost kontaktne sile (glatkoća žice) u točki $x = 1$, tj. $u'(1-) = u'(1+)$.

Neprekidnost nam daje sljedeću jednadžbu s nepoznanicama C_1 i D_1

$$u(1-) = \frac{1}{25} + C_1$$
$$= D_1 \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - e^{-\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} \right) + \frac{20}{3} \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - 1 \right) = u(1+),$$

a glatkoća drugu jednadžbu

$$u'(1-) = \frac{2}{25} + C_1$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}} \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} + e^{-\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} \right) D_1 + \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{10}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} = u'(1+).$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge lako se može izračunati konstanta D_1, a zatim uvrštavanjem u bilo koju od jednadžbi i konstanta C_1. Na kraju se dobivene konstante uvrste u progib žice:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x^2 + C_1 x, & x \in [0, 1] \\ D_1 e^{-\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} + \left(\frac{20}{3} e^{-\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} - D_1 e^{-\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}} \right) e^{\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}x} - \frac{20}{3}, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

6. Teška žica $[0, 3]$ sastavljena je od dva homogena materijala na $[0, 1]$ i $(1, 3]$, s linijskim gustoćama $\rho_1 = 1$ i $\rho_2 = 3$. Odredite ravnotežni položaj žice napete horizontalno utegom mase $M = 18$ na desnom kraju žice, dok je drugi kraj žice pričvršćen.

7. Teška homogena žica mase $m = 2$ i duljine $L = 2$ napeta je horizontalno utegom mase $M = 22$ na kraju $x = 0$. Na dio $[0, 1]$ djeluje sila s koeficijentom elastičnosti $q(x) = b = 1$. Odredite progib žice ako je njezin drugi kraj slobodan.

2.3 Oscilacije žice

Promatramo napetu žicu $[0, L]$ linijske gustoće $\rho(x), x \in [0, L]$. Napetost žice opisana je funkcijom $p(x, t)$, $x \in [0, L], t \geq 0$. Žica oscilira u elastičnom sredstvu s koeficijentom elastičnosti $q(x), x \in [0, L]$. Pored toga, na žicu djeluje i vanjska sila linijskom gustoćom $f(x, t), x \in [0, L], t \geq 0$. Progib žice $u(x, t), x \in [0, L], t \geq 0$ opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + q(x)u(x,t) = f(x,t).$$

Gornju jednadžbu ćemo rješavati za tri specijalna slučaja konstantno napete homogene žice u neelastičnom sredstvu:

a) uz homogene rubne uvjete bez utjecaja vanjske sile,

b) uz homogene rubne uvjete pod utjecajem vanjske sile i

c) uz nehomogene rubne uvjete bez utjecaja vanjske sile.

a) Promotrimo specijalan slučaj gornje parcijalne diferencijalne jednadžbe kada je žica homogena ($\rho(x) = \rho > 0$), a napetost žice je konstantna ($p(x, t) = p > 0$). Osim toga, pretpostavimo da žica nije uronjena u elastično sredstvo ($q(x) = 0$) i da na nju ne djeluje vanjska sila ($f(x, t) = 0$). Dakle, promatramo parcijalnu diferncijalnu jednadžbu oblika

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \text{ tj.}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$. Ovu diferencijalnu jednadžbu zovemo *valna jednadžba*. Ona opisuje gibanje homogene žice koja je konstantno napeta u neelastičnom sredstvu i bez utjecaja vanjske sile. Rubni i početni uvjeti osiguravaju jedinstvenost rješenja diferencijalne jednadžbe. Za početak, pretpostavimo homogene rubne uvjete

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

početne uvjete koji određuju početni oblik žice

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad x \in [0, L]$$

i početnu brzinu žice

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0, L].$$

Metodom separacije varijabli (pogledajte [3],4.2) odredimo rješenje valne jednadžbe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + F_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

pri čemu za svako $n \in \mathbb{N}$ koeficijente E_n i F_n računamo na sljedeći način:

$$E_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x \quad \text{i}$$

$$F_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L \beta(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

b) Promotrimo sada oscilacije homogene žice koja je konstantno napeta u neelastičnom sredstvu i pod utjecajem vanjske sile. Gibanje žice $u(x,t)$ opisuje parcijalna diferencijalna jednadžba oblika

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \ \text{tj.}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t),$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$ i $h(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho}$. Problem ćemo rješavati uz homogene rubne uvjete

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

i početne uvjete

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [0,L] \quad \text{i}$$

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,L].$$

Rješenje jednadžbe tražit ćemo u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

pri čemu za svako $n \in \mathbb{N}$ funkcija $D_n(t)$ predstavlja rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$D_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{L} \right)^2 D_n(t) = A_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x,$$

uz početne uvjete

$$D_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \alpha(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x \quad \text{i}$$

$$D_n'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \beta(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x.$$

c) Vratimo se sada na valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$. Tražimo njeno rješenje uz nehomogene rubne uvjete

$$u(0,t) = a \ \text{ i } \ u(L,t) = b, \quad t \geq 0$$

i uz početne uvjete

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [0,L] \quad \text{i}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,L].$$

Opisani problem rješavamo tako da rješenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x),$$

pri čemu je $v(x,t)$ rješenje valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},$$

uz homogene rubne uvjete

$$v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

i početne uvjete

$$v(x,0) = \alpha_1(x) = \alpha(x) - w(x), \quad x \in [0,L] \quad \text{i}$$

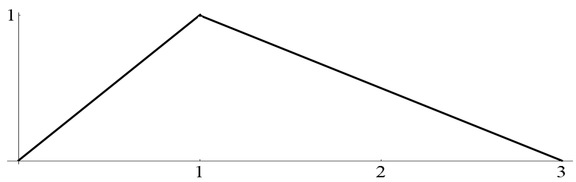
$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0,L],$$

a $w(x)$ je rješenje jednadžbe $w''(x) = 0$ uz rubne uvjete $w(0) = a$ i $w(L) = b$. Lako se pokaže da je

$$w(x) = \frac{b-a}{L}x + a.$$

1. Pronađite zakon titranja homogene žice duljine $L = 3$, napetosti $p = 8$, linijske gustoće $\rho = 2$, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na trećini svoje duljine počevši od lijevog ruba za 1 , a linearna (afina) je na ostatku žice. Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

   Rješenje: Rješavamo valnu jednadžbu
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho} = 4$ i $c = 2$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(3,t) = 0$, te početne uvjete
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(3-x), & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$
i $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Početni položaj žice opisan funkcijom $u(x,0)$ prikazan je na Slici 2.6. Rješenje postavljenog inicijalno-rubnog problema tražimo u



Slika 2.6: Početni položaj žice

obliku:
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + F_n \sin \frac{cn\pi t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{2n\pi t}{3} + F_n \sin \frac{2n\pi t}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}. \end{aligned}$$

Odmah vidimo da je $F_n = 0, n \in \mathbb{N}$, jer je početna brzina žice jednaka nuli. Ostaje izračunati
$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x,0) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathsf{d}x \\ &= \frac{2}{3} \left[\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{3} \mathsf{d}x + \frac{1}{2} \int_1^3 (3-x) \sin \frac{n\pi x}{3} \mathsf{d}x \right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Najprije odredimo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{array}\right| \\
&= -\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^1 \\
&= -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Nakon toga izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_1^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{cc} u = 3-x & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{array}\right| \\
&= -\frac{3}{2n\pi}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_1^3 \\
&\quad - \frac{3}{2n\pi}\int_1^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{6}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_1^3 \\
&= \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3} = \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Traženi zakon titranja zato je

$$u(x,t) = \frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi t}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}, \quad x \in [0,3], \quad t \geq 0.$$

2. Homogena žica duljine $L = 7$, napetosti $p = 64$ i linijske gustoće $\rho = 4$ učvršćena je na krajevima. Žica se pobudi na titranje udarom krutog ravnog čekića širine $\epsilon = 0.2$ u točki $x = 3$ tako da početna brzina žice na segmentu $[2.9, 3.1]$ bude jednaka 1. Riješite problem oscilacije žice ako je u trenutku $t = 0$ žica postavljena horizontalno.

Rješenje: Rješavamo valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne uvjete $u(0,t) = u(7,t) = 0$ (žica je učvršćena na krajevima), te početne uvjete $u(x,0) = 0$ (u početnom trenutku žica se nalazi u horizontalnom položaju) i

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2.9, \\ 1, & 2.9 \le x < 3.1, \\ 0, & 3.1 \le x \le 7. \end{cases}$$

Znamo da rješenje postavljenog problema ima oblik

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cos \frac{4n\pi t}{7} + F_n \sin \frac{4n\pi t}{7} \right) \sin \frac{n\pi x}{7}.$$

Budući da se žica u trenutku $t = 0$ nalazi u horizontalnom položaju ($u(x,0) = 0$), vrijedi $E_n = 0$ za svaki prirodni broj n. Odredimo koeficijente F_n:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L \beta(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x = \frac{2}{4n\pi} \int_{2.9}^{3.1} \sin \frac{n\pi x}{7} \mathrm{d}x \\ &= \frac{7}{2n^2\pi^2} \left(-\cos \frac{n\pi x}{7} \right) \Bigg|_{2.9}^{3.1} = \frac{7}{2n^2\pi^2} \left(\cos \frac{2.9n\pi}{7} - \cos \frac{3.1n\pi}{7} \right) \\ &= \frac{7}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{7} \sin \frac{n\pi}{70} \end{aligned}$$

Traženi zakon titranja zato je

$$u(x,t) = \frac{7}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{3n\pi}{7} \sin \frac{n\pi}{70} \sin \frac{4n\pi t}{7} \sin \frac{n\pi x}{7},$$

za $x \in [0,7]$ i $t \ge 0$.

3. Homogena žica linijske gustoće $\rho = 1$, duljine $L = 10$, konstantno napeta napetošću $p = 4$, pričvršćena je na krajevima i titra pod utjecajem vanjske sile koja po jedinici duljine iznosi $f(x,t) = 6$. Pronađite zakon titranja ako je žica u početnom trenutku horizontalno postavljena $\left(u(x,0) = \alpha(x) = 0\right)$ i ako je početna brzina jednaka nuli $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0\right)$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t) = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6, \quad x \in [0,10], \quad t \geq 0,$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho} = 4$ i $h(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho} = 6$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(10,t) = 0$, te početne uvjete $u(x,0) = \alpha(x) = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$. Rješenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(t)\sin\frac{n\pi x}{10},$$

pri čemu za svaki prirodan broj n funkcija $D_n(t)$ zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu

$$D_n''(t) + \frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}D_n(t) = A_n(t), \text{ tj.}$$

$$D_n''(t) + \frac{4n^2\pi^2}{100}D_n(t) = A_n(t), \text{ odnosno}$$

$$D_n''(t) + \frac{n^2\pi^2}{25}D_n(t) = A_n(t),$$

uz uvjete $D_n(0) = D_n'(0) = 0$, koji slijede neposredno iz početnih uvjeta $u(x,0) = \alpha(x) = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$. Naime,

$$D_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \alpha(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = 0 \quad \text{i}$$

$$D_n'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \beta(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = 0.$$

Pri tome je

$$A_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x = \frac{2}{10}\int_0^{10} 6\sin\frac{n\pi x}{10}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{6}{5}\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} = \frac{12}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ paran ,} \\ \frac{24}{n\pi}, & \text{za } n \text{ neparan .} \end{cases}$$

a) Za paran prirodni broj n imamo jednadžbu

$$D_n''(t) + \frac{n^2\pi^2}{25} D_n(t) = 0,$$

uz uvjete $D_n(0) = D_n'(0) = 0$. Rješenje karakteristične jednadžbe je par konjugirano kompleksnih brojeva $\lambda_{1,2} = \pm\frac{n\pi}{5}i$, tako da rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za $D_n(t)$ ima oblik

$$D_n(t) = C_1 \cos\frac{n\pi t}{5} + C_2 \sin\frac{n\pi t}{5}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobijemo $C_1 = C_2 = 0$. Prema tome, za paran n imamo samo trivijalno rješenje $D_n(t) = 0$.

b) Za neparne prirodne brojeve n rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima

$$D_n''(t) + \frac{n^2\pi^2}{25} D_n(t) = \frac{24}{n\pi}.$$

Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje oblika (pogledajte [2],1.4.3)

$$D_n(t) = D_n^H(t) + D_n^P(t),$$

gdje je D_n^H rješenje pripadne homogene jednadžbe, a D_n^P partikularno rješenje. Rješenje D_n^H homogene jednadžbe određujemo kao za slučaj a) i ono glasi

$$D_n^H(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi t}{5} + \beta_n \sin\frac{n\pi t}{5},$$

pri čemu su α_n i β_n realni brojevi. Na desnoj strani nehomogene jednadžbe nalazi se konstanta, tako da možemo pretpostaviti da je partikularno rješenje D_n^P također konstantno, $D_n^P(t) = \gamma_n$. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo $\gamma_n = \frac{600}{n^3\pi^3}$. Prema tome,

$$D_n(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi t}{5} + \beta_n \sin\frac{n\pi t}{5} + \frac{600}{n^3\pi^3}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta $D_n(0) = D_n'(0) = 0$, pri čemu je

$$D_n'(t) = -\frac{n\pi\alpha_n}{5} \sin\frac{n\pi t}{5} + \frac{n\pi\beta_n}{5} \cos\frac{n\pi t}{5},$$

izračunamo $\alpha_n = -\frac{600}{n^3\pi^3}$ i $\beta_n = 0$. Sada za neparne prirodne brojeve imamo

$$D_n(t) = -\frac{600}{n^3\pi^3} \cos\frac{n\pi t}{5} + \frac{600}{n^3\pi^3}.$$

Dakle, zakon titranja ima oblik

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{600}{(2k+1)^3\pi^3}\left(1-\cos\frac{(2k+1)\pi t}{5}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{10} \\
&= \frac{1200}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin^2\frac{(2k+1)\pi t}{10}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{10},
\end{aligned}
$$

za $x \in [0,10]$ i $t \geq 0$.

4. Riješite problem slobodnih oscilacija žice duljine $L = 5$, gustoće $\rho = 3$ i napetosti $p = 27$. Pri tome je lijevi kraj žice učvršćen na visini 1 $\big(u(0,t) = 1\big)$, a desni kraj žice na visini 11 $\big(u(5,t) = 11\big)$, početni položaj žice je opisan funkcijom $u(x,0) = \alpha(x) = 1 + \sin\frac{3\pi x}{5}$, a početne brzine nema $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0\right)$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

uz rubne i početne uvjete navedene u zadatku. Rješenje tražimo u obliku $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, gdje je $w(x) = \frac{11-1}{5}x + 1 = 2x + 1$, a $v(x,t)$ predstavlja rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

uz homogene rubne uvjete $v(0,t) = v(5,t) = 0$ i početne uvjete $v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \alpha_1(x) = \sin\frac{3\pi x}{5} - 2x$ i $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$. Znamo da je rješenje ovog problema oblika

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\cos\frac{3n\pi t}{5} + F_n\sin\frac{3n\pi t}{5}\right)\sin\frac{n\pi x}{5},$$

za $x \in [0,5]$ i $t \geq 0$. Pri tome je $F_n = 0$ za svaki prirodan broj n, jer je

$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$. Preostaje izračunati

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{5}\int_0^5 \left(\sin\frac{3\pi x}{5} - 2x\right)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x \\ &= \frac{2}{5}\int_0^5 \sin\frac{3\pi x}{5}\sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x - \frac{4}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x. \end{aligned}$$

Vrijedi (ortogonalnost trigonometrijskih funkcija):

$$\frac{2}{5}\int_0^5 \sin\frac{3\pi x}{5}\sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 3, \\ 0, & \text{za } n \neq 3. \end{cases}$$

Izračunamo i drugi integral

$$\begin{aligned} -\frac{4}{5}\int_0^5 x\sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x &= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \sin\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x & v = -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5} \end{array} \right| \\ &= \frac{4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 - \frac{4}{n\pi}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\mathsf{d}x \\ &= \frac{20}{n\pi}\cos n\pi - \frac{20}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5 = \frac{20}{n\pi}\cos n\pi. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} v(x,t) &= -\frac{20}{\pi}\cos\frac{3\pi t}{5}\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{10}{\pi}\cos\frac{6\pi t}{5}\sin\frac{2\pi x}{5} \\ &+ \left(1 - \frac{20}{3\pi}\right)\cos\frac{9\pi t}{5}\sin\frac{3\pi x}{5} \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{20}{n\pi}\cos n\pi\cos\frac{3n\pi t}{5}\sin\frac{n\pi x}{5}. \end{aligned}$$

Problem slobodnih oscilacija žice je opisan funkcijom

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{20}{\pi}\cos\frac{3\pi t}{5}\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{10}{\pi}\cos\frac{6\pi t}{5}\sin\frac{2\pi x}{5} \\ &+ \left(1 - \frac{20}{3\pi}\right)\cos\frac{9\pi t}{5}\sin\frac{3\pi x}{5} \\ &+ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{20}{n\pi}(-1)^n\cos\frac{3n\pi t}{5}\sin\frac{n\pi x}{5} + 2x + 1. \end{aligned}$$

5. Pronađite zakon titranja homogene žice duljine 5, napetosti 36 i linijske gustoće 4, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na prvoj četvrtini svoje duljine za 1, a na ostatku žice je linearna (afina). Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

6. Pronađite zakon titranja homogene žice duljine 10, napetosti 100 i linijske gustoće 4, koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnoteženog položaja na tri četvrtine svoje duljine za 2. Početna brzina jednaka je $\beta(x) = 5$, a utjecaja vanjske sile nema.

7. Homogena žica duljine 8, napetosti 50 i linijske gustoće 2 učvršćena je na krajevima. Žica se pobudi na titranje udarom krutog ravnog čekića širine 0.4 u točki $x = 2$ tako da početna brzina žice na segmentu $[1.8, 2.2]$ bude jednaka 2. Riješite problem oscilacije žice ako je u trenutku $t = 0$ žica postavljena horizontalno.

8. Homogena žica linijske gustoće 2, duljine 15, konstantno napeta napetošću 6, pričvršćena je na krajevima i titra pod utjecajem vanjske sile koja po jedinici duljine iznosi 4. Pronađite zakon titranja ako je u početnom trenutku žica mirna $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\right)$ i horizontalno postavljena $\big(u(x,0) = 0\big)$.

9. Homogena žica linijske gustoće 5, duljine 7, konstantno napeta napetošću 5, pričvršćena je na krajevima i titra pod utjecajem vanjske sile koja po jedinici duljine iznosi 5. Pronađite zakon titranja ako je $u(x,0) = \alpha(x) = 0$ i $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \beta(x) = 0$.

10. Riješite problem oscilacija žice duljine 3, gustoće 1, napetosti 4, ako nema utjecaja vanjske sile. Pri tome za progib u vrijedi $u(0,t) = 2$, $u(3,t) = 8$, $u(x,0) = 2 + \sin\frac{\pi x}{3}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

11. Homogena žica gustoće 1 i duljine 4 oscilira pod utjecajem vanjske sile $f(x,t) = 4x(4-x)\sin 2t$. Riješite problem titranja ako je napetost žice jednaka 2, uz rubne i početne uvjete $u(0,t) = 2$, $u(4,t) = 6$, $u(x,0) = x + 2$ i $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

12. Homogena žica gustoće 2 i duljine 2 oscilira pod utjecajem vanjske sile $f(x,t) = 2x(2-x)\sin t$. Riješite problem titranja ako je napetost žice jednaka 1, uz rubne i početne uvjete $u(0,t) = 5$, $u(2,t) = 9$, $u(x,0) = 2x+5$ i $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

2.4 Provođenje topline kroz štap

Promatramo problem provođenja topline kroz štap $[0, L]$. Neka je $u(x,t)$ temperatura poprečnog presjeka štapa u točki x u trenutku t, $\gamma(x)$ toplinski kapacitet, $\delta(x)$ koeficijent provođenja i $f(x,t)$ količina topline koja se izvana prenese na štap u točki x u trenutku t. Tada jednadžba provođenja topline ima oblik

$$\gamma(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t),$$

za $x \in [0, L]$ i $t \geq 0$. Mjerne jedinice za duljinu (m), masu (kg) i vrijeme (s) pripadaju SI sustavu, dok temperaturu mjerimo u stupnjevima Celzija.

Gornju jednadžbu ćemo rješavati za pet specijalnih slučajeva:

a) stacionarno provođenje topline kroz štap,

b) provođenje topline kroz homogeni, po dužini izolirani štap s homogenim rubnim uvjetima,

c) provođenje topline kroz homogeni štap s homogenim rubnim uvjetima uz vanjski prijenos topline,

d) provođenje topline kroz homogeni, po dužini izolirani štap s izoliranim rubovima i

e) provođenje topline kroz homogeni, po dužini izolirani štap s nehomogenim rubnim uvjetima.

a) Pretpostavimo najprije da temperatura poprečnog presjeka štapa ne ovisi o vremenu. Tada promatramo problem *stacionarnog* provođenja topline, koji je opisan jednadžbom

$$-(\delta(x)u'(x))' = f(x).$$

Ovo je obična diferencijalna jednadžba drugog reda. Ona ima jedinstveno rješenje uz rubne uvjete $u(0) = a$ i $u(L) = b$, tj. u slučaju kada je lijevi rub štapa na temperaturi a, a desni na temperaturi b. Primijetimo da isti tip jednadžbe opisuje ravnotežu žice koja nije uronjena u elastično sredstvo (vidi točku 1.2, str. 10)

b) Promotrimo sada dinamičko provođenje topline, tj. provođenje topline ovisno o vremenu. Pretpostavimo da su toplinski kapacitet $\gamma(x) = \gamma > 0$ i koeficijent provođenja $\delta(x) = \delta > 0$ konstantni i da je plašt štapa izoliran, tj. $f(x,t) = 0$. Dobivamo jednadžbu provođenja homogenog izoliranog štapa

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

pri čemu je $c^2 = \frac{\delta}{\gamma}$. Gornja jednadžba ima jedinstveno rješenje uz homogene rubne uvjete $u(0,t) = u(L,t) = 0$ za $t \geq 0$, tj. u slučaju kada su rubovi štapa konstantno na temperaturi nula i uz početnu razdiobu temperature $u(x,0) = g(x)$ za $x \in [0,L]$. Metodom separacije varijabli (pogledajte [3],5.1) dobijemo oblik rješenja jednadžbe provođenja uz spomenute uvjete

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijente E_n određujemo iz početnog uvjeta kao

$$E_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

c) Pogledajmo slučaj kada štap nije izoliran, tj. postoji vanjski prijenos topline $f \neq 0$. Neka su sve ostale pretpostavke iste kao u prethodnom slučaju. To znači da su toplinski kapacitet $\gamma(x) = \gamma > 0$ i koeficijent provođenja $\delta(x) = \delta > 0$ konstantni. Jednadžba provođenja ima oblik

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t),$$

gdje je $c^2 = \frac{\delta}{\gamma}$ i $h(x,t) = \frac{f(x,t)}{\gamma}$. Ovdje također pretpostavljamo da su rubovi štapa konstantno na temperaturi nula, tj. $u(0,t) = u(L,t) = 0$ za $t \geq 0$ i da je početna razdioba temperature dana sa $u(x,0) = g(x)$ za $x \in [0,L]$. Rješenje opisanog problema je oblika (pogledajte [3],5.1)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in [0,L], \quad t \geq 0,$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $E_n(t)$ predstavlja rješenje obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$E_n'(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 E_n(t) = A_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x,$$

$t \geq 0$, uz početni uvjet

$$E_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x.$$

d) Promotrimo sada problem provođenja topline kroz homogeni, po dužini izolirani štap s izoliranim rubovima. U tom slučaju rješavamo jednadžbu provođenja

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

gdje je $c^2 = \frac{\delta}{\gamma}$, uz rubne uvjete $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$ i početni uvjet $u(x,0) = g(x)$ za $x \in [0, L]$. Metodom separacije varijabli (pogledajte [3],5.1) dobijemo rješenje jednadžbe provođenja

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0,$$

pri čemu za svaki $n \in \mathbb{N}$ koeficijent E_n određujemo prema

$$E_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \mathrm{d}x, \text{ dok je}$$

$$E_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) \mathrm{d}x.$$

e) Konačno, promotrimo problem provođenja topline kroz po dužini izolirani homogeni štap uz nehomogene rubne uvjete $u(0,t) = a$ i $u(L,t) = b$ za $t \geq 0$ (temperatura lijevog ruba štapa u svakom trenutku iznosi $a°C$, a desnog $b°C$) i početni uvjet $u(x,0) = g(x)$ za $x \in [0, L]$ (početna razdioba temperature štapa je opisana funkcijom g). Rješenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x),$$

gdje je $v(x,t)$ rješenje jednadžbe provođenja

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},$$

uz homogene rubne uvjete

$$v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

i početni uvjet

$$v(x,0) = g_1(x) = g(x) - w(x), \quad x \in [0,L],$$

a $w(x)$ je rješenje jednadžbe $w''(x) = 0$ uz rubne uvjete $w(0) = a$ i $w(L) = b$. Lako se pokaže da je

$$w(x) = \frac{b-a}{L}x + a.$$

1. Riješite problem stacionarnog provođenja topline kroz betonski štap duljine 5 ako je temperatura lijevog ruba štapa 2, a desnog ruba 15. Koeficijent provođenja topline betona je $\delta = 0.0015$. Riješite problem u slučaju da je

   a) vanjski prijenos topline jednak nuli, tj. štap je po dužini izoliran,

   b) vanjski prijenos topline konstantan i jednak 1.5.

   Rješenje:

   a) U slučaju izoliranog štapa rješavamo diferencijalnu jednadžbu -0.0015 $u'' = 0$, što je ekvivalentno s $u'' = 0$. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe ima oblik $u(x) = C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Iz rubnih uvjeta $u(0) = 2$ i $u(5) = 15$ izračunamo $C_1 = \frac{13}{5}$ i $C_2 = 2$, tako da konačno rješenje problema stacionarnog provođenja topline za navedeni izolirani štap ima oblik $u(x) = \frac{13}{5}x + 2$, $x \in [0,5]$.

   b) Za slučaj navedenog vanjskog prijenosa topline rješavamo diferencijalnu jednadžbu $-0.0015u'' = 1.5$, tj. $u'' = -1000$. Sada je $u(x) = -500x^2 + C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Iz rubnih uvjeta $u(0) = 2$ i $u(5) = 15$ izračunamo $C_1 = \frac{12513}{5}$ i $C_2 = 2$. Dakle, konačno rješenje je $u(x) = -500x^2 + \frac{12513}{5}x + 2$, $x \in [0,5]$.

2. Koeficijent provođenja štapa $[0,2]$ je $\delta(x) = x + 1$, lijevi rub štapa je na temperaturi -1, a desni na temperaturi 1. Riješite problem stacionarnog provođenja topline u slučaju da je

   a) štap po dužini izoliran,

   b) vanjski prijenos topline opisan zakonom $f(x) = \ln(x+1)$.

Rješenje:

a) U slučaju izoliranog štapa rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu oblika $-((x+1)u'(x))' = 0$. Integriranjem lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo $(x+1)u'(x) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, odakle je $u'(x) = \frac{C_1}{x+1}$. Ponovnim integriranjem dobijemo $u(x) = C_1 \ln(x+1) + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Iz rubnog uvjeta $u(0) = -1$ izračunamo $C_2 = -1$, a uvrštavanjem drugog rubnog uvjeta $u(2) = 1$ dobijemo $C_2 = \frac{2}{\ln 3}$. Rješenje problema stacionarnog provođenja za navedeni izolirani štap ima oblik

$$u(x) = \frac{2}{\ln 3} \ln(x+1) - 1, \quad x \in [0,2].$$

b) U ovom slučaju rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu

$$-((x+1)u'(x))' = \ln(x+1).$$

Integriramo njenu lijevu i desnu stranu, odakle je

$$\begin{aligned}
(x+1)u'(x) &= -\int \ln(x+1)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \ln(x+1) & \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{array} \right| \\
&= -x\ln(x+1) + \int \frac{x+1-1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&= -x\ln(x+1) + \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \\
&= -x\ln(x+1) + x - \ln(x+1) + C_1 \\
&= -(x+1)\ln(x+1) + x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Kako bismo odredili $u'(x)$ dobiveni izraz podijelimo s $x+1$:

$$u'(x) = -\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} + \frac{C_1}{x+1}.$$

Integriranjem dobijemo $u(x)$:

$$\begin{aligned}
u(x) &= -\int \ln(x+1)\mathsf{d}x + \int \frac{x}{x+1}\mathsf{d}x + C_1 \int \frac{\mathsf{d}x}{x+1} \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = \ln(x+1) & \mathsf{d}u = \frac{\mathsf{d}x}{x+1} \\ \mathsf{d}v = \mathsf{d}x & v = x \end{array} \right| \\
&= -x\ln(x+1) + \int \frac{x}{x+1}\mathsf{d}x + \int \frac{x}{x+1}\mathsf{d}x + C_1 \int \frac{\mathsf{d}x}{x+1} \\
&= -x\ln(x+1) + 2\int \frac{x+1-1}{x+1}\mathsf{d}x + C_1 \ln(x+1) \\
&= -x\ln(x+1) + 2x - 2\ln(x+1) + C_1\ln(x+1) + C_2,
\end{aligned}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem rubnog uvjeta $u(0) = -1$ izračunamo $C_2 = -1$, dok iz rubnog uvjeta $u(2) = 1$ slijedi $C_1 = 4 - \frac{2}{\ln 3}$. Dakle, rješenje problema stacionarnog provođenja topline je

$$u(x) = \left(2 - \frac{2}{\ln 3} - x\right)\ln(x+1) + 2x - 1, \quad x \in [0, 2].$$

3. Tanki homogeni štap duljine $L = 5$, toplinskog kapaciteta $\gamma = 2$ i s koeficijentom provođenja $\delta = 8$, po dužini je toplinski izoliran, dakle na njega nema prijenosa topline izvana. Neka je na krajevima štapa temperatura jednaka nuli, a početna distribucija temperature neka je dana formulom $u(x, 0) = g(x) = x(5 - x)$. Pronađite zakon provođenja topline kroz opisani štap.

   Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, gdje je $c^2 = \frac{\delta}{\gamma}$, uz homogene rubne uvjete $u(0, t) = u(5, t) = 0$ i početni uvjet $u(x, 0) = x(5 - x) = g(x)$. Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-(\frac{2n\pi}{5})^2 t} \sin \frac{n\pi}{5} x,$$

   gdje je

$$E_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \mathsf{d}x = \frac{2}{5}\int_0^5 g(x) \sin \frac{n\pi}{5} x \mathsf{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Računamo koeficijente E_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{2}{5}\int_0^5 x(5-x)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 5x - x^2 & \mathrm{d}u = (5-2x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x & v = -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5} \end{array} \right| \\
&= \frac{2}{n\pi}(x^2 - 5x)\cos\frac{n\pi x}{5}\bigg|_0^5 + \frac{2}{n\pi}\int_0^5 (5-2x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 5 - 2x & \mathrm{d}u = -2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x & v = \frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5} \end{array} \right| \\
&= \frac{10}{n^2\pi^2}(5-2x)\sin\frac{n\pi x}{5}\bigg|_0^5 + \frac{20}{n^2\pi^2}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{100}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{5}\bigg|_0^5 = \frac{100}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{200}{n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Prema tome, zakon provođenja ima oblik

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{200}{(2k+1)^3\pi^3} e^{-(\frac{2(2k+1)\pi}{5})^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x,$$

za $x \in [0,5]$ i $t \geq 0$.

4. Riješite problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xe^t$$

provođenja topline kroz homogeni štap, uz uvjete $u(0,t) = u(1,t) = 0$ i $u(x,0) = x(1-x) = g(x)$.

Rješenje: Uočimo da je u ovom slučaju $L = 1$ i $c = 1$. Rješenje tražimo u obliku

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)\sin n\pi x,$$

gdje su funkcije $E_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$E_n'(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 E_n(t) = E_n'(t) + (n\pi)^2 E_n(t) = A_n(t),$$

uz početni uvjet

$$E_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\mathsf{d}x = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\mathsf{d}x,$$

a $A_n(t)$ Fourierovi koeficijenti funkcije $h(x,t) = 2xe^t$ iz razvoja u red po sinusima,

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\mathsf{d}x = 2\int_0^1 h(x,t)\sin n\pi x\mathsf{d}x \\
&= 4\int_0^1 xe^t\sin n\pi x\mathsf{d}x = 4e^t\int_0^1 x\sin n\pi x\mathsf{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \sin n\pi x\mathsf{d}x & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{array} \right| \\
&= -\frac{4e^t}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{4e^t}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\mathsf{d}x \\
&= -\frac{4e^t}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4e^t}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1 = \frac{4e^t}{n\pi}(-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$. Dakle, treba naći rješenja jednadžbi

$$E_n'(t) + (n\pi)^2 E_n(t) = \frac{4e^t}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Znamo da je (pogledajte [2],1.3.3)

$$\begin{aligned}
E_n(t) &= e^{-\int n^2\pi^2\mathsf{d}t}\left(\int e^{\int n^2\pi^2\mathsf{d}t}(-1)^{n+1}\frac{4e^t}{n\pi}\mathsf{d}t + C\right) \\
&= e^{-n^2\pi^2 t}\left((-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi}\int e^{(1+n^2\pi^2)t}\mathsf{d}t + C\right) \\
&= e^{-n^2\pi^2 t}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi(1+n^2\pi^2)}e^t e^{n^2\pi^2 t} + Ce^{-n^2\pi^2 t} \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}e^t}{n\pi + n^3\pi^3} + Ce^{-n^2\pi^2 t}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Konstantu C ćemo odrediti iz početnog uvjeta. Najprije računamo

$$\begin{aligned}
E_n(0) &= 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x \mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x - x^2 & \mathrm{d}u = (1-2x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin n\pi x \mathrm{d}x & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{array} \right| \\
&= \frac{2}{n\pi}(x^2 - x)\cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (1-2x)\cos n\pi x \mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 1 - 2x & \mathrm{d}u = -2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos n\pi x \mathrm{d}x & v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{array} \right| \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-2x)\sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x \mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{n^3\pi^3}\cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{4}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{8}{n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$C = \begin{cases} \frac{4(-1)^n}{n\pi + n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{8}{n^3\pi^3} + \frac{4(-1)^n}{n\pi + n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

To znači da je

$$E_n(t) = \begin{cases} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi + n^3\pi^3}e^t + \frac{4(-1)^n}{n\pi + n^3\pi^3}e^{-n^2\pi^2 t}, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi + n^3\pi^3}e^t + \left(\frac{8}{n^3\pi^3} + \frac{4(-1)^n}{n\pi + n^3\pi^3}\right)e^{-n^2\pi^2 t}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Konačno rješenje problema provođenja možemo pisati u obliku

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k+1}(t)\sin(2k+1)\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} E_{2k}(t)\sin 2k\pi x,$$

za $x \in [0,1]$, $t \geq 0$.

5. Izračunajte temperaturu izoliranog homogenog štapa s izoliranim rubovima ako je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a početna razdioba temperature dana je sa

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 3 - x, & \frac{3}{2} < x \leq 3. \end{cases}$$

Rješenje: Najprije uočimo da je $c^2 = 4$ i $L = 3$. Znamo da je u slučaju izoliranih rubova rješenje problema provođenja oblika

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi}{L} x = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\frac{4n^2\pi^2}{9} t} \cos \frac{n\pi}{3} x,$$

za $x \in [0,3]$ i $t \geq 0$. Računamo koeficijente D_0 i $D_n, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L g(x) \mathsf{d}x = \frac{1}{3} \int_0^3 g(x) \mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} x \mathsf{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 (3 - x) \mathsf{d}x \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{3}{2}} + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{3}{2}}^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{9}{8} + 9 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8} \right) = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \mathsf{d}x = \frac{2}{3} \int_0^3 g(x) \cos \frac{n\pi}{3} x \mathsf{d}x \\ &= \frac{2}{3} \left(\int_0^{\frac{3}{2}} x \cos \frac{n\pi}{3} x \mathsf{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 (3 - x) \cos \frac{n\pi}{3} x \mathsf{d}x \right) \\ &= \left| \begin{array}{cc} u = x & \mathsf{d}u = \mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \cos \frac{n\pi}{3} x \mathsf{d}x & v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} x \end{array} \right| \\ &+ \left| \begin{array}{cc} u = 3 - x & \mathsf{d}u = -\mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \cos \frac{n\pi}{3} x \mathsf{d}x & v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} x \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{n\pi}\int_0^{\frac{3}{2}}\sin\frac{n\pi}{3}x\mathsf{d}x\right.\\
&\left.+\frac{3(3-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}x\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} + \frac{3}{n\pi}\int_{\frac{3}{2}}^{3}\sin\frac{n\pi}{3}x\mathsf{d}x\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}}\right.\\
&\left.-\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}\right)\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{9}{n^2\pi^2} - \frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= \frac{6}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, temperatura izoliranog homogenog štapa s izoliranim rubovima dana je funkcijom

$$
u(x,t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)e^{-\frac{4n^2\pi^2}{9}t}\cos\frac{n\pi}{3}x,
$$

za $x \in [0,3]$ i $t \geq 0$.

6. Riješite problem provođenja topline izoliranog homogenog štapa duljine $L = 5$, koji je opisan jednadžbom

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},
$$

uz rubne uvjete $u(0,t) = 2$, $u(5,t) = 12$ i početnu razdiobu temperature $u(x,0) = 2x + 2 + \sin\frac{4\pi}{5}x$.

Rješenje: Budući da rubni uvjeti nisu homogeni, rješenje tražimo u obliku

$$
u(x,t) = v(x,t) + w(x),
$$

gdje je $v(x,t)$ rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},
$$

uz homogene rubne uvjete i početni uvjet $v(x,0) = u(x,0) - w(x)$, a $w(x) = \frac{12-2}{5}x + 2 = 2x + 2$. Dakle, $v(x,0) = \sin\frac{4\pi}{5}x$. Znamo da je

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\frac{n\pi}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\frac{16n^2\pi^2}{25}t} \sin\frac{n\pi}{5}x,$$

za $x \in [0,5]$ i $t \geq 0$, pri čemu su koeficijenti dani sa

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{L}\int_0^L v(x,0)\sin\frac{n\pi}{L}x\mathsf{d}x = \frac{2}{5}\int_0^5 v(x,0)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathsf{d}x \\ &= \frac{2}{5}\int_0^5 \sin\frac{4\pi}{5}x\sin\frac{n\pi}{5}x\mathsf{d}x = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 4, \\ 0, & \text{za } n \neq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Posljednja jednakost u gornjem nizu vrijedi zbog svojstva ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija. Prema tome,

$$v(x,t) = e^{-\frac{256\pi^2}{25}t}\sin\frac{4\pi}{5}x,$$

pa je konačno rješenje problema provođenja

$$u(x,t) = e^{-\frac{256\pi^2}{25}t}\sin\frac{4\pi}{5}x + 2x + 2, \quad x \in [0,5], \quad t \geq 0.$$

7. Riješite problem
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xe^t$$
provođenja topline kroz homogeni štap, uz uvjete $u(0,t) = u(4,t) = 0$ i $u(x,0) = x(4-x)$.

8. Riješite problem provođenja topline kroz izolirani homogeni štap s izoliranim rubovima ako je
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
a početna razdioba temperature dana je formulom
$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x, & 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

9. Odredite temperaturu izoliranog homogenog štapa ako je pripadni problem provođenja topline opisan sa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(8,t) = 0,$$

a početna razdioba temperature dana je formulom

$$u(x,0) = g(x) = \cos\frac{\pi}{4}x.$$

10. Riješite problem provođenja topline kroz izolirani homogeni štap duljine $L = 7$, koji je opisan jednadžbom

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

uz rubne uvjete $u(0,t) = 1$, $u(7,t) = 8$ i početnu razdiobu temperature $u(x,0) = x + 1 + \sin\frac{3\pi}{7}x$.

2.5 Ravnoteža i oscilacije membrane

Promotrimo membranu Ω u ravnini. Pretpostavljamo da je ona homogena, konstantne površinske gustoće ρ i izotropno napeta (napetost p je konstantna). Neka je $u(x,y,t)$ progib membrane u točki (x,y) u trenutku t, a $f(x,y,t)$ površinska gustoća sile koja se izvana prenese u točku (x,y) u trenutku t. Iz zakona očuvanja količine gibanja dobivamo jednadžbu koja opisuje oscilacije membrane Ω:

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = p\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t)$$

za $(x,y) \in \Omega$ i $t \geq 0$.

Prisjetimo se definicije *Laplace*ovog operatora, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Promotrimo sada ravnotežu membrane, tj. slučaj kada progib $u(x,y,t) = u(x,y)$ ne ovisi o vremenu t. Jednadžba ravnoteže membrane tada ima oblik

$$p\Delta u + f = 0, \text{ tj.}$$

$$\Delta u = g,$$

gdje je $g(x,y) = -\frac{f(x,y)}{p}$. Ukoliko na membranu ne djeluje vanjska sila, tj. $f = 0$, ravnoteža je opisana *Laplace*ovom jednadžbom

$$\Delta u = 0,$$

a u slučaju djelovanja vanjske sile $f \neq 0$ rješavamo *Poisson*ovu jednadžbu

$$\Delta u = g.$$

Sada ćemo opisati rješenja sljedećih problema:

a) ravnoteža pravokutne membrane kojoj donji rub nije učvršćen,

b) ravnoteža pravokutne membrane kojoj gornji rub nije učvršćen,

c) ravnoteža kružne membrane,

d) ravnoteža kružne membrane s kružnom rupom u sredini,

e) oscilacije pravokutne membrane bez utjecaja vanjske sile.

a) Promotrimo ravnotežu pravokutne membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ bez utjecaja vanjske sile. Laplaceova jednadžba ima jedinstveno rješenje uz rubne uvjete $u(x, 0) = \alpha(x)$ i $u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0$ (donji rub membrane određen je funkcijom $\alpha(x)$, a lijevi, desni i gornji rub su učvršćeni). U opisanom slučaju, rješenje problema ima oblik (pogledajte [3],6.2.1)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \mathsf{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \mathsf{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b].$$

gdje za svako $n \in \mathbb{N}$ koeficijente računamo po formulama

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \alpha(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \mathrm{d}x$$

i $B_n = -A_n \mathsf{cth} \frac{n\pi b}{a}$.

b) Promatramo ravnotežu pravokutne membrane $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ bez utjecaja vanjske sile. Znamo da Laplaceova jednadžba ima jedinstveno rješenje uz rubne uvjete $u(x, b) = \beta(x)$ i $u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0$ (gornji rub membrane opisuje funkcija $\beta(x)$, a lijevi, desni i donji rub su učvršćeni). U navedenom slučaju, rješenje problema ima oblik (pogledajte [3],6.2.1)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathsf{sh} \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

gdje za svako $n \in \mathbb{N}$ koeficijente B_n računamo po formuli

$$B_n = \frac{1}{\mathsf{sh} \frac{n\pi b}{a}} \frac{2}{a} \int_0^a \beta(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \mathrm{d}x.$$

c) Promotrimo sada problem ravnoteže kružne membrane polumjera R. Rješavamo Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

u polarnom koordinatnom sustavu u ravnini, uz rubni uvjet $u(R, \phi) = \alpha(\phi)$. Rješenje jednadžbe dano je formulom (pogledajte [3],6.2.2)

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_{1n} \cos n\phi + E_{2n} \sin n\phi),$$

za $r \in [0, R]$ i $\phi \in [0, 2\pi)$, pri čemu se koeficijenti računaju po formulama

$$\begin{aligned}
E_{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \mathsf{d}\phi, \\
E_{1n} &= \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \cos n\phi \mathsf{d}\phi, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \\
E_{2n} &= \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \sin n\phi \mathsf{d}\phi, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

d) Promotrimo problem ravnoteže kružne membrane polumjera R_2 s kružnom rupom u sredini polumjera R_1, gdje je $R_2 > R_1 > 0$. Rješavamo Laplaceovu jednadžbu uz rubne uvjete $u(R_1, \phi) = \alpha(\phi)$ i $u(R_2, \phi) = \beta(\phi)$. Rješenje je oblika (pogledajte [3],6.2.3)

$$u(r, \phi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^n} \right) \cos n\phi + \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^n} \right) \sin n\phi \right],$$

za $r \in [R_1, R_2]$ i $\phi \in [0, 2\pi)$. Napomenimo da u rješenju imamo više članova jer nula nije u domeni, pa ne odbacujemo članove zbog neograničenosti. Koeficijente A_0 i B_0 računamo iz sustava jednadžbi

$$A_0 + B_0 \ln R_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \mathsf{d}\phi,$$

$$A_0 + B_0 \ln R_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\phi) \mathsf{d}\phi,$$

koeficijenti A_{1n} i B_{1n} određuju se za svako $n \in \mathbb{N}$ iz sustava jednadžbi

$$A_{1n} R_1^n + \frac{B_{1n}}{R_1^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \cos n\phi \mathsf{d}\phi,$$

$$A_{1n} R_2^n + \frac{B_{1n}}{R_2^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\phi) \cos n\phi \mathsf{d}\phi,$$

a koeficijenti A_{2n} i B_{2n} iz sustava jednadžbi

$$A_{2n} R_1^n + \frac{B_{2n}}{R_1^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(\phi) \sin n\phi \mathsf{d}\phi,$$

$$A_{2n} R_2^n + \frac{B_{2n}}{R_2^n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(\phi) \sin n\phi \mathsf{d}\phi.$$

e) Riješimo problem oscilacija pravokutne, homogene, izotropno napete membrane $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ na koju ne djeluje vanjska sila, tj. $f(x,y,t) = 0$. Problem je opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$, p predstavlja napetost, a ρ gustoću membrane. Jednadžba ima jedinstveno rješenje ukoliko zadamo rubne i početne uvjete. Pretpostavimo da je rub membrane učvršćen, tj. da vrijedi $u|_{\partial\Omega} = 0$, da je početni oblik membrane zadan funkcijom

$$u(x,y,0) = \alpha(x,y),$$

a početna brzina membrane funkcijom

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta(x,y).$$

Uz navedene pretpostavke, metodom separacije varijabli (pogledajte [3],6.2.5) dobijemo rješenje opisanog problema oscilacija pravokutne membrane,

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

za $(x,y) \in \Omega$ i $t \geq 0$, pri čemu je $\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$ za $m,n \in \mathbb{N}$. Koeficijente A_{mn} i B_{mn} za $m,n \in \mathbb{N}$ računamo prema formulama

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a \alpha(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{i}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a \beta(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. Riješite problem ravnoteže pravokutne membrane $\Omega = [0,3] \times [0,2]$ opisan Laplaceovom jednadžbom $\Delta u = 0$ uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin\frac{2\pi}{3}x$ i $u(x,2) = u(0,y) = u(3,y) = 0$.

   Rješenje: Uz oznake $a = 3$ i $b = 2$ znamo da je ravnoteža membrane opisana funkcijom

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathrm{ch}\frac{n\pi}{a}y + B_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \mathsf{ch} \frac{n\pi}{3} y + B_n \mathsf{sh} \frac{n\pi}{3} y \right) \sin \frac{n\pi}{3} x.$$

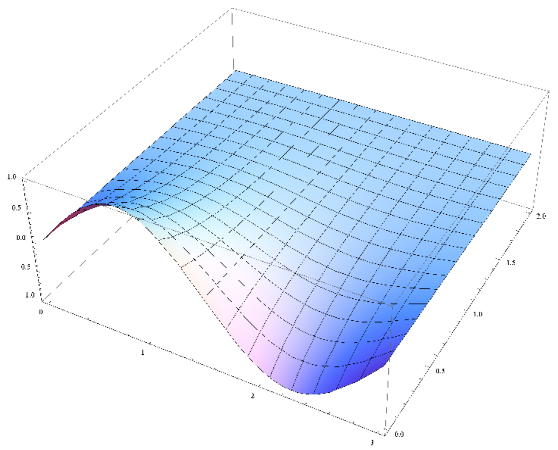
Koeficijente A_n, $n \in \mathbb{N}$, računamo primjenom svojstva ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija na sljedeći način:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a u(x,0) \sin \frac{n\pi}{a} x \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_0^3 u(x,0) \sin \frac{n\pi}{3} x \mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^3 \sin \frac{2\pi}{3} x \sin \frac{n\pi}{3} x \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2, \end{cases}$$

a koeficijente B_n kao $B_n = -A_n \mathsf{cth} \frac{bn\pi}{a} = -A_n \mathsf{cth} \frac{2n\pi}{3}$. Prema tome, rješenje zadanog problema ravnoteže pravokutne membrane je funkcija

$$u(x,y) = \left(\mathsf{ch} \frac{2\pi}{3} y - \mathsf{cth} \frac{4\pi}{3} \mathsf{sh} \frac{2\pi}{3} y \right) \sin \frac{2\pi}{3} x, \quad x \in [0,3], \quad y \in [0,2],$$

prikazana na Slici 2.7.



Slika 2.7: Ravnotežni položaj membrane

2. Riješite Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ za pravokutnu membranu $\Omega = [0,4] \times [0,2]$ uz rubne uvjete $u(x,2) = \sin \frac{\pi}{4} x$ i $u(0,y) = u(4,y) = u(x,0) = 0$.

   Rješenje: Uz oznake $a = 4$ i $b = 2$, imamo da je

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathsf{sh} \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{a} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathsf{sh} \frac{n\pi}{4} y \sin \frac{n\pi}{4} x,$$

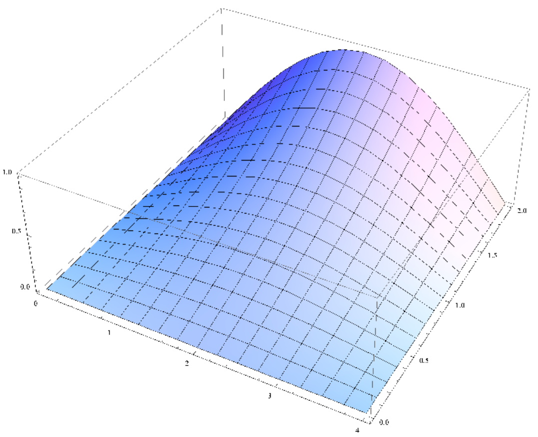
gdje je

$$B_n = \frac{1}{\mathsf{sh}\frac{bn\pi}{a}} \frac{2}{a} \int_0^a u(x,2) \sin \frac{n\pi}{a} x \mathsf{d}x = \frac{1}{\mathsf{sh}\frac{2n\pi}{4}} \frac{2}{4} \int_0^4 u(x,2) \sin \frac{n\pi}{4} x \mathsf{d}x$$
$$= \frac{1}{\mathsf{sh}\frac{n\pi}{2}} \frac{2}{4} \int_0^4 \sin \frac{\pi}{4} x \sin \frac{n\pi}{4} x \mathsf{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\mathsf{sh}\frac{\pi}{2}}, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Prema tome, rješenje postavljenog problema je funkcija

$$u(x,y) = \frac{1}{\mathsf{sh}\frac{\pi}{2}} \mathsf{sh}\frac{\pi}{4} y \sin \frac{\pi}{4} x, \quad x \in [0,4], \quad y \in [0,2],$$

prikazana na Slici 2.8.



Slika 2.8: Ravnotežni položaj membrane

3. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 3$ uz rubne uvjete:

   a) $u|_{r=3} = 2\cos 2\phi = \alpha(\phi)$,

   b) $u|_{r=3} = 4 + 3\sin 5\phi = \alpha(\phi)$.

Rješenje: Znamo da je rješenje dano formulom

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Big(E_{1n} \cos n\phi + E_{2n} \sin n\phi \Big),$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
E_{10} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(\phi)\mathsf{d}\phi, \\
E_{1n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(\phi)\cos n\phi\mathsf{d}\phi, \quad n\in\mathbb{N}, \\
E_{2n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha(\phi)\sin n\phi\mathsf{d}\phi, \quad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

a) Za $n\in\mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$
\begin{aligned}
E_{10} &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\phi\mathsf{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\sin 2\phi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
E_{1n} &= \frac{2}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\phi\cos n\phi\mathsf{d}\phi = \begin{cases} \frac{2}{9}, & n=2 \\ 0, & n\neq 2, \end{cases} \\
E_{2n} &= \frac{2}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\phi\sin n\phi\mathsf{d}\phi = 0.
\end{aligned}
$$

Prilikom određivanja koeficijenata E_{1n} i E_{2n} koristili smo svojstvo ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija. Rješenje zadanog problema ravnoteže kružne membrane je funkcija

$$
u(r,\phi) = \frac{2}{9}r^2\cos 2\phi, \quad r\in[0,3], \quad \phi\in[0,2\pi).
$$

b) Za $n\in\mathbb{N}_0$ računamo koeficijente:

$$
\begin{aligned}
E_{10} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\phi)\mathsf{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\left(4\phi - \frac{3}{5}\cos 5\phi\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(4\pi - \frac{3}{5}\cos 5\pi + 4\pi + \frac{3}{5}\cos 5\pi\right) = \frac{8\pi}{2\pi} = 4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{1n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\phi)\cos n\phi \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\phi \mathrm{d}\phi + \frac{3}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5\phi\cos n\phi \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{4}{3^n n\pi}\sin n\phi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
E_{2n} &= \frac{1}{3^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(4+3\sin 5\phi)\sin n\phi \mathrm{d}\phi = \\
&= \frac{1}{3^n\pi}\left(-\frac{4}{n}\cos n\phi\Big|_{-\pi}^{\pi} + 3\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5\phi\sin n\phi \mathrm{d}\phi\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{81}, & n=5 \\ 0, & n\neq 5, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Prilikom određivanja koeficijenata E_{1n} i E_{2n} koristili smo svojstvo ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija. Rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane je funkcija

$$
u(r,\phi) = 4 + \frac{1}{81}r^5\sin 5\phi, \quad r\in[0,3], \quad \phi\in[0,2\pi).
$$

4. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R=2$, napetosti $p=3$, ako je zadana gustoća vanjske sile $f(r)=2r+5$ (sila djeluje radijalno) i rubni uvjet $u|_{r=2}=0$.

   Rješenje: Rješavamo Poissonovu jednadžbu

$$
-3\Delta u = 2r+5,
$$

   uz rubni uvjet $u|_{r=2}=0$. Budući da vanjska sila djeluje radijalno, ravnotežni položaj membrane ne ovisi o kutu ϕ, pa se Poissonova jednadžba svodi na oblik

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r+5}{3}.
$$

   Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{2r^2}{3} - \frac{5r}{3}
$$

   i integriramo po r,

$$
r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^3}{9} - \frac{5r^2}{6} + C_1.
$$

Sada dobivenu jednadžbu podijelimo s r,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r^2}{9} - \frac{5r}{6} + \frac{C_1}{r}$$

i ponovno integriramo po r,

$$u(r) = -\frac{2r^3}{27} - \frac{5r^2}{12} + C_1 \ln r + C_2.$$

Uočimo da približavanjem središtu membrane r teži prema nuli, pa u slučaju da je $C_1 \neq 0$ progib membrane teži u ∞ što je fizikalno nemoguće. Stoga moramo uzeti da je $C_1 = 0$. Iz rubnog uvjeta $u|_{r=2} = 0$ izračunamo C_2. Imamo

$$-2\frac{2^3}{27} - 5\frac{2^2}{12} + C_2 = 0,$$

pa je $C_2 = \frac{61}{27}$. Dakle, rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane ima oblik

$$u(r) = -\frac{2r^3}{27} - \frac{5r^2}{12} + \frac{61}{27}, \quad r \in [0, 2].$$

5. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \phi) = \cos 2\phi$ i $u(R_2, \phi) = \sin 2\phi$.

   Rješenje: Rješenje problema je dano formulom

$$u(r, \phi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^n} \right) \cos n\phi + \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^n} \right) \sin n\phi \right].$$

   Koeficijente A_0 i B_0 računamo iz sustava

$$A_0 + B_0 \ln e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\phi \mathsf{d}\phi,$$

$$A_0 + B_0 \ln e^3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\phi \mathsf{d}\phi.$$

   Odredimo desne strane sustava

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\phi \mathsf{d}\phi = \frac{1}{4\pi} \sin 2\phi \bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\phi \mathrm{d}\phi = -\frac{1}{4\pi}\cos 2\phi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Prema tome, $A_0+B_0 = 0$ i $A_0+3B_0 = 0$, odakle dobivamo $A_0 = B_0 = 0$. Koeficijente A_{1n} i B_{1n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{1n}e^n + \frac{B_{1n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\phi\cos n\phi \mathrm{d}\phi,$$

$$A_{1n}e^{3n} + \frac{B_{1n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\phi\cos n\phi \mathrm{d}\phi.$$

Koristeći ortogonalnost trigonometrijskih funkcija za $n = 2$ dobijemo sustav

$$A_{12}e^2 + \frac{B_{12}}{e^2} = 1,$$

$$A_{12}e^6 + \frac{B_{12}}{e^6} = 0,$$

dok za $n \neq 2$ vrijedi $A_{1n} = 0$. Prvu jednadžbu gornjeg sustava pomnožimo s e^4, a drugu s -1, pa dobivene jednadžbe zbrojimo. Sada izračunamo $B_{12} = \frac{e^{10}}{e^8-1}$ i uvrštavanjem u drugu jednadžbu $A_{12} = \frac{1}{e^2(1-e^8)}$.
Koeficijente A_{2n} i B_{2n} za $n \in \mathbb{N}$ određujemo iz sustava

$$A_{2n}e^n + \frac{B_{2n}}{e^n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2\phi\sin n\phi \mathrm{d}\phi,$$

$$A_{2n}e^{3n} + \frac{B_{2n}}{e^{3n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\phi\sin n\phi \mathrm{d}\phi.$$

Primjenom ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija za $n = 2$ dobijemo sustav

$$A_{22}e^2 + \frac{B_{22}}{e^2} = 0,$$

$$A_{22}e^6 + \frac{B_{22}}{e^6} = 1,$$

dok za $n \neq 2$ vrijedi $A_{2n} = 0$. Prvu jednadžbu gornjeg sustava pomnožimo s $-e^4$, pa dobivene jednadžbe zbrojimo. Sada izračunamo $B_{22} = \frac{e^6}{1-e^8}$ i uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $A_{22} = \frac{e^2}{e^8-1}$. Prema tome, rješenje postavljenog problema ravnoteže kružne membrane je

$$u(r,\phi) = \left(\frac{r^2}{e^2(1-e^8)}+\frac{e^{10}}{(e^8-1)r^2}\right)\cos 2\phi+\left(\frac{e^2r^2}{e^8-1}+\frac{e^6}{(1-e^8)r^2}\right)\sin 2\phi,$$

za $r \in [e, e^3]$ i $\phi \in [0, 2\pi)$.

6. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e^2$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 2$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = r$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1) = u(R_2) = 0$.

   Rješenje: Rješavamo Poissonovu jednadžbu $-2\Delta u = r$. Budući da vanjska sila djeluje radijalno, ravnotežni položaj membrane ne ovisi o kutu ϕ, pa se Poissonova jednadžba svodi na oblik

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r}{2}.$$

   Pomnožimo gornju jednadžbu s r,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r^2}{2},$$

   i integriramo po r,

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^3}{6} + C_1.$$

   Sada dobivenu jednadžbu podijelimo s r,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^2}{6} + \frac{C_1}{r},$$

   i ponovno integriramo po r,

$$u(r) = -\frac{r^3}{18} + C_1 \ln r + C_2.$$

   Iz rubnih uvjeta slijedi

$$-\frac{e^6}{18} + 2C_1 + C_2 = 0,$$

$$-\frac{e^{12}}{18} + 4C_1 + C_2 = 0.$$

   Koeficijent C_1 izračunamo tako da prvu jednadžbu pomnožimo s -1 i dodamo drugoj jednadžbi, pa dobijemo $C_1 = \frac{e^{12}-e^6}{36}$. Sada C_1 uvrstimo u prvu jednadžbu i izračunamo $C_2 = \frac{2e^6-e^{12}}{18}$. Rješenje problema ravnoteže kružne membrane s rupom je

$$u(r) = -\frac{r^3}{18} + \frac{e^{12}-e^6}{36}\ln r + \frac{2e^6-e^{12}}{18}, \quad r \in [e^2, e^4].$$

7. Izračunajte oscilacije homogene izotropne pravokutne membrane $\Omega = [0,3]\times[0,1]$, gustoće $\rho = 2$ i napetosti $p = 32$. Početna brzina membrane je jednaka nuli, rubovi su homogeno pričvršćeni, a početni položaj membrane je zadan funkcijom $\alpha(x,y) = 0.2(3x - x^2)(y - y^2)$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{32}{2}\Delta u,$$

uz zadane rubne i početne uvjete. Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big)\sin\frac{m\pi x}{3}\sin\frac{n\pi}{1}y,$$

gdje je $\lambda_{mn} = \sqrt{\frac{32}{2}}\pi\sqrt{\frac{m^2}{3^2} + \frac{n^2}{1^2}} = 4\pi\sqrt{\frac{m^2}{9} + n^2}$ za $m,n \in \mathbb{N}$. Uočimo da su koeficijenti $B_{mn} = 0$, jer je početna brzina membrane jednaka nuli. Računamo koeficijente A_{mn}:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{3\cdot 1}\int_0^1\int_0^3 \frac{1}{5}(3x - x^2)(y - y^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\sin\frac{n\pi}{1}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{15}\int_0^3 (3x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x\int_0^1 (y - y^2)\sin n\pi y\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odredimo integrale

$$\begin{aligned} \int_0^3 (3x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{cc} u = 3x - x^2 & \mathrm{d}u = (3 - 2x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x & v = -\frac{3}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{3} \end{array}\right| \\ &= \frac{3}{m\pi}(x^2 - 3x)\cos\frac{m\pi x}{3}\Big|_0^3 \\ &+ \frac{3}{m\pi}\int_0^3 (3 - 2x)\cos\frac{m\pi x}{3}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} u = 3 - 2x & \mathsf{d}u = -2\mathsf{d}x \\ \mathsf{d}v = \cos\frac{m\pi x}{3}\mathsf{d}x & v = \frac{3}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{3} \end{array} \right| \\
&= \frac{9}{m^2\pi^2}(3-2x)\sin\frac{m\pi x}{3}\bigg|_0^3 \\
&+ \frac{18}{m^2\pi^2}\int_0^3 \sin\frac{m\pi x}{3}\mathsf{d}x \\
&= -\frac{54}{m^3\pi^3}\cos\frac{m\pi x}{3}\bigg|_0^3 = \frac{54}{m^3\pi^3}(1-\cos m\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } m \text{ paran,} \\ \frac{108}{m^3\pi^3}, & \text{za } m \text{ neparan} \quad \text{i} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (y-y^2)\sin n\pi y\mathsf{d}y &= \left| \begin{array}{cc} u = y - y^2 & \mathsf{d}u = (1-2y)\mathsf{d}y \\ \mathsf{d}v = \sin n\pi y\mathsf{d}y & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi y \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{n\pi}(y^2-y)\cos n\pi y\bigg|_0^1 \\
&+ \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (1-2y)\cos n\pi y\mathsf{d}y \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = 1 - 2y & \mathsf{d}u = -2\mathsf{d}y \\ \mathsf{d}v = \cos n\pi y\mathsf{d}y & v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi y \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}(1-2y)\sin n\pi y\bigg|_0^1 \\
&+ \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi y\mathsf{d}y \\
&= -\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi y\bigg|_0^1 = \frac{2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{za } n \text{ paran,} \\ \frac{4}{n^3\pi^3}, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Prema tome,

$$
A_{mn} = \begin{cases} \frac{576}{5m^3n^3\pi^6}, & \text{za } m \text{ neparan i } n \text{ neparan,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}
$$

tako da su oscilacije membrane dane funkcijom oblika

$$u(x,y,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{576}{5(2k+1)^3(2l+1)^3\pi^6} \times \cos\lambda_{2k+1,2l+1}t \sin\frac{(2k+1)\pi x}{3}\sin(2l+1)\pi y.$$

8. Riješite problem oscilacija homogene izotropne pravokutne membrane $\Omega = [0,5]\times[0,4]$, gustoće $\rho = 1$ i napetosti $p = 25$, ako su rubovi pričvršćeni, početni položaj je dan s $\alpha(x,y) = 0$, a početna brzina funkcijom $\beta(x,y) = 20xy$.

Rješenje: Rješavamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\Delta u,$$

uz zadane rubne uvjete $u(x,0) = u(x,4) = u(0,y) = u(5,y) = 0$, te početne uvjete $\alpha(x,y) = 0$ i $\beta(x,y) = 20xy$. Znamo da je rješenje oblika

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin\lambda_{mn}t\Big)\sin\frac{m\pi x}{5}\sin\frac{n\pi y}{4},$$

gdje je $\lambda_{mn} = 5\pi\sqrt{\frac{m^2}{5^2}+\frac{n^2}{4^2}} = 5\pi\sqrt{\frac{m^2}{25}+\frac{n^2}{16}}$ za $m,n\in\mathbb{N}$. Uočimo da su koeficijenti $A_{mn} = 0$, jer membrana u početnom trenutku leži horizontalno ($\alpha(x,y) = 0$). Računamo koeficijente B_{mn}:

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{4}{20\lambda_{mn}}\int_0^4\int_0^5 20xy\sin\frac{m\pi x}{5}\sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{\lambda_{mn}}\int_0^5 x\sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x\int_0^4 y\sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odredimo integrale

$$\begin{aligned}\int_0^5 x\sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{cc} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x & v = -\frac{5}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{5}\end{array}\right| \\ &= -\frac{5}{m\pi}x\cos\frac{m\pi x}{5}\Big|_0^5 + \frac{5}{m\pi}\int_0^5\cos\frac{m\pi x}{5}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{25}{m\pi}\cos m\pi + \frac{25}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{5}\Big|_0^5 \\ &= -\frac{25}{m\pi}\cos m\pi = \frac{25}{m\pi}(-1)^{m+1} \quad \text{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 y\sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y &= \left|\begin{array}{cc} u = y & \mathrm{d}u = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}y & v = -\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{4}\end{array}\right| \\ &= -\frac{4}{n\pi}y\cos\frac{n\pi y}{4}\Big|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4\cos\frac{n\pi y}{4}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{16}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi y}{4}\Big|_0^4 \\ &= -\frac{16}{n\pi}\cos n\pi = \frac{16}{n\pi}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$B_{mn} = \frac{1600(-1)^{m+n}}{mn\pi^2\lambda_{mn}}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

tako da su oscilacije membrane funkcija oblika

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1600(-1)^{m+n}}{mn\pi^2\lambda_{mn}}\cos\lambda_{mn}t\sin\frac{m\pi x}{5}\sin\frac{n\pi y}{4},$$

za $x \in [0,5]$, $y \in [0,4]$ i $t \geq 0$.

9. Riješite problem ravnoteže pravokutne membrane $\Omega = [0,5]\times[0,1]$ opisan Laplaceovom jednadžbom $\Delta u = 0$, uz rubne uvjete $u(x,0) = \sin\frac{3\pi}{5}x$ i $u(x,1) = u(0,y) = u(5,y) = 0$.

10. Riješite Laplaceovu jednadžbu $\Delta u = 0$ za kvadratnu membranu $\Omega = [0,2]\times[0,2]$, uz rubne uvjete $u(x,2) = \sin\frac{\pi}{2}x$ i $u(0,y) = u(2,y) = u(x,0) = 0$.

11. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 4$, uz zadane rubne uvjete:

    a) $u|_{r=4} = \sin 4\phi$,

    b) $u|_{r=4} = 2 + 3\cos 7\phi$.

12. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R = 4$ i napetosti $p = 1$, ako je zadana gustoća vanjske sile $f(r) = r^2 + 3r + 1$ (sila djeluje radijalno), uz rubni uvjet $u|_{r=4} = 1$.

13. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^3$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e^2$ u sredini, uz rubne uvjete $u(R_1, \phi) = \sin 2\phi$ i $u(R_2, \phi) = \cos 2\phi$.

14. Riješite problem ravnoteže kružne membrane polumjera $R_2 = e^4$ s kružnom rupom polumjera $R_1 = e$ u sredini, ako je napetost membrane $p = 3$ i na membranu djeluje vanjska sila gustoće $f(r) = 3r^3$ (progib ne ovisi o kutu), uz rubne uvjete $u(R_1, \phi) = u(R_2, \phi) = 0$.

Poglavlje 3

Numeričke metode

3.1 Numeričke metode za ODJ prvog reda

Promatramo običnu diferencijalnu jednažbu prvog reda

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$

gdje je f poznata realna funkcija dvije varijable, uz početni uvjet $y(a) = y_0$. Rješenje postavljenog problema, koji se u literaturi naziva *Cauchyevim problemom*, ponekad možemo egzaktno odrediti. Ima slučajeva kada to ne znamo učiniti. Tada Cauchyev problem rješavamo numeričkim metodama koje daju približno rješenje $y_i \approx y(x_i)$ za $i = 1, \cdots, n$.

3.1.1 Eulerova metoda

Rješavamo Cauchyev problem

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$

uz uvjet $y(a) = y_0$.

Segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{b-a}{n}$:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Iz Taylorove formule ($y(x) \approx y(c) + y'(c)(x - c)$) izvedemo *Eulerovu* iterativnu formulu za računanje približnih vrijednosti $y(x_i) \approx y_i$ funkcije y

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

za $i = 0, 1, \cdots, n - 1$.

1. Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = x(1-y)$ na $[0,2]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 0.4$.

   Rješenje: Uz $f(x,y) = x(1-y)$ računamo

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
y_0 &= y(0) = 0\\
x_1 &= x_0 + h = 0.4\\
y_1 &= y_0 + hf(x_0,y_0) = 0 + 0.4f(0,0) = 0\\
x_2 &= x_1 + h = 0.8\\
y_2 &= y_1 + hf(x_1,y_1) = 0 + 0.4f(0.4,0)\\
&= 0 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot 1 = 0.16\\
x_3 &= x_2 + h = 1.2\\
y_3 &= y_2 + hf(x_2,y_2) = 0.16 + 0.4f(0.8,0.16)\\
&= 0.16 + 0.4 \cdot 0.8(1-0.16) = 0.4288\\
x_4 &= x_3 + h = 1.6\\
y_4 &= y_3 + hf(x_3,y_3) = 0.4288 + 0.4f(1.2,0.4288)\\
&= 0.4288 + 0.4 \cdot 1.2(1-0.4288) = 0.703\\
x_5 &= x_4 + h = 2\\
y_5 &= y_4 + hf(x_4,y_4) = 0.4562 + 0.4f(1.6,0.703)\\
&= 0.703 + 0.4 \cdot 1.6(1-0.703) = 0.8931
\end{aligned}
$$

   Napomena: Metodom separacije varijabli (vidi [2],1.3.1) odredimo točno rješenje Cauchyevog problema iz prethodnog zadatka:

$$y(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

   Na slici 3.1 je prikazan graf točnog rješenja i točke $(x_i, y_i), i = 0, \cdots, 5$ dobivene Eulerovom metodom.

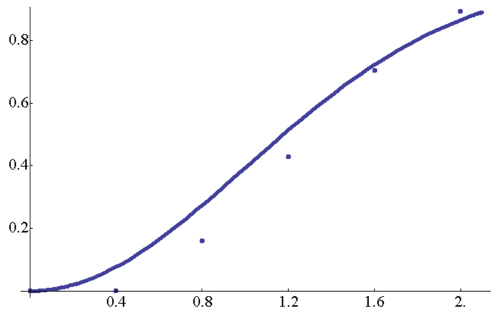
2. Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = 2x - y$ na $[0,1]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 0.25$.

3. Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = x^2 + y$ na $[0,2]$ ako je $y(0) = 1$ i $h = 0.5$.

3.1.2 Poboljšana Eulerova (Heunova) metoda

Rješavamo Cauchyev problem

$$y' = f(x,y), \quad x \in [a,b],$$



Slika 3.1: Graf točnog rješenja i točke dobivene Eulerovom metodom

$y(a) = y_0$.

Segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{b-a}{n}$:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Eulerovu metodu možemo poboljšati tako da dodamo jedan međukorak na sljedeći način:

$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})),$$

za $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Ovo je tzv. *poboljšana Eulerova metoda* koja daje točniju aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe.

1. Poboljšanom Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = x + 3y$ na $[0, 1]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 0.2$.

   Rješenje: Znamo da je $f(x, y) = x + 3y$ i $n = 5$. Odredimo iterativni postupak za računanje aproksimacije rješenja:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{0.2}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\Big)\\
&= y_i + 0.1\Big(x_i + 3y_i + x_{i+1} + 3y^*_{i+1}\Big)\Big)\\
&= y_i + 0.1\Big(x_i + 3y_i + x_{i+1} + 3\Big(y_i + 0.2\Big(x_i + 3y_i\Big)\Big)\Big)\\
&= y_i + 0.1\Big(x_i + 3y_i + x_i + 0.2 + 3y_i + 0.6x_i + 1.8y_i\Big)\\
&= y_i + 0.1\Big(2.6x_i + 7.8y_i + 0.2\Big)\\
&= 0.26x_i + 1.78y_i + 0.02,
\end{aligned}$$

za $i = 0, 1, \cdots, 4$. Sada računamo redom aproksimaciju rješenja u točkama x_i, $i = 0, 1, \cdots, 5$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
y_0 &= y(0) = 0\\
x_1 &= 0.2\\
y_1 &= 0.26x_0 + 1.78y_0 + 0.02 = 0.02\\
x_2 &= 0.4\\
y_2 &= 0.26x_1 + 1.78y_1 + 0.02 = 0.26 \cdot 0.2 + 1.78 \cdot 0.02 + 0.02\\
&= 0.1076\\
x_3 &= 0.6\\
y_3 &= 0.26x_2 + 1.78y_2 + 0.02 = 0.26 \cdot 0.4 + 1.78 \cdot 0.1076 + 0.02\\
&= 0.3155\\
x_4 &= 0.8\\
y_4 &= 0.26x_3 + 1.78y_3 + 0.02 = 0.26 \cdot 0.6 + 1.78 \cdot 0.3155 + 0.02\\
&= 0.7376\\
x_5 &= 1\\
y_5 &= 0.26x_4 + 1.78y_4 + 0.02 = 0.26 \cdot 0.8 + 1.78 \cdot 0.7376 + 0.02\\
&= 1.5409.
\end{aligned}$$

2. Poboljšanom Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = 2xy$ na $[0, 2]$ ako je $y(0) = 2$ i $h = 0.4$.

3. Poboljšanom Eulerovom metodom riješite jednadžbu $y' = y^2$ na $[0, 3]$ ako je $y(0) = 1$ i $h = 0.5$.

3.1.3 Metoda Runge-Kutta

Još preciznija metoda od Eulerove i poboljšane Eulerove metode je Runge-Kutta metoda. Rješavamo Cauchyev problem

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$

uz uvjet $y(a) = y_0$.

Segment $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{b-a}{n}$:

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = b.$$

Iterativni postupak za računanje približnih vrijednosti $y_i \approx y(x_i)$ funkcije y u točkama x_i metodom Runge-Kutta 4. reda opisuju sljedeće formule:

$$\begin{aligned}
k_1^i &= hf(x_i, y_i) \\
k_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right) \\
k_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right) \\
k_4^i &= hf(x_i + h, y_i + k_3^i) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i\right)
\end{aligned}$$

za $i = 0, 1, \cdots, n - 1$.

1. Metodom Runge-Kutta riješite jednadžbu $y' = x - y$ na $[0, 1]$ ako je y(0)=2 i $h = 0.2$.

Rješenje: Računamo aproksimaciju rješenja, uz oznaku $f(x, y) = x - y$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
y_0 &= y(0) = 2\\
x_1 &= 0.2\\
k_1^0 &= hf(x_0, y_0) = 0.2(0-2) = -0.4\\
k_2^0 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2}\right) = 0.2(0 + 0.1 - 2 + 0.2) = -0.34\\
k_3^0 &= hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2}\right) = 0.2(0 + 0.1 - 2 + 0.17) = -0.346\\
k_4^0 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0) = 0.2(0 + 0.2 - 2 + 0.346) = -0.2908\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0\right)\\
&= 2 + \frac{1}{6}\left(-0.4 - 0.68 - 0.692 - 0.2908\right) = 1.6562\\
x_2 &= 0.4\\
k_1^1 &= hf(x_1, y_1) = 0.2(0.2 - 1.6562) = -0.2912\\
k_2^1 &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^1}{2}\right) = 0.2(0.2 + 0.1 - 1.6562 + 0.1456)\\
&= -0.2421\\
k_3^1 &= hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^1}{2}\right) = 0.2(0.2 + 0.1 - 1.6562 + 0.1211)\\
&= -0.247\\
k_4^1 &= hf(x_1 + h, y_1 + k_3^0) = 0.2(0.2 + 0.2 - 1.6562 + 0.247)\\
&= -0.2018\\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}\left(k_1^1 + 2k_2^1 + 2k_3^1 + k_4^1\right)\\
&= 1.6562 + \frac{1}{6}\left(-0.2912 - 0.4842 - 0.494 - 0.2018\right) = 1.411\\
x_3 &= 0.6\\
k_1^2 &= hf(x_2, y_2) = 0.2(0.4 - 1.411) = -0.2022\\
k_2^2 &= hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1^2}{2}\right) = 0.2(0.4 + 0.1 - 1.411 + 0.1011)\\
&= -0.162
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_3^2 &= hf\left(x_2+\frac{h}{2}, y_2+\frac{k_2^2}{2}\right) = 0.2(0.4+0.1-1.411+0.081)\\
&= -0.166\\
k_4^2 &= hf(x_2+h, y_2+k_3^2) = 0.2(0.4+0.2-1.411+0.166)\\
&= -0.129\\
y_3 &= y_2+\frac{1}{6}\left(k_1^2+2k_2^2+2k_3^2+k_4^2\right)\\
&= 1.411+\frac{1}{6}\left(-0.2022-0.324-0.332-0.129\right) = 1.2465\\
x_4 &= 0.8\\
k_1^3 &= hf(x_3, y_3) = 0.6-1.2465 = -0.6465\\
k_2^3 &= hf\left(x_3+\frac{h}{2}, y_3+\frac{k_1^3}{2}\right) = 0.2(0.6+0.1-1.2465+0.3232)\\
&= -0.0447\\
k_3^3 &= hf\left(x_3+\frac{h}{2}, y_3+\frac{k_2^3}{2}\right) = 0.2(0.6+0.1-1.2465+0.0223)\\
&= -0.1048\\
k_4^3 &= hf(x_3+h, y_3+k_3^3) = 0.2(0.6+0.2-1.2465+0.1048)\\
&= -0.0683\\
y_4 &= y_3+\frac{1}{6}\left(k_1^3+2k_2^3+2k_3^3+k_4^3\right)\\
&= 1.2465+\frac{1}{6}\left(-0.6465-0.0894-0.2096-0.0683\right) = 1.0775\\
x_5 &= 1\\
k_1^4 &= hf(x_4, y_4) = 0.8-1.0775 = -0.2775\\
k_2^4 &= hf\left(x_4+\frac{h}{2}, y_4+\frac{k_1^4}{2}\right) = 0.2(0.8+0.1-1.0775+0.1387)\\
&= -0,0078\\
k_3^4 &= hf\left(x_4+\frac{h}{2}, y_4+\frac{k_2^4}{2}\right) = 0.2(0.8+0.1-1.0775+0.0039)\\
&= -0.0347\\
k_4^4 &= hf(x_4+h, y_4+k_3^4) = 0.2(0.8+0.2-1.0775+0.0347)\\
&= -0.0086\\
y_5 &= y_4+\frac{1}{6}\left(k_1^4+2k_2^4+2k_3^4+k_4^4\right)\\
&= 1.0775+\frac{1}{6}\left(-0.2775-0.0156-0.0694-0.0086\right) = 1.0156
\end{aligned}
$$

2. Metodom Runge-Kutta riješite jednadžbu $y' = x + x^2$ na $[0, 5]$ ako je $y(0) = 0$ i $h = 1$.

3. Metodom Runge-Kutta riješite jednadžbu $y' = (x + 2)y$ na $[0, 4]$ ako je $y(0) = 3$ i $h = 1$.

3.2 Numeričke metode za ODJ drugog reda

3.2.1 Metoda konačnih razlika

Rješavamo rubni problem opisan običnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda

$$u''(x) - q(x)u(x) + f(x) = 0$$

za $x \in [0, L]$ i rubnim uvjetima $u(0) = 0$ i $u'(L) = 0$ (ili $u(L) = 0$). Jednadžba opisuje ravnotežu žice $[0, L]$ napete konstantnom napetošću $p = 1$, koja je uronjena u elastično sredstvo opisano funkcijom elastičnosti q i na koju djeluje vanjska sila linijske gustoće f. Lijevi kraj žice je pričvršćen jer imamo $u(0) = 0$, a desni kraj žice je slobodan zbog uvjeta $u'(L) = 0$ (ili pričvršćen jer vrijedi $u(L) = 0$).

Sada ćemo opisati metodu konačnih razlika za rješavanje gornjeg problema. Segment $[0, L]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{L}{n}$:

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = L.$$

Uvedemo oznake $u_i \approx u(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ i $f_i = f(x_i)$. Sada pomoću Taylorovog razvoja odredimo aproksimaciju druge derivacije progiba u:

$$u_i'' \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

koju zatim uvrstimo u diferencijalnu jednadžbu. Tako dobijemo sustav od $n - 1$ jednadžbi s $n - 1$ nepoznanica. Uz navedene oznake rješavamo sustav

$$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, \cdots, n - 1.$$

Iz rubnog uvjeta $u(0) = 0$ slijedi da je $u_0 = 0$, a iz rubnog uvjeta $u'(L) = 0$ (ili $u(L) = 0$) dobivamo da je $u_{n-1} = u_n$ (ili $u_n = 0$).

1. Riješite jednadžbu $u''(x) - (x - 1)u(x) + 5 = 0$ na $[0, 2]$ uz rubne uvjete $u(0) = u'(2) = 0$ metodom konačnih razlika ako je $h = 0.4$.

   Rješenje: Točke u kojima računamo vrijednost funkcije u su

   $$x_0 = 0;\ x_1 = 0.4 = \frac{2}{5};\ x_2 = 0.8 = \frac{4}{5};$$

   $$x_3 = 1.2 = \frac{6}{5};\ x_4 = 1.6 = \frac{8}{5};\ x_5 = 2.$$

   Uz oznake $q(x) = x - 1$, $f(x) = 5$, $u_i \approx u(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, rješavamo sustav

   $$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Iz rubnih uvjeta $u(0) = u'(2) = 0$ dobivamo $u_0 = 0$ i $u_4 = u_5$. Prema tome, sustav glasi

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{4}{25}\left(\frac{2}{5} - 1\right)\right)u_1 - u_2 &= \frac{4}{25} \cdot 5, \\ -u_1 + \left(2 + \frac{4}{25}\left(\frac{4}{5} - 1\right)\right)u_2 - u_3 &= \frac{4}{25} \cdot 5, \\ -u_2 + \left(2 + \frac{4}{25}\left(\frac{6}{5} - 1\right)\right)u_3 - u_4 &= \frac{4}{25} \cdot 5, \\ -u_3 + \left(1 + \frac{4}{25}\left(\frac{8}{5} - 1\right)\right)u_4 &= \frac{4}{25} \cdot 5, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 238u_1 - 125u_2 &= 100, \\ -125u_1 + 246u_2 - 125u_3 &= 100, \\ -125u_2 + 254u_3 - 125u_4 &= 100, \\ -125u_3 + 137u_4 &= 100. \end{aligned}$$

Rješenje sustava određeno je programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$u_1 = 1.3158, u_2 = 1.7053, u_3 = 1.2403, u_4 = 1.8616.$$

2. Riješite rubni problem $u''(x) - xu(x) + x + 2 = 0$, $x \in [0, 4]$, $u(0) = u(4) = 0$ metodom konačnih razlika ako je $h = 1$.

Rješenje: Točke u kojima računamo vrijednost funkcije u su

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4.$$

Uz oznake $q(x) = x$, $f(x) = x + 2$, $u_i \approx u(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ rješavamo sustav

$$-u_{i-1} + (2 + h^2 q_i)u_i - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Iz rubnih uvjeta $u(0) = u(4) = 0$ dobivamo $u_0 = u_4 = 0$. Prema tome, sustav glasi

$$
\begin{aligned}
(2 + 1^2 1)u_1 - u_2 &= 1^2(1 + 2),\\
-u_1 + (2 + 1^2 2)u_2 - u_3 &= 1^2(2 + 2),\\
-u_2 + (2 + 1^2 3)u_3 &= 1^2(3 + 2),
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\begin{aligned}
3u_1 - u_2 &= 3,\\
-u_1 + 4u_2 - u_3 &= 4,\\
-u_2 + 5u_3 &= 5.
\end{aligned}
$$

Rješenje sustava je određeno programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$u_1 = 1.5769, u_2 = 1.7308, u_3 = 1.3461.$$

3. Riješite rubni problem $u''(x) - x^2 u(x) + x^2 = 0$, $x \in [0, 3]$, $u(0) = u(3) = 0$ metodom konačnih razlika ako je $h = 0.5$.

4. Riješite rubni problem $u''(x) - u(x) + 3x = 0$, $x \in [0, 1]$, $u(0) = u'(1) = 0$ metodom konačnih razlika ako je $h = 0.2$.

3.2.2 Metoda konačnih elemenata

Rješavamo problem ravnoteže žice $[0, L]$ bez otpora sredstva $(q(x) = 0)$ opisan jednadžbom

$$(p(x)u'(x))' + f(x) = 0,$$

pri čemu je $p(x)$ napetost žice, a $f(x)$ vanjska sila koja djeluje na žicu. Žica je u lijevom kraju pričvršćena, tj. vrijedi $u(0) = 0$, a u desnom kraju slobodna što je opisano rubnim uvjetom $u'(L) = 0$ (ili pričvršćena, tj. vrijedi $u(L) = 0$).

Približno rješenje tražimo u obliku

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i v_i(x), \quad x \in [0, L],$$

pri čemu su $c_0, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ konstante, a $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konačni elementi. Oni imaju oblik

$$v_0(x) = \begin{cases} -\frac{x}{h} + 1, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{x}{h} + i + 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

za $i = 1, \cdots, n-1$, te

$$v_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - n + 1, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

pri čemu za zadani $n \in \mathbb{N}$, točke $x_0, x_1, \cdots, x_n$ i korak h određujemo na isti način kao kod metode konačnih elemenata. Iz lijevog rubnog uvjeta odredimo $c_0 = 0$, a iz desnog rubnog uvjeta samo u slučaju $u(L) = 0$ slijedi $c_n = 0$. Konstante $c_1, \cdots, c_n$ ćemo izračunati rješavajući sustav

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način (pogledajte [1], str. 71)

$$k_{ij} = \int_0^L p(x) v_i'(x) v_j'(x) \mathsf{d}x = \begin{cases} -\frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \mathsf{d}x, & j = i-1, \\ \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) \mathsf{d}x, & j = i, \\ -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \mathsf{d}x, & j = i+1, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Očito vrijedi $k_{ij} = k_{ji}$ za $i, j = 1, \cdots, n$. Slobodni članovi b_i određuju se prema formulama (pogledajte [1], str. 71)

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^L f(x) v_i(x) \mathsf{d}x \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \left(\frac{x}{h} - i + 1 \right) \mathsf{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \left(-\frac{x}{h} + i + 1 \right) \mathsf{d}x, \end{aligned}$$

za $i = 1, \cdots, n$.

1. Riješite jednadžbu $(x^2u'(x))' + x + 2 = 0$ na $[0, 1]$, uz rubne uvjete $u(0) = u(1) = 0$, metodom konačnih elemenata ako je $h = 0.2$.

   Rješenje: Razmak među čvorovima je $h = 0.2 = \frac{1}{5}$, napetost je $p(x) = x^2$, a gustoća vanjske sile $f(x) = x+2$. Čvorovi mreže konačnih elemenata su

$$x_0 = 0;\ x_1 = 0.2;\ x_2 = 0.4;$$
$$x_3 = 0.6;\ x_4 = 0.8;\ x_5 = 1.$$

   Aproksimaciju rješenja tražimo u obliku

$$u_5(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i v_i(x).$$

   Iz rubnih uvjeta imamo $c_0 = c_5 = 0$. Konstante c_1, c_2, c_3 i c_4 ćemo odrediti iz sustava

$$\sum_{j=1}^{4} k_{ij}c_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

   Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_2} p(x)\mathsf{d}x = 25\int_0^{0.4} x^2\mathsf{d}x = 0.5333,\\
k_{12} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathsf{d}x = -25\int_{0.2}^{0.4} x^2\mathsf{d}x = k_{21} = -0.4667,\\
k_{22} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_1}^{x_3} p(x)\mathsf{d}x = 25\int_{0.2}^{0.6} x^2\mathsf{d}x = 1.7333,\\
k_{23} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_3} p(x)\mathsf{d}x = -25\int_{0.4}^{0.6} x^2\mathsf{d}x = k_{32} = -1.2667,\\
k_{33} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_4} p(x)\mathsf{d}x = 25\int_{0.4}^{0.8} x^2\mathsf{d}x = 3.7333,\\
k_{34} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_4} p(x)\mathsf{d}x = -25\int_{0.6}^{0.8} x^2\mathsf{d}x = k_{43} = -2.4667,\\
k_{44} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_5} p(x)\mathsf{d}x = 25\int_{0.6}^{1} x^2\mathsf{d}x = 6.5333,\\
k_{13} &= k_{31} = k_{14} = k_{41} = k_{24} = k_{42} = 0.
\end{aligned}$$

Koeficijenti b_i određuju se prema formulama

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 f(x)v_1(x)\mathsf{d}x \\
&= \int_0^{0.2} (x+2)(5x-1+1)\mathsf{d}x + \int_{0.2}^{0.4} (x+2)(-5x+1+1)\mathsf{d}x = 0.44, \\
b_2 &= \int_0^1 f(x)v_2(x)\mathsf{d}x \\
&= \int_{0.2}^{0.4} (x+2)(5x-2+1)\mathsf{d}x + \int_{0.4}^{0.6} (x+2)(-5x+2+1)\mathsf{d}x = 0.48, \\
b_3 &= \int_0^1 f(x)v_3(x)\mathsf{d}x \\
&= \int_{0.4}^{0.6} (x+2)(5x-3+1)\mathsf{d}x + \int_{0.6}^{0.8} (x+2)(-5x+3+1)\mathsf{d}x = 0.52, \\
b_4 &= \int_0^1 f(x)v_4(x)\mathsf{d}x \\
&= \int_{0.6}^{0.8} (x+2)(5x-4+1)\mathsf{d}x + \int_{0.8}^{1} (x+2)(-5x+4+1)\mathsf{d}x = 0.56.
\end{aligned}
$$

Prema tome, koeficijenti $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ određuju se iz sustava jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
0.5333c_1 - 0.4667c_2 &= 0.44, \\
-0.4667c_1 + 1.7333c_2 - 1.2667c_3 &= 0.48, \\
-1.2667c_2 + 3.7333c_3 - 2.4667c_4 &= 0.52, \\
-2.4667c_3 + 6.5333c_4 &= 0.56.
\end{aligned}
$$

Rješenje sustava je određeno programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$c_1 = 2.2161,\ c_2 = 1.5895,\ c_3 = 0.9796,\ c_4 = 0.4556.$$

Dakle, približno rješenje ima oblik

$$
\begin{aligned}
u_5(x) = {} & 2.2161v_1(x) + 1.5895v_2(x) \\
& + 0.9796v_3(x) + 0.4556v_4(x).
\end{aligned}
$$

2. Riješite jednadžbu $((x+5)u'(x))' + x^3 = 0$ na $[0,5]$, uz rubne uvjete $u(0) = u'(5) = 0$, metodom konačnih elemenata ako je $h = 1$.

Rješenje: Ukoliko diferencijalnu jednadžbu interpretiramo kao jednadžbu ravnoteže žice imamo napetost $p(x) = x+5$ i gustoću vanjske sile $f(x) = x^3$. Čvorovi mreže konačnih elemenata su

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;$$

$$x_3 = 3;\ x_4 = 4;\ x_5 = 5.$$

Aproksimativno rješenje tražimo u obliku

$$u_5(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i v_i(x).$$

Iz rubnih uvjeta imamo $c_0 = 0$. Konstante c_1, c_2, c_3, c_4 i c_5 ćemo izračunati iz sustava

$$\sum_{j=1}^{5} k_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

Koeficijenti k_{ij} računaju se na sljedeći način

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_2} p(x)\mathsf{d}x = \int_0^2 (x+5)\mathsf{d}x = 12,\\
k_{12} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathsf{d}x = -\int_1^2 (x+5)\mathsf{d}x = k_{21} = -6.5,\\
k_{13} &= k_{31} = k_{14} = k_{41} = k_{15} = k_{51} = 0,\\
k_{22} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_1}^{x_3} p(x)\mathsf{d}x = \int_1^3 (x+5)\mathsf{d}x = 14,\\
k_{23} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_3} p(x)\mathsf{d}x = -\int_2^3 (x+5)\mathsf{d}x = k_{32} = -7.5,\\
k_{24} &= k_{42} = k_{25} = k_{52} = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_{33} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_2}^{x_4} p(x)\mathsf{d}x = \int_2^4 (x+5)\mathsf{d}x = 16,\\
k_{34} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_4} p(x)\mathsf{d}x = -\int_3^4 (x+5)\mathsf{d}x = k_{43} = -8.5,\\
k_{35} &= k_{53} = 0,\\
k_{44} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_3}^{x_5} p(x)\mathsf{d}x = \int_3^5 (x+5)\mathsf{d}x = 18,\\
k_{45} &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_4}^{x_5} p(x)\mathsf{d}x = -\int_4^5 (x+5)\mathsf{d}x = k_{54} = -9.5,\\
k_{55} &= \frac{1}{h^2}\int_{x_4}^{x_5} p(x)\mathsf{d}x = \int_4^5 (x+5)\mathsf{d}x = 9.5.
\end{aligned}
$$

Koeficijenti b_i određuju se prema formulama:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^5 f(x)v_1(x)\mathsf{d}x\\
&= \int_0^1 x^3(x-1+1)\mathsf{d}x + \int_1^2 x^3(-x+1+1)\mathsf{d}x = 1.5,\\
b_2 &= \int_0^5 f(x)v_2(x)\mathsf{d}x\\
&= \int_1^2 x^3(x-2+1)\mathsf{d}x + \int_2^3 x^3(-x+2+1)\mathsf{d}x = 9,\\
b_3 &= \int_0^5 f(x)v_3(x)\mathsf{d}x\\
&= \int_2^3 x^3(x-3+1)\mathsf{d}x + \int_3^4 x^3(-x+3+1)\mathsf{d}x = 28.5,\\
b_4 &= \int_0^5 f(x)v_4(x)\mathsf{d}x\\
&= \int_3^4 x^3(x-4+1)\mathsf{d}x + \int_4^5 x^3(-x+4+1)\mathsf{d}x = 66,\\
b_5 &= \int_0^5 f(x)v_5(x)\mathsf{d}x\\
&= \int_4^5 x^3(x-5+1)\mathsf{d}x = 51.5.
\end{aligned}
$$

Prema tome, rješavamo sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
12c_1 - 6.5c_2 &= 1.5, \\
-6.5c_1 + 14c_2 - 7.5c_3 &= 9, \\
-7.5c_2 + 16c_3 - 8.5c_4 &= 28.5, \\
-8.5c_3 + 18c_4 - 9.5c_5 &= 66, \\
-9.5c_4 + 9.5c_5 &= 51.5.
\end{aligned}
$$

Rješenje sustava je određeno programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$c_1 = 28.4545,\ c_2 = 52.3007,\ c_3 = 71.7674,$$

$$c_4 = 85.5909,\ c_5 = 91.0119.$$

Dakle, približno rješenje ima oblik

$$
\begin{aligned}
u_5(x) = {} & 28.4545v_1(x) + 52.3007v_2(x) + 71.7674v_3(x) \\
& + 85.5909v_4(x) + 91.0119v_5(x).
\end{aligned}
$$

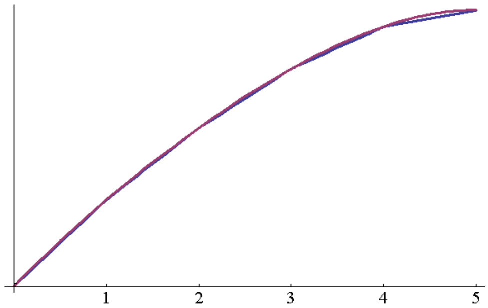
Točno rješenje rubnog problema dobiveno pomoću progamskog paketa *MATHEMATICA*© glasi:

$$
\begin{aligned}
u(x) = -325.521 + \frac{1}{4}\bigg(& 500(5+x) - 75(5+x)^2 \\
& + \frac{20}{3}(5+x)^3 - \frac{1}{4}(5+x)^4\bigg).
\end{aligned}
$$

Slika 3.2 prikazuje odnos točnog rješenja i približnog rješenja dobivenog metodom konačnih elemenata.

3. Riješite problem ravnoteže žice duljine $L = 3$, napetosti $p(x) = x^2 + x$, na koju djeluje vanjska sila linijske gustoće $f(x) = x - 1$ ako su rubovi žice pričvršćeni, metodom konačnih elemenata uz korak $h = 0.5$.

4. Riješite problem ravnoteže žice duljine $L = 2$, napetosti $p(x) = x$, na koju djeluje vanjska sila linijske gustoće $f(x) = 3x^2$ ako je lijevi kraj žice je pričvršćen, a desni slobodan, metodom konačnih elemenata uz $h = 0.4$.



Slika 3.2: Točno rješenje i približno rješenje dobiveno metodom konačnih elemenata

3.3 Metoda konačnih razlika za PDJ

U ovom ćemo potpoglavlju numerički rješavati parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje smo u prvom poglavlju zbirke riješili analitičkim metodama. Točnije, opisati ćemo rješavanje problema oscilacija žice, problema provođenja topline kroz štap i problema ravnoteže kvadratne membrane metodom konačnih razlika.

3.3.1 Oscilacije žice

Promotrimo problem oscilacija konstantno napete žice $[0, L]$ bez utjecaja vanjske sile, opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

za $x \in [0, L]$ i $t \geq 0$, gdje je $c^2 = \frac{p}{\rho}$. Konstanta $p > 0$ predstavlja napetost žice, a $\rho > 0$ gustoću žice. Rubni uvjeti su homogeni, tj. vrijedi

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Početni uvjeti određuju početni oblik žice

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in [0, L]$$

i početnu brzinu žice

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \beta(x), \quad x \in [0, L].$$

Opisani problem možemo riješiti numerički metodom konačnih razlika. Segment $[0, L]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{L}{n}$:

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = L.$$

Vremenski interval $[0, \infty)$ podijelimo uz pomoć proizvoljnog koraka $\tau > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \tau < t_2 = t_1 + \tau < \cdots ,$$

tj. $t_j = j \cdot \tau$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$. Uvedemo oznake u_{ij} za približnu vrijednost od $u(x_i, t_j)$. Iz rubnih uvjeta dobijemo da vrijedi

$$u_{0j} = u_{nj} = 0$$

za $j = 0, 1, 2, \cdots$. Početni uvjeti određuju

$$u_{i0} = \alpha(x_i),$$

$$u_{i1} = \alpha(x_i) + \tau\beta(x_i)$$

za $i = 1, \cdots, n-1$. Ostale približne vrijednosti progiba računamo pomoću rekurzivne relacije

$$u_{i,j+1} = c^2\sigma^2 u_{i-1,j} + 2(1 - c^2\sigma^2)u_{ij} + c^2\sigma^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1},$$

za $i = 1, \cdots, n-1$ i $j = 0, 1, 2, \cdots$, pri čemu je $\sigma = \frac{\tau}{h}$. Gornja rekurzija dobije se tako da se druge parcijalne derivacije progiba aproksimiraju pomoću Taylorovog razvoja i zatim uvrste u diferencijalnu jednadžbu (pogledajte [3], 7.6).

1. Metodom konačnih razlika riješite problem slobodnih oscilacija žice opisan jednadžbom $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(2,t) = 0$ i početne uvjete $u(x,0) = \alpha(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = 0$, ako je $h = \tau = 0.5$.

   Rješenje: Približne vrijednosti progiba žice $u_{ij} = u(x_i, t_j)$ unosimo u tablicu sa stupcima koji predstavljaju čvorove metode konačnih razlika

   $$x_0 = 0;\ x_1 = 0.5;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.5;\ x_4 = 2.$$

   Iz rubnih uvjeta dobivamo da su vrijednosti progiba za prvi i zadnji čvor jednake nuli. Svaki redak tablice sadrži vrijednosti progiba u čvorovima za točno određeni trenutak $t_j = \tau \cdot j = 0.5j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Prva dva retka, za trenutke $t_0 = 0$ i $t_1 = 0.5$, računamo iz početnih uvjeta $u_{i0} = \alpha(x_i)$ i $u_{i1} = \alpha(x_i) + \tau\beta(x_i)$. Ostale retke računamo pomoću rekurzivne relacije

   $$u_{i,j+1} = c^2\sigma^2 u_{i-1,j} + 2(1 - c^2\sigma^2)u_{ij} + c^2\sigma^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1},$$

   a budući da je u konkretnoj jednadžbi $c^2 = 1$ i $\sigma = \frac{\tau}{h} = 1$, rekurzija se svodi na oblik

   $$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}$$

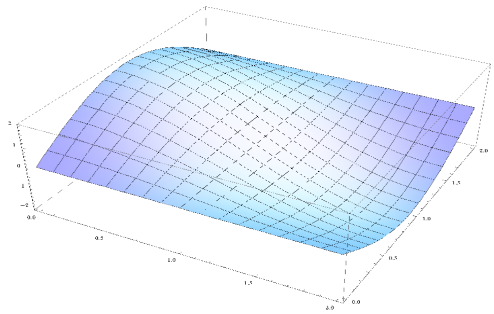
   za $i = 1, 2, 3$ i $j = 1, 2, \ldots$. Evo tablice progiba za trenutke t_0, t_1, t_2, t_3 i t_4

	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	1.414	2	1.414	0
$t_1 = 0.5$	0	1.414	2	1.414	0
$t_2 = 1$	0	0.586	0.828	0.586	0
$t_3 = 1.5$	0	-0.586	-0.828	-0.586	0
$t_4 = 2$	0	-1.414	-2	-1.414	0

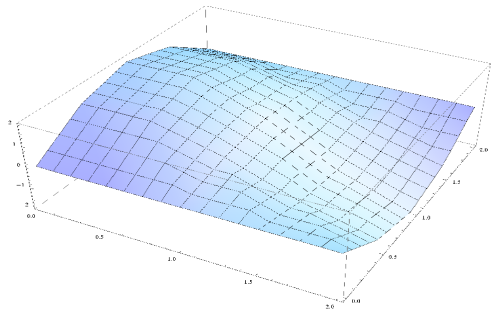
   Znamo da točno rješenje valne jednadžbe glasi

   $$u(x,t) = 2\cos\frac{\pi t}{2}\sin\pi x 2.$$

Slika 3.3 prikazuje točno rješenje dano gornjom formulom, dok Slika 3.4 predstavlja aproksimativno rješenje iz tablice.



Slika 3.3: Točno rješenje valne jednadžbe



Slika 3.4: Aproksimativno rješenje valne jednadžbe

2. Metodom konačnih razlika riješite problem slobodnih oscilacija žice opisan jednadžbom $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(4,t) = 0$ i početne uvjete $u(x,0) = \alpha(x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = x^2 + 2x$, ako je $h = 1$ i $\tau = 0.5$.

3. Metodom konačnih razlika riješite problem slobodnih oscilacija žice opisan jednadžbom $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(1,t) = 0$ i početne uvjete $u(x,0) = \alpha(x) = x(1-x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = x + 1$, ako je $h = 1$ i $\tau = 0.2$.

3.3.2 Provođenje topline kroz štap

Promotrimo problem provođenja topline kroz homogeni štap $[0, L]$ bez utjecaja vanjskih izvora topline, opisan parcijalnom diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

za $x \in [0, L]$ i $t \geq 0$. Rubni uvjeti su homogeni, tj. vrijedi

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

a početna razdioba temperature je određena funkcijom

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in [0, L].$$

Opisani problem možemo riješiti numerički, metodom konačnih razlika. Segment $[0, L]$ podijelimo na n jednakih dijelova širine $h = \frac{L}{n}$:

$$0 = x_0 < x_1 = x_0 + h < x_2 = x_1 + h < \cdots < x_n = x_{n-1} + h = L.$$

Vremenski interval $[0, \infty)$ podijelimo uz pomoć proizvoljnog koraka τ:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + \tau < t_2 = t_1 + \tau < \ldots,$$

tj. $t_j = j \cdot \tau$ za $j = 0, 1, 2, ...$ Uvedimo oznake $u_{ij} \approx u(x_i, t_j)$. Iz rubnih uvjeta dobijemo da vrijedi

$$u_{0j} = u_{nj} = 0$$

za $j = 0, 1, 2, \ldots$, a početni uvjet određuje

$$u_{i0} = g(x_i),$$

za $i = 1, \ldots, n-1$. Ostale približne vrijednosti progiba računamo pomoću rekurzivne relacije

$$u_{i,j+1} = c^2 \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2c^2\sigma) u_{ij} + c^2 \sigma u_{i+1,j},$$

za $i = 1, \ldots, n-1$ i $j = 0, 1, 2, \ldots$, pri čemu je $\sigma = \frac{\tau}{h^2}$. Gornja rekurzija se dobije tako da se parcijalne derivacije progiba aproksimiraju pomoću Taylorovog razvoja i zatim uvrste u diferencijalnu jednadžbu (pogledajte [3], 7.5).

1. Metodom konačnih razlika riješite problem provođenja topline kroz štap opisan jednadžbom $\frac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(3,t) = 0$ i početni uvjet $u(x,0) = g(x) = 2x(1-x)$, ako je $h = 0.5$ i $\tau = 0.01$.

   Rješenje: Približne vrijednosti temperature štapa u_{ij} unosimo u tablicu sa stupcima koji predstavljaju čvorove metode konačnih razlika

   $$x_0 = 0;\ x_1 = 0.5;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.5;$$

   $$x_4 = 2;\ x_5 = 2.5;\ x_6 = 3.$$

   Iz rubnih uvjeta dobivamo da su vrijednosti temperature za prvi i zadnji čvor jednake nuli. Svaki redak tablice sadrži vrijednosti temperature u čvorovima za točno određeni trenutak $t_j = 0.01j,\ j = 0,1,2,\ldots$. Prvi redak za trenutak $t_0 = 0$ računamo iz početnog uvjeta $u_{i0} = g(x_i)$. Ostale retke računamo pomoću rekurzivne relacije

   $$u_{i,j+1} = c^2\sigma u_{i-1,j} + (1-2c^2\sigma)u_{ij} + c^2\sigma u_{i+1,j},$$

   a budući da je u konkretnoj jednadžbi $c^2 = 9$ i $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 0.04$, rekurzija se svodi na oblik

   $$u_{i,j+1} = 0.36u_{i-1,j} + 0.28u_{ij} + 0.36u_{i+1,j} = \frac{1}{25}\left(9u_{i-1,j} + 7u_{ij} + 9u_{i+1,j}\right)$$

   za $i = 1,2,3$ i $j = 1,2,\ldots$. Evo tablice temperatura za trenutke $t_j, j = 0,1,2,3$:

	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$	$x_5 = 2.5$	$x_6 = 3$
$t_0 = 0$	0	0.5	0	-1.5	-4	-7.5	0
$t_1 = 0.01$	0	0.14	-0.36	-1.86	-4.36	-3.54	0
$t_2 = 0.02$	0	-0.0904	-0.72	-2.22	-3.1648	-2.5608	0
$t_3 = 0.03$	0	-0.2845	-1.0333	-2.0201	-2.6072	-1.8564	0

2. Metodom konačnih razlika riješite problem provođenja topline kroz štap opisan jednadžbom $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(2,t) = 0$ i početni uvjet

   $$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ -2x+4, & \frac{3}{2} < x \le 2, \end{cases}$$

   ako je $h = 0.5$ i $\tau = 0.05$.

3. Metodom konačnih razlika riješite problem provođenja topline kroz štap opisan jednadžbom $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz rubne uvjete $u(0,t) = u(5,t) = 0$ i početni uvjet $u(x,0) = g(x) = \sin\frac{\pi}{5}x$, ako je $h = 1$ i $\tau = 0.1$.

3.3.3 Ravnoteža kvadratne membrane

Promotrimo problem ravnoteže kvadratne homogene izotropno napete membrane $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ opisan Poissonovom jednadžbom

$$\Delta u(x, y) = g(x, y)$$

za $(x, y) \in \Omega$, uz rubni uvjet

$$u|_{\partial\Omega} = h.$$

Opisani problem riješit ćemo metodom konačnih razlika. Uz pomoć koraka $h > 0$ podijelimo kvadrat Ω na $n \times n$ jednakih dijelova:

$$x_i = a + ih$$

za $i = 0, 1, \cdots, n$ i

$$y_j = a + jh$$

za $j = 0, 1, \cdots, n$. Uvedimo oznake $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $g_{ij} \approx g(x_i, y_j)$ i $h_{ij} \approx h(x_i, y_j)$. Rješavamo sustav linearnih jednadžbi

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{ij} = h^2 g_{ij}$$

za $i = 1, \ldots, n-1$ i $j = 1, \ldots, n-1$. Iz rubnog uvjeta dobivamo

$$u_{ij} = h_{ij}$$

za $i = 0$ ili $i = n$ te $j = 0$ ili $j = n$.

1. Metodom konačnih razlika riješite problem ravnoteže kvadratne membrane $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ opisan jednadžbom $\Delta u = 5xy = g(x, y)$, uz rubni uvjet $u|_{\partial\Omega} = 0$, ako je $h = 0.5$.

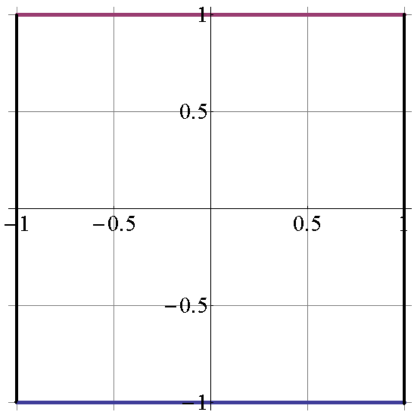
   Rješenje: Čvorovi metode konačnih razlika prikazani su na Slici 3.5. Uvedemo oznake $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ i $g_{ij} \approx g(x_i, y_j)$, pri čemu su (x_i, y_j) čvorovi $x_i = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ i $y_j = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$. Iz rubnog uvjeta imamo

   $$u_{0j} = u_{4j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

   $$u_{i0} = u_{i4} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

   Za $i, j = 1, 2, 3$ rješavamo sustav

   $$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 g_{ij}.$$



Slika 3.5: Čvorovi metode konačnih razlika

To je sustav od devet linearnih jednadžbi s devet nepoznanica

$$
\begin{aligned}
u_{21} + u_{12} - 4u_{11} &= 1.25\\
u_{31} + u_{22} + u_{11} - 4u_{21} &= 0\\
u_{32} + u_{21} - 4u_{31} &= -1.25\\
u_{22} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} &= 0\\
u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0\\
u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0\\
u_{23} + u_{12} - 4u_{13} &= -1.25\\
u_{33} + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0\\
u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 1.25.
\end{aligned}
$$

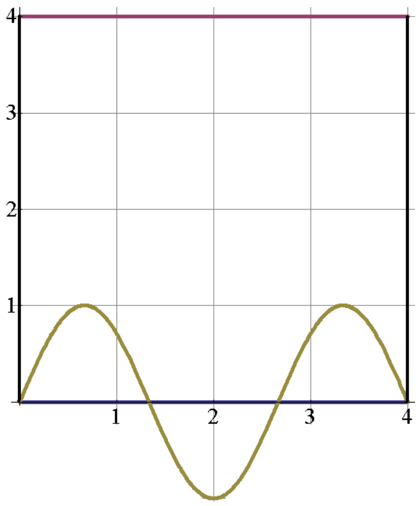
Zbog simetričnosti sile $g(x,y) = 5xy$ obzirom na ishodište mora vrijediti $u_{13} = u_{31} = -u_{11} = -u_{33}$ i $u_{12} = u_{23} = u_{32} = u_{21}$, tako da se gornji sustav svodi na sustav jednadžbi s tri nepoznanice:

$$
\begin{aligned}
2u_{32} - 4u_{33} &= 1.25\\
u_{22} - 4u_{32} &= 0\\
2u_{32} + 4u_{33} &= -1.25\\
4u_{32} - 4u_{22} &= 0.
\end{aligned}
$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $u_{22} = u_{32} = 0$ i $u_{33} = -0.3125$.

2. Metodom konačnih razlika riješite problem ravnoteže kvadratne membrane $\Omega = [0,4] \times [0,4]$ opisan jednadžbom $\Delta u = 0$, uz rubne uvjete $u(0,y) = u(4,y) = u(x,4) = 0$ i $u(x,0) = \sin \frac{3\pi}{4} x$, ako je $h = 1$.

   Rješenje: Čvorovi metode konačnih razlika su prikazani na Slici 3.6. Uvedemo oznake $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ i $g_{ij} \approx g(x_i, y_j)$, pri čemu su (x_i, y_j)



Slika 3.6: Čvorovi metode konačnih razlika

čvorovi $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$ i $y_j = 0, 1, 2, 3, 4$. Iz rubnih uvjeta imamo

$$u_{i4} = u_{0j} = u_{4j} = 0, \quad i = 0,1,2,3,4, \quad j = 0,1,2,3,4,$$

$$u_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_{20} = -1, \quad u_{30} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Za $i, j = 1, 2, 3$ rješavamo sustav

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 g_{ij}.$$

Zbog simetrije problema obzirom na pravac $x = 2$ vrijedi $u_{11} = u_{31}$,

$u_{12} = u_{32}$ i $u_{13} = u_{33}$, tako da se sustav svodi na šest jednadžbi

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{31} + u_{22} + u_{11} - 4u_{21} &= 1 \\ u_{22} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} &= 0 \\ u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0 \\ u_{23} + u_{12} - 4u_{13} &= 0 \\ u_{33} + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0, \end{aligned}$$

sa šest nepoznanica

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{22} + 2u_{11} - 4u_{21} &= 1 \\ u_{22} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} &= 0 \\ u_{23} + 2u_{12} + 2u_{21} - 4u_{22} &= 0 \\ u_{23} + u_{12} - 4u_{13} &= 0 \\ 2u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje sustava određeno je programskim paketom *MATHEMATICA*© i glasi:

$$u_{11} = 0.1217, u_{12} = -0.0015, u_{21} = -0.2188,$$

$$u_{22} = -0.1187, u_{13} = -0.0089, u_{23} = -0.0341.$$

3. Metodom konačnih razlika riješite problem ravnoteže kvadratne membrane $\Omega = [0,6] \times [0,6]$ opisan jednadžbom $\Delta u = 0$, uz rubne uvjete $u(0,y) = u(6,y) = u(x,0) = 0$ i $u(x,6) = \sin\frac{\pi}{3}x$, ako je $h = 2$.

Bibliografija

[1] I. Aganović, K. Veselić, Jednadžbe matematičke fizike, Školska knjiga-Zagreb (1985).

[2] T. Došlić, A. Filipin, Matematika 2, interna skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (2011).

[3] T. Došlić, D. Pokaz, Matematika 3, interna skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (2012).

[4] T. Došlić, N. Sandrić, Matematika I, interna skripta Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (2008).

[5] E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons Ltd, New York (1999).

[6] F. Scheid, Schaum's Outline of Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York (1988).

[7] R. Spiegel, Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems, McGraw-Hill Book Company, New York (1974).