Slučajni procesi i primjene

Université d'Orléans

Nils Berglund

siječanj 2014.

Sadržaj

Dio I

Markovljevi lanci

Poglavlje 1

Markovljevi lanci s konačnim skupom stanja

1.1 Primjeri Markovljevih lanaca

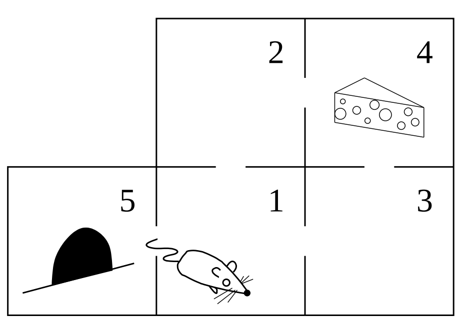
Markovljevi lanci se vrlo jednostavno intuitivno definiraju. Imamo sustav koji se može nalaziti u različitim stanjima. Stanja se mijenjaju u diskretnim trenutcima. Prilikom svake promjene, novo stanje se bira prema vjerojatnosnoj raspodjeli koja je stalna i ne ovisi o vremenu.

Primjer 1.1.1 (Miš u labirintu)**.** Miš se nalazi u labirintu prikazanom na slici 1.1. Na početku se nalazi u prostoriji 1. Svake minute prelazi, s jednakom vjerojatnošću u jednu od susjednih prostorija. Ako u njoj nađe hranu (prostorija 4) ili svoju rupu (prostorija 5), ostaje tamo trajno.

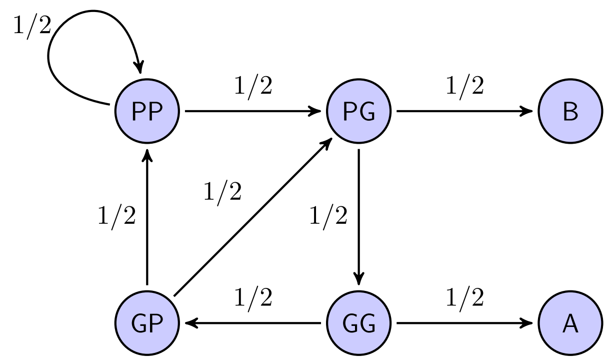
Možemo si postaviti sljedeća pitanja :

1. Koja je vjerojatnost da će miš prije doći do prostorije s hranom nego do one s rupom?
2. Koliko će mu trebati vremena dok ne dođe ili do hrane ili do rupe?

Možemo pokušati odgovoriti na ova pitanja i konstruirati stablo koje opisuje moguće putove. Na primjer, jasno je da se miš vraća u svoju rupu nakon jedne minute s vjerojatnošću 1/3. Ako se ne vrati u rupu u prvom koraku, prelazi ili u prostoriju 2 ili u prostoriju 3 i iz svake od njih u sljedećem koraku nalazi hranu s vjerojatnošću od 1/2. Dakle je vjerojatnost da miš nađe hranu nakon dvije minute jednaka 1/6. U preostalim slučajevima vraća se u prostoriju iz koje je i krenuo što nam omogućuje nalaženje rekurzivne formule za tražene vjerojatnosti.



Slika 1.1. Labirint u kojem živi miš.



Slika 1.2. Graf pridružen igri Pismo–Glava. Svaki simbol od dva slova predstavlja ishode dvaju posljednjih bacanja novčića. Ante pobjeđuje ako triput za redom padne Glava, dok Božo pobjeđuje ako se pojavi niz Pismo-Glava-Pismo.

Predloženi način je prilično kompliciran i postaje ubrzo neupotrebljiv kad se veličina labirinta povećava. U ovom ćemo poglavlju razviti puno djelotvorniju metodu za rješavanje ovakvih i sličnih problema utemeljenu na matričnom računu.

Primjer 1.1.2 (Igra Pismo – Glava)**.** Ante i Božo igraju sljedeću varijantu igre Pismo – Glava. Bacaju savršeno pravilan i simetričan novčić. Ante dobiva bod svaki put kad triput za redom padne Glava, dok Božo dobiva bod kad se pojavi niz Pismo-Glava-Pismo.

Postavljamo sljedeća pitanja :

1. Koja je vjerojatnost da će pobijediti Ante?
2. Koliko puta će se bacati novčić dok jedan od igrača ne pobijedi?

Situacija je, ustvari, slična onoj prethodnoj. Jasno je da, nakon n bacanja, vjerojatnost da će jedan od igrača pobijediti u sljedećem koraku zavisi samo o ishodima posljednja dva bacanja. Možemo, dakle, opisati igru kao Markovljev lanac sa skupom stanja

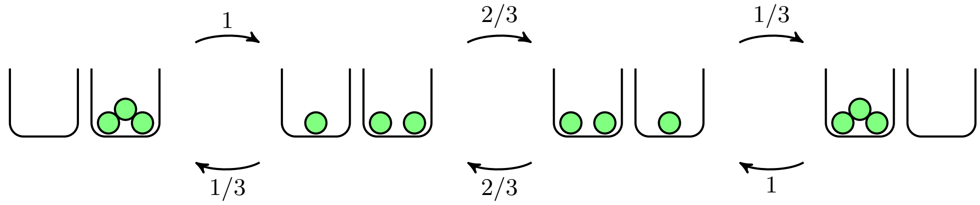
$$\mathcal{X} = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PG}, \mathrm{GP}, \mathrm{GG}, \mathrm{A\ pobjeđuje}, \mathrm{B\ pobjeđuje}\} \,, \tag{1.1.1}$$

gdje, na primjer, PP znači da su posljednja dva ishoda bila oba Pismo. Sada odredimo vjerojatnosti prijelaza između tih stanja i imamo problem sličan onom s mišem u labirintu.

Primjer 1.1.3 (Ehrenfestov model)**.** Ovaj model ima fizikalnu motivaciju. Bio je uveden kako bi se na jednostavan način modeliralo ponašanje plina u dvjema spojenim posudama. N kuglica, numeriranih od 1 do N, nalazi se u dvjema posudama. Na slučajan način, s jednakom vjerojatnošću, odaberemo jednu kuglicu i premjestimo ju u drugu posudu.

Želimo znati kako će se sustav ponašati nakon dugog vremena (asimptotski) :

1. Postoji li pravilo prema kojem se ravna broj kuglica u pojedinoj posudi nakon dugog vremena?
2. Koje je to pravilo?
3. Koliko često se sve kuglice nađu u istoj posudi?



SLIKA 1.3. Model Ehrenfestovih posuda za slučaj $N = 3$.

Ponovo možemo takav sustav opisati pomoću Markovljevog lanca sa skupom stanja $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$, gdje su stanja numerirana brojem kuglica u lijevoj posudi.

Primjer 1.1.4 (Slučajni tekstovi)**.** Pogledajmo sljedeća tri slučajno generirana "teksta":

A. YxUV,luUqHCLvE?,MRiKaoiWjyhg nEYKrMFD!rUFUy.qvW;e:FflN.udbBdo!,
ZpGwTEOFcA;;RrSMvPjA'Xtn.vP?JNZA;xWP, Cm?;i'MzLqVsAnlqHyk,ghDT
:PwSwrnJojRhVjSe?dFkoVRN!MTfiFeemBXITdj m.h d'ea;Jkjx,XvHIBPfFT
s I'SLcSX;'X!S, ODjX.eMoLnQttneLnNE!qGRgCJ:BuYAauJXoOCCsQkLcyPO
MulKLRtSm;PNpFfp'PfgvIJNrUr t l aXtlA?;TPhPxU:,ZmVGr,,'DIjqZDBY
DrkPRiKDYRknDhivt;, LYXDuxNKpjegMvrtfz:JpNTDj'LFmHzXxotRM u.iya
UUrgZRcA QmCZffwsNWhddBUPAhJIFJvs.CkKFLJoXef;kCnXrv'uWNcpULYsnl
Kg OURmysAnxFjHawwsSpM H;PWPsMaFYLMFyvRWOjbdPlLQIaaspNZkuO'Ns.l
jEXO,lxQ'GS;n;H:DH:VWJN :t'JMTUVpKCkVZ'NyKJMGiIbQFXEgDEcWxMBiyo
ybRIWIAC deMJnnL;SBAZ?:.UuGnC:B.!IBUT,pT?tyHHLICvN, mKZgwlMJOJd
HHobua;KU.;kADVM?jr'v.SCq:hZLR;lqkmLkhn:ajhBM,gKexDAro,HlczWTv
cFmNPt.MudUWPO, sTrWlJdgjoiJd.:d;CpJkJCW;FIRnpMGa;umFysOMAqQtmT
pPaYZKtOFYppeE.KFX?SuvcbaDrQ XECelD;cfoQKf?'jCTUaISS;fV:gqoWfSq
k:Tf!YuPBANtKhewiNg'ImOFs:UhcExmBjsAaMhBf UVP, 'dcFk;gxJMQGyXI;
nVwwfWxS:YXQMELEIObTJiilUYSlOsg.gCqlrN:nEU:irHM'nOLXWUbJLTU re'
kk vAwMgt'KgWSxwxqJe,z'OBCrnoIshSCDIZirla,rWNPkc?UgZm GOBX.QylY
jOtuF

B. nsunragetnetelpnlac. pieln tJmends d e.imnqu caa aneezsconns re.tc oml d e c, paeisfuaul irt ssna l df.ieulat a ese t hre edn ro m eeel slsplotasstp etuoMeiiseeaenemzeaeuqpeer enuoco sfehnnir p ts 'mpisu qrd iraLp nFetesa,opQeey rieeaduset MuuisecG il e m ru daeiafasousfnircot i eeedracev ever.nsn iaeulu!,mtel lpa rdbjdide tolr'murunlr bteaaua ieasilureseuavrmoce ntvqm qnurnaunsa.mraayVarinanr eumsu cnponf ciuo .pssre elreeY snrrq aani psu oqoddaiaaomrssloe'avia,loei va eroltrsurdeduuoe ffusir 'th'nilt has,slluoooe tee ?eoxaea slsii i u edtvsear e,Mesatnd o o rvdocaeagiua apugiqn rclt smtee.te, gceade etsn e v in eag ent so ra te, oi seGndd i eeet!dii e ese nanu d sp ul afeen aqelonens ssisaaoe cs eectadegotuudlru i 'c, uuuuts 'tt , dir atermdmuciqedn esovsioieieerxdroie mqso,es rrvteen,r dtei xcalrionuaae e vtmplsz miuqa u aboir br gmcdexptedn pEua't vm vnic eeren ereaa,eegeta u rss nlmxomas ea nsbnt s,eEpeteae teiasbo cd ee tu em ue quee en, sd eeneepeot

C. cesalu'act, bouleuivoie melarous die ndant leuvoiblue poit pesois deuntaciroverchu llie e lle s r lerchar, laisueuayaissabes vet s cuetr i as, rdetite se d'iretie, de.. nendoules, le pablur e d ! copomouns ppait limmix a r aux urars laie Le r lercret ce c. n'are four nsirepapole pa vr s, nte le efit. itesit, le faun e ju estatusuet usoin prcilaisanonnout ssss l tosesace cole sientt, dent pontrtires. e, l mentoufssss chat Laneus c Chontrouc Ce

e. Et deses j'ecci uleus mmon s mauit paga lanse l cont ciquner e c Cha s l'a Jes des s'erattrlunt es de sacouen erends. ve e quns som'a aisajouraite eux lala pour ! a levionible plaint n ss, danetrc ponce con du lez, l danoit, dirvecs'u ce ga vesai : chleme eesanl Pa chiontotes anent fomberie vaud'untitez e esonsan t a ! bondesal'is Ilaies, vapa e ! Lers jestsiee celesu unallas, t. ces. ta ce aielironi mmmileue cecoupe et dennt vanen A la ajole quieet, scemmu tomtemotit me aisontouimmet Le s Prage ges peavoneuse ! blec douffomurrd ntis.. rur, ns ablain i pouilait lertoipr ape. leus icoitth me e e, poiroia s. ! atuepout somise e la as

Jasno je da nijedan tekst nije smislen. Ipak, tekst B. izgleda manje proizvoljno od teksta A., dok tekst C. izgleda sličnije francuskom tekstu od teksta B. Dovoljno je pokušati čitati tekstove naglas.

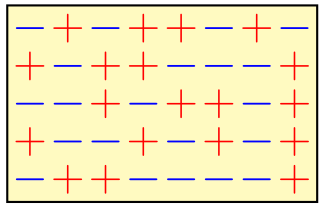
Razlike su posljedica toga kako su tekstovi generirani. U sva tri slučaja korišten je isti alfabet od 69 znakova (po 26 velikih i malih slova, nekoliko interpunkcijskih znakova i razmak).

1. U prvom tekstu su znakovi (tj. elementi alfabeta) birani slučajno i nezavisno s uniformnom raspodjelom.
2. U drugom tekstu su elementi alfabeta birani nezavisno, no ne više prema uniformnoj raspodjeli. Vjerojatnost biranja pojedinog znaka odgovara učestalosti (frekvenciji) pojavljivanja tog znaka u pravom francuskom tekstu (u ovom slučaju, odlomak iz Balzacovog djela *Colonel Chabert*. Frekvencije pojedinih znakova u slučajnom tekstu su stoga prirodnije, na primjer slovo e se pojavljuje češće (u 13% slučajeva) nego li slovo z (0.2%).
3. Konačno, u zadnjem tekstu znakovi više nisu birani nezavisno, već ovise o znaku prije njih. U istom referentnom tekstu kao za tekst B. odredili smo učestalost s kojom se iza slova a pojavljuje a (nikad), b (u 3% slučajeva) i tako redom za sve ostale znakove. Te su učestalosti onda korištene kao vjerojatnosti prijelaza u generiranju teksta.

Postupak bi se mogao poboljšati, na primjer, birajući svaki novi znak u ovisnosti o više prethodnih znakova. Čak i sa samo jednim znakom, začuđujuće je kako se iz tako generiranog teksta može lako odrediti jezik na kojem je napisan referentni tekst. Vidljivo je to iz sljedećih dvaju primjera:

D. deser Eld s at heve tee opears s cof shan; os wikey coure tstheevons irads; Uneer I tomul moove t nendoot Heilotetateloreagis his ud ang l ars thine br, we tinond end cksile: hersest tear, Sove Whey tht in t ce tloour ld t as my aruswend Ne t nere es alte s ubrk, t r s; penchike sowo Spotoucthistey psushen, ron icoowe l Whese's oft Aneds t aneiksanging t ungl o whommade bome, ghe; s, ne. torththilinen's, peny. d llloine's anets but whsto a It hoo tspinds l nafr Aneve powit tof f l afatichif m as tres, ime h but a wrove Les des wined orr; t he ff teas be hende pith hty ll ven bube. g Bube d hitorend tr, Mand nd nklichis okers r whindandy, Sovede brk f Wheye o edsucoure, thatovigh ld Annaix; an eer, andst Sowery looublyereis isthalle Base whon ey h herotan wict of les, h tou dends m'dys h Wh on'swerossictendoro whaloclocotolfrrovatel aled ouph rtrsspok, ear'sustithimiovelime From alshis ffad, Spake's wen ee: hoves aloorth erthis n t Spagovekl stat hetubr tes, Thuthiss oud s hind t s potrearall's ts dofe [1]

[1]Referentni tekst: Nekoliko Shakespeareovih soneta.



SLIKA 1.4. Jedna konfiguracija Isingovog modela u dimenziji $d = 2$.

E. dendewoch wich iere Daf' lacht zuerckrech, st, Gebr d, Bes. jenditerullacht, keie Un! etot' in To sendenus scht, ubteinraben Qun Jue die m arun dilesch d e Denuherelererufein ien. seurdan s ire Zein. es min? dest, in. maur as s san Gedein it Ziend en desckruschn kt vontimelan. in, No Wimmmschrstich vom delst, esichm ispr jencht sch Nende Buchichtannnlin Sphrr s Klldiche dichwieichst. ser Bollesilenztoprs uferm e mierchlls aner, d Spph! wuck e ing Erenich n sach Men. Sin s Gllaser zege schteun d, Gehrstren ite Spe Kun h Umischr Ihngertt, ms ie. es, bs de! ieichtt f; Ginns lhe d aftalt veine im t'seir; He Zicknerssolanust, flllll. mmichnennd wigeirdie h Zierewithennd, wast naun Wag, autonbe Wehn eietichank We dessonindeuchein Itichlich bsch n, Ichritienstam Lich uchodigem Din eieiers die it f tlo nensseicichenko Mechtarzaunuchrtzubuch aldert; I von. fteschan nn ih geier Schich Geitelten Deichst Fager Zule fer in vischtrn; Schtih Un Hit ach, dit? at ichuch Eihra! Hich g ure vollle Est unvochtelirn An [2]

Obratnim pristupom možemo dobiti metodu kojom se može automatski odrediti jezik na kojem je tekst napisan.

Primjer 1.1.5 (Isingov model)**.** Kao i Ehrenfestov model, i ovaj model dolazi iz fizike, točnije ststističke fizike. Svrha mu je opisati feromagnetičnost, tj. svojstvo spontane magnetizacije na dovoljno niskoj temperaturi. Promatramo povezani dio Λ rešetke $\mathbb{Z}^d$ (d je dimenzija sustava, npr. 3), koji sadrži N čvorova. Svakom čvoru pridružimo "spin" (neka vrsta elementarnog magneta), koji može poprimati vrijednosti $+1$ ili -1. Izbor orijentacije svih spinova se zove konfiguracija i ona je element skupa svih konfiguracija $\mathcal{X} = \{-1, 1\}^\Lambda$. Konfiguraciji σ pridružujemo energiju

$$H(\sigma) = -\sum_{<i,j>\in\Lambda} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i \, . \tag{1.1.2}$$

Ovdje oznaka $< i, j >$ znači da zbrajamo po svim parovima susjeda na rešetci, tj. po parovima čvorova na udaljenosti 1. Prvi član izraza za energiju je to veći što je više susjednih spinova različito. Drugi član opisuje interakciju s vanjskim magnetskim poljem h. On je to veći što je više spinova suprotnih magnetskom polju.

Temeljni je princip statističke fizike da se sustav koji je u termičkoj ravnoteži na temperaturi T nalazi u konfiguraciji σ s vjerojatnošću proporcionalnom s $\mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}$ (Gibbsova mjera), gdje je $\beta = 1/T$. Na malim temperaturama sustav preferira konfiguracije niske energije, dok u slučaju kad temperatura neograničeno raste, sve konfiguracije postaju jednako vjerojatne.

[2]Referentni tekst: Odlomak iz Goetheova *Fausta*.

Ukupna magnetizacija uzorka je opisana slučajnom varijablom

$$m(\sigma) = \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \ , \tag{1.1.3}$$

čije je očekivanje dano s

$$\mathbb{E}(m) = \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{X}} m(\sigma)\, \mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \mathcal{X}} \mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}} \ . \tag{1.1.4}$$

Isingov model je zanimljiv jer on pokazuje fazni prijelaz u dimenziji d većoj ili jednakoj 2. To znači da postoji kritična temperatura ispod koje se magnetizacija ponaša kao prekidna funkcija od h kada $N \to \infty$. Za temperature iznad kritične vrijednosti, magnetizacija je neprekidna funkcija od h.

Želimo li numerički odrediti magnetizaciju, u načelu je dovoljno izračunati sumu (1.1.4). Međutim, ta suma ima 2^N članova i taj broj vrlo brzo raste s porastom veličine sustava. Na primjer, za kocku s $10 \times 10 \times 10$ spinova, broj članova je 2^{1000}, što je reda veličine od 10^{300}. Računalu koje računa 10^{10} članova u sekundi trebalo bi više vremena nego što je starost svemira za izračunati tu sumu.

Alternatini pristup je preko Metropolisovog algoritma. Umjesto promatranja svih mogućih konfiguracija od $\mathcal{X}$, gledamo manji broj njih, ali dobro odabranih pomoću Markovljevog lanca. Polazimo of početne konfiguracije σ, koju transformiramo promjenom jednog, slučajno odabranog, spina. Vjerojatnosi prijelaza ovise o razlici energija polazne i dolazne konfiguracije. Ideja je da dobrim izborom vjerojatnosti prijelaza možemo pomoću Markovljevog lanca dobiti uzorak razumne veličine koji će dati dobru aproksimaciju za $\mathbb{E}(m)$. Postavljaju se sljedeća pitanja:

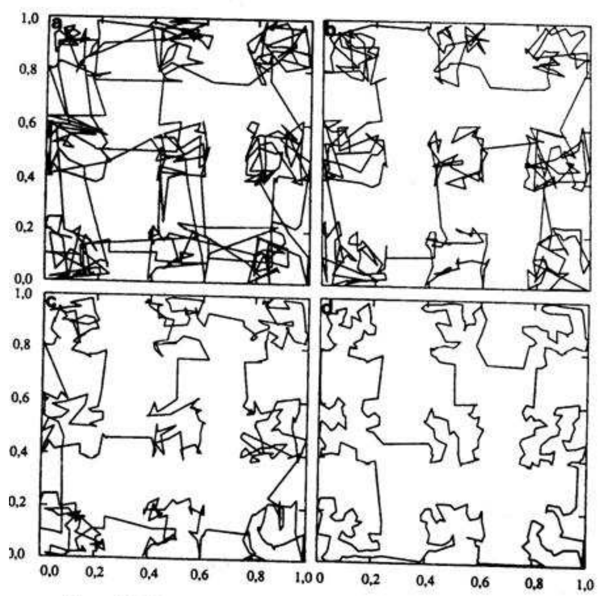
1. Kako odabrati vjerojatnosti prijelaza?
2. Koliko koraka nam treba za izračunati $\mathbb{E}(m)$ sa zadanom točnošću?

Primjer 1.1.6 (Problem trgovačkog putnika)**.** Ovo je jedan od klasičnih problema optimizacije. Trgovački putnik treba posjetiti N gradova i vratiti se na polazište posjetivši svaki grad točno jednom. Kojim redom to treba učiniti kako bi prijeđeni put (duljina ciklusa) bio minimalan?

Problem je u tome što broj mogućih ciklusa iznimno brzo raste s brojem gradova N, puno brže nego eksponencijalno. Ustvari, broj mogućih redoslijeda posjeta jednak je $N!$, broju permutacija skupa od N elemenata. Ako nam nije bitan ni polazni grad ni smjer obilaska, još uvijek ostaje $(N-1)!/2$ mogućih obilazaka. Računanje duljine prijeđenog puta postaje neizvedivo već za vrijednosti N oko 20.

Može se pokušati naći približno rješenje metodom sukcesivnih aproksimacija. Polazeći od nekog početnog ciklusa malo ga modificiramo zamjenjujući mjesta dvaju gradova. Ako ta modifikacija rezultira kraćim ciklusom, zaboravimo početni i nastavljamo s novim. Ako dobijemo dulji ciklus, zaboravimo tu modifikaciju i pokušamo s nekom drugom.

Problem s tom metodom je da se sustav može naći zaglavljen u lokalnom minimumu koji je puno lošiji od globalnog minimuma koji tražimo. To znači da smo u ciklusu koji je kraći od svih svojih susjeda koje možemo dobiti zamjenjujući dva grada, dok bi permutacija više od dvaju gradova mogla rezultirati kraćim ciklusom.



Slika 1.5. Uzastopne approksimacije rješenja problema trgovačkog putnika metodom simuliranog kaljenja (preuzeto iz članka : S. Kirkpatrick, C. Gelatt i M. Vecchi, *Optimization by Simulated Annealing*, Science, 220 (1983), pp. 671–680, copyright 1983 by A.A.A.S.)).

Efikasnija verzija ove metode zove se *simulirano kaljenje*. U toj se verziji ne odbacuju sve modifikacije koje produljuju ciklus, već se prihvaćaju s vjerojatnošću koja pada s produljenjem. Na taj način postupak može izbjeći zaglavljivanje u lokalnom minimumu i ima priliku naći dublji minimum. Naziv dolazi iz metalurgije : U nekoj leguri, atomi različitih metala se raspoređuju više-manje pravilno, no s nesavršenostima (defektima) u njihovom rasporedu. Ti defekti ostaju u strukturi legure. Podgrijavanjem i ohlađivanjem legure više puta daje se atomima prilika za postizanje pravilnijeg rasporeda i za snižavanje potencijalne energije.

Ponovo, imamo sljedeća pitanja :

1. Kako odabrati vjerojatnost prihvaćanja modifikacija?
2. Kako vjerojatnost postizanja određene točnosti (približavanja traženom minimumu) ovisi o trajanju simulacije?

1.2 Definicije

Definicija 1.2.1. *Neka je N prirodan broj. Matrica P tipa $N \times N$ je* stohastička matrica *ako njeni elementi $p_{ij} = (P)_{ij}$ zadovoljavaju*

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1 \qquad \forall i, j \tag{1.2.1}$$

i

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \,. \tag{1.2.2}$$

Lako se provjeri da ako su P i Q dvije stohastičke matrice, onda je i njihov umnožak PQ stohastička matrica. Posebno, sve potencije P^n od P su i same stohastičke matrice. Elementi p_{ij} definiraju vjerojatnosti prijelaza iz stanja i u stanje j Markovljevog lanca.

Definicija 1.2.2. *Neka je $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ konačan skup i P stohastička matrica reda N.* Markovljev lanac *sa skupom stanja $\mathcal{X}$ i matricom prijelaza P je niz $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathcal{X}$, koje zadovoljavaju* Markovljevo svojstvo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\bigl\{X_n = j \bigm| X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0\bigr\} &= \mathbb{P}\bigl\{X_n = j \bigm| X_{n-1} = i_{n-1}\bigr\} \\ &= p_{i_{n-1}j}\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

za sva vremena $n \geqslant 1$ i za svaki izbor $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, j)$ elemenata iz $\mathcal{X}$. Raspodjela od X_0, koju označavamo s ν, se zove početna raspodjela *lanca.*

Kako bismo se uvjerili da ova definicija ima smisla, provjerimo da su veličine X_n konstruirane na opisani način zaista slučajne varijable, tj. da je zbroj po svim $j \in \mathcal{X}$ vjerojatnosti $\mathbb{P}\{X_n = j\}$ jednak 1. To slijedi indukcijom po n. Ako su varijables X_0, …, X_{n-1} slučajne varijable, imamo :

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathcal{X}} \mathbb{P}\{X_n = j\} &= \sum_{j\in\mathcal{X}} \mathbb{P}\{X_n = j, X_{n-1} \in \mathcal{X}, \dots, X_0 \in \mathcal{X}\} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{X}} \sum_{i_{n-1}\in\mathcal{X}} \cdots \sum_{i_0\in\mathcal{X}} \mathbb{P}\{X_n = j, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} \\ &= \sum_{i_{n-1}\in\mathcal{X}} \underbrace{\sum_{j\in\mathcal{X}} p_{i_{n-1}j}}_{=1} \underbrace{\sum_{i_{n-2}\in\mathcal{X}} \cdots \sum_{i_0\in\mathcal{X}} \mathbb{P}\{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\}}_{=\mathbb{P}\{X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}\in\mathcal{X},\dots,X_0\in\mathcal{X}\}=\mathbb{P}\{X_{n-1}=i_{n-1}\}} \\ &= \mathbb{P}\{X_{n-1} \in \mathcal{X}\} = 1\,.\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Oznaka 1.2.3. *Ako je početna raspodjela ν zadana, raspodjelu pripadnog Markovljevog lanca označavamo s $\mathbb{P}_\nu$. Ako je ν koncentrirana u jednoj vrijednosti i ($\nu = \delta_i$), raspodjelu lanca označavamo s $\mathbb{P}_i$ umjesto s $\mathbb{P}_{\delta_i}$. Konačno, pišemo $X_{[n,m]}$ umjesto $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_m)$, i $\mathbb{P}\{X_{[n,m]} = i_{[n,m]}\}$ umjesto $\mathbb{P}\{X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}, \dots, X_m = i_m\}$. Veličina $X_{[n,m]}$ se zove* trajektorija *(ili putanja) lanca između vremena n i m.*

Primjer 1.2.4. Za primjer 1.1.1 s mišem u labirintu, matrica prijelaza je dana s

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{1.2.5}$$

U primjeru 1.1.2 igre Pismo–Glava, matrica prijelaza je

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{1.2.6}$$

Evo najprije jedne karakterizacije Markovljevog lanca u terminima njegovih trajektorija.

Teorem 1.2.5. *Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathcal{X}$, ν vjerojatnosna raspodjela na $\mathcal{X}$, i P stohastička matrica. Tada je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Markovljev lanac s matricom prijelaza P i početnom raspodjelom ν ako i samo ako za sve $n \geqslant 0$, i za svaki izbor $i_0, i_1, \dots, i_n$ elemenata iz $\mathcal{X}$, vrijedi*

$$\mathbb{P}\big\{X_{[0,n]} = i_{[0,n]}\big\} = \nu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \; . \tag{1.2.7}$$

Dokaz.

$\Rightarrow$: Indukcijom po n. Jasno je da tvrdnja vrijedi za $n = 0$. Ako vrijedi za n, onda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big\{X_{[0,n+1]} = i_{[0,n+1]}\big\} &= \mathbb{P}\big\{X_{n+1} = i_{n+1} \bigm| X_{[0,n]} = i_{[0,n]}\big\}\mathbb{P}\big\{X_{[0,n]} = i_{[0,n]}\big\} \\ &= p_{i_n i_{n+1}} \nu_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \; . \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$\Leftarrow$: Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti, vrijedi

$$\mathbb{P}\big\{X_n = i_n \bigm| X_{[0,n-1]} = i_{[0,n-1]}\big\} = \frac{\mathbb{P}\{X_{[0,n]} = i_{[0,n]}\}}{\mathbb{P}\{X_{[0,n-1]} = i_{[0,n-1]}\}} = p_{i_{n-1} i_n} \; , \tag{1.2.9}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz (1.2.7). □

Jednadžba (1.2.7) daje vjerojatnost određene trajektorije $X_{[0,n]}$. Sljedeći rezultat pokazuje da Markovljevo svojstvo vrijedi i na trajektorijama : ponašanje u vremenskom intervalu $[n+1, m]$ ovisi samo o stanju u trenutku n, a ne o prijašnjoj trajektoriji lanca.

Propozicija 1.2.6. *Ako je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Markovljev lanac na $\mathcal{X}$, onda za sva vremena $n < m \in \mathbb{N}$, sve $i_n \in \mathcal{X}$, $A \subset \mathcal{X}^n$ i $B \subset \mathcal{X}^{m-n}$ za koje je $\mathbb{P}\{X_n = i_n, X_{[0,n-1]} \in A\} > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\big\{X_{[n+1,m]} \in B \bigm| X_n = i_n, X_{[0,n-1]} \in A\big\} = \mathbb{P}\big\{X_{[n+1,m]} \in B \bigm| X_n = i_n\big\} \; . \tag{1.2.10}$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big\{X_{[n+1,m]} \in B \bigm| X_n = i_n, X_{[0,n-1]} \in A\big\} &= \frac{\mathbb{P}\big\{X_{[n+1,m]} \in B, X_n = i_n, X_{[0,n-1]} \in A\big\}}{\mathbb{P}\big\{X_n = i_n, X_{[0,n-1]} \in A\big\}} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{i_{[n+1,m]}\in B} \sum_{i_{[0,n-1]}\in A} \nu_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{m-1} i_m}}{\displaystyle\sum_{i_{[0,n-1]}\in A} \nu_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}} \\ &= \sum_{i_{[n+1,m]}\in B} p_{i_n i_{n+1}} \dots p_{i_{m-1} i_m} \; , \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

što ne ovisi o skupu A. Posebno, uzimajući $A = \mathcal{X}^n$ u gornjoj jednakosti dobivamo

$$\mathbb{P}\big\{X_{[n+1,m]} \in B \bigm| X_n = i_n\big\} = \sum_{i_{[n+1,m]}\in B} p_{i_n i_{n+1}} \dots p_{i_{m-1} i_m} \; , \tag{1.2.12}$$

i tvrdnja slijedi uspoređujući (1.2.11) i (1.2.12). □

Posebno je važan slučaj kad je $B = \mathcal{X}^{m-n-1} \times \{j\}$, tj. kad nas zanimaju sve trajektorije koje završavaju u $i_m = j$ za vrijeme m. U tom slučaju relacija (1.2.12) daje

$$\mathbb{P}\{X_m = j \mid X_n = i\} = \sum_{i_{n+1} \in \mathcal{X}} \cdots \sum_{i_{m-1} \in \mathcal{X}} p_{ii_{n+1}} p_{i_{n+1}i_{n+2}} \dots p_{i_{m-1}j} . \tag{1.2.13}$$

Po definiciji matričnog množenja, gornja suma nije ništa drugo nego element (i, j) matrice P^{m-n}, koji označavamo s $p_{ij}^{(m-n)}$. Primijetimo da desna strana od (1.2.13) ovisi samo o razlici $m - n$. Za sve $0 < n < m$ dakle vrijedi

$$\mathbb{P}\{X_m = j \mid X_n = i\} = p_{ij}^{(m-n)} = \mathbb{P}\{X_{m-n} = j \mid X_0 = i\} \tag{1.2.14}$$

(*svojstvo stacionarnih prirasta*). Konačno, za sve $m > 0$,

$$\mathbb{P}_\nu\{X_m = j\} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \mathbb{P}_\nu\{X_m = j, X_0 = i\} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \nu_i p_{ij}^{(m)} . \tag{1.2.15}$$

Matrica P^m nam, dakle, daje vjerojatnosti prijelaza u m koraka.

Primjer 1.2.7. Za matricu prijelaza (1.2.5) miša u labirintu imamo

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.2.16}$$

i-ti redak matrice odgovara vjerojatnostima nalaženja u različitim stanjima ako je miš otišao iz stanja i. Zaista, ako polazi iz stanja 1, vidimo da će se nakon dva koraka naći ili ponovo u 1, ili u rupi ili kod hrane, sve s jednakom vjerojatnošću od 1/3. Ako je otišao iz jednog od stanja 2 ili 3, izgledi su jedan prema dva da je nakon dva koraka našao hranu i jedan prema šest da se našao u jednoj od prostorija 2, 3 ili 5.

1.3 Apsorbirajući Markovljevi lanci

Definicija 1.3.1. *Kažemo da je stanje $j \in \mathcal{X}$* dostižno *iz nekog drugog stanja $i \in \mathcal{X}$, i pišemo $i \rightsquigarrow j$, ako postoji vrijeme $n \in \mathbb{N}$ za koje je $p_{ij}^{(n)} > 0$, tj. ako polazeći iz i, možemo stići u j s pozitivnom vjerojatnošću u konačnom broju koraka. Pišemo $i \sim j$ ako vrijedi $i \rightsquigarrow j$ i $j \rightsquigarrow i$ i kažemo da stanja i i j komuniciraju.*

Lako se provjeri da je relacija $\rightsquigarrow$ refleksivna i tranzitivna i da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Definicija 1.3.2. *Stanje $i \in \mathcal{X}$ je* apsorbirajuće *ako je $p_{ii} = 1$ (i onda nužno $p_{ij} = 0$ za sve $j \neq i$). Markovljev lanac je* apsorbirajući *ako postoji, za svako stanje iz $\mathcal{X}$, neko apsorbirajuće stanje dostižno iz tog stanja.*

U ostatku ovog odjeljka promatrat ćemo apsorbirajuće lance s $r \geqslant 1$ apsorbirajućih stanja. Primjeri 1.1.1 i 1.1.2 imaju po dva apsorbirajuća stanja.

Numerirat ćemo stanja tako da prvo navedemo $q = N - r$ neapsorbirajućih stanja a nakon njih r apsorbirajućih stanja. Matrica prijelaza u kojoj su stanja tako numerirana je u *kanonskom obliku*

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} , \tag{1.3.1}$$

gdje je Q matrica reda q, R je matrica tipa $q \times r$, 0 označava nul-matricu tipa $r \times q$, a I je jedinična matrica reda r. Indukcijom se lako pokaže da je

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & [I + Q + \dots + Q^{n-1}]R \\ 0 & I \end{pmatrix} . \tag{1.3.2}$$

Propozicija 1.3.3. *Neka je P matrica prijelaza apsorbirajućeg Markovljevog lanca zapisana u kanonskom obliku.*

1. *Vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = 0 . \tag{1.3.3}$$

2. *Matrica $I - Q$ je invertibilna, i njena inverzna matrica je*

$$\bigl[I - Q\bigr]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k . \tag{1.3.4}$$

Dokaz.

1. Neka je $i \leqslant q$ neapsorbirajuće stanje. Element $(Q^n)_{ij}$ matrice Q^n je vjerojatnost da će se lanac naći u neapsorbirajućem stanju j, poslije n koraka, polazeći iz i. Slijedi da je $(Q^n)_{ij}$ manja ili jednaka od vjerojatnosti da lanac ne će doći u apsorbirajuće stanje u n koraka. Neka je

$$m_i = \min\{n \geqslant 1 \colon \exists k > q, \, (P^n)_{ik} > 0\} \tag{1.3.5}$$

minimalan broj koraka nužan za doći u apsorbirajuće stanje k iz i. Neka je

$$p_i = \mathbb{P}_i\{X_{m_i} \leqslant q\} < 1 \tag{1.3.6}$$

vjerojatnost nedostizanja apsorbirajućeg stanja u m_i koraka, polazeći iz i. Neka je, konačno

$$M = \max_{i=1,\dots,q} m_i , \qquad p = \max_{i=1,\dots,q} p_i . \tag{1.3.7}$$

Onda je vjerojatnost nedostizanja apsorbirajućeg stanja polazeći iz bilo kojeg neapsorbirajućeg stanja u M koraka omeđena s p. Slijedi da je vjerojatnost nedostizanja apsorbirajućeg stanja u Mn koraka omeđena s p^n. Ta vjerojatnost teži prema 0 kad n teži u beskonačno. Vjerojatnost neapsorbiranja poslije proizvoljnog broja m koraka je opadajuća funkcija od m i nužno teži prema 0. Dakle $(Q^n)_{ij}$ teži prema nuli kad n teži u beskonačno, za sve $j \in \{1, \dots, q\}$.

2. Pretpostavimo da postoji vektor x za koji je $Qx = x$. Tada vrijedi

$$x = Qx = Q^2 x = \dots = Q^n x = \dots = \lim_{n\to\infty} Q^n x = 0 , \tag{1.3.8}$$

što pokazuje da 1 ne može biti svojstvena vrijednost od Q. Dakle je matrica $I - Q$ invertibilna. Konačno, zbog

$$\bigl[I - Q\bigr] \sum_{k=0}^{n} Q^k = I - Q^{n+1} \to I \qquad \text{za } n \to \infty , \tag{1.3.9}$$

dobivamo relaciju (1.3.4) množeći gornju relaciju s lijeva s $[I - Q]^{-1}$. □

Matricu $[I - Q]^{-1}$ zovemo *fundamentalnom matricom* lanca i označavamo s F. Relacija (1.3.2) pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 0 & FR \\ 0 & I \end{pmatrix} . \tag{1.3.10}$$

Činjenica da Q^n teži u nulu znači da vjerojatnost apsorpcije teži prema 1 kad vrijeme teži u beskonačno. Matrica $B = FR$ bi tada trebala predstavljati vjerojatnosti prijelaza, u limesu za beskonačno vrijeme, između neapsorbirajućih i apsorbirajućih stanja. Sljedeći rezultat to potvrđuje.

Teorem 1.3.4. *Neka je F fundamentalna matrica apsorbirajućeg Markovljevog lanca.*

1. *Element f_{ij} matrice F je očekivani broj posjeta (prolaza kroz) j polazeći iz i :*

$$f_{ij} = \mathbb{E}_i\Big(\sum_{n\geqslant 0} 1_{\{X_n=j\}}\Big) . \tag{1.3.11}$$

2. *Neka je $\tau = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n > q\}$ slučajna varijabla koja predstavlja vrijeme do apsorpcije. Tada je*

$$\mathbb{E}_i(\tau) = \sum_{j=1}^{q} f_{ij} . \tag{1.3.12}$$

3. *Elementi b_{ik} matrice $B = FR$ su vjerojatnosti apsorpcije u različitim stanjima :*

$$b_{ik} = \mathbb{P}_i\big\{X_\tau = k\big\} . \tag{1.3.13}$$

Dokaz.

1. Za Bernoullijevu varijablu $Y_{n,j} = 1_{\{X_n=j\}}$ vrijedi $\mathbb{E}_i(Y_{n,j}) = \mathbb{P}_i\{Y_{n,j} = 1\} = (Q^n)_{ij}$, pa je

$$\mathbb{E}_i\Big(\sum_{n\geqslant 0} Y_{n,j}\Big) = \sum_{n\geqslant 0}(Q^n)_{ij} = (F)_{ij} = f_{ij} . \tag{1.3.14}$$

2. Zbrajanjem gornje relacije po svim neapsorbirajućim stanjima dobiva se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q} f_{ij} &= \mathbb{E}_i\Big(\sum_{n\geqslant 0}\sum_{j=1}^{q} Y_{n,j}\Big) = \mathbb{E}_i\Big(\sum_{n\geqslant 0} 1_{\{X_n\leqslant q\}}\Big) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_i\{\tau > n\} = \sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \mathbb{E}_i(\tau) . \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

3. Rastavljenjem po mogućim vrijednostima n od $\tau - 1$, pa onda po mogućim vrijednostima j od X_n, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i\{X_\tau = k\} &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_i\{X_n \leqslant q, X_{n+1} = k\} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{j=1}^{q} \mathbb{P}_i\{X_n = j\}\mathbb{P}\{X_{n+1} = k | X_n = j\} \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{j=1}^{q} (Q^n)_{ij}(R)_{jk} = \sum_{n\geqslant 0}(Q^n R)_{ik} = (FR)_{ik} . \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

□

Primjer 1.3.5. U primjeru 1.1.2 s igrom Pismo–Glava, matrice Q i R su

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3.17}$$

Fundamentalna matrica je

$$F = [I - Q]^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & 4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}, \tag{1.3.18}$$

i matrica s vjerojatnostima apsorpcije je

$$B = FR = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \tag{1.3.19}$$

Zaista, polazeći iz jednog od stanja PP, PG ili GP, Ante pobjeđuje s vjerojatnošću 1/3, a Božo s vjerojatnošću 2/3. Polazeći iz stanja GG, Božo pobjeđuje s vjerojatnošću 1/3, a Ante s vjerojatnošću 2/3. Kako nitko ne može pobijediti u prve dvije igre i kako se sva četiri stanja PP, PG, GP i GG dostižu s jednakom vjerojatnošću, možemo uzeti početnu raspodjelu $\nu = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Shodno tomu, Ante pobjeđuje u igri s vjerojatnošću

$$\mathbb{P}_\nu\{X_\tau = \text{“A pobjeđuje”}\} = \sum_{i=1}^{4} \nu_i b_{i1} = \frac{5}{12}. \tag{1.3.20}$$

Koje je očekivano vrijeme trajanja igre? Relacija (1.3.12) pokazuje da je zbroj elemenata i-tog retka od F jednak očekivanju vremena apsorpcije polazeći iz i, na primjer $\mathbb{E}_1(\tau) = 14/3$. Usrednjujući po početnoj raspodjeli nalazimo $\mathbb{E}_\nu(\tau) = 23/6$. Dakle je očekivano vrijeme trajanja igre $2 + 23/6 = 35/6$, malo manje od 6 bacanja novčića.

1.4 Ireducibilni Markovljevi lanci

Definicija 1.4.1. *Markovljev lanac je* ireducibilan *ili* ergodičan *ako je* $i \sim j$ $\forall i, j \in \mathcal{X}$. *Lanac je* regularan *ako postoji potencija* P^n *od* P *čiji su svi elementi strogo pozitivni.*

Regularan Markovljev lanac je nužno i ireducibilan jer su sva stanja međusobno dostižna u n i više koraka. Obratno ne mora biti istina, jer u definiciji ireducibilnosti nije specificiran broj koraka.

Primjer 1.4.2. Lanac koji opisuje Ehrenfestov model je ireducibilan. Kakav god bio broj kuglica u lijevoj posudi, možemo doći do bilo kojeg drugog premještajući najviše N kuglica iz jedne posude u drugu. Međutim, taj lanac nije regularan. Kako se u svakom koraku premješta točno jedna kuglica, njihov broj u lijevoj posudi je naizmjenično paran i neparan. To znači da će svaki element matrice P^n biti nula za svaki drugi (parni ili neparni) n.

Definicija 1.4.3. *Za podskup $A \subset \mathcal{X}$, definiramo* vrijeme prvog dolaska *lanca u A kao slučajnu varijablu*

$$\tau_A = \inf\{n > 0 \colon X_n \in A\} . \tag{1.4.1}$$

Ako se skup $A = \{i\}$ sastoji od samo jednog stanja, pišemo τ_i umjesto $\tau_{\{i\}}$.

Važna razlika između apsorbirajućih i ireducibilnih lanaca je da se potonji uvijek vraćaju u svako od njihovih stanja.

Propozicija 1.4.4. *Za ireducibilni Markovljev lanac na konačnom skupu $\mathcal{X}$, vrijeme prvog dolaska je skoro sigurno konačno za sve podskupove $A \subset \mathcal{X}$:*

$$\mathbb{P}\bigl\{\tau_A < \infty\bigr\} := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl\{\tau_A \leqslant n\bigr\} = 1 . \tag{1.4.2}$$

Dokaz. Promatrajmo Markovljev lanac s matricom prijelaza $\widehat{P}$, dobivenom polazeći od matrice stanja polaznog lanca u kojoj su stanja iz A učinjena apsorbirajućima :

$$\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{za } i \in A , \\ p_{ij} & \text{inače} . \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Trajektorije polaznog i modificiranog lanca podudaraju se do vremena τ_A. Dovoljno je, dakle, dokazati (1.4.2) za apsorbirajući lanac. No u tom je slučaju tvrdnja izravna posljedica Propozicije 1.3.3. Zaista, vjerojatnost $\mathbb{P}_i\{\tau_A > n\}$ izbjegavanja apsorpcije do vremena n, polazeći iz i, dana je kao zbroj $(Q^n)_{ij}$ po svim $j \in A$, koji teži u 0. □

Važno je napomenuti da gornji rezultat ne mora vrijediti ako skup $\mathcal{X}$ nije konačan. Vratit ćemo se tom problemu u sljedećem poglavlju.

Sada ćemo pobliže proučiti regularne Markovljeve lance. Njihovo najvažnije svojstvo je sljedeća važna činjenica.

Teorem 1.4.5. *Neka je P matrica prijelaza regularnog Markovljevog lanca. Tada postoje brojevi $\pi_1, \dots, \pi_N > 0$, čiji je zbroj jednak 1, takvi da je*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi := \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{pmatrix} . \tag{1.4.4}$$

Štoviše, vektor redak $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ zadovoljava

$$\pi P = \pi . \tag{1.4.5}$$

Dokaz. Ako lanac ima samo jedno stanje, tvrdnja je očita, pa možemo smatrati da je $N \geqslant 2$. Pretpostavimo za početak da su svi elementi matrice P^k strogo pozitivni za $k = 1$, i da je $d > 0$ najmanji element od P. Tada je $d \leqslant 1/2$, jer je $Nd \leqslant 1$. Neka je y vektor-stupac takav da je

$$0 \leqslant m_0 \leqslant y_i \leqslant M_0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, N\} . \tag{1.4.6}$$

Neka je $z = Py$. Najveća moguća vrijednost komponente z_j od z se dobije ako je $y^T = (m_0, M_0, \dots, M_0)$ i $p_{j1} = d$. U tom slučaju, zbroj zadnjih $N-1$ elemenata retka j u P je $1-d$, i onda je $z_j = dm_0 + (1-d)M_0$. Nužno mora vrijediti

$$z_j \leqslant dm_0 + (1-d)M_0 =: M_1 \qquad \forall j \in \{1, \dots, N\} \ . \tag{1.4.7}$$

Sličnim se zaključivanjem pokaže da je

$$z_j \geqslant dM_0 + (1-d)m_0 =: m_1 \qquad \forall j \in \{1, \dots, N\} \ . \tag{1.4.8}$$

Shodno tomu, imamo $m_1 \leqslant z_j \leqslant M_1$, gdje je

$$M_1 - m_1 = (1-2d)(M_0 - m_0) \ . \tag{1.4.9}$$

Štoviše, lako se vidi da je $m_1 \geqslant m_0$ i $M_1 \leqslant M_0$. Poslije n iteracija, komponente od $P^n y$ će se nalaziti između brojeva m_n i M_n, koji zadovoljavaju

$$M_n - m_n = (1-2d)^n (M_0 - m_0) \tag{1.4.10}$$

i

$$m_0 \leqslant m_1 \leqslant \dots \leqslant m_n \leqslant M_n \leqslant \dots \leqslant M_1 \leqslant M_0 \ . \tag{1.4.11}$$

Nizovi $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ su susjedni i konvergiraju prema istoj graničnoj vrijednosti u. Imamo, dakle,

$$\lim_{n\to\infty} P^n y = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} \ , \tag{1.4.12}$$

gdje u ovisi o y. Primijenimo ovu relaciju na bazne vektore $e_1, \dots, e_N$. Postoje brojevi π_i takvi da je

$$\lim_{n\to\infty} P^n e_i = \begin{pmatrix} \pi_i \\ \vdots \\ \pi_i \end{pmatrix} \tag{1.4.13}$$

za svaki i. Kako je $P^n e_i$ i-ti stupac od P^n, dokazali smo relaciju (1.4.4). Nadalje, kako u slučaju $y = e_i$ vrijedi $m_0 = 0$ i $M_0 = 1$, relacija (1.4.8) daje $m_1 \geqslant d$, dakle $\pi_i \geqslant d$. Odatle slijedi da su svi π_i strogo pozitivni. Zbroj svih π će biti 1 jer su sve potencije od P stohastičke matrice.

Konačno, za pokazati (1.4.5), dovoljno je primijetiti da je $\Pi P = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = \Pi$. Svaki redak ove jednadžbe je ekvivalentan s (1.4.5).

Promotrimo na kraju slučaj kad su svi elementi od P^k pozitivni za neki $k > 1$. Zaključujući kao gore možemo pokazati da su sve komponente od $P^{kn} z$ ugniježđene između vrijednosti m_n i M_n koje zadovoljavaju $M_n - m_n = (1-2d)^n (M_0 - m_0)$. U međukoracima možemo primijeniti (1.4.7) i (1.4.8) s $d = 0$ i zaključiti da je $M_{n+1} - m_{n+1} \leqslant M_n - m_n$ za sve n. To ponovo povlači da $M_n - m_n$ teži prema nuli. $\square$

Napomena 1.4.6. Gornji rezultat pokazuje da sve regularne stohastičke matrice P imaju 1 kao svojstvenu vrijednost. Ustvari, već smo ranije mogli zaključiti iz definicije (1.2.2) da za svaku stohastičku matricu vrijedi $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, gdje je $\mathbf{1} = (1, 1 \dots, 1)^T$. Relacija (1.4.4) nam još pokazuje da je za regularnu stohastičku matricu svojstvena vrijednost 1 jednostruka i da su sve druge njene svojstvene vrijednosti po modulu strogo manje od 1.

Napomena 1.4.7. Iz izraza (1.4.4) lako zaključujemo da je

$$\Pi^2 = \Pi \; . \tag{1.4.14}$$

Matrica koja zadovoljava ovu relaciju zove se *projektor*. U našem slučaju, Π projicira svaki vektor-redak ν na neki višekratnik od π (tj. $\nu\Pi \parallel \pi$), i svaki vektor-stupac x na neki višekratnik vektora $\mathbf{1}$ (tj. $\Pi x \parallel \mathbf{1}$). Posebno, ako je ν vjerojatnosna raspodjela (dakle $\sum_i \nu_i = 1$), onda je $\nu\Pi = \pi$.

Vektor redak π ima sljedeća važna svojstva :

1. Prema (1.4.4) vrijedi, $\forall i, j \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i\bigl\{X_n = j\bigr\} = \lim_{n\to\infty} (P^n)_{ij} = \pi_j \; . \tag{1.4.15}$$

   π dakle opisuje asimptotsku raspodjelu lanca koja je neovisna o početnom stanju.

2. Jednadžba (1.4.5) povlači da je za svako vrijeme n,

$$\mathbb{P}_\pi\bigl\{X_n = j\bigr\} = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i (P^n)_{ij} = (\pi P^n)_j = \pi_j \; , \tag{1.4.16}$$

   što motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1.4.8. *Vjerojatnosna raspodjela $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ koja zadovoljava relaciju* (1.4.5) *zove se* stacionarna raspodjela *(ili* invarijantna raspodjela*) Markovljevog lanca.*

Konačno, imamo sljedeći opći rezultat :

Teorem 1.4.9. *Za regularni lanac i svaku njegovu početnu raspodjelu ν, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} = \pi_j \quad \forall j \in \mathcal{X} \; . \tag{1.4.17}$$

Dokaz. Prvi i vrlo jednostavni dokaz možemo dobiti primijećujući da je asimptotska raspodjela od X_n dana vektor-retkom

$$\lim_{n\to\infty} \nu P^n = \nu\Pi = \pi \; , \tag{1.4.18}$$

prema Napomeni 1.4.7. Zanimljivije je, međutim, pokazati alternativni, vrlo elegantni dokaz koji je dao Doeblin. Promatrajmo jedan drugi Markovljev lanac, definiran na prostoru $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Njegove vjerojatnosti prijelaza $P^\star$ su dane s

$$p^\star_{(i,j),(k,l)} = p_{ik} p_{jl} \; . \tag{1.4.19}$$

Pretpostavimo da je njegova početna raspodjela produktna mjera $\rho = \nu \otimes \pi$, tj. da je

$$\rho((i,j)) = \nu_i \pi_j \quad \forall (i,j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \; . \tag{1.4.20}$$

Označimo taj lanac s $\{(X_n, Y_n)\}_{n\geqslant 0}$. Po konstrukciji, slučajne varijable X_0 i Y_0 su nezavisne. Onda iz definicije (1.4.19) vjerojatnosti prijelaza slijedi da su X_n i Y_n nezavisne za sve n, i da su nizovi $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ i $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ ustvari dva Markovljeva lanca na $\mathcal{X}$ s matricom prijelaza P, čije su početne raspodjele zadane s ν i π.

Matrica prijelaza $P^\star$ je također regularna : dovoljno se uvjeriti da su elementi potencije $(P^\star)^n$ dani kao produkti $p_{ik}^{(n)} p_{jl}^{(n)}$. Promatrajmo skup

$$A = \{(i,i) \colon i \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \ . \tag{1.4.21}$$

Vrijeme prvog dolaska možemo pisati kao

$$\tau_A = \inf\{n > 0 \colon X_n = Y_n\} \ . \tag{1.4.22}$$

Pretpostavimo da dva lanca imaju istu raspodjelu za $n \geqslant \tau_A$. Točnije,

$$\mathbb{P}_\rho\{X_n = j, \tau_A \leqslant n\} = \mathbb{P}_\rho\{Y_n = j, \tau_A \leqslant n\} \qquad \forall j \in \mathcal{X} \ , \forall n \geqslant 0 \ . \tag{1.4.23}$$

Kako bismo to pokazali, uvodimo novi proces $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{za } n \leqslant \tau_A \ , \\ Y_n & \text{za } n > \tau_A \ . \end{cases} \tag{1.4.24}$$

Izravnim se računom, razlažući po mogućim vrijednostima od τ_A, provjeri da je

$$\mathbb{P}_\rho\{Z_{[0,n]} = i_{[0,n]}\} = \nu_{i_0} \prod_{m=1}^{n} p_{i_{m-1} i_m} \tag{1.4.25}$$

za svaki $n \geqslant 0$ i za svaki izbor $i_{[0,n]} \in \mathcal{X}^{n+1}$. Prema Teoremu 1.2.5, slijedi da je $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Markovljev lanac s početnom raspodjelom ν i matricom prijelaza P, pa ima istu raspodjelu kao i $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. To dokazuje (1.4.23). Konačno, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} &= \mathbb{P}_\rho\{X_n = j, \tau_A \leqslant n\} + \mathbb{P}_\rho\{X_n = j, \tau_A > n\} \ , \\ \pi_j = \mathbb{P}_\pi\{Y_n = j\} &= \mathbb{P}_\rho\{Y_n = j, \tau_A \leqslant n\} + \mathbb{P}_\rho\{Y_n = j, \tau_A > n\} \ . \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

Oduzimanjem i korištenjem (1.4.23), dobiva se

$$\begin{aligned} \bigl|\mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} - \pi_j\bigr| &\leqslant \bigl|\mathbb{P}_\rho\{X_n = j, \tau_A > n\} - \mathbb{P}_\rho\{Y_n = j, \tau_A > n\}\bigr| \\ &\leqslant 2\mathbb{P}_\rho\{\tau_A > n\} \ . \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

Ova veličina teži prema nuli kad $n \to \infty$, jer je τ_A konačno skoro sigurno zbog Propozicije 1.4.4. □

Napomena 1.4.10. Doeblinov nam dokaz omogućuje izraziti brzinu konvergencije prema stacionarnoj raspodjeli pomoću vremena τ_A uvedenog u dokazu. Zaista, zbrajajući prvi redak relacije (1.4.27) po svim $j \in \mathcal{X}$, dobivamo

$$\sum_{j\in\mathcal{X}} \bigl|\mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} - \pi_j\bigr| \leqslant 2\mathbb{P}_{\nu\otimes\pi}\{\tau_A > n\} \ . \tag{1.4.28}$$

Lijevu stranu možemo gledati kao ℓ_1 udaljenost raspodjele od X_n od stacionarne raspodjele. Takav se tip argumenta zove argument sparivanja.

Vraćamo sa sada općem slučaju ireducibilnog Markovljevog lanca. U tom slučaju, raspodjela od X_n ne mora konvergirati prema danoj raspodjeli π. Unatoč tomu, dio prijašnjih rezultata ostaje istinit.

Propozicija 1.4.11. *Neka je P matrica prijelaza ireducibilnog Markovljevog lanca. Tada P ima 1 kao jednostruku svojstvenu vrijednost. Jedinstveni lijevi svojstveni vektor π od P za svojstvenu vrijednost 1 za koji je $\sum_i \pi_i = 1$ ćemo ponovo zvati* stacionarnom raspodjelom *tog lanca.*

Dokaz. Promatrajmo stohastičku matricu $Q = \frac{1}{2}[P + I]$. Neka je

$$m = \max_{i,j\in\mathcal{X}} \big\{\min\{n \geqslant 1 \colon p_{ij}^{(n)} > 0\}\big\} . \tag{1.4.29}$$

Promatrajmo matricu

$$Q^m = \frac{1}{2^m}\left[I + \binom{m}{1}P + \binom{m}{2}P^2 + \cdots + \binom{m}{m-1}P^{m-1} + P^m\right] . \tag{1.4.30}$$

Za svaki par (i, j), postoji član u toj sumi u kojem je element (i, j) strogo pozitivan. Kako su svi ostali elementi matrice nenegativni, zaključujemo da je $(Q^m)_{i,j} > 0$. Dakle je matrica Q matrica prijelaza nekog regularnog lanca. Prema teoremu 1.4.5, postoji jedinstvena raspodjela π za koju je $\pi Q = \pi$, što povlači $\frac{1}{2}[\pi + \pi P] = \pi$, dakle $\pi P = \pi$. □

Primjer 1.4.12. Lako se, izravnim računom, provjeri da je stacionarna raspodjela Ehrenfestovog modela binomna raspodjela s parametrom $1/2$: $\nu_i = 2^{-N}\binom{N}{i}$. Kasnije ćemo vidjeti intuitivnu interpretaciju ovog rezultata.

Koja je interpretacija stacionarne raspodjele? S jedne strane, znamo da ako X_n ima raspodjelu π u trenutku n, onda će X_m imati istu raspodjelu π u svim kasnijim vremenima $m > n$. Obratno, Teoremi 2.1.3 i 2.1.5 nisu više nužno istiniti : Dovoljno se sjetiti primjera s Ehrenfestovim modelom. Međutim, još uvijek imamo konvergenciju prema stacionarnoj raspodjeli u srednjem ergodičkom (ili srednjem Cesarovom) :

Teorem 1.4.13. *Za ireducibilan Markovljev lanac i za svaku početnu raspodjelu ν, srednja frekvencija dolaska u svako stanje j konvergira prema π_j:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}_\nu\left(\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m=j\}}\right) = \pi_j \qquad \forall j \in \mathcal{X} . \tag{1.4.31}$$

Dokaz. Neka je Π matrica u kojoj su svi retci jednaki π, vidi (1.4.4). Onda vrijedi $\Pi P = \Pi$, i iz $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ slijedi da je i $P\Pi = \Pi$. Nadalje,

$$(I + P + \cdots + P^{n-1})(I - P + \Pi) = I - P^n + n\Pi . \tag{1.4.32}$$

Pokažimo da je matrica $I - P + \Pi$ invertibilna. Neka je x vektor stupac za koji je $(I - P + \Pi)x = 0$. Onda imamo

$$0 = \pi(I - P + \Pi)x = \underbrace{\pi(I - P)}_{=0}x + \pi\Pi x = \pi x , \tag{1.4.33}$$

jer je $\pi\Pi = \pi$ zbog $\sum_i \pi_i = 1$. Slijedi da je $\Pi x = 0$, dakle $(I - P)x = 0$. Kako je 1 jednostruka svojstvena vrijednost od P s pripadnim svojstvenim vektorom $\mathbf{1}$, to povlači $x \parallel \mathbf{1}$, što je moguće samo ako je $x = 0$ jer je $\pi x = 0$ i svi π_i su pozitivni. Dakle je matrica $I - P + \Pi$ invertibilna.

Neka je $Z = (I - P + \Pi)^{-1}$. Kako je $\pi(I - P + \Pi) = \pi$, vrijedi $\pi = \pi Z$ i $\Pi = \Pi Z$. Množeći (1.4.32) zdesna s Z, dobivamo

$$I + P + \dots + P^{n-1} = (I - P^n)Z + n\Pi Z = (I - P^n)Z + n\Pi \, . \tag{1.4.34}$$

Sada za svako početno stanje i imamo,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}_i\biggl(\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m=j\}}\biggr) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\bigl(P^m\bigr)_{ij} = \biggl[\frac{1}{n}(I - P^n)Z + \Pi\biggr]_{ij} \, . \tag{1.4.35}$$

Kako su svi elementi matrice P^n uniformno omeđeni s 1, ta veličina konvergira prema $(\Pi)_{ij} = \pi_j$ kada $n \to \infty$. Za proizvoljnu početnu raspodjelu ν, dobivamo na isti način konvergenciju prema $(\nu\Pi)_j = \pi_j$. □

Napomena 1.4.14. Ovaj se dokaz može činiti netransparentnim. Možemo ga pojasniti pomoću nekih pojmova iz matričnog računa. Neka matrica $Q = P - \Pi$, opisuje razliku između stohastičke matrice i njenog projektora na stacionarnu raspodjelu. Iz jednakosti $\Pi P = P\Pi = \Pi^2 = \Pi$ slijedi da je $\Pi Q = Q\Pi = 0$, pa zaključujemo

$$P^n = \Pi + Q^n \tag{1.4.36}$$

(vidi zadatak 1.11). U slučaju kad je P regularna, Q^n teži prema 0 za $n \to \infty$. Ako je P ireducibilna ali ne i regularna, funkcija $n \mapsto Q^n$ je oscilirajuća. Dokazi, međutim, pokazuju da 1 nije svojstvena vrijednost od Q i da prosječni Q^n teži prema nuli, dakle da prosječni P^n teži prema Π.

Stacionarna distribucija ima zanimljivu vezu s očekivanjem vremena prvog povratka u stanje i, zvanim *prosječno vrijeme povratka* u i :

Teorem 1.4.15. *Za ireducibilan Markovljev lanac sa stacionarnom raspodjelom π, prosječna vremena povratka su dana s*

$$\mathbb{E}_i(\tau_i) = \frac{1}{\pi_i} \, . \tag{1.4.37}$$

Dokaz. Počnimo s izvodom relacije koja povezuje različita prosječna vremena prvog dolaska. Za $i, j \in \mathcal{X}$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(\tau_j) &= \mathbb{P}_i\{\tau_j = 1\} + \sum_{n\geqslant 2} n\mathbb{P}_i\{\tau_j = n\} \\
&= p_{ij} + \sum_{n\geqslant 2} n \sum_{k\neq j} \mathbb{P}_i\{\tau_j = n, X_1 = k\} \\
&= p_{ij} + \sum_{n\geqslant 2} n \sum_{k\neq j} p_{ik}\mathbb{P}_k\{\tau_j = n-1\} \\
&= p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} \sum_{m\geqslant 1} (m+1)\mathbb{P}_k\{\tau_j = m\} \\
&= p_{ij} + \sum_{k\neq j} p_{ik} \biggl[\mathbb{E}_k(\tau_j) + \underbrace{\sum_{m\geqslant 1} \mathbb{P}_k\{\tau_j = m\}}_{=1}\biggr] \\
&= 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik}\mathbb{E}_k(\tau_j) \, .
\end{aligned} \tag{1.4.38}$$

Tu relaciju možemo napisati u obliku

$$1 - \mathbb{E}_i(\tau_j) = -\sum_{k \in \mathcal{X}} (1 - \delta_{kj}) p_{ik} \mathbb{E}_k(\tau_j) . \tag{1.4.39}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} 1 - \pi_j \mathbb{E}_j(\tau_j) &= \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i \big[1 - \delta_{ij} \mathbb{E}_i(\tau_j)\big] \\ &= \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i \big[1 - \mathbb{E}_i(\tau_j) + (1 - \delta_{ij}) \mathbb{E}_i(\tau_j)\big] \\ &= \sum_{k \in \mathcal{X}} \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i (\delta_{ik} - p_{ik})(1 - \delta_{kj}) \mathbb{E}_k(\tau_j) . \end{aligned}$$

Suma po i se poništava, zbog $\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}$. □

Primjer 1.4.16. U slučaju Ehrenfestovog modela s N kuglica, prosječno vrijeme povratka u stanje i dano je s

$$\mathbb{E}_i(\tau_i) = \frac{1}{\nu_i} = 2^N \frac{i!(N-i)!}{N!} . \tag{1.4.40}$$

Posebno, prosječno vrijeme povratka u konfiguraciju u kojoj su sve kuglice u lijevoj posudi je 2^N. To postaje strahovito veliko kad je broj kuglica reda veličine Avogadrovog broja, tj. broja čestica u jednom molu plina. Ovaj jednostavni model dobro opisuje situaciju u kojoj dvije posude s plinom koji se miješa nikad ne dolaze u stanje u kojem bi sav plin bio u jednoj posudi.

1.5 Reverzibilni Markovljevi lanci

U ovom odjeljku skup $\mathcal{X}$ može biti i beskonačan (no mora biti prebrojiv). Prisjetimo se da $E^{\mathcal{X}}$ označava skup svih preslikavanja $f : \mathcal{X} \to E$.

Definicija 1.5.1. *Neka je P stohastička matrica. Vektor $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathcal{X}} \in [0, \infty)^{\mathcal{X}}$, $\alpha \neq 0$, je* reverzibilan (detaljno uravnotežen) *u odnosu na P ako je*

$$\alpha_i p_{ij} = \alpha_j p_{ji} \qquad \forall i, j \in \mathcal{X} . \tag{1.5.1}$$

Markovljev lanac je reverzibilan *ako njegova matrica prijelaza ima reverzibilan vektor.*

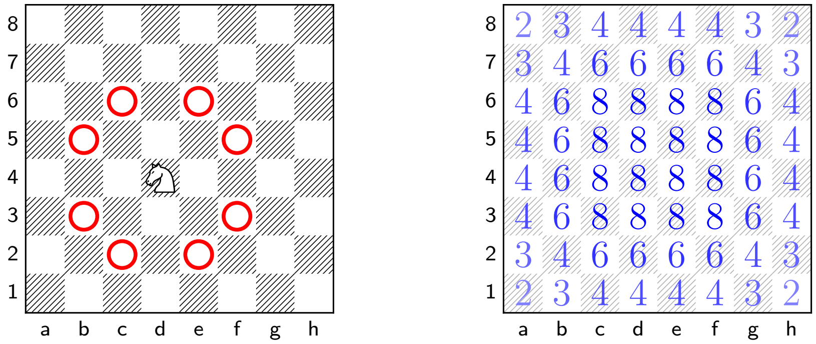
Uvjet (1.5.1) se u fizici zove *uvjet detaljne uravnoteženosti.* Značenje mu je da ako su stanja i i j zauzeta s vjerojatnošću proporcionalnom s α_i i α_j, redom, onda je stopa prijelaza iz i u j jednaka stopi prijelaza iz j u i.

Teorem 1.5.2. *Neka je P $\alpha \in [0, \infty)^{\mathcal{X}}$ vektor različit od nul-vektora.*

1. *Ako je α reverzibilan u odnosu na P, onda je α invarijantna mjera.*
2. *Ako je α reverzibilan u odnosu na P, i $\sum_{j \in \mathcal{X}} \alpha_j < \infty$, onda je mjera π definirana s $\pi_i = \alpha_i / \sum_{j \in \mathcal{X}} \alpha_j$ stacionarna raspodjela.*
3. *Ako je π stacionarna raspodjela, onda je*

$$\mathbb{P}_\pi\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = \mathbb{P}_\pi\{X_0 = i_n, X_1 = i_{n-1}, \dots, X_n = i_0\} \tag{1.5.2}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki izbor $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{X}$.



SLIKA 1.6. Dopušteni potezi skakača u šahu. Broj mogućih poteza za svako polje.

Dokaz.

1. Vrijedi
$$\sum_{i\in\mathcal{X}} \alpha_i p_{ij} = \alpha_j \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} = \alpha_j \ . \tag{1.5.3}$$
2. Slijedi izravno iz 1.
3. Prema Teoremu 1.2.5,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\pi\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} &= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \\ &= p_{i_1 i_0} \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} \\ &= \dots = p_{i_1 i_0} p_{i_2 i_1} \dots p_{i_n i_{n-1}} \pi_{i_n} \ , \end{aligned} \tag{1.5.4}$$
   što je jednako $\mathbb{P}_\pi\{X_0 = i_n, X_1 = i_{n-1}, \dots, X_n = i_0\}$. □

Relacija (1.5.2) znači da neka trajektorija lanca ima istu vjerojatnost kao i ona dobivena od nje promjenom smjera vremena. To opravdava uporabu pojma reverzibilnosti.

Primjer 1.5.3 (Slučajna šetnja skakača)**.** Pretpostavimo da je skakač postavljen na šahovnicu i da u svakoj jedinici vremena skoči s jednakom vjerojatnošću na jedno od polja koja su mu dopuštena šahovskim pravilima. Koliko je očekivano vrijeme između dvaju uzastopnih posjeta skakača donjem lijevom polju šahovnice?

Neka je n_i broj mogućih poteza polazeći s polja i (Slika 1.6). Skakačeva trajektorija je tada opisana Markovljevim lancem s vjerojatnostima prijelaza
$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_i} & \text{ako je potez } i \mapsto j \text{ dopušten} \ , \\ 0 & \text{inače} \ . \end{cases} \tag{1.5.5}$$

Onda se lako provjeri da je $n = \{n_i\}_{i\in\mathcal{X}}$ reverzibilni vektor tog lanca. Odatle slijedi da je
$$\pi_i = \frac{n_i}{\sum_{j\in\mathcal{X}} n_j} = \frac{n_i}{336} \tag{1.5.6}$$
stacionarna raspodjela tog lanca. Sada iz Teorema 2.4.3 slijedi da je prosječno vrijeme povratka na donje lijevo polje ploče jednako $1/\pi_{(1,1)} = 336/2 = 168$.

Primjer 1.5.4 (Ehrenfestov model)**.** Sada smo u mogućnosti objasniti zašto je stacionarna raspodjela Ehrenfestovog modela upravo binomna (vidi Primjere 1.1.3 i 1.4.12). U tu svrhu, umjesto da promatramo model kao Markovljev lanac na skupu $\{0, \dots, N\}$, promatramo ga kao lanac na $\mathcal{X} = \{0, 1\}^N$ (hiperkocka u N dimenzija). Komponenta x_i stanja $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}$ je 0 ako je i-ta kuglica u lijevoj posudi i 1 ako je u desnoj.

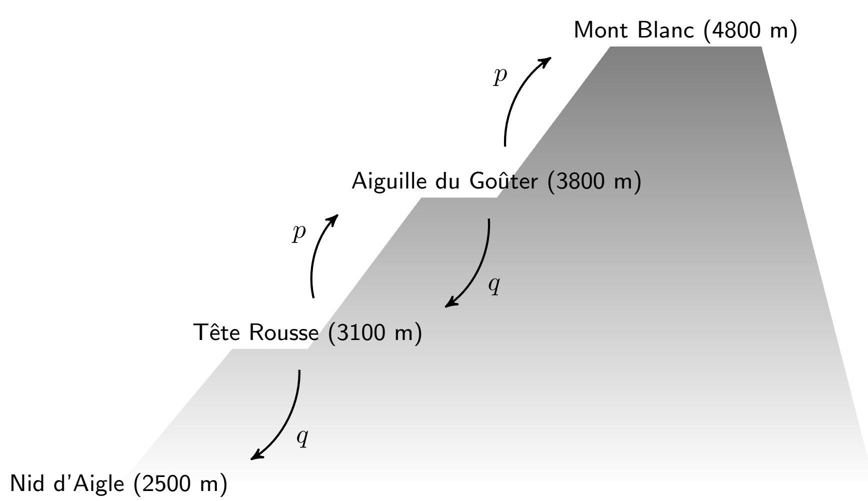
Iz nekog stanja $x \in \mathcal{X}$, možemo prijeći u točno N drugih stanja koja se mogu dobiti mijenjajući točno jednu komponentu od x, svaku s vjerojatnošću $1/N$. Odatle slijedi da je svaki konstantni vektor reverzibilan i stacionarna raspodjela je uniformna: $\pi_x = 2^{-N}$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Međutim, može postojati mnogo različitih stanja u $\mathcal{X}$ koja odgovaraju istom broju kuglica u posudi. Ustvari,

$$\mathbb{P}_\pi\{m \text{ kuglica u desnoj posudi}\} = \sum_{x\colon \sum x_i = m} \pi_x = \binom{N}{m} \frac{1}{2^N} . \tag{1.5.7}$$

Dobili smo da je stacionarna raspodjela Ehrenfestovog modela binomna.

1.6 Zadatci

Zadatak 1.1. Alpinist se želi popeti na Mont Blanc. Tijekom uspona, odlučio je provesti noć u skloništu Tête Rousse, i također u skloništu Aiguille du Goûter. Svako jutro sluša vremensku prognozu. Ako je dobra, nastavlja uspon do sljedeće postaje. U suprotnom, ako se predviđa loše vrijeme, spušta se jednu postaju. Pretpostavimo da se alpinist na početku nalazi u skloništu Tête Rousse i da će, bude li se prinuđen spustiti u Nid d'Aigle, odustati od uspona. Prognoza je dobra s vjerojatnošću p, a loša s vjerojatnošću $q = 1 - p$, neovisno o prognozi za prijašnji dan.



1. Pokažite da se problem može formulirati kao apsorbirajući Markovljev lanac i izračunajte njegovu fundamentalnu matricu.
2. Izračunajte vjerojatnost da će se alpinist uspjeti popeti na vrh kao funkciju od p.
3. Odredite vrijednost $p^\star$ od p za koju je vjerojatnost dostizanja vrha jednaka 0.1.
4. Izračunajte očekivani broj dana na usponu za slučaj $p = p^\star$.

Zadatak 1.2. Vratimo se na problem s mišem u labirintu (Primjer 3.1.1.) :

1. Odredite fundamentalnu matricu lanca.
2. Izračunajte vjerojatnost da će miš naći hranu.
3. Izračunajte očekivano trajanje potrage.

Zadatak 1.3. Dva igrača A i B igraju partiju tenisa. Igrač A dobiva bod s vjerojatnošću 3/5, B s vjerojatnošću 2/5, neovisno o prijašnjim bodovima.

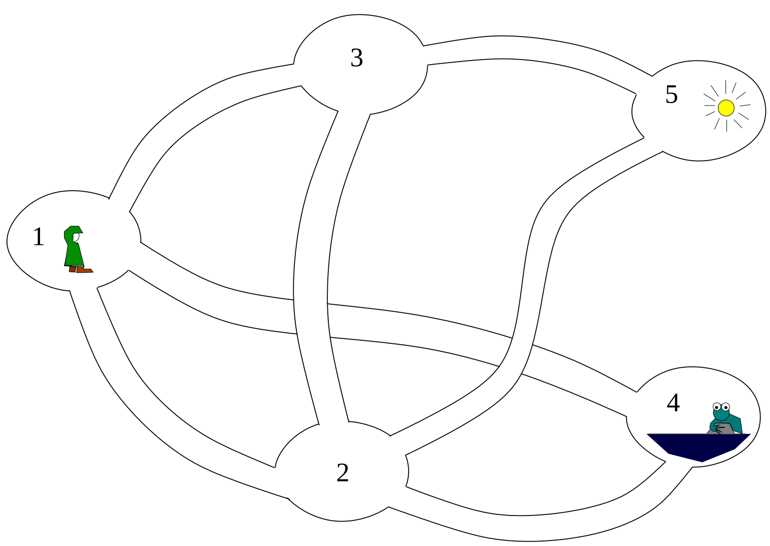
Igrači su na početku izjednačeni. Za pobjedu moraju postići prednost od dva boda pred protivnikom.

1. Modelirajte igru apsorbirajućim Markovljevim lancem s pet stanja: E (izjednačeno), prednost A, prednost B, A pobjeđuje, i B pobjeđuje. Napišite matricu prijelaza tog lanca.
2. Pokažite da je fundamentalna matrica tog lanca dana s

$$N = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 10 & 19 & 4 \\ 15 & 9 & 19 \end{pmatrix}.$$

3. Izračunajte vjerojatnost pobjede igrača A ako su igrači na početku izjednačeni.
4. Izračunajte očekivano trajanje igre ako su igrači na početku izjednačeni.

Zadatak 1.4. Hobit Bilbo izgubio se u goblinskim pećinama u kojima caruje potpuna tama. Polazeći iz pećine 1 bira s jednakom vjerojatnošću neki od tunela koji vode iz nje i nastavlja tako dok ne završi ili u Golumovoj pećini (broj 4) ili dok ne izađe na zrak (broj 5).



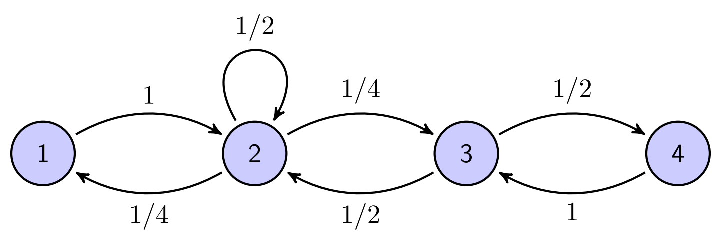
1. Opišite Bilbovo putovanje kao Markovljev lanac. Konstruirajte matricu prijelaza i fundamentalnu matricu.
2. Polazeći iz 1, kolika je vjerojatnost da će Bilbo prije naći izlaz nego Golumovu jazbinu?
3. Koliko je očekivanje broja tunela koje će Bilbo proći prije nego što se ili oslobodi ili završi kod Goluma?

Zadatak 1.5. Promatramo Markovljev lanac sa skupom stanja $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ i matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/16 & 7/16 & 0 & 1/2 \\ 1/16 & 0 & 7/16 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

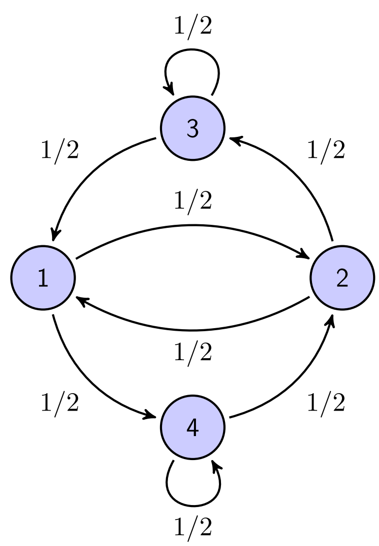
1. Pokažite da je taj lanac ireducibilan.
2. Je li taj lanac regularan?
3. Izračunajte stacionarnu raspodjelu tog lanca.

Zadatak 1.6. Promatramo sljedeći Markovljev lanac :



1. Odredite matricu prijelaza P tog lanca.
2. Je li lanac ireducibilan?
3. Je li lanac regularan?
4. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu.
5. Je li lanac reverzibilan?

Zadatak 1.7. Neka je Markovljev lanac na $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ dan sljedećim grafom:



1. Je li lanac ireducibilan?
2. Je li lanac regularan?
3. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu.
4. Je li lanac reverzibilan?

Zadatak 1.8. Vrijeme u nekom gradu može biti kišovito, snježno ili sunčano. Ako je kišno, vrijeme sljedećeg dana će biti kišno s vjerojatnošću $1/3$, sniježit će s vjerojatnošću $1/6$ i bit će lijepo s vjerojatnošću $1/2$. Poslije snježnog dana, i kišni dan i snježni dan dolaze s istom vjerojatnošću $1/2$. Konačno, poslije lijepog dana slijedi lijepi dan s vjerojatnošću $1/4$ i kišni dan s vjerojatnošću $3/4$. Pretpostavimo da vrijeme na dan n ovisi samo o vremenu na dan $n-1$.

1. Formulirajte problem kao Markovljev lanac s diskretnim vremeno. Kojeg je tipa taj lanac?
2. Odredite asimptotsku vjerojatnost za kišovito, snježno i lijepo vrijeme.
3. Koliki je prosječni razmak između dva snježna dana?

Zadatak 1.9. Anica ima 3 kišobrana. Svakog jutra ona odlazi u ured i navecer se vraća kući. Pri svakom putovanju uzima kišobran ako pada kiša i ako joj je pri ruci. Ako kiša ne pada, ne uzima kišobran. Pretpostavimo da je vjerojatnost kiše $1/3$ i da ne ovisi o stanju na početku prijašnjih putovanja. Neka je X_n broj kišobrana koje Anica ima na mjestu s kojeg polazi na n-to putovanje.

1. Pokažite da je $\{X_n\}_n$ Markovljev lanac i konstruirajte njegovu matricu prijelaza.
2. Kojeg je tipa taj lanac?
3. Koja je vjerojatnost, nakon velikog broja putovanja, da Anica nema kišobran pri ruci na početku putovanja?
4. Koja je asimptotska vjerojatnost da će pokisnuti, tj. da nema kišobran i da pada kiša kad kreće na put?

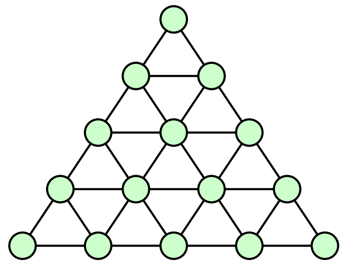
Zadatak 1.10. Pokažite da je binomna raspodjela stacionarna za Ehrenfestov model.

Zadatak 1.11. Svaku stohastičku 2×2 matricu možemo pisati kao

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad \text{za } p, q \in [0,1].$$

1. Diskutirajte, u ovisnosti o p i q, kada je P apsorbrajuća, ireducibilna, regularna.
2. Pokažite da je matrica
$$\Pi = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$
projektor ($\Pi^2 = \Pi$) koji komutira s P. Izračunajte njegovu jezgru i sliku.
3. Neka je $Q = P - \Pi$. Pokažite da je $Q\Pi = \Pi Q = 0$. Izračunajte Q^2, a onda i Q^n za svaki n.
4. Izvedite iz prijašnjih rezultata P^n za svaki n. Diskutirajte graničnu vrijednost od P^n za $n \to \infty$ u ovisnosti o p i q.

Zadatak 1.12. Žeton se pomiče po rešetci na slici tako da u svakom koraku skače na jedno od susjednih mjesta koja se biraju slučajno s jednakom vjerojatnošću.

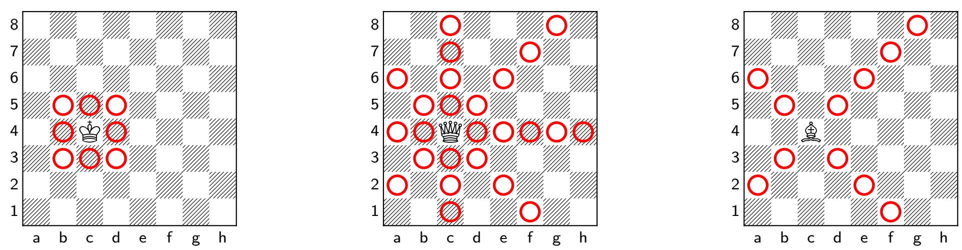


Odredite očekivano vrijeme povratka u donji lijevi kut.

Zadatak 1.13. Promatrajmo

1. kralja;
2. damu;
3. lovca

na šahovskoj ploči koji, u svakom koraku, slučajno i s jednakom vjerojatnošću, skaču na neko od polja koja su im dopuštena pravilima šahovske igre.



Odredite za svaku figuru očekivano vrijeme povratka na polje u donjem lijevom kutu ploče.

Zadatak 1.14. Neka je X_n Markovljev lanac sa skupom stanja $\mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, N\}$ s vjerojatnostima prijelaza

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{za } j = i+1 \text{ ili } i = N \text{ i } j = 1 \\ 1-p & \text{za } j = i-1 \text{ ili } i = 1 \text{ i } j = N \ . \end{cases}$$

1. Odredite stacionarnu raspodjelu tog lanca.
2. Za koje vrijednosti p je lanac reverzibilan?

Zadatak 1.15. Neka je $\mathcal{G} = (V, E)$ neorijentirani konačni povezani graf. Neka je X_n Markovljev lanac na V u kojem se X_{n+1} dobije tako da iz vrha X_n slučajno i s jednakom vjerojatnošću skačemo u neki od njegovih susjeda.

1. Pokažite da broj susjeda svakog vrha (njegov stupanj) čini reverzibilan vektor.
2. Izvedite izraz za stacionarnu raspodjelu tog lanca.

Poglavlje 2

Markovljevi lanci s prebrojivim skupom stanja

2.1 Slučajne šetnje

Slučajne šetnje su relativno jednostavan no ipak vrlo važan primjer Markovljevih lanaca s prebrojivim skupom stanja. U tom je slučaju $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^d$ beskonačna rešetka dimenzije $d \in \mathbb{N}^*$. Po dogovoru, smatramo da lanac kreće iz $X_0 = 0$. Nakon toga, u svakom trenutku prijelaza slučajno biramo jedno od $2d$ susjednih mjesta prema fiksnoj unaprijed zadanoj raspodjeli.

Definicija 2.1.1. Slučajna šetnja *na* $\mathbb{Z}^d$ *je Markovljev lanac s vrijednostima u* $\mathbb{Z}^d$*, s početnom raspodjelom* $\nu = \delta_0$*, i s vjerojatnostima prijelaza koje zadovoljavaju*

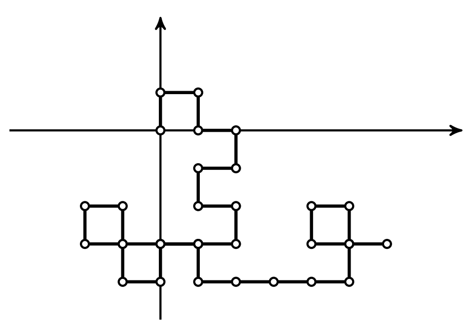
$$p_{ij} = 0 \qquad \text{za } i = j \text{ ili } \|i - j\| > 1 \; . \tag{2.1.1}$$

Šetnja je simetrična *ako je*

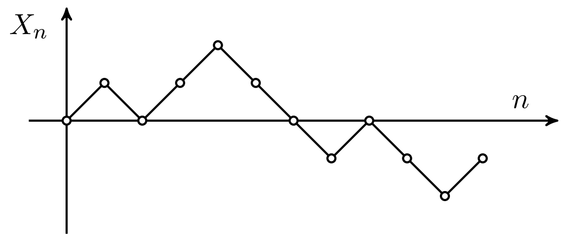
$$p_{ij} = \frac{1}{2d} \qquad \text{za } \|i - j\| = 1 \; . \tag{2.1.2}$$

Putanje slučajne šetnje su nizovi točaka u $\mathbb{Z}^d$ na udaljenosti 1, koju obično identificiramo s poligonalnom linijom koja povezuje te točke (Slika 2.1).

U simetričnom slučaju, iz Teorema 1.2.5 izravno slijedi da svaki segment putanje $X_{[0,n]}$ ima vjerojatnost $(2d)^{-n}$. Možemo lako odrediti neka svojstva raspodjele od X_n.



Slika 2.1. Jedna putanja neke slučajne šetnje u dimenziji $d = 2$.



SLIKA 2.2. Jedna realizacija jednodimenzionalne slučajne šetnje.

Propozicija 2.1.2. *Za simetričnu slučajnu šetnju na* $\mathbb{Z}^d$*, slučajne varijable* X_n *zadovoljavaju*

$$\mathbb{E}(X_n) = 0 \qquad i \qquad \operatorname{cov}(X_n) = \frac{n}{d} I \tag{2.1.3}$$

za svako vrijeme n*. Štoviše, kada* $n \to \infty$ *imamo*

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{d} I\Big) , \tag{2.1.4}$$

gdje $\mathcal{L}$ *označava konvergenciju u raspodjeli, i* $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ *označava standardnu normalnu raspodjelu s kovarijacijskom matricom* Σ*.*

Dokaz. Lako se provjeri da su slučajne varijable $Y_n = X_n - X_{n-1}$ n.j.d., da im je očekivanje nula i kovarijacijska matrica $\frac{1}{d} I$, što povlači (2.1.3). Relacija (2.1.4) onda izravno slijedi iz centralnog graničnog teorema. □

Posljedica toga je da se položaj slučajne šetnje u trenutku n s velikom vjerojatnošću nalazi unutar kugle polumjera reda $\sqrt{n}$ oko ishodišta. Kažemo da slučajna šetnja ima *difuzivno* ponašanje (za razliku od *balističkog*, kod kojeg udaljenost od ishodišta raste proporcionalno s n).

Promotrimo sada pobliže jednodimenzionalnu ($d = 1$) simetričnu slučajnu šetnju. U tom slučaju lako vidimo da je raspodjela od X_n simetrična binomna raspodjela centrirana u 0 :

$$\mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \qquad \forall k \in \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} . \tag{2.1.5}$$

Posebno, vjerojatnost da se proces nađe u 0 na n-tom koraku je dana s

$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = \begin{cases} 0 & \text{za neparan } n , \\ \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & \text{za paran } n = 2m \ . \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Primijetimo da za velike m Stirlingova formula daje

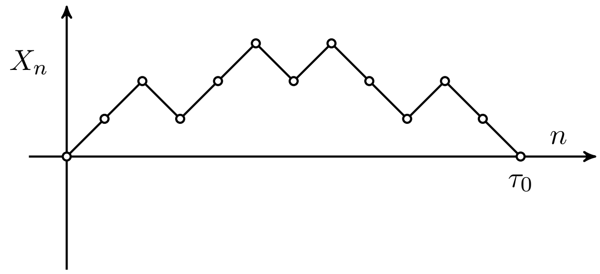
$$\mathbb{P}\{X_{2m} = 0\} \sim \frac{1}{2^{2m}} \frac{\sqrt{4\pi m}\, \mathrm{e}^{-2m} (2m)^{2m}}{2\pi m\, \mathrm{e}^{-2m}\, m^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} . \tag{2.1.7}$$

Za svako parno vrijeme, ishodište je najvjerojatnija točka u kojoj se šetnja nalazi, no ta se vjerojatnost smanjuje s vremenom.

Međutim, raspodjela svakog X_n ne određuje proces, X_n nisu nezavisni.

Možemo proučavati i mnoga druga svojstva slučajnih šetnji. Zanimljiva veličina je vrijeme τ_0 prvog povratka procesa u ishodište (Slika 2.3) :

$$\tau_0 = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n = 0\} . \tag{2.1.8}$$



SLIKA 2.3. Realizacija jednodimenzionalne slučajne šetnje za koju je $\tau_0 = 12$.

Jasno je da τ_0 može poprimati samo parne vrijednosti. Štoviše, ako je $\tau_0 = n$ onda je $X_n = 0$, dakle $\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} \leqslant \mathbb{P}\{X_n = 0\}$. Zapravo, moramo odrediti

$$\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} = \mathbb{P}\{X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0\} . \tag{2.1.9}$$

Teorem 2.1.3. *Raspodjela od τ_0 je dana s*

$$\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} = \begin{cases} 0 & \text{za neparan } n, \\ \dfrac{1}{n}\mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\} & \text{za paran } n. \end{cases} \tag{2.1.10}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\tau_0 = n$. Kako proces ne može promijeniti predznak ne prolazeći kroz 0, imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_0 = n\} &= \mathbb{P}\{X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_{n-1} > 0, X_n = 0\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{X_1 < 0, X_2 < 0, \ldots, X_{n-1} < 0, X_n = 0\} \\ &= 2\mathbb{P}\{X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_{n-1} > 0, X_n = 0\} \\ &= 2\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 > 0, \ldots, X_{n-2} > 0, X_{n-1} = 1, X_n = 0\} \\ &= 2\mathbb{P}\{X_n = 0 | X_{n-1} = 1\}\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 > 0, \ldots, X_{n-2} > 0, X_{n-1} = 1\} , \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

gdje smo u zadnjem retku koristili Markovljevo svojstvo. Svojstvo stacionarnih prirasta (vidi (1.2.14)) povlači

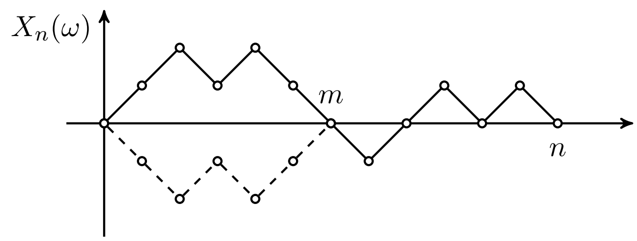
$$\mathbb{P}\{X_n = 0 | X_{n-1} = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1\} = \frac{1}{2} . \tag{2.1.12}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_0 = n\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1, X_2 > 0, \ldots, X_{n-2} > 0, X_{n-1} = 1\} \qquad (2.1.13) \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = X_{n-1} = 1\} - \mathbb{P}\{X_1 = X_{n-1} = 1, \exists m \in \{2, \ldots, n-2\} : X_m = 0\} . \end{aligned}$$

Koristimo sada važan argument koji se zove *princip refleksije* : Svakom putu od $(1, 1)$ do $(n - 1, 1)$ koji prolazi kroz 0, možemo na jedinstven nažin pridružiti put od $(-1, 1)$ do $(n - 1, 1)$, dobiven zrcaljenjem preko osi apscisa dijela puta lijevo od prvog prolaska kroz 0 (Slika 2.4). Odatle imamo

$$\mathbb{P}\{X_1 = X_{n-1} = 1, \exists m \in \{2, \ldots, n-2\} : X_m = 0\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_{n-1} = 1\} . \tag{2.1.14}$$



Slika 2.4. Za svaku realizaciju slučajne šetnje s $\tau_0 = m < n$ za koju je $X_1 = 1$, postoji neka druga realizacija takva da je $\tau_0 = m$ i $X_1 = -1$, dobivena zrcaljenjem preko osi apscisa.

Konačno, primijenjujući ponovo svojstvo stacionarnih prirasta, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_1 = 1, X_{n-1} = 1\} &= \mathbb{P}\{X_{n-1} = 1 | X_1 = 1\}\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\} \cdot \frac{1}{2}\,, \\ \mathbb{P}\{X_1 = -1, X_{n-1} = 1\} &= \mathbb{P}\{X_{n-1} = 1 | X_1 = -1\}\mathbb{P}\{X_1 = -1\} = \mathbb{P}\{X_{n-2} = 2\} \cdot \frac{1}{2}\,.\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Uvrštavanjem u (2.1.13) slijedi

$$\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\} - \mathbb{P}\{X_{n-2} = 2\}\big]\,. \tag{2.1.16}$$

Ostatak dokaza je izravni račun. Kako je

$$\frac{\mathbb{P}\{X_{n-2} = 2\}}{\mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\}} = \frac{\binom{n-2}{n/2}}{\binom{n-2}{n/2-1}} = \frac{\big(\frac{n}{2}-1\big)!\big(\frac{n}{2}-1\big)!}{\big(\frac{n}{2}\big)!\big(\frac{n}{2}-2\big)!} = \frac{\frac{n}{2}-1}{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{2}{n}\,, \tag{2.1.17}$$

dobiva se

$$\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\}\left[1 - 1 + \frac{2}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{P}\{X_{n-2} = 0\}\,, \tag{2.1.18}$$

što dovršava dokaz. □

Sljedeća tablica daje prvih nekoliko vrijednosti vjerojatnosne raspodjele i funkcije distribucije za τ_0 :

n	2	4	6	8	10	12	14
$\mathbb{P}\{\tau_0 = n\}$	$\frac{1}{2}$ $= 0.5$	$\frac{1}{8}$ $= 0.125$	$\frac{1}{16}$ $\cong 0.063$	$\frac{5}{128}$ $\cong 0.039$	$\frac{7}{256}$ $\cong 0.027$	$\frac{21}{1024}$ $\cong 0.021$	$\frac{33}{2048}$ $\cong 0.016$
$\mathbb{P}\{\tau_0 \leqslant n\}$	$= 0.5$	$= 0.625$	$\cong 0.688$	$\cong 0.727$	$\cong 0.754$	$\cong 0.774$	$\cong 0.791$

Vidimo da je vjerojatnost brzog povratka u nulu dosta velika, dok poslije raspodjela poprima male vrijednosti koje polako padaju. Iz (2.1.7) slijedi da za velike n, $\mathbb{P}\{\tau_0 = n\}$ pada kao $1/n^{3/2}$. To ima začuđujuću posljedicu :

Korolar 2.1.4. $\mathbb{E}(\tau_0) = +\infty$.

Dokaz. Vrijedi

$$\mathbb{E}(\tau_0) = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}\{\tau_0 = n\} = \sum_{m\geqslant 1} 2m\frac{1}{2m}\mathbb{P}\{X_{2m-2} = 0\} \sim \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} = +\infty\ . \tag{2.1.19}$$

□

Drugim riječima, slučajna šetnja se uvijek vraćau 0, no raspodjela od τ_0 ne pada dovoljno brzo da bi njeno očekivanje bilo konačno. To je stoga što kad se slučajna šetnja jako udalji od ishodišta, onda joj treba jako dugo vrijeme za povratak.

Sličnim zaključivanjem možemo odrediti i raspodjelu za vrijeme dolaska

$$\tau_i = \inf\{n \geqslant 0\colon X_n = i\}. \tag{2.1.20}$$

Dajemo samo tvrdnju, a dokaz ostavljamo za vježbu.

Teorem 2.1.5. *Raspodjela za τ_i je dana s*

$$\mathbb{P}\{\tau_i = n\} = \begin{cases} \dfrac{|i|}{n}\mathbb{P}\{X_n = i\} & \text{za } n \in \{|i|, |i|+2, \dots\}\ , \\ 0 & \text{inače}\ . \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Zbog sličnih razloga kao za povratak u 0, raspodjela od τ_i pada kao $1/n^{3/2}$, i njeno očekivanje je beskonačno.

2.2 Općenito o stohastičkim procesima

Do sada smo govorili o Markovljevim lancima, koji su posebni tip stohastičkih procesa, ne precizirajući vjerojatnosne prostore na kojima su konstruirani. To nije problem dok je riječ o konačnim segmentima trajektorija : dovoljno je promatrati produktne prostore s konačnim brojem članova. Slučaj beskonačnih trajektorija zahtijeva neke dodatne mjere opreza. Dajemo ovdje pregled općenite konstrukcije stohastičkog procesa s diskretnim vremenom.

Neka je $(E, \mathcal{E})$ izmjeriv prostor. Skup $E^n = E \times E \times \dots \times E$ može biti opskrbljen strukturom $\mathcal{E}^{\otimes n}$, definiranom kao familija generirana svim događajima tipa

$$A^{(i)} = \{\omega \in E^n \colon \omega_i \in A\}\ , \qquad A \in \mathcal{E}\ , \tag{2.2.1}$$

koje zovemo *cilindri*. Označimo s $E^{\mathbb{N}}$ skup preslikavanja $x : \mathbb{N} \to E$, tj. skup nizova $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ s vrijednostima u E. Taj skup možemo ponovo opremiti strukturom konstruiranom polazeći od cilindara koju označimo s $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}}$.

Definicija 2.2.1.

- Stohastički proces *s vrijednostima u $(E, \mathcal{E})$ je niz $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ slučajnih varijabli s vrijednostima u $(E, \mathcal{E})$, definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (drugačije rečeno, svaki X_n je $\mathcal{F}$-$\mathcal{E}$-izmjerivo preslikavanje s Ω u E). To je, dakle, slučajna varijabla s vrijednostima u $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}})$.*

- *Neka je $\mathbb{Q}$ vjerojatnosna mjera na $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}})$.* Konačnodimenzionalne raspodjele *od $\mathbb{Q}$ su mjere na $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{\otimes n+1})$ definirane s*

$$\mathbb{Q}^{(n)} = \mathbb{Q} \circ (\pi^{(n)})^{-1} , \tag{2.2.2}$$

gdje je $\pi^{(n)}$ projekcija $\pi^{(n)} : E^{\mathbb{N}} \to E^{n+1}$, $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_0, \dots, x_n)$.

Lako se uvjeriti da niz $\{\mathbb{Q}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednoznačno definira $\mathbb{Q}$. Obratno, za dani niz $\{\mathbb{Q}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji odgovara mjeri $\mathbb{Q}$, veličine $\mathbb{Q}^{(n)}$ moraju zadovoljavati *uvjet kompatibilnosti* :

Neka je φ_n projekcija $\varphi_n : E^{n+1} \to E^n$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1})$. Onda je $\pi^{(n-1)} = \varphi_n \circ \pi^{(n)}$, dakle za svaki $A \in \mathcal{E}^{\otimes n}$, $(\pi^{(n-1)})^{-1}(A) = (\pi^{(n)})^{-1}(\varphi_n^{-1}(A))$. Uvjet kompatibilnosti se može pisati kao

$$\mathbb{Q}^{(n-1)} = \mathbb{Q}^{(n)} \circ \varphi_n^{-1} . \tag{2.2.3}$$

Sljedeći dijagram ilustrira situaciju (sve su projekcije izmjerive, možemo ih promatrati i kao preslikavanja skupova i kao preslikavanja familija) :

$$\begin{tikzcd}
(E^{\mathbb{N}},\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}}) \arrow[d, "\pi^{(n)}"] \arrow[dr, "\mathbb{Q}"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi^{(n-1)}"'] & \\
(E^{n+1},\mathcal{E}^{\otimes n+1}) \arrow[r, "\mathbb{Q}^{(n)}"] \arrow[d, "\varphi_n"] & {[0,1]} \\
(E^{n},\mathcal{E}^{\otimes n}) \arrow[ur, "\mathbb{Q}^{(n-1)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Možemo početi konstruirati niz $\mathbb{Q}^{(n)}$ koji zadovoljavaju uvjet (2.2.3).

Definicija 2.2.2. *Neka su $(E_1, \mathcal{E}_1)$ i $(E_2, \mathcal{E}_2)$ dva izmjeriva prostora.* Markovljeva jezgra na $(E_1, \mathcal{E}_1)$ u $(E_2, \mathcal{E}_2)$ *je preslikavanje $K : E_1 \times \mathcal{E}_2 \to [0, 1]$ koje zadovoljava sljedeća dva uvjeta*

1. *Za svaki $x \in E_1$, $K(x, \cdot)$ je vjerojatnosna mjera na $(E_2, \mathcal{E}_2)$.*
2. *Za svaki $A \in \mathcal{E}_2$, $K(\cdot, A)$ je $\mathcal{E}_1$-izmjerivo preslikavanje.*

Primjer 2.2.3.

1. Neka je μ vjerojatnosna mjera na $(E_2, \mathcal{E}_2)$. Onda je K definiran s $K(x, A) = \mu(A)$ za svaki $x \in E_1$ Markovljeva jezgra.
2. Neka je $f : E_1 \to E_2$ izmjerivo preslikavanje. Onda je K definirana s $K(x, A) = 1_A(f(x))$ Markovljeva jezgra.
3. Neka je $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ konačan skup i stavimo $E_1 = E_2 = \mathcal{X}$ i $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Onda je K definirana s

$$K(i, A) = \sum_{j\in A} p_{ij} , \tag{2.2.4}$$

gdje je $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{X}}$ stohastička matrica, Markovljeva jezgra.

Ako je μ vjerojatnosna mjera na $(E_1, \mathcal{E}_1)$ i K Markovljeva jezgra na $(E_1, \mathcal{E}_1)$ u $(E_2, \mathcal{E}_2)$, definiramo vjerojatnosnu mjeru $\mu \otimes K$ na $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ formulom

$$(\mu \otimes K)(A) := \int_{E_1} K(x_1, A_{x_1}) \mu(\mathrm{d}x_1) , \tag{2.2.5}$$

gdje je $A_{x_1} = \{x_2 \in E_2 \colon (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{E}_2$ *prerez* od A po x_1. Provjerimo da je to zaista vjerojatnosna mjera. Kako bismo razumjeli njen značaj, izračunajmo njene marginalne raspodjele. Neka su π_1 i π_2 projekcije definirane s $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$, $i = 1, 2$.

1. Za svaki izmjerivi skup $A_1 \in \mathcal{E}_1$, vrijedi

$$\begin{aligned} \big((\mu \otimes K) \circ \pi_1^{-1}\big)(A_1) &= (\mu \otimes K)(A_1 \times E_2) \\ &= \int_{E_1} 1_{A_1}(x_1) K(x_1, E_2) \mu(\mathrm{d}x_1) \\ &= \int_{A_1} K(x_1, E_2) \mu(\mathrm{d}x_1) = \mu(A_1) , \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

   gdje smo koristili činjenicu da je prerez $(A_1 \times \mathcal{E}_1)_{x_1}$ dan s E_2 ako je $x_1 \in A_1$, i s $\emptyset$ ako nije. To povlači

$$(\mu \otimes K) \circ \pi_1^{-1} = \mu . \tag{2.2.7}$$

   Prva marginalna raspodjela od $\mu \otimes K$ je dakle jednostavno μ.

2. Za svaki izmjerivi skup $A_2 \in \mathcal{E}_2$, vrijedi

$$\begin{aligned} \big((\mu \otimes K) \circ \pi_2^{-1}\big)(A_2) &= (\mu \otimes K)(E_1 \times A_2) \\ &= \int_{E_1} K(x_1, A_2) \mu(\mathrm{d}x_1) . \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

   Drugu marginalnu raspodjelu od $\mu \otimes K$ interpretiramo na sljedeći način: to je mjera na E_2 dobivena polazeći od mjere μ na E_1, i "od svakog $x \in E_1$ u $A_2 \in \mathcal{E}_2$ s vjerojatnošću $K(x_1, A_2)$".

Konačno, po jednoj varijanti Fubini–Tonellijevog teorema, provjerimo da za svaku $(\mu \otimes K)$-integrabilnu funkciju $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{E_1 \times E_2} f \, \mathrm{d}(\mu \otimes K) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) K(x_1, \mathrm{d}x_2) \right) \mu(\mathrm{d}x_1) . \tag{2.2.9}$$

Možemo sada nastaviti s kontrukcijom niza $\{\mathbb{Q}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konačnodimenzionalnih raspodjela koje zadovoljavaju uvjet kompatibilnosti (2.2.3). Na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$, dana je vjerojatnosna mjera ν, *inicijalna mjera*. Imamo za svaki $n \in \mathbb{N}$ Markovljevu jezgru K_n na $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{\otimes n+1})$ u $(E, \mathcal{E})$. Onda definiramo niz $\{\mathbb{Q}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ vjerojatnosnih mjera na $(E^{n+1}, \mathcal{E}^{n+1})$ rekurzivno s

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}^{(0)} = \nu , \\ &\mathbb{Q}^{(n)} = \mathbb{Q}^{(n-1)} \otimes K_{n-1} , \qquad n \geqslant 2 . \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Prema (2.2.7), imamo $\mathbb{Q}^{(n)} \circ \varphi_n^{-1} = (\mathbb{Q}^{(n-1)} \otimes K_{n-1}) \circ \varphi_n^{-1} = \mathbb{Q}^{(n-1)}$, dakle je uvjet kompatibilnosti doista zadovoljen.

Interpretacija od (2.2.10) je da svaka Markovljeva jezgra K_n opisuje vjerojatnosti prijelaza između vremena n i $n+1$, i dopušta definiranje mjere na segmentima putanje duljima od jedne jedinice duljine. Primijetimo, konačno, da isto tako možemo konstruirati za sve m, n jezgru $K_{n,m}$ na $(E^n, \mathcal{E}^{\otimes n})$ u $(E^m, \mathcal{E}^{\otimes m})$ takvu da je $\mathbb{Q}^{(n+m)} = \mathbb{Q}^{(n)} \otimes K_{n,m}$.

Možemo također primijetiti da ako $\psi_n : E^{n+1} \to E$ označava projekciju na zadnju komponentu $(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_n$, onda formula (2.2.8) pokazuje da se raspodjela od X_n, dana marginalnom raspodjelom $\nu_n = \mathbb{Q}^{(n)} \circ \psi_n^{-1}$, izražava kao

$$\mathbb{P}\{X_n \in A\} = \nu_n(A) = \int_{E^n} K_{n-1}(x, A) \mathbb{Q}^{(n-1)}(\mathrm{d}x) . \tag{2.2.11}$$

Situacija je ilustrirana sljedećim dijagramom :

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{E}) \arrow[dr, "\nu_n"] & \\
(E^{n+1},\mathcal{E}^{\otimes n+1}) \arrow[u, "\psi_n"] \arrow[r, "\mathbb{Q}^{(n)}"] \arrow[d, "\varphi_n"] & {[0,1]} \\
(E^n,\mathcal{E}^{\otimes n}) \arrow[ur, "\mathbb{Q}^{(n-1)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dajemo sada bez dokaza općeniti rezultat koji opravdava opisani postupak.

Teorem 2.2.4 (Ionescu–Tulcea)**.** *Za niz mjera $\{\mathbb{Q}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiranih prema* (2.2.10)*, postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{Q}$ na $(E^{\mathbb{N}}, \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}})$ takva da je $\mathbb{Q}^{(n)} = \mathbb{Q} \circ (\pi^{(n)})^{-1}$ za svaki n, tj. da su $\mathbb{Q}^{(n)}$ konačnodimenzionalne raspodjele od $\mathbb{Q}$.*

Primjer 2.2.5.

1. **Produktne mjere:** Dan je niz $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vjerojatnosnih mjera na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{E})$. Neka je, za svaki n, $\mathbb{Q}^{(n)} = \mu_0 \otimes \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ produktna mjera. Postoji mjera gornjeg oblika, s Markovljevom jezgrom

$$K_n(x, A) = \mu_{n+1}(A) \qquad \forall x \in E^n, \forall A \in \mathcal{E} . \tag{2.2.12}$$

   Relacija (2.2.11) pokazuje da je raspodjela ν_n od X_n dana s μ_n. Kažemo da su slučajne varijable X_n *nezavisne*. Ako su sve μ_n iste, kažemo da su *nezavisne i jednako distribuirane (n.j.d.)*.

2. **Dinamički sustavi:** Neka je dano izmjerivo preslikavanje $f : E \to E$, inicijalna vjerojatnosna mjera ν na E. Neka je za svaki n dana Markovljeva jezgra

$$K_n(x, A) = 1_A f(x_n) , \tag{2.2.13}$$

i konstruirajmo $\mathbb{Q}^{(n)}$ kao gore. Onda formula (2.2.11) pokazuje da za svaki $A \in E$ imamo

$$\begin{aligned}\nu_{n+1}(A) &= \int_{E^{n+1}} 1_A f(x_n) \mathbb{Q}^{(n)}(\mathrm{d}x) \\ &= \int_E 1_A f(x_n) \nu_n(\mathrm{d}x_n) \\ &= \int_{f^{-1}(A)} \nu_n(\mathrm{d}x_n) = \nu_n(f^{-1}(A)) \,. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Slijedi

$$\nu_n = \nu \circ f^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \,. \tag{2.2.15}$$

Ova situacja odgovara determinističkom dinamičkom sustavu. Na primjer, ako je f bijekcija i $\nu = \delta_{x_0}$ koncentrirana u točki, imamo $\nu_n = \delta_{f^n(x_0)}$.

3. **Markovljevi lanci:** Neka je $\mathcal{X}$ konačan ili prebrojiv skup s familijom $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, i $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{X}}$ stohastička matrica na $\mathcal{X}$, tj. $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$ $\forall i,j \in \mathcal{X}$ i $\sum_{j\in\mathcal{X}} p_{ij} = 1$ $\forall i \in \mathcal{X}$. Neka je dana vjerojatnosna mjera ν na $\mathcal{X}$, i niz $\mathbb{Q}^{(n)}$ konstruiran polazeći od (2.2.10) s Markovljevim jezgrama
$$K_n(i_{[0,n-1]}, i_n) = p_{i_{n-1}i_n} \,. \tag{2.2.16}$$
Stohastički proces mjere $\mathbb{Q}$, čije su konačnodimenzionalne raspodjele $\mathbb{Q}^{(n)}$, je Markovljev lanac na $\mathcal{X}$ s početnom raspodjelom ν i matricom prijelaza P. U tom slučaju relacija (2.2.11) glasi
$$\mathbb{P}\{X_n \in A\} = \nu_n(A) = \sum_{i\in\mathcal{X}} \sum_{j\in A} p_{ij}\nu_{n-1}(\{i\}) = \sum_{j\in A} \sum_{i\in\mathcal{X}} \mathbb{P}\{X_{n-1} = i\} p_{ij} \,. \tag{2.2.17}$$

2.3 Povratnost, prolaznost i period

Vraćamo se sada proučavanju Markovljevih lanaca na prebrojivom skupu $\mathcal{X}$. Prisjetimo se da je *vrijeme prvog dolaska* lanca u stanje $i \in \mathcal{X}$ slučajna varijabla

$$\tau_i = \inf\{n \geqslant 1 \colon X_n = i\} \,, \tag{2.3.1}$$

uz dogovor $\tau_i = \infty$ ako $X_n \neq i$ $\forall n \geqslant 1$. Ako lanac kreće iz stanja i u trenutku 0, τ_i se također zove i *vrijeme prvog povratka u stanje i*.

Za slučaj konačnog skupa stanja $\mathcal{X}$, vidjeli smo da je za ireducibilni lanac τ_i skoro sigurno konačno (vidi Propoziciju 1.4.4). Ako je $\mathcal{X}$ beskonačan, to više ne mora vrijediti. Dokaz koji smo dali za Propoziciju 1.4.4 koristi Propoziciju 1.3.3 za apsorbirajuće lance, čiji se dokaz ne prenosi na beskonačni slučaj (definicija (1.3.7) od p ne sprječava $p = 1$). Moramo, stoga, uvesti sljedeću razliku.

Definicija 2.3.1. *Stanje $i \in \mathcal{X}$ je* povratno *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}_i\{\tau_i < \infty\} \coloneqq \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i\{\tau \leqslant N\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = n\} = 1 \,. \tag{2.3.2}$$

U suprotnom je stanje prolazno. *Markovljev lanac je* povratan (prolazan) *ako su sva njegova stanja povratna (prolazna), redom.*

Činjenica da je stanje povratno znači da će se lanac skoro sigurno vratiti u to stanje, dakle da će se u njega vraćati beskonačno često. Ako je stanje prolazno, to znači da postoji pozitivna vjerojatnost da se lanac nikad više ne će vratiti u to stanje.

Uvjet (2.3.2) nije, u općem slučaju, lako provjeriti, jer pretpostavlja da znamo raspodjelu τ_i. Možemo, međutim, dobiti ekvivalentan uvjet koji se puno lakše provjerava. U tu svrhu prvo dokažimo jednadžbu obnavljanja.

Propozicija 2.3.2. *Za sve $i, j \in \mathcal{X}$ i sva vremena $n \in \mathbb{N}$ vrijedi relacija*

$$\mathbb{P}_i\{X_n = j\} = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i\{\tau_j = m\}\mathbb{P}_j\{X_{n-m} = j\} . \tag{2.3.3}$$

Dokaz. Razlažući po vremenima prvog dolaska u j, dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i\{X_n = j\} &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i\{j \notin X_{[1,m-1]}, X_m = j, X_n = j\} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_i\{X_n = j | j \notin X_{[1,m-1]}, X_m = j\}}_{=\mathbb{P}_i\{X_n=j|X_m=j\}=\mathbb{P}_j\{X_{n-m}=j\}} \underbrace{\mathbb{P}_i\{j \notin X_{[1,m-1]}, X_m = j\}}_{=\mathbb{P}_i\{\tau_j=m\}} ,
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

gdje smo koristili svojstvo stacionarnosti prirasta. □

Možemo sada dokazati kriterij povratnosti koji se jednostavnije provjerava nego definicija (2.3.2).

Teorem 2.3.3. *Sljedeća dva uvjeta su ekvivalentna:*

1. *Stanje i je povratno.*
2. *Vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} = +\infty . \tag{2.3.5}$$

Dokaz.

$\Rightarrow$: Prema jednadžbi obnavljanja (2.3.3), možemo pisati

$$\begin{aligned}
S := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_i\{\tau_i = m\}\mathbb{P}_i\{X_{n-m} = i\} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = m\} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_{n-m} = i\} \\
&= 1 + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = m\}}_{=1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} = 1 + S .
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Kako je $S \in [0, \infty]$, jednakost $S = 1 + S$ nužno povlači $S = +\infty$.

$\Leftarrow$: Ne možemo izravno okrenuti gornju implikaciju. Možemo, međutim, pokazati kontrapoziciju definirajući za svaki $0 < s < 1$ redove

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} s^n \;, \\ \phi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = n\} s^n \;. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Ti redovi imaju polumjer konvergencije barem 1 jer njihovi koeficijenti ne prelaze 1. Računom analognim onom iz (2.3.6) onda dobivamo

$$\begin{aligned} \psi(s) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = m\} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_{n-m} = i\} s^n \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_i\{\tau_i = m\} s^m \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} s^n \\ &= 1 + \psi(s)\phi(s) \;, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

odakle

$$\psi(s) = \frac{1}{1-\phi(s)} \;. \tag{2.3.9}$$

Sada, ako je $\mathbb{P}_i\{\tau_i < \infty\} = \phi(1) < 1$, onda prijelazom na limes $s \nearrow 1$, dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i\{X_n = i\} = \lim_{s \nearrow 1} \psi(s) = \frac{1}{1-\phi(1)} < \infty \;. \tag{2.3.10}$$

□

Jedna od primjena kriterija povratnosti je sljedeći važan rezultat.

Korolar 2.3.4. *Simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^d$ je povratna za $d = 1$ i $d = 2$, a prolazna za $d \geqslant 3$.*

Dokaz. Kako je slučajna šetnja invarijantna na translaciju, dovoljno je provjeriti da je ishodište povratno ili prolazno stanje.

1. Za dimenziju $d = 1$ smo već vidjeli u odjeljku 2.1 da se $\mathbb{P}_0\{X_{2m} = 0\}$ ponaša kao $1/\sqrt{\pi m}$ za velike m. Slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_0\{X_n = 0\} = +\infty \;, \tag{2.3.11}$$

pa je po prethodnom teoremu ishodište povratno stanje.

2. Za dimenziju $d = 2$ možemo još uvijek eksplicitno izračunati $\mathbb{P}_0\{X_{2m} = 0\}$. Za 4^{2m} trajektorija duljine $2m$, treba odrediti koliko ih se vraća u ishodište. Nazovimo smjerove u rešetci $\mathbb{Z}^2$ Sjever, Jug, Istok i Zapad. Trajektorija duljine $2m$ koja polazi iz ishodišta i vraća se u njega mora napraviti određen broj koraka (recimo k) prema Sjeveru i isto toliko prema Jugu, a preostalih $m - k$ koraka prema Istoku i isto toliko prema Zapadu. Broj takvih trajektorija je dakle jednak

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k}\binom{2k}{k}\binom{2(m-k)}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(2m)!}{[k!(m-k)!]^2} = \binom{2m}{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \;. \tag{2.3.12}$$

Zadnju sumu možemo pojednostavniti zahvaljujući sljedećim identitetima:

$$\begin{aligned}\binom{2m}{m} &= \binom{2m-1}{m} + \binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-2}{m} + 2\binom{2m-2}{m-1} + \binom{2m-2}{m-2} \\ &= \cdots = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{m}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 . \qquad (2.3.13)\end{aligned}$$

Slijedi

$$\mathbb{P}_0\{X_{2m} = 0\} = \frac{1}{4^{2m}} \binom{2m}{m}^2 \sim \frac{1}{\pi m} , \qquad (2.3.14)$$

gdje zadnja ekvivalencija slijedi iz Stirlingove formule. To povlači divergenciju sume za $\mathbb{P}_0\{X_n = 0\}$, dakle povratnost stanja ishodišta.

3. Za dimenziju $d = 3$, na sličan način dobijemo da je broj putanja koje se vraćaju u ishodište nakon $6m$ koraka jednak

$$\binom{6m}{3m} \sum_{k_1+k_2+k_3=3m} \left(\frac{(3m)!}{k_1!k_2!k_3!}\right)^2 . \qquad (2.3.15)$$

Ovu sumu ne znamo više egzaktno izračunati. Možemo ju, međutim, ocijeniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\sum_{k_1+k_2+k_3=3m} \left(\frac{(3m)!}{k_1!k_2!k_3!}\right)^2 &\leqslant \left(\max_{k_1+k_2+k_3=3m} \frac{(3m)!}{k_1!k_2!k_3!}\right) \sum_{k_1+k_2+k_3=3m} \frac{(3m)!}{k_1!k_2!k_3!} \\ &= \frac{(3m)!}{(m!)^3} \cdot 3^{3m} . \qquad (2.3.16)\end{aligned}$$

Maksimum se dostiže kad su svi k_i jednaki, kad je ta suma jednaka broju riječi duljine $3m$ koje možemo napisati koristeći tri različita slova, s ponavljanjem (k_i odgovara broju pojavljivanja svakog slova). Koristeći Stirlingovu formulu onda nalazimo da je

$$\mathbb{P}_0\{X_{6m} = 0\} \leqslant \frac{3^{3m}}{6^{6m}} \binom{6m}{3m} \frac{(3m)!}{(m!)^3} \sim \frac{1}{2(\pi m)^{3/2}} . \qquad (2.3.17)$$

Kako je dalje

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0\{X_{6m} = 0\} &\geqslant \underbrace{\mathbb{P}_0\{X_{6m} = 0 | X_{6m-2} = 0\}}_{=\mathbb{P}_0\{X_2=0\}=1/6} \mathbb{P}_0\{X_{6m-2} = 0\} \qquad (2.3.18) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{6}\right)^2 \mathbb{P}_0\{X_{6m-4} = 0\} , \qquad (2.3.19)\end{aligned}$$

članovi reda $\mathbb{P}_0\{X_{2n} = 0\}$ se smanjuju kao $n^{-3/2}$, što povlači da je red konvergentan i da je ishodište prolazno stanje.

4. Za dimenzije $d \geqslant 4$ možemo na isti način pokazati da $\mathbb{P}_0\{X_{2n} = 0\}$ pada kao $n^{-d/2}$, što ponovo povlači prolaznost ishodišta. □

U više smo se navrata koristili činjenicom da se slučajna šetnja može vratiti u ishodište samo u parnom broju koraka. Kažemo da ona ima period 2. Općenitije, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.3.5. Period *stanja* $i \in \mathcal{X}$ *je broj*

$$d_i = \text{NZD}\big\{n \geqslant 1 \colon \mathbb{P}_i\{X_n = i\} > 0\big\} . \tag{2.3.20}$$

Ako je $d_i = 1$*, kažemo da je stanje* i aperiodično. *Ako su sva stanja* $i \in \mathcal{X}$ *aperiodična, kažemo da je lanac aperiodičan.*

Napomena 2.3.6. Regularan lanac je aperiodičan. Zapravo, za svako stanje i, postoji stanje j takvo da je $p_{ij} > 0$. Po definiciji, postoji vrijeme n takvo da je $\mathbb{P}_k\{X_n = \ell\} > 0$ za svaki $k, \ell \in \mathcal{X}$. Posljedično, vrijedi $\mathbb{P}_j\{X_n = i\} > 0$ i zaista

$$\mathbb{P}_i\{X_{n+1} = i\} \geqslant \mathbb{P}_i\{X_1 = j, X_{n+1} = i\} = p_{ij}\mathbb{P}_j\{X_n = i\} > 0 . \tag{2.3.21}$$

Ovo povlači $d_i = \text{NZD}\{n, n+1\} = 1$.

Uveli smo relaciju ekvivalencije $i \sim j$ koja znači da je i dostižno iz j i obratno. Lako se pokaže da su svojstva povratnosti/prolaznosti i period konstante na klasama ekvivalencije. Možemo, stoga, govoriti o klasama povratnosti i prolaznosti, i o periodu neke klase. Ako je lanac ireducibilan, onda je on i povratan, prolazan i aperiodičan ako i samo ako ima povratno, prolazno i aperiodično stanje, redom.

Propozicija 2.3.7. *Ako su* i *i* j *u istoj klasi povratnosti, onda je*

$$\mathbb{P}_i\{\tau_j < \infty\} = \mathbb{P}_j\{\tau_i < \infty\} = 1 . \tag{2.3.22}$$

Dokaz. Neka je $A_M = \bigcup_{m=1}^{M}\{X_m = j\}$ događaj "lanac posjećuje stanje j u prvih M koraka". Tada je

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}_j(A_M) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_j\{\tau_j = m\} = 1 . \tag{2.3.23}$$

Neka je n_0 najmanji prirodni broj takav da je $\mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\} > 0$. Onda za svaki $M > n_0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_j\big(A_M \cap \{X_{n_0} = i\}\big) &= \sum_{n=1}^{M-n_0} \mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i, \tau_j = n_0 + n\} \\
&= \sum_{n=1}^{M-n_0} \mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i, j \notin X_{[1,n_0]}\}\mathbb{P}_i\{\tau_j = n\} \\
&\leqslant \mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\} \sum_{n=1}^{M-n_0} \mathbb{P}_i\{\tau_j = n\} .
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Prva jednakost slijedi iz činjenice da se lanac ne može vratiti u j prije n_0 i posjetiti i za vrijeme n_0, po definiciji od n_0. Pustimo sada neka M teži u beskonačno s desne strane jednakosti. Lijeva strana teži prema $\mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\}$ zbog (2.3.23). Imamo, dakle,

$$\mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\} \leqslant \mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\}\mathbb{P}_i\{\tau_j < \infty\} . \tag{2.3.25}$$

Kako je $\mathbb{P}_j\{X_{n_0} = i\} \neq 0$ i $\mathbb{P}_i\{\tau_j < \infty\} \leqslant 1$, nužno slijedi $\mathbb{P}_i\{\tau_j < \infty\} = 1$. $\square$

2.4 Stacionarne raspodjele

Promatrajmo ireducibilni Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja $\mathcal{X}$ i s matricom prijelaza $P = (p_{ij})_{i,j\in\mathcal{X}}$.

Definicija 2.4.1. *Vjerojatnosna raspodjela π na $\mathcal{X}$ je* stacionarna *ako zadovoljava*

$$\pi_j = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i p_{ij} \qquad \forall j \in \mathcal{X} \; . \tag{2.4.1}$$

Općenitije, mjera μ na $\mathcal{X}$ (koja ne mora nužno biti vjerojatnosna mjera) koja zadovoljava $\mu_j = \sum_{i\in\mathcal{X}} \mu_i p_{ij}$ za svaki $j \in \mathcal{X}$ se zove invarijantna mjera *tog lanca.*

Za konačan skup stanja $\mathcal{X}$ smo vidjeli da ireducibilan lanac uvijek ima stacionarnu raspodjelu. U beskonačnom slučaju to više ne mora vrijediti. Pokazali smo na primjeru da slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^d$ nemaju stacionarnu raspodjelu (međutim, one imaju mnoge invarijantne mjere).

Izvedimo sada nužan i dovoljan uvjet da bi ireducibilni Markovljev lanac imao stacionarnu raspodjelu, koja će u tom slučaju uvijek biti jedinstvena. U tomu važnu ulogu igra veličina

$$\gamma_i^{(k)} = \mathbb{E}_k\Big(\sum_{n=1}^{\tau_k} 1_{\{X_n=i\}}\Big) \; , \tag{2.4.2}$$

tj. prosječan broj posjeta stanju i između dva posjeta stanju k. Intuitivno, ako je k povratno, onda se lanac vraća u k beskonačno često, pa onda $\gamma_i^{(k)}$ mora mjeriti srednje vrijeme provedeno u i. Možemo očekivati da to vrijeme odgovara invarijantnoj mjeri, a to je zaista i slučaj :

Propozicija 2.4.2. *Neka je lanac ireducibilan i povratan. Tada vrijedi $\forall k \in \mathcal{X}$:*

1. *$\gamma_k^{(k)} = 1$;*
2. *$\gamma^{(k)}$ je invarijantna mjera;*
3. *Za svaki $i \in \mathcal{X}$, imamo $0 < \gamma_i^{(k)} < \infty$;*
4. *$\gamma^{(k)}$ je jedina invarijantna mjera za koju je $\gamma_k^{(k)} = 1$.*

Dokaz.

1. Očito, jer je τ_k skoro sigurno konačno, $X_{\tau_k} = k$ i $X_n \neq k$ za $1 \leqslant n < \tau_k$.
2. Imamo

$$\begin{aligned}\gamma_i^{(k)} &= \mathbb{E}_k\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=i,n\leqslant\tau_k\}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k\{X_n = i, n \leqslant \tau_k\} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{X}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_k\{X_{n-1} = j, n \leqslant \tau_k\} p_{ji} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{X}} p_{ji} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}_k\{X_m = j, m \leqslant \tau_k - 1\} \; . \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Sada drugu sumu u tom izrazu možemo pisati kao

$$\mathbb{E}_k\Big(\sum_{m=0}^{\tau_k-1} 1_{\{X_m=j\}}\Big) = \mathbb{E}_k\Big(\sum_{m=1}^{\tau_k} 1_{\{X_m=j\}}\Big) = \gamma_j^{(k)} \; , \tag{2.4.4}$$

jer je $\mathbb{P}_k\{X_0 = j\} = \delta_{kj} = \mathbb{P}_k\{X_{\tau_k} = j\}$. To pokazuje invarijantnost mjere $\gamma^{(k)}$.

3. Invarijantnost mjere povlači da je za svaki $n \geqslant 0$,

$$\gamma_i^{(k)} = \sum_{j \in \mathcal{X}} \gamma_j^{(k)} \mathbb{P}_j\{X_n = i\} \ . \tag{2.4.5}$$

Posebno, $1 = \gamma_k^{(k)} \geqslant \gamma_j^{(k)} \mathbb{P}_j\{X_n = k\}$ za svaki j. Kako zbog ireducibilnosti postoji n takav da je $\mathbb{P}_j\{X_n = k\} > 0$, zaključujemo da je $\gamma_j^{(k)} < \infty$ za svaki j. S druge strane, imamo $\gamma_i^{(k)} \geqslant \mathbb{P}_k\{X_n = i\}$, što je strogo pozitivno za najmanje jedan n.

4. Neka je λ invarijantna mjera takva da je $\lambda_k = 1$. Tada za svaki j vrijedi

$$\lambda_j = \sum_{i \neq k} \lambda_i p_{ij} + p_{kj} \geqslant p_{kj} \ . \tag{2.4.6}$$

Odatle slijedi, koristeći donju ogradu p_{ki} za λ_i u gornjem izrazu,

$$\begin{aligned} \lambda_j &\geqslant \sum_{i \neq k} p_{ki} p_{ij} + p_{kj} \\ &= \mathbb{P}_k\{X_2 = j, \tau_k \geqslant 2\} + \mathbb{P}_k\{X_1 = j, \tau_k \geqslant 1\} \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Indukcijom dobivamo da je za svaki $n \geqslant 1$ ($a \wedge b$ označava manju od veličina a i b)

$$\lambda_j \geqslant \sum_{m=1}^{n+1} \mathbb{P}_k\{X_m = j, \tau_k \geqslant m\} = \mathbb{E}_k\left(\sum_{m=1}^{(n+1)\wedge\tau_k} 1_{\{X_m = j\}} \right) . \tag{2.4.8}$$

Kada n teži u beskonačno, desna strana teži prema $\gamma_j^{(k)}$. Dakle imamo $\lambda_j \geqslant \gamma_j^{(k)}$ za svaki j. Posljedično, $\mu = \lambda - \gamma^{(k)}$ je invarijantna mjera koja zadovoljava $\mu_k = 0$. Kako je $\mu_k = \sum_j \mu_j \mathbb{P}_j\{X_n = k\}$ za svaki n, ireducibilnost povlači $\mu_j = 0 \ \forall j$, pa je nužno $\lambda = \gamma^{(k)}$. □

Možemo sada iskazati i dokazati glavni teorem o stacionarnim raspodjelama.

Teorem 2.4.3. *Za ireducibilni Markovljev lanac sljedeća su svojstva ekvivalentna :*

1. *Postoji staciionarna raspodjela.*
2. *Postoji stanje $k \in \mathcal{X}$ za koje je*

$$\mu_k := \mathbb{E}_k(\tau_k) < \infty \ . \tag{2.4.9}$$

3. *Relacija* (2.4.9) *je zadovoljena za svaki $k \in \mathcal{X}$.*

Štoviše, ako su ta svojstva zadovoljena, onda je stacionarna raspodjela jedinstvena i dana formulom

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i} \qquad \forall i \in \mathcal{X} \ . \tag{2.4.10}$$

Dokaz.

$2 \Rightarrow 1$: Ako je $\mu_k < \infty$ onda je k povratno, i kako je lanac ireducibilan, onda je i povratan. Po prethodnoj propoziciji, $\gamma^{(k)}$ je jedina invaarijantna mjera koja poprima vrijednost 1 u k. Sada imamo

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} \gamma_j^{(k)} = \mathbb{E}_k \left(\sum_{n=1}^{\tau_k} \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{X}} 1_{\{X_n = j\}}}_{=1} \right) = \mathbb{E}_k(\tau_k) = \mu_k < \infty . \tag{2.4.11}$$

Iz toga slijedi da je mjera π definirana s $\pi_j = \gamma_j^{(k)} / \mu_k$ invarijantna vjerojatnosna mjera, tj. stacionarna raspodjela.

$1 \Rightarrow 3$: Neka je π stacionarna raspodjela, i $k \in \mathcal{X}$. Onda je $\hat{\gamma}$ definirana s $\hat{\gamma}_j = \pi_j / \pi_k$ invarijantna mjera takva da je $\hat{\gamma}_k = 1$. Po prethodnoj propoziciji, nužno vrijedi $\hat{\gamma} = \gamma^{(k)}$. Istim računom kao gore slijedi

$$\mathbb{E}_k(\tau_k) = \sum_{j \in \mathcal{X}} \hat{\gamma}_j = \frac{\sum_j \pi_j}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k} < \infty . \tag{2.4.12}$$

$3 \Rightarrow 2$: Očito.

U ovom slučaju, jedinstvenost mjere slijedi iz jedinstvenosti od $\gamma^{(k)}$, i relacija (2.4.10) slijedi iz (2.4.12). □

Ovaj rezultat motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.4.4. *Stanje $i \in \mathcal{X}$ za koje je*

$$\mathbb{E}_i(\tau_i) < \infty \tag{2.4.13}$$

je pozitivno povratno. *Povratno stanje i koje nije pozitivno povratno je* nul-povratno. *Lanac je* pozitivno povratan *ako su sva njegova stanja pozitivno povratna. To je, na primjer, slučaj kad postoji jedno takvio stanje i lanac je ireducibilan.*

Ireducibilni lanac ima stacionarnu raspodjelu ako i samo ako je pozitivno povratan.

Primjer 2.4.5. Slučajne šetnje na $\mathbb{Z}^d$ nemaju stacionarnu raspodjelu. Zapravo, ako bi π bila stacionarna raspodjela, invarijantnost na translaciju bi povlačila da su i sve translacije od π stacionarne raspodjele. No mi znamo da ako takva raspodjela postoji, ona mora biti jedinstvena. Raspodjela π bi dakle morala biti uniformna, no ne postoji uniformna vjerojatnosna mjera na $\mathbb{Z}^d$.

Obratno, sve uniformne mjere su invarijantne. Funkcije (ne nužno pozitivne) koje zadovoljavaju (2.4.1) u slučaju simetrične slučajne šetnje se zovu *harmoničke*. Sve afine funkcije su harmoničke, no u dimenzijama većim ili jednakim 2 postoje i mnoge druge.

Dobili smo sljedeći rezultat :

Teorem 2.4.6. *Simetrična slučajna šetnja je nul-povratna za dimenzije $d = 1$ i $d = 2$.*

2.5 Konvergencija prema stacionarnoj raspodjeli

U konačnom smo slučaju pokazali da ako je lanac regularan, onda raspodjela od X_n konvergira prema stacionarnoj raspodjeli. Ako je skup stanja beskonačan, Markovljev lanac ne može biti regularan : vjerojatnosti prijelaza su sumabilne, pa se ne mogu odozdo ograničiti nekom strogo pozitivnom veličinom. Pokazuje se, međutim, da su pozitivna povratnost i aperiodičnost dovoljne za konvergenciju prema stacionarnoj raspodjeli.

Teorem 2.5.1. *Neka je $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ ireducibilan Markovljev lanac koji je aperiodičan i pozitivno povratan. Tada za svaku početnu raspodjelu ν imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\nu\big\{X_n = j\big\} = \pi_j \qquad \forall j \in \mathcal{X} \ . \tag{2.5.1}$$

Dokaz. Poopćit ćemo Doeblinov dokaz koji smo već vidjeli za konačni slučaj (vidi Teorem 1.4.9).

- Uvodimo Markovljev lanac $(X_n, Y_n)_{n\geqslant 0}$ na $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ s vjerojatnostima prijelaza

$$p^\star_{(i,j),(k,l)} = p_{ik}p_{jl} \ , \tag{2.5.2}$$

  i s početnom raspodjelom $\rho = \nu \otimes \pi$. U tom slučaju, X_n i Y_n su dva nezavisna lanca s matricom prijelaza P i s početnim raspodjelama ν i π.
- Jedina netrivijalna stvar u poopćenju je pokazati da je $P^\star$ ireducibilna i aperiodična. U tu svrhu, fiksirajmo stanje $k \in \mathcal{X}$. Promatrajmo prvo skup

$$\Gamma_k = \big\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}_k\{X_n = k\} > 0\big\} \ . \tag{2.5.3}$$

  Markovljevo svojstvo povlači da za $n, m \in \Gamma_k$ imamo i $n + m \in \Gamma_k$. S druge strane, po definiciji aperiodičnosti, imamo $\mathrm{NZD}\,\Gamma_k = 1$. Tvrdimo da postoji n_0 takav da svi $t \geqslant n_0$ pripadaju u Γ_k.
  U tu svrhu pretpostavimo prvo da postoje $n, m \in \Gamma_k$ koji su uzajamno prosti. Po Bézoutovom teoremu, postoje prirodni brojevi $p, q \geqslant 1$ takvi da je $pn - qm = \pm 1$. Zamjenjujući n i m, možemo pretpostaviti da je $pn - qm = 1$. Neka je $n_0 = qnm$. Tada za $1 \leqslant r \leqslant n$ imamo $n_0 + r = qnm + r(pn - qm) = qm(n - r) + rpn \in \Gamma_k$. Dovoljno je napisati svaki $t > n_0$ kao $t = n_0 + r + ns$ uz $1 \leqslant r \leqslant n$ i odatle možemo zaključiti da je $t \in \Gamma_k$.
  Može se dogoditi da je $\mathrm{NZD}\,\Gamma_k = 1$ i da ne postoje dva međusobno prosta broja među elementima tog skupa. No po Bézoutovom teoremu, mora postojati skup elemenata iz Γ_k čija linearna kombinacija je jednaka 1, i gornje se zaključivanje lako prilagodi tom slučaju.
- Fiksirajmo stanja $i, j, k, \ell \in \mathcal{X}$. Kako je P ireducibilna, postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathbb{P}_i\{X_r = k\} > 0$. Kako je za svaki $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}_i\{X_{r+n} = k\} \geqslant \mathbb{P}_i\{X_r = k\}\mathbb{P}_k\{X_n = k\} > 0 \ , \tag{2.5.4}$$

  slijedi da je $\mathbb{P}_i\{X_n = k\} > 0$ za sve $n \geqslant n_0 + r$. Analogno, postoje $m_0, s \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{P}_j\{X_m = \ell\} > 0$ za sve $m \geqslant m_0 + s$. Posljedično, postoji vrijeme M takvo da je $\mathbb{P}^\star_{(i,j)}\{(X_t, Y_t) = (k, \ell)\} > 0$ za sve $t \geqslant M$. To povlači da je složeni lanac ireducibilan i aperiodičan.
- Kako složeni lanac očito ima invarijantnu raspodjelu $\pi \otimes \pi$, Teorem 2.4.3 povlači da je on pozitivno povratan.

- Ostatak dokaza je isti kao i u konačnom slučaju. Uvodimo vrijeme τ_A prvog dolaska na dijagonalu $A = \{(i,i) : i \in \mathcal{X}\}$, i pokažemo kao i u konačnom slučaju da je

$$|\mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} - \pi_j| \leqslant 2\mathbb{P}_\rho\{\tau_A > n\} . \tag{2.5.5}$$

  Propozicija 2.3.7 povlači da je τ_A konačno skoro sigurno, pa onda i da gornja razlika teži u nulu za $n \to \infty$. □

Važan, no općenito težak problem je ocijeniti brzinu konvergencije prema stacionarnoj raspodjeli. Doeblinov dokaz nam daje (u konačnom slučaju) ocjenu

$$\sum_{j\in\mathcal{X}} \bigl|\mathbb{P}_\nu\{X_n = j\} - \pi_j\bigr| \leqslant 2\mathbb{P}_{\nu\otimes\pi}\{\tau_A > n\} , \tag{2.5.6}$$

koja je korisna u slučaju kad možemo kontrolirati vrijeme τ_A.

Alternativni pristup se temelji na spektralnoj teoriji. Vidjeli smo da matrica prijelaza P ima svojstvenu vrijednost 1 kojoj odgovaraju kao lijevi i desni svojstveni vektori, redom, stacionarna raspodjela π i vektor $\mathbf{1}$ čije su sve komponente jednake 1:

$$\pi P = \pi \qquad \text{i} \qquad P\mathbf{1} = \mathbf{1} . \tag{2.5.7}$$

Neka je μ vektor redak takav da je

$$\mu\mathbf{1} = \sum_{i\in\mathcal{X}} \mu_i = 0 . \tag{2.5.8}$$

Tada je $\mu P\mathbf{1} = \mu\mathbf{1} = 0$, što pokazuje da je podprostor $\mathbf{1}_\perp = \{\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \sum_i \mu_i = 0\}$ invarijantan (zdesna) za P : $\mathbf{1}_\perp P \subset \mathbf{1}_\perp$. Primijetimo da elementi od $\mathbf{1}_\perp$ nisu mjere, nego redne mjere. Međutim, za određene $\mu \in \mathbf{1}_\perp$, zbroj $\pi + \mu$ je vjerojatnosna mjera : dovoljno za to je da vrijedi $\mu_i \geqslant -\pi_i$ za svaki $i \in \mathcal{X}$.

Ako je $\mu \in \mathbf{1}_\perp$ lijevi svojstveni vektor od P za svojstvenu vrijednost λ, i ako je P ireducibilan, aperiodičan i pozitivno povratan, onda je nužno $|\lambda| < 1$. Zaista, kad to ne bi bilo istina, raspodjela lanca s početnim uvjetom $\pi + \varepsilon\mu$ (za dovoljno mali realni ε) ne bi konvergirala prema π.

Ovo nam daje karakterizaciju brzine konvergencije u terminima *spektralnog procjepa* : Neka je λ_0 najveća svojstvena vrijednost od P koja je po modulu strogo manja od 1. Znamo da se njoj odgovarajući svojstveni vektor nalazi u $\mathbf{1}_\perp$ (možda s kompleksnim komponentama). Onda raspodjela od X_n konvergira eksponencijalno brzo prema stacionarnoj raspodjeli π, brzinom $|\lambda_0|^n$. Međutim, određivanje spektralnog procjepa je općenito težak problem ako je skup $\mathcal{X}$ velik.

Reverzibilni Markovljevi lanci su pogodniji za proučavanje spektralnim metodama nego nereverzibilni lanci. Kako bismo to vidjeli, uzmimo ireducibilni i pozitivno povratni lanac sa stacionarnom raspodjelom π, i uvedimo skalarni produkt

$$\langle f|g\rangle_\pi = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i \overline{f}_i g_i . \tag{2.5.9}$$

Tada imamo

$$\langle f|Pg\rangle_\pi = \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i \overline{f}_i \sum_{j\in\mathcal{X}} p_{ij} g_j = \sum_{j\in\mathcal{X}} \pi_j \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} \overline{f}_i g_j = \langle Pf|g\rangle_\pi . \tag{2.5.10}$$

Drugim riječima, linearni operator P je samospregnut (hermitski) u $\ell^2(\mathbb{C}, \pi)$.

Klasični rezultat iz teorije Hilbertovih prostora kaže da su sve svojstvene vrijednosti od P realne i da su svi pridruženi svojstveni prostori ortogonalni. Neka su x_1 i x_2 dva desna svojstvena vektora od P koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2, redom. Onda je

$$(\overline{\lambda}_1 - \lambda_2)\langle x_1|x_2\rangle_\pi = \langle \lambda_1 x_1|x_2\rangle_\pi - \langle x_1|\lambda_2 x_2\rangle_\pi = \langle Px_1|x_2\rangle_\pi - \langle x_1|Px_2\rangle_\pi = 0 \; . \qquad (2.5.11)$$

S jedne strane, uzimajući $x_1 = x_2$, dobivamo da je λ_1 realno. S druge strane, ako $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dobivamo ortogonalnost od x_1 i x_2. Znamo također da je P moguće dijagonalizirati.

Sada imamo varijacijsku reprezentaciju spektralnog procijepa :

$$|\lambda_0| = \sup_{x\colon \langle x|\mathbf{1}\rangle_\pi = 0} \frac{\langle x|Px\rangle_\pi}{\langle x|x\rangle_\pi} \; . \qquad (2.5.12)$$

2.6 Zadatci

Zadatak 2.1. Pokažite da je raspodjela vremena prvog dolaska u i $(i \neq 0)$ za jednodimenzionalnu simetričnu slučajnu šetnju dana s

$$\mathbb{P}\{\tau_i = n\} = \begin{cases} \dfrac{|i|}{n}\mathbb{P}\{X_n = i\} & \text{za } n \in \{|i|, |i|+2, \dots\} \;, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

(Teorem 2.1.5). Zaključite da je $\mathbb{E}(\tau_i) = +\infty$.
Upute:

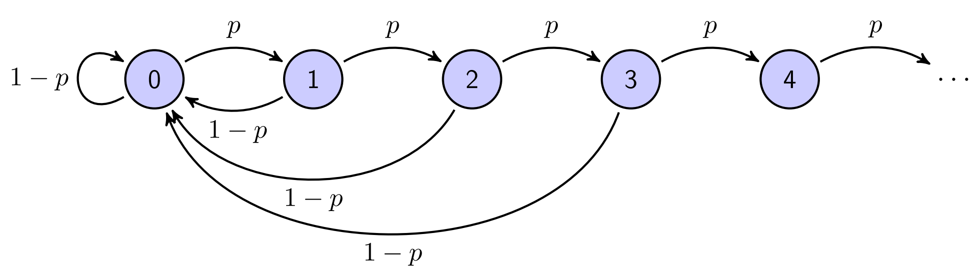
1. Po simetriji, možemo pretpostaviti $i > 0$.
2. Prikažite događaj $\{\tau_i = n\}$ pomoću događaja $\{X_{n-1} = i-1\}$ i $\{\tau_i \leqslant n-2\}$.
3. Pomoću principa zrcaljenja pokažite da je

$$\mathbb{P}\{\tau_i = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}\{X_{n-1} = i-1\} - \mathbb{P}\{X_{n-1} = i+1\}\big]$$

i zaključite dalje izravnim računom.

Zadatak 2.2. Promatrajmo Markovljev lanac na $\mathbb{N}$ s vjerojatnostima prijelaza

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{za } j = i+1 \;, \\ 1-p & \text{za } j = 0 \;, \\ 0 & \text{inače} \;. \end{cases}$$



1. Za koje vrijednosti od p je lanac ireducibilan?
   U ostatku zadatka pretpostavimo da je p takav da lanac je ireducibilan.
2. Pretpostavimo $X_0 = 0$. Neka je

$$\tau_0 = \inf\{n > 0 \colon X_n = 0\}$$

   vrijeme prvog povratka u 0. Pokažite da

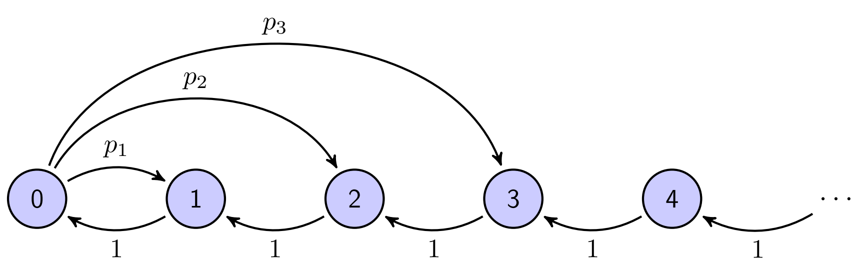
$$\tau_0 = n \quad \Rightarrow \quad X_m = m\,, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

   Izvedite raspodjelu od τ_0.
3. Pokažite da je stanje 0 povratno.
4. Pokažite da je stanje 0 pozitivno povratno.
5. Pokažite da je stanje 0 aperiodično.
6. Neka je π jedinstvena stacionarna raspodjela ovog lanca. Izračunajte π_0 pomoću $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Izrazite π_i kao funkciju od π_{i-1} i izvedite π_i za svaki i.

Zadatak 2.3. Stranka dolazi u banku. Pred jedinim šalterom je rep slučajne duljine L. Raspodjela od L je dana s $\mathbb{P}\{L = k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$ (pretpostavljamo da je $\sum_{k\geqslant 1} p_k = 1$).

Pretpostavimo da svaka stranka treba isto vrijeme usluge jednako 1. Nakon što je jedna stranka uslužena, na njeno mjesto dolazi druga, a ova prva ponovo staje na kraj repa.

Modeliramo situaciju sljedećim Markovljevim lancem:

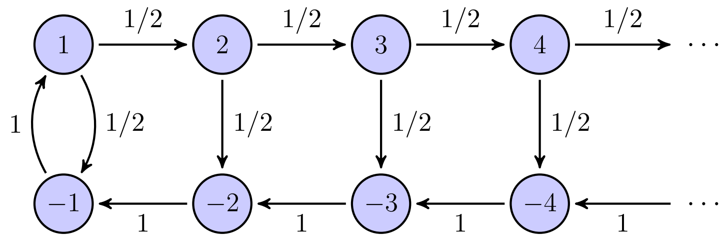


1. Uz koji uvjet na p_k je lanac ireducibilan?
   U ostatku zadatka pretpostavimo da su p_k takvi da je lanac ireducibilan.
2. Uzmimo $X_0 = 0$. Neka je

$$\tau_0 = \inf\{n > 0 \colon X_n = 0\}$$

   vrijeme prvog povratka u 0. Odredite njegovu raspodjelu.
3. Pokažite da je stanje 0 povratno.
4. Odredite nužan i dovoljan uvjet na p_k za koji je stanje 0 pozitivno povratno.
5. Odredite dovoljan uvjet na p_k za koji je stanje 0 aperiodično.
6. Neka je π jedinstvena stacionarna raspodjela ovog lanca. Izračunajte π_0 pomoću $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Izračunajte rekurzijom π_i za svaki i.

Zadatak 2.4. Promatrajmo sljedeći Markovljev lanac na $\mathcal{X} = \mathbb{Z}^*$:



1. Je li taj lanac ireducibilan?
2. Je li stanje 1 povratno?
3. Je li stanje 1 pozitivno povratno?
4. Je li stanje 1 aperiodično?
5. Neka je π stacionarna raspodjela tog lanca. Izračunajte π_1.
6. Izračunajte π_i za svaki $i \in \mathcal{X}$.

Zadatak 2.5. Promatrajmo jednodimenzionalnu simetričnu slučajnu šetnju na skupu $\{0, 1, \dots, N\}$ s apsorbirajućim rubovima, tj. pretpostavimo da su stanja 0 i N apsorbirajuća. Neka je

$$\tau = \tau_0 \wedge \tau_N = \inf\big\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\big\}$$

vrijeme apsorpcije i neka je

$$p(i) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} .$$

1. Odredite $p(0)$ i $p(N)$.
2. Pokažite da za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$ vrijedi

$$p(i) = \frac{1}{2}\big[p(i-1) + p(i+1)\big] .$$

   Funkcija $f : \mathbb{Z} \supset A \to \mathbb{R}$ za koju je $f(i) = \frac{1}{2}[f(i-1) + f(i+1)]$ za svaki $i \in A$ je *harmonička* (diskretna).
3. Dokažite (metodom kontradikcije) *princip maksimuma*: Harmonička funkcija na A svoj minimum i maksimum postiže samo na rubu od A (pretpostavimo li A u obliku $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$, onda je njegov rub $\partial A = \{a, b\}$).
4. Dokažite da je svaka linearna kombinacija funkcija harmoničkih na A i sama harmonička funkcija na A.
5. Dokažite da ako se dvije harmoničke funkcije f i g podudaraju na rubu od A, onda su one jednake na cijelom A (promatrajte $f - g$).
6. Pokažite da je svaka linearna funkcija $f(i) = ci + h$ harmonička.
7. Koristeći stavke 1., 2., 5. i 6., odredite funkciju p.

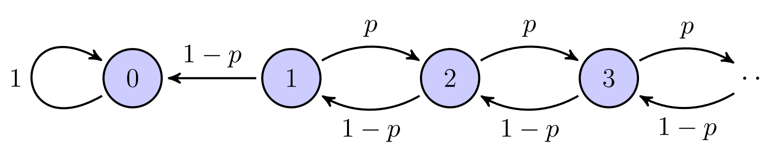
Zadatak 2.6. Promatrajmo simetričnu slučajnu šetnju na $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ s apsorbirajućim rubovima, tj. ako šetnja dođe u jedno od stanja 0 ili N, ostaje zauvijek u njemu. Neka je

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

vrijeme apsorpcije. Po dogovoru, stavljamo $\tau = 0$ ako je $X_0 \in \{0, N\}$.

1. Pokažite da je za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\} + \mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}\big] \ .$$
2. Neka je $f(i) = \mathbb{E}_i(\tau)$. Koliki će biti $f(0)$ i $f(N)$?
3. Izvedite iz 1. da je
$$f(i) = \frac{1}{2}\big[f(i-1) + f(i+1)\big] + 1 \ . \tag{2.6.1}$$
4. Pokažite da $f(i) = -i^2$ zadovoljava jednadžbu (2.6.1).
5. Funkcija $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ je harmonička ako je
$$g(i) = \frac{1}{2}\big[g(i-1) + g(i+1)\big] \qquad \forall i \in \mathcal{X} \ .$$
   Pokažite da ako f zadovoljava (2.6.1) i g je harmonička, onda $f+g$ zadovoljava (2.6.1).
6. Pokažite da ako f_1 i f_2 zadovoljavaju (2.6.1), onda je $f_1 - f_2$ harmonička. Izvedite iz principa maksimuma da ako se f_1 i f_2 podudaraju u 0 i u N, onda moraju biti svugdje jednake.
7. Znamo li da su linearne funkcije harmoničke, odredite $\mathbb{E}_i(\tau)$.

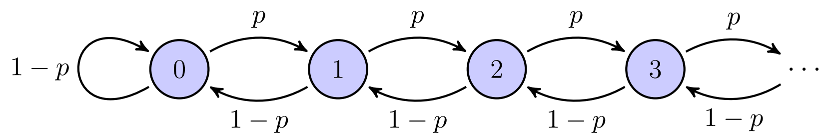
Zadatak 2.7. Promatrajmo slučajnu šetnju na $\mathbb{N}$, apsorbirajuću u 0:



Označimo s $h(i) = \mathbb{P}_i\{\tau_0 < \infty\}$.

1. Odredite $h(0)$.
2. Pokažite da je
$$h(i) = (1-p)h(i-1) + ph(i+1) \tag{2.6.2}$$
   za svaki $i \geqslant 1$.
3. Promatrajte slučaj $p = 1/2$. Polazeći od svojstava harmoničkih funkcija izvedenih u prethodnim zadatcima odredite $h(i)$ za svaki i.
   Uputa: $h(i)$ je vjerojatnost.
4. Promatrajmo od sada općeniti slučaj $0 < p < 1$. Pokažite da svako rješenje h jednadžbe (2.6.2) zadovoljava i princip maksimuma: za svaki skup $A = \{a, a+1, \dots, b-1, b\} \subset \mathbb{N}$, h postiže svoj maksimum na rubu $\partial A = \{a, b\}$ od A.
5. Pokažite da dva rješenja od (2.6.2) koja se podudaraju na rubu od A moraju biti jednaka na cijelom A.
6. Pokažite da $h(i) = \alpha^i$ zadovoljava jednadžbu (2.6.2) za određene vrijednosti α i odredite ih.
7. Odredite jedinstveno rješenje h kad je $p < 1/2$. Nađite dva moguća rješenja za $p > 1/2$.

Zadatak 2.8. Neka je $p \in [0,1]$. Promatrajmo sljedeći Markovljev lana na $\mathcal{X} = \mathbb{N}$:



1. Za koje vrijednosti od p je lanac ireducibilan?
   Pretpostavimo da je p takav da je lanac ireducibilan.
2. Je li lanac aperiodičan?
3. Pretpostavimo da je lanac reverzibilan i da je α reverzibilan vektor. Napišite rekurziju za komponente od α, i odredite α_n kao funkciju od α_0.
4. Za koje vrijednosti od p lanac ima stacionarnu raspodjelu π? Odredite π za te vrijednosti od p.
5. Za koje vrijednosti od p je lanac povratan? Pozitivno povratan?
6. Odredite očekivano vrijeme povratka $\mathbb{E}_0(\tau_0)$.
7. Izračunajte očekivani položaj $\mathbb{E}_\pi(X_n)$ za vrijednosti od p za koje π postoji.

Zadatak 2.9. Promatrajmo simetričnu slučajnu šetnju na $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, N\}$ s apsorbirajućim rubovima, tj. kad šetnja dođe u jedno od stanja 0 ili N, ostaje tamo zauvijek. Neka je

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

vrijeme apsorpcije. Po dogovoru, $\tau = 0$ ako je $X_0 \in \{0, N\}$. Za $\lambda \in \mathbb{R}$ i $i \in \mathcal{X}$ stavimo

$$f(i,\lambda) = \mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\big) = \begin{cases} \mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\big) & \text{za } X_\tau = N\ , \\ 0 & \text{inače}\ . \end{cases}$$

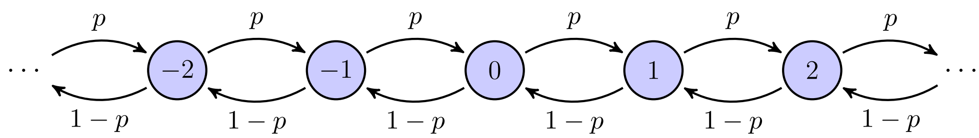
1. Koje su vrijednosti $f(0,\lambda)$ i $f(N,\lambda)$?
2. Pokažite da je za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$\mathbb{P}_i\{\tau = n\} = \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}_{i-1}\{\tau = n-1\} + \mathbb{P}_{i+1}\{\tau = n-1\}\big]\ .$$
3. Pokažite da je za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$,
$$f(i,\lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\big[f(i-1,\lambda) + f(i+1,\lambda)\big]\ .$$
4. Nađite relaciju između c i λ takvu da gornja jednadžba za f ima rješanje oblika $f(i,\lambda) = \mathrm{e}^{ci}$. Pokažite pomoću razvoja u red da je
$$c^2 = 2\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)\ .$$
5. Odredite konstante a i b takve da je
$$\mathbb{E}_i\big(\mathrm{e}^{-\lambda\tau} 1_{\{X_\tau = N\}}\big) = a\,\mathrm{e}^{ci} + b\,\mathrm{e}^{-ci}\ .$$
6. Razvijte gornju jednakost po λ do reda 1. Izvedite
$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\}$$
i
$$\mathbb{E}_i\big(\tau 1_{\{X_\tau = N\}}\big)\ .$$

7. Naznačite, ne provodeći račun, kako možemo odrediti varijancu od $\tau 1_{\{X_\tau = N\}}$ i očekivanje i varijancu od τ.

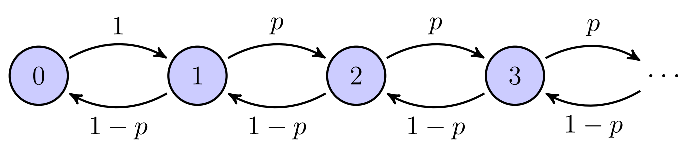
Prisjetimo se razvoja

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\ , \\ \sinh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\ . \end{aligned}$$

Zadatak 2.10. Neka je $p \in [0,1]$. Promatrajmo slučajnu šetnju na $\mathbb{Z}$ danu sljedećim grafom.

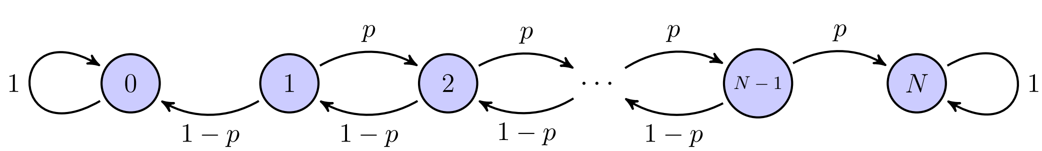


1. Za koje je vrijednosti od p lanac ireducibilan?
   Pretpostavimo da je p takav da je lanac ireducibilan.
2. Je li lanac aperiodičan?
3. Izračunajte eksplicitno
   $$\mathbb{P}_0\{X_{2n} = 0\}$$
   za svaki $n \in \mathbb{N}$.
4. Pomoću Stirlingove formule nađite ekvivalent od $\mathbb{P}_0\{X_{2n}\} = 0$ za $n \to \infty$.
   Za koje je vrijednosti od p lanac povratan? Prolazan?
5. Neka je sada Y_n Markovljev lanac na $\mathbb{N}$ s grafom na slici:

   Pokažite da ako je $X_0 = Y_0 > 0$, onda je
   $$Y_n = X_n \quad \forall n \leqslant \tau_0\ .$$
6. Izvedite dovoljan uvjet na p za koji je lanac Y_n prolazan.
7. Za koje vrijednosti od p lanac Y_n ima stacionarnu raspodjelu π? Za koje je p lanac Y_n pozitivno povratan?
8. Pokažite da za $p = 1/2$ imamo $Y_n = |X_n|$. Što možemo zaključite o povratnosti/prolaznosti lanca Y_n?

Zadatak 2.11. Neka je $p \in (0,1)$. Promatrajmo Markovljev lanac na $\{0, 1, \ldots N\}$ s grafom kao na slici.



Neka je

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in \{0, N\}\}$$

vrijeme apsorpcije i neka je

$$f(i) = \mathbb{P}_i\{X_\tau = N\}$$

vjerojatnost apsorpcije u stanju N.

1. Koliko je $f(0)$ i $f(N)$?
2. Pokažite da je za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$f(i) = pf(i+1) + (1-p)f(i-1) \ .$$

3. U ostatku zadatka pretpostavimo da je $p \neq 1/2$. Pokažite da postoje realni brojevi z_+ i z_- takvi da jednadžba za $f(i)$ ima rješanja oblika $f(i) = z_+^i$ i $f(i) = z_-^i$. Izrazite te brojeve u ovisnosti o $\rho = (1-p)/p$.
4. Nađite dvije konstante a i b takve da je

$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} = az_+^i + bz_-^i \ .$$

5. Neka je

$$g(i) = \mathbb{E}_i(\tau) \ .$$

   Pokažite da je za svaki $i \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$g(i) = 1 + pg(i+1) + (1-p)g(i-1) \ .$$

6. Nađite jedno partikularno rješenje oblika $g(i) = \gamma i$ za $\gamma \in \mathbb{R}$ ovisno o p.
7. Provjerite da opće rješenje ima oblik

$$g(i) = \gamma i + \alpha z_+^i + \beta z_-^i$$

   i odredite α i β za koje je

$$\mathbb{E}_i(\tau) = \gamma i + \alpha z_+^i + \beta z_-^i \ .$$

Poglavlje 3

Primjene na algoritme MCMC

3.1 Metode Monte Carlo

Metode tipa Monte Carlo je naziv za skup stohastičkih algoritama koji nam omogućuju ocjenu veličina koje možemo interpretirati kao očekivanja. Počinjemo jednim vrlo jednostavnim primjerom.

Primjer 3.1.1 (Računanje volumena)**.** Želimo numerički odrediti volumen $|V|$ nekog kompaktnog (dakle zatvorenog i omeđenog) podskupa V od $\mathbb{R}^N$. Pretpostavimo da je V zadan nekim brojem M nejednakosti:

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^N : f_1(x) \geqslant 0, \dots, f_M(x) \geqslant 0\right\} . \tag{3.1.1}$$

Na primjer, ako je $M = 1$ i $f_1(x) = 1 - \|x\|^2$, onda je V kugla u $\mathbb{R}^N$. Naravno, u tom je slučaju volumen od V moguće izraziti formulom. Zanima nas slučaj kad je V kompliciraniji, na primjer kad je presjek većeg broja kugala i poluravnina. Možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostavti i da je V sadržan u jediničnoj kocki $[0,1]^N$.

Prva numerička metoda za računanje volumena sastoji se od diskretizacije prostora. Podijelimo kocku $[0,1]^N$ na kockice sa stranicom ε (gdje je ε oblika $1/K$ za $K \in \mathbb{N}$). Ukupni broj kockica je jednak $1/\varepsilon^N = K^N$. Pobrojimo sada one kockice čije je središte sadržano u V; neka je njihov broj jednak n. Onda je volumen od V približno jednak $n\varepsilon^N$. Točnije, možemo omeđiti $|V|$ s $n_-\varepsilon^N$ i $n_+\varepsilon^N$, gdje je n_- broj kockica koje su u potpunosti sadržane u V, a n_+ broj kockica koje imeju neprazan presjek s V, no to nije jednostavno numerički realizirati.

Koja je točnost takvog algoritma? Ako je granica ∂V od V razumno glatka, za male vrijednosti ε pogrješka je reda veličine površine granice puta ε. Za izračunati $|V|$ sa zadanom točnošću δ, moramo uzeti ε reda veličine $\delta/|\partial V|$. To znači broj kockica reda veličine

$$\left(\frac{|\partial V|}{\delta}\right)^N , \tag{3.1.2}$$

i onda, kako moramo napraviti M testova za svaku kockicu, imamo broj operacija reda veličine $(M|\partial V|/\delta)^N$. Taj broj ne predstavlja probleme za male dimenzije ($N = 1, 2$ ili 3 na primjer), no on raste vrlo brzo s porastom dimanzije N.

Zanimljivu alternativu za velike N daju nam metode tipa Monte Carlo. U tom slučaju generiramo niz $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ nezavisnih jednako distribuiranih (n.j.d.) slučajnih varijabli s uniformnom raspodjelom na $[0,1]^N$. To se numerički lako realizira generatorima (pseudo-)slučajnih brojeva s uniformnom raspodjelom na $[0,1]$ (točnije na skupu $\{0,1,\dots,n_{\max}\}$ gdje je $n_{\max}$ prirodni broj tipa $2^{31}-1$, no dijeleći te brojeve s $n_{\max}$ dobivamo dobre aproksimacije uniformnih slučajnih varijabli na $[0,1]$). Dovoljno je promatrati N-torke takvih brojeva.

Promatrajmo sada n.j.d. slučajne varijable

$$Y_i = 1_{\{X_i \in V\}} , \qquad i = 1, 2, \dots . \tag{3.1.3}$$

Imamo

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{P}\{X_i \in V\} = |V| . \tag{3.1.4}$$

Empiričke sredine

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{3.1.5}$$

imaju očekivanje $\mathbb{E}(S_n) = |V|$ i varijancu $\operatorname{Var} S_n = \operatorname{Var} Y_1/n$. Slabi zakon velikih brojeva povlači

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\bigl\{\bigl|S_n - \mathbb{E}(S_n)\bigr| > \delta\bigr\} = 0 \tag{3.1.6}$$

za svaki $\delta > 0$. Prema tome, S_n mora davati dobru aproksimaciju volumena $|V|$ za dovoljno velike n. (Jaki zakon velikih brojeva također potvrđuje da S_n teži prema $|V|$ skoro sigurno, tj. da S_n zapravo i nije slučajna u limesu.)

Kako bismo odredili n u ovisnosti o željenoj točnosti moramo ocijeniti vjerojatnost da ćbiti $|S_n - |V|| > \delta$, za velike ali konačne n. Prvu procjenu nam daje Bienaymé–Čebiševljeva nejednakost koja kaže da je

$$\mathbb{P}\bigl\{\bigl|S_n - \mathbb{E}(S_n)\bigr| > \delta\bigr\} \leqslant \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{\delta^2} = \frac{\operatorname{Var}(Y_1)}{\delta^2 n} < \frac{1}{\delta^2 n} , \tag{3.1.7}$$

gdje smo koristili činjenicu da je $\operatorname{Var}(Y_1) \leqslant \mathbb{E}(Y_1^2) \leqslant 1$. Kako bi vjerojatnost pogrješke veće od δ bila manja od ε, dovoljno je, dakle, uzeti

$$n > \frac{1}{\delta^2 \varepsilon} . \tag{3.1.8}$$

Kako je za svaki i potrebno generirati N slučajnih varijabli i ispitati M nejednakosti, broj računskih operacija će bti reda $MN/(\delta^2\varepsilon)$. Prednost ove metode je da taj broj raste linearno s porastom N, za razliku od eksponencijalnog rasta kod diskretizacije. Uočimo, međutim, da za razliku od diskretizacije koja nam daje ispravan rezultat do na spomenutu pogrješku, Monte Carlo metoda nam ne jamči da je rezultat točan, već samo da je točan s velikom vjerojatnošću (odatle joj i ime).

Promijetimo da je ocjena (3.1.7) pesimistična i da može biti značajno poboljšana. Na primjer, centralni granični teorem nam pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\biggl\{\frac{(S_n - \mathbb{E}(S_n))^2}{\operatorname{Var}(S_n)} > \eta^2\biggr\} = \int_{|x|>\eta} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, dx , \tag{3.1.9}$$

gdje se desna strana smanjuje kao $\mathrm{e}^{-\eta^2/2}$ za velike η. To znači da je za velike n

$$\mathbb{P}\big\{|S_n - |V|| > \delta\big\} \simeq \mathrm{e}^{-n\delta^2/2\,\mathrm{Var}(Y_1)} \ . \tag{3.1.10}$$

To nam dopušta poboljšanje ocjene (3.1.8) na

$$n > const\ \frac{\log(1/\varepsilon)}{\delta^2} \ , \tag{3.1.11}$$

što daje broj operacija reda veličine $NM\log(1/\varepsilon)/\delta^2$. Ta ocjena nije rigorozna granica za razliku od (3.1.8), jer nije uzeta u obzir brzina konvergencije u (3.1.9), što vrijedi samo za η koji ne ovisi o ε. Morali bismo koristiti ocjene iz teorije velikih davijacija, čime se ovdje ne ćemo baviti. Rezultati su i dalje kvalitativno korektni.

Kao ilustraciju, pretpostavimo da želimo naći volumen područja u $N = 1000$ dimenzija definiranog s $M = 10$ nejednakosti s točnošću $\delta = 10^{-4}$. Metoda diskretizacije bi zahtijevala oko 10^{5000} operacija, što je neizvodivo s današnjim računalima. Monte Carlo metoda bi dala rezultat iste točnosti s vjerojatnošću $1 - 10^{-6}$, u svega oko $\log(10^6)\cdot 10^{12} \simeq 10^{13}$ operacija, što bi trajalo svega nekoliko minuta na osobnom računalu.

Monte Carlo metoda se jednostavno poopćava i na probleme koji se ne svode na računanje volumena. Pretpostavimo, na primjer, da imamo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, i slučajnu varijablu $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Željeli bismo ocijeniti očekivanje od Y. Monte Carlo metoda koja to rješava sastoji se od generiranja nezavisnih slučajnih varijabli $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$, koje sve imaju raspodjelu μY^{-1}, i od računanja njihovog prosjeka. Taj prosjek mora konvergirati prema traženom očekivanju (ako su Y integrabilne).

Ovaj algoritam je dosta efikasan ako možemo efikasno generirati slučajne varijable Y_i. Ponovo, to je lako u malim dimenzijama no brzo se komplicira s porastom dimenzije.

Primjer 3.1.2 (Jednodimenzionalni slučaj)**.** Jednodimenzionalna slučajna varijabla Y se jednostavno dobiva polazeći od uniformne varijable. Neka je U uniformna slučajna varijabla na $[0, 1]$. Njena funkcija distribucije dana je s

$$F_U(u) = \mathbb{P}\{U \leqslant u\} = u \qquad \text{za } 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{3.1.12}$$

Tražimo funkciju φ takvu da varijabla $Y = \varphi(U)$ ima funkciju distribucije propisanu s $F_Y(y)$. Sada imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leqslant y\} = \mathbb{P}\{\varphi(U) \leqslant y\} = \mathbb{P}\{U \leqslant \varphi^{-1}(y)\} = \varphi^{-1}(y) \ . \tag{3.1.13}$$

Dovoljno je, dakle, uzeti $Y = F_Y^{-1}(U)$.

Na primjer, za generirati varijablu s eksponencijalnom raspodjelom, čija je funkcija distribucije dana s $F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}$, dovoljno je uzeti

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - U) \ . \tag{3.1.14}$$

Za normalnu varijablu ova metoda zahtijeva približno računanje funkcije distribucije, što nije numerički efikasno. Postoji, međutim, alternativa kojom to možemo izbjeći. Neka su U i V dvije nezavisne slučajne varijable s uniformnom raspodjelom na $[0, 1]$.

Uvodimo varijable

$$R = \sqrt{-2\log(1-U)}\ , \qquad Y_1 = R\cos\Phi\ ,$$
$$\Phi = 2\pi V\ , \qquad Y_2 = R\sin\Phi\ . \tag{3.1.15}$$

Tada su Y_1 i Y_2 nezavisne slučajne varijable sa standardnom normalnom raspodjelom. Kako bismo to pokazali, provjerimo prvo da R ima funkciju distribucije $1 - \mathrm{e}^{-r^2/2}$, dakle joj je gustoća $r\,\mathrm{e}^{-r^2/2}$. Par (R, Φ) tada ima zajedničku gustoću $r\,\mathrm{e}^{-r^2/2}/(2\pi)$, i formula zamjene varijabli pokazuje da par (Y_1, Y_2) ima zajedničku gustoću $\mathrm{e}^{-(y_1^2+y_2^2)/2}/(2\pi)$, što je gustoća para nezavisnih standardnih normalnih varijabli.

Naravno, očekivanja jednodimanzionalnih slučajnih varijabli čije su raspodjele eksplicitno poznate se numerički računaju jednostavnim računanjem integrala. Nas zanimaju situacije u kojima se raspodjela od Y ne može tako jednostavno prikazati.

3.2 Algoritmi MCMC

Promatrajmo diskretni vjerojatnosni prostor $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}), \mu)$, gdje je $\mathcal{X}$ prebrojiv skup, ali vrlo velik. Na primjer, u slučaju Isingovog modela (vidi Primjer 1.1.5), skup $\mathcal{X} = \{-1, 1\}^N$ ima 2^N elemenata, a zanimaju nas N reda veličine najmanje 1000. Vjerojatnosna mjera μ je u tom slučaju preslikavanje s $\mathcal{X}$ u $[0, 1]$ takvo da je zbroj svih $\mu(i)$ jednak 1.

Željeli bismo ocijeniti očekivanje slučajne varijable $Y : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, na primjer magnetizacije u slučaju Isingovog modela :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i\in\mathcal{X}} Y(i)\mu(i)\ . \tag{3.2.1}$$

Metoda Monte Carlo se obično sastoji od generiranja niza slučajnih varijabli $X_0, X_1, \dots$ na $\mathcal{X}$, nezavisnih i s raspodjelom μ, i onda računanja prosjeka svih $Y(X_j)$.

Postupak za generiranje X_j bi mogao biti sljedeći : uvedemo potpuni uređaj na $\mathcal{X}$ i odredimo funkciju distribucije

$$F_\mu(j) = \sum_{k=1}^{j} \mu(k)\ . \tag{3.2.2}$$

Ako je U uniformna slučajna varijabla na $[0, 1]$, onda $F_\mu^{-1}(U)$ ima raspodjelu μ. Međutim, nastavljajući na ovaj način ne dobivamo ništa, jer je računanje sume (3.2.2) jednako teško kao i računanje sume (3.2.1), točno ono što pokušavamo izbjeći.

Metode MCMC (od engleskog *Monte Carlo Markov Chain*) izbjegavaju tu neugodnost. Ideja je simulirati *u isto vrijeme* i raspodjelu μ i slučajnu varijablu Y pomoću Markovljevog lanca na $\mathcal{X}$ koji ima invarijantnu raspodjelu μ.

Neka je, dakle, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav lanac, pretpostavimo da je ireducibilan, s proizvoljnom početnom raspodjelom ν. Pridružimo mu niz $Y_n = Y(X_n)$ slučajnih varijabli. To se može rastaviti kako slijedi :

$$Y_n = \sum_{i\in\mathcal{X}} Y(i) 1_{\{X_n=i\}}\ . \tag{3.2.3}$$

Pogledajmo sredine

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} Y_m \ . \tag{3.2.4}$$

Prema Teoremu 1.4.13 možemo pisati

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\nu\big(S_n\big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}_\nu\bigg(\sum_{m=0}^{n-1} Y_m\bigg) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{X}} Y(i) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}_\nu\bigg(\sum_{m=0}^{n-1} 1_{\{X_m=i\}}\bigg) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{X}} Y(i)\mu(i) \\ &= \mathbb{E}(Y) \ . \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Očekivanje od S_n zaista konvergira prema traženom očekivanju. Kako bismo mogli primijeniti metodu Monte Carlo, trebamo više, trebamo imati konvergenciju (najmanje) po vjerojatnosti od S_n prema $\mathbb{E}(Y)$. Ne možemo se izravno pozvati na zakon velikih brojeva niti na centralni granični teorem, jer Y_n nisu više nezavisne. Pokazuje se, međutim, da analogni rezultati vrijede za slučaj Markovljevih lanaca.

Teorem 3.2.1. *Neka je zadan reverzibilan Markovljev lanac s početnom raspodjelom koja je jednaka stacionarnoj raspodjeli. Neka je λ_0 najveća (po modulu) svojstvena vrijednost različita od jedan matrice prijelaza tog lanca. Tada je*

$$\operatorname{Var} S_n \leqslant \frac{1}{n}\bigg(\frac{1+|\lambda_0|}{1-|\lambda_0|}\bigg)\operatorname{Var} Y \ . \tag{3.2.6}$$

Dokaz. Kako lanac ostaje u stacionarnoj raspodjeli μ, svi Y_i imaju istu raspodjelu μY^{-1}, čak i ako nisu nezavisni. Slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_n &= \frac{1}{n^2}\bigg[\sum_{m=0}^{n-1}\operatorname{Var} Y_m + 2\sum_{0\leqslant p<q<n}\operatorname{cov}(Y_p,Y_q)\bigg] \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{Var} Y + \frac{2}{n^2}\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)\operatorname{cov}(Y_0,Y_m) \ , \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

uslijed svojstva nezavisnih prirasta. Sada za $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)^T$ imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_0,Y_m) &= \mathbb{E}_\mu\Big((Y_0-\mathbb{E}_\mu(Y_0))(Y_m-\mathbb{E}_\mu(Y_m))\Big) \\ &= \sum_{i\in\mathcal{X}}\sum_{j\in\mathcal{X}}(Y(i)-\mathbb{E}(Y))(Y(j)-\mathbb{E}(Y))\,\underbrace{\mathbb{P}_\mu\{X_0=i,X_m=j\}}_{=\mu(i)(P^m)_{ij}} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{X}}\mu(i)(Y(i)-\mathbb{E}(Y))[P^m(Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1})]_i \\ &= \langle Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1}|P^m(Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1})\rangle_\mu \\ &\leqslant |\lambda_0|^m\langle Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1}|Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1}\rangle_\mu = |\lambda_0|^m\operatorname{Var} Y \ . \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

U nejednakosti smo koristili činjenicu da je $Y-\mathbb{E}(Y)\mathbf{1}\in\mathbf{1}_\perp$ jer je zbroj $\mu_i(Y(i)-\mathbb{E}(Y))$ jednak nuli i da se stoga vektor nalazi u potprostoru komplementarnom onom razapetom s **1**. Rezultat onda slijedi uvrštavanjem u (3.2.7), zamjenom $n - m$ s n i sumiranjem geometrijskog reda. □

Iz ove ocjene i iz Bienaymé–Čebiševljeve nejednakosti slijedi da za računanje $\mathbb{E}(Y)$ s točnošću δ i s verojatnošću $1 - \varepsilon$ treba uzeti

$$n \geqslant \frac{\operatorname{Var} Y}{\delta^2 \varepsilon} \left(\frac{1 + |\lambda_0|}{1 - |\lambda_0|} \right) . \tag{3.2.9}$$

U praksi, ne možemo pokrenuti lanac točno iz invarijantne raspodjele. To dovodi do nešto sporije konvergencije, no istog reda veličine, jer raspodjela od Y_n konvergira eksponencijalno brzo prema μY^{-1}. Rezultati su, naravno, bolji ako je početni uvjet dobro odabran, tj. tako da Y_n brzo konvergira.

3.3 Metropolisov algoritam

Vidjeli smo kako ocijeniti očekivanje slučajne varijable Y pomoću Markovljevog lanca čija je invarijantna raspodjela dana s Y. Kako bi taj algoritam bio efikasan, treba nam još i mogućnost efikasnog nalaženja matrice prijelaza koja daje željenu invarijantnu raspodjelu.

Jednostavan način rješavanja tog problema je potražiti reverzibilan Markovljev lanac. Ilistrirat ćemo tu metodu za Isingov model, no ona se može lako poopćiti i na druge sustave.

U slučaju Isingovog modela (Primjer 1.1.5), skup stanja je dan s $\mathcal{X} = \{-1, 1\}^{\Lambda}$, gdje je Λ podskup (pretpostavljamo konačan) od $\mathbb{Z}^d$. Vjerojatnosna mjera na $\mathcal{X}$ je definirana s

$$\mu(\sigma) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}}{Z_\beta} , \qquad \text{gdje je } Z_\beta = \sum_{\sigma \in \mathcal{X}} \mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)} . \tag{3.3.1}$$

Parametar β označava recipročnu temperaturu, a funkcija $H : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, koja svakoj konfiguraciji pridružuje njenu energiju, je dana s

$$H(\sigma) = - \sum_{i,j \in \Lambda :\, \|i-j\|=1} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i , \tag{3.3.2}$$

gdje je h magnetsko polje. Cilj je izračunati očekivanje varijable magnetizacije definirane s

$$m(\sigma) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i \tag{3.3.3}$$

(uveli smo faktor $1/|\Lambda|$ koji osigurava da m poprima vrijednosti između -1 et 1). Kako bi se zadovoljio uvjet reverzibilnosti, tražimo matricu prijelaza P na $\mathcal{X}$ čiji elementi zadovoljavaju

$$\mu(\sigma) p_{\sigma\sigma'} = \mu(\sigma') p_{\sigma'\sigma} \tag{3.3.4}$$

za svaki par $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. To znači nametanje zahtjeva

$$\frac{p_{\sigma\sigma'}}{p_{\sigma'\sigma}} = \mathrm{e}^{-\beta \Delta H(\sigma, \sigma')} , \tag{3.3.5}$$

gdje je $\Delta H(\sigma, \sigma') = H(\sigma') - H(\sigma)$. Primijetimo da ovaj uvjet ne uključuje konstantu normalizacije Z_β, što je poželjno, jer je računanje te konstante jednako skupo kao i računanje $\mathbb{E}(m)$.

Metropolisov algoritam se sastoji najprije od definiranja skupa dopuštenih prijelaza tj. simetrične relacije $\sim$ na $\mathcal{X}$ (uvijek pretpostavljamo $\sigma \not\sim \sigma$). Najčeće su

- *Glauberova dinamika*, koja se dobije uzimajući $\sigma \sim \sigma'$ ako i samo ako se dvije konfiguracija σ i σ' razlikuju u točno jednoj komponenti; govorimo o dinamici okretanja spina;
- *Kawasakijeva dinamika*, koju dobijemo uzimajući $\sigma \sim \sigma'$ ako i samo ako se σ' dobije zamjenjujući dvije komponente od σ; govorimo o dinamici zamjene spinova. U ovom slučaju lanac nije ireducibilan na $\mathcal{X}$, jer se čuva ukupni broj spinova $+1$ i -1 : lanac je ireducibilan na svakom podskupu konfiguracija koje imaju fiksan broj spinova svakog znaka.

Jednom kad smo odabrali relaciju $\sim$, biramo vjerojatnosti prijelaza takve da je

$$p_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} p_{\sigma'\sigma}\, \mathrm{e}^{-\beta\Delta H(\sigma,\sigma')} & \text{za } \sigma \sim \sigma' \ , \\ 1 - \displaystyle\sum_{\sigma''\sim\sigma} p_{\sigma\sigma''} & \text{za } \sigma = \sigma' \ , \\ 0 & \text{inače} \ . \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Jedna od mogućnosti zadovoljavanja uvjeta kad je $\sigma \sim \sigma'$ je uzimanje

$$p_{\sigma\sigma'} = \begin{cases} q_{\sigma\sigma'} & \text{za } H(\sigma') \leqslant H(\sigma) \ , \\ q_{\sigma\sigma'}\, \mathrm{e}^{-\beta\Delta H(\sigma,\sigma')} & \text{za } H(\sigma') > H(\sigma) \ , \end{cases} \tag{3.3.7}$$

gdje je $q_{\sigma\sigma'} = q_{\sigma'\sigma}$ i $\sum_{\sigma'\sim\sigma} q_{\sigma\sigma'} = 1$. Možemo, na primjer, odabrati $q_{\sigma\sigma'}$ kao konstante jednake recipročnoj vrijednosti broja dopuštenih prijelaza. To znači da se kod smanjivanja energije uvijek dogodi prijelaz, a da se prijelaz koji povećava energiju događa s vjerojatnošću $\mathrm{e}^{-\beta\Delta H(\sigma,\sigma')}$. Druga mogućnost je uzeti

$$p_{\sigma\sigma'} = \frac{q_{\sigma\sigma'}}{1 + \mathrm{e}^{\beta\Delta H(\sigma,\sigma')}} \ . \tag{3.3.8}$$

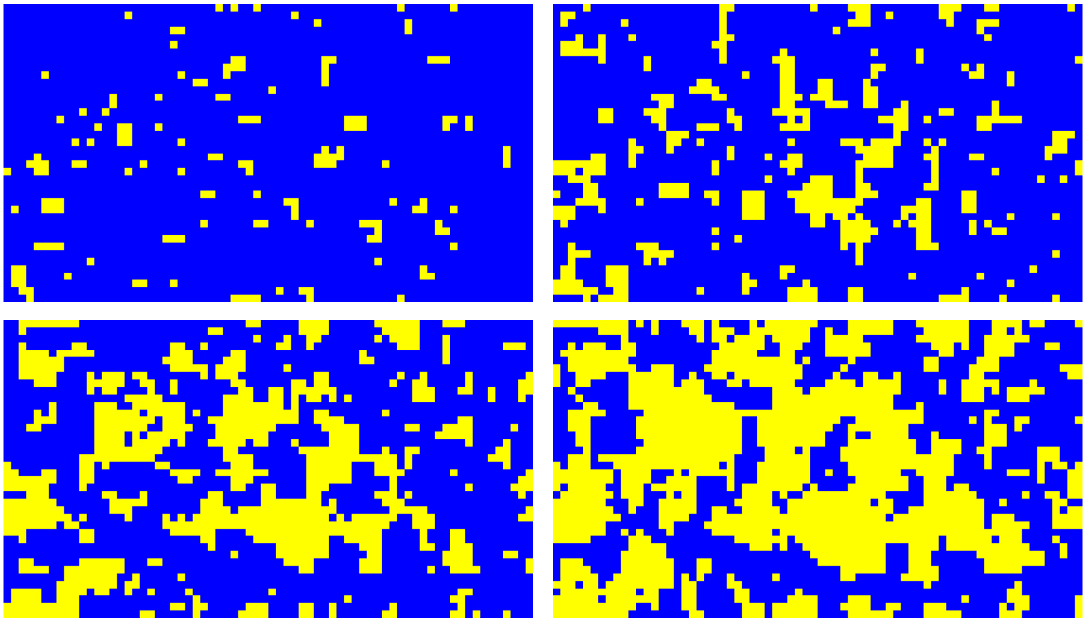
Primijetimo da je računanje razlike energija ΔH posebno jednostavno u slučaju Glauberove dinamike, jer u račun ulaze samo spin koji je obrnut i njegovi susjedi. Tako da, ako $\sigma^{(k)}$ označava konfiguraciju dobivenu okretanjem spina k iz σ, imamo

$$\Delta H(\sigma, \sigma^{(k)}) = 2\sigma_k \Bigg[\sum_{j\,:\,\|j-k\|=1} \sigma_j + h \Bigg] \ , \tag{3.3.9}$$

što je zbroj od $2d + 1$ članova za rešetku $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

Konkretno, Metropolisov algoritam s Glauberovom dinamikom se implementira kako slijedi (s $N = |\Lambda|$) :

1. **Inicijalizacija :**
   - odabrati početnu konfigurciju $\sigma(0)$ (ako je moguće takvu da $\delta_{\sigma(0)}$ bude bliska μ);
   - izračunati $m_0 = m(\sigma(0))$ (zahtijeva N operacija);
   - izračunati $H(\sigma(0))$ (zahtijeva reda dN operacija);
   - staviti $S = m_0$.
2. **Iteracije :** Za $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}$,
   - odabrati spin k slučajno i uniformno na Λ;



SLIKA 3.1. Primjer simulacije Glauberove dinamike. Evolucija u vremenu za $h = 1$ i $\beta = 0.6$, za početnu konfiguraciju u kojoj su svi spinovi jednaki -1 (plavo). Pozitivno polje h favorizira spinove jednake $+1$ (žuto).

- izračunati $\Delta H(\sigma(n-1), \sigma')$, gdje je $\sigma' = \sigma(n-1)^{(k)}$;
- ako je $\Delta H(\sigma(n-1), \sigma') \leqslant 0$, staviti $\sigma(n) = \sigma'$;
- ako je $\Delta H(\sigma(n-1), \sigma') > 0$, staviti $\sigma(n) = \sigma'$ s vjerojatnošću $q_{\sigma\sigma'} \, \mathrm{e}^{-\beta \Delta H(\sigma(n-1), \sigma')}$, ako nije, uzeti $\sigma(n+1) = \sigma(n)$;
- ako smo okrenuli spin k, $m_n = m_{n-1} + 2\sigma_k(n-1)/N$, ako nismo, $m_n = m_{n-1}$;
- dodati m_n na S.

Kvocijent $S/(n+1)$ tada konvergira prema $\mathbb{E}(m)$ brzinom određenom s (3.2.6). Jedina veličina koju je teško ocijeniti je spektralni procjep $1 - |\lambda_0|$. Pokazuje se da je procjep velik, osim za vrlo niske temperature i za temperature bliske kritičnoj temperaturi faznog prijelaza. U potonjem slučaju postoje alternativni algoritmi, poput Swendsen - Wangovog algoritma koji konvergiraju puno bolje.

3.4 Simulirano kaljenje

Ilustrirajmo, za kraj, ideju algoritma simuliranog kaljenja na problemu trgovačkog putnika (Primjer 1.1.6). Prisjetimo se da za N gradova imamo funkciju $(i, j) \mapsto d(i, j)$ koja nam daje udaljenosti (ili vremena putovanja) između gradova i i j. Cilj je naći permutaciju σ od $\{1, 2, \dots, N\}$ koja minimizira ukupnu duljinu zatvorenog ciklusa,

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{N-1} d(\sigma(i), \sigma(i+1)) + d(\sigma(N), \sigma(1)) \,. \tag{3.4.1}$$

Poteškoća je što skup $\mathcal{S}_N$ svih mogućih permutacija ima $N!$ elemenata (ustvari $(N-1)!/2$ elemenata ako se fiksira mjesto polaska i smjer obilaska), i što taj broj raste brže nego eksponencijalno s porastom broja gradova N. Tablica daje nekoliko vrijednosti vremena trajanja računa uz pretpostavku da svake mikrosekunde obradimo jedan ciklus.

N	Broj gradova	Vrijeme računanja
5	12	12 μs
10	181440	0.18 s
15	$43.6 \cdot 10^9$	12 sati
20	$60 \cdot 10^{15}$	1928 godina
25	$310 \cdot 10^{21}$	9.8 milijarda godina

Odatle i ideja za istraživanje $\mathcal{S}_N$ pomoću Markovljevog lanca. Ponovo počinjemo s definiranjem simetrične relacije $\sim$ na $\mathcal{S}_N$. Na primjer, možemo uzeti $\sigma \sim \sigma'$ ako se dvije permutacije razlikuju u jednoj transpoziciji. Jednostavni algoritam gradijentnog silaska u kojem se u svakom koraku slučajno bira jedan dopušten prijelaz koji prihvaćamo ako smanjuje H, ne daje dobre rezultate jer se lanac može naći blokiran u nekom lokalnom minimumu.

Izaberemo li vjerojatnosti prijelaza kao u (3.3.7), možemo izbjeći tu neugodnost. Međutim, tada lanac ne konvergira prema minimumu od H, nego prema Gibbsovoj mjeri $\mathrm{e}^{-\beta H(\sigma)}/Z_\beta$. Kada β teži prema $+\infty$, ta mjera efektivno konvergira prema mjeri koncentriranoj na globalnim minimumima od H. No ako izaberemo preveliki β (što znači prenisku temperaturu), postoji opasnost da će lanac previše vremena biti zarobljen u blizini lokalnih minimuma.

Algoritam simuliranog kaljenja sastoji se u izboru Markovljevog lanca nehomogenog u vremenu. To znači da umjesto izbora fiksne vrijednosti β kao u (3.3.7), uzimamo β_n koji ovisi o vremenu, tipično kao $\beta_n = \beta_0 K^n$ za neki $K > 1$. Ako je K dovoljno blizu 1, tj. ako se sustav hladi dovoljno polako, lanac konvergira prema dobroj aproksimaciji globalnog minimuma od H — barem tako opažamo numerički u mnogim slučajevima.

Dio II

Markovljevi procesi i teorija repova

Poglavlje 4

Podsjećanje na vjerojatnost

4.1 Binomna i Poissonova raspodjela

Počinjemo podsjećanjem na neke vjerojatnosne raspodjele koje će igrati važnu ulogu u ostatku kolegija. *Bernoullijev pokus* duljine n s vjerojatnošću uspjeha $p \in [0,1]$ sastoji se od n nezavisnih ponavljanja elementarnog pokusa koji ima dva moguća ishoda : uspjeh, koji nastupa s vjerojatnošću p, i neuspjeh, koji se pojavljuje s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Ako se, na primjer, pokus sastoji od bacanja simetrične kocke, i ako se uspjehom smatra samo dobivanje šestice, onda je $p = \frac{1}{6}$.

Neka je X slučajna varijabla koja broji broj uspjeha u pokusu duljine n. Ona može poprimati vrijednosti $0, 1, 2, \dots, n$, pri čemu se vrijednost k poprime s vjerojatnošću

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: b_{n,p}(k) , \tag{4.1.1}$$

gdje smo binomne koeficijente označili s

$$\binom{n}{k} \equiv C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \tag{4.1.2}$$

Ustvari, postoji $\binom{n}{k}$ načina kako rasporediti k uspjeha i $n-k$ neuspjeha u nizu od n pokusa, a svaki se pojavljuje s vjerojatnošću $p^k(1-p)^{n-k}$.

Definicija 4.1.1 (Binomna raspodjela)**.** *Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\{0, 1, \dots, n\}$ koja zadovoljava* (4.1.1)*. Kažemo da X ima* binomnu raspodjelu s parametrima (n, p) *i pišemo $X \sim b_{n,p}$.*

Slučajnu varijablu X možemo prikazati kao zbroj od n nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli Y_i od kojih svaka ima Bernoullijevu raspodjelu s parametrom p, tj. takvih da je $\mathbb{P}\{Y_i = 1\} = p = 1 - \mathbb{P}\{Y_i = 0\}$. Kako je očekivanje svakog Y_i jednako $\mathbb{E}(Y_i) = 0 \cdot \mathbb{P}\{Y_i = 0\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{Y_i = 1\} = p$, dobivamo da je očekivanje od X

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}\{X = k\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = np . \tag{4.1.3}$$

Štoviše, kako je varijanca svakog Y_i dana s $\mathrm{Var}(Y_i) := \mathbb{E}(Y_i^2) - \mathbb{E}(Y_i)^2 = p(1-p)$, vidimo da je varijanca od X jednaka

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np(1-p) . \tag{4.1.4}$$

Druga važna raspodjela je Poissonova.

Definicija 4.1.2 (Poissonova raspodjela)**.** *Kažemo da slučajna varijabla ima* Poissonovu raspodjelu s parametrom $\lambda > 0$, *i pišemo* $X \sim \pi_\lambda$, *ako ona poprima cijele nenegativne vrijednosti s vjerojatnostima*

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =: \pi_\lambda(k) \; . \tag{4.1.5}$$

Prije no što vidimo za što nam je ona važna, spomenimo neka osnovna svojstva te raspodjele.

Propozicija 4.1.3.

1. *Ako je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ, onda je*

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda \; . \tag{4.1.6}$$

2. *Ako su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λ i μ, redom, onda je $X + Y$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda + \mu$.*

Dokaz. Vidi zadatke 4.2 i 4.3. □

Važnost Poissonove raspodjele dolazi iz činjenice da je ona dobra aproksimacija binomne raspodjele $b_{n,p}$ kada je duljina pokusa n velika a vjerojatnost uspjeha p mala; uzimamo $np = \lambda$. Imamo sljedeći rezultat o konvergenciji :

Propozicija 4.1.4. *Neka je $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ niz takav da je $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Tada, za svaki $k \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,p_n}(k) = \pi_\lambda(k) \; . \tag{4.1.7}$$

Dokaz. Neka je $\lambda_n = np_n$. Tada imamo

$$\begin{aligned} b_{n,p_n}(k) &= b_{n,\lambda_n/n}(k) \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \frac{1}{(1-\lambda_n/n)^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \; . \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Kada $n \to \infty$, onda $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n/n \to 0$ i $j/n \to 0$ za $j = 0, \dots, k-1$, dakle

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \; , \tag{4.1.9}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi zbog $\lim_{n\to\infty} \ln[(1 - \lambda_n/n)^n] = -\lambda$. □

Primjer 4.1.5. Vjerojatnost dobitka na lutriji je 1/1000. Koja je vjerojatnost k dobitaka ako igramo 2000 puta?

Modeliramo situaciju Bernoullijevim pokusom duljine $n = 2000$ s parametrom $p = 0.001$. Vjerojatnost k dobitaka je tada

$$b_{2000,0.001}(k) \simeq \pi_2(k) = \mathrm{e}^{-2} \frac{2^k}{k!} \; . \tag{4.1.10}$$

Sljedeća tablica uspoređuje točne vrijednosti s Poissonovom aproksimacijom.

k	0	1	2	3	4	5
$b_{2000,0.001}(k)$	0.13520	0.27067	0.27081	0.18053	0.09022	0.03605
$\pi_2(k)$	0.13534	0.27067	0.27067	0.18045	0.09022	0.03609

Prednost Poissonove raspodjele je lakše računanje jer ne moramo računati binomne koeficijente.

Pokazat ćemo sada mnogo jači rezultat koji nam pokazuje kako brzo u L^1 konvergira binomna prema Poissonovoj raspodjeli. Rezultat je, između ostalog, zanimljiv i zbog dokaza koji slijedi vjerojatnosnim argumentima uz minimum analize.

Teorem 4.1.6. *Vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bigl| b_{n,p}(k) - \pi_{np}(k) \bigr| \leqslant 2np^2 \; . \tag{4.1.11}$$

Dokaz. Uvedimo vjerojatnosne prostore (Ω_i, p_i), za $i = 1, \dots, n$, dane s $\Omega_i = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ i

$$p_i(k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-p} - (1-p) & \text{za } k = -1 \; , \\ 1 - p & \text{za } k = 0 \; , \\ \mathrm{e}^{-p} \dfrac{p^k}{k!} & \text{za } k \geqslant 1 \; . \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Lako se provjeri da p_i definiraju vjerojatnosnu raspodjelu. Za svaki Ω_i uvodimo dvije slučajne varijable

$$X_i(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{za } \omega_i = 0 \; , \\ 1 & \text{inače} \; , \end{cases} \qquad Y_i(\omega_i) = \begin{cases} \omega_i & \text{za } \omega_i \geqslant 1 \; , \\ 0 & \text{inače} \; . \end{cases} \tag{4.1.13}$$

Na taj način dobijemo $\mathbb{P}\{X_i = 0\} = 1 - p$, $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$, i $\mathbb{P}\{Y_i = k\} = \pi_p(k)$ za svaki $k \geqslant 0$. Štoviše,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_i = Y_i\} &= \mathbb{P}\{X_i = 0, Y_i = 0\} + \mathbb{P}\{X_i = 1, Y_i = 1\} \\ &= p_i(0) + p_i(1) = 1 - p + p\,\mathrm{e}^{-p} \; , \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

dakle

$$\mathbb{P}\{X_i \neq Y_i\} = p(1 - \mathrm{e}^{-p}) \leqslant p^2 \; . \tag{4.1.15}$$

Neka je (Ω, p) produktni prostor za (Ω_i, p_i). Tada

- $X = X_1 + \dots + X_n$ ima binomnu raspodjelu $\mathbb{P}\{X = k\} = b_{n,p}(k)$;
- $Y = Y_1 + \dots + Y_n$ ima Poissonovu raspodjelu $\mathbb{P}\{Y = k\} = \pi_{np}(k)$, prema Propoziciji 4.1.3.

Kako $X \neq Y$ povlači $X_i \neq Y_i$ za barem jedan i, iz (4.1.15) slijedi

$$\mathbb{P}\{X \neq Y\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i \neq Y_i\} \leqslant np^2 \; . \tag{4.1.16}$$

Ostaje, dakle, za pokazati da je lijeva strana od (4.1.11) majorirana (omeđena odozgo) s $2\mathbb{P}\{X \neq Y\}$. Takav se postupak zove argument sparivanja. Uvedimo, zbog jednostavnosti, notaciju $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\}$, $g(k) = \mathbb{P}\{Y = k\}$ i $A = \{k \colon f(k) > g(k)\}$. Tada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\bigl|b_{n,p}(k) - \pi_{np}(k)\bigr| &= \sum_{k=0}^{\infty}\bigl|f(k) - g(k)\bigr| \\ &= \sum_{k\in A}\bigl(f(k) - g(k)\bigr) - \sum_{k\notin A}(f(k) - g(k)) \\ &= 2\sum_{k\in A}\bigl(f(k) - g(k)\bigr) - \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{N}}\bigl(f(k) - g(k)\bigr)}_{=1-1=0} . \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Sada možemo pisati

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A}\bigl(f(k) - g(k)\bigr) &= \mathbb{P}\{X \in A\} - \mathbb{P}\{Y \in A\} \\ &\leqslant \mathbb{P}\{X \in A, Y \in A\} + \mathbb{P}\{X \in A, Y \neq X\} - \mathbb{P}\{Y \in A\} \\ &\leqslant \mathbb{P}\{X \in A, Y \in A\} + \mathbb{P}\{X \neq Y\} - \mathbb{P}\{Y \in A\} \\ &\leqslant \mathbb{P}\{X \neq Y\} , \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

čime je dokaz završen. □

Uzmemo li, na primjer, $p = \lambda/n$, ograda (4.1.11) nam daje

$$\sum_{k=0}^{\infty}\bigl|b_{n,\lambda/n}(k) - \pi_{\lambda}(k)\bigr| \leqslant 2\frac{\lambda^2}{n} . \tag{4.1.19}$$

U primjeru 4.1.5, λ^2/n će biti $4/2000 = 0.002$. Dakle je zbroj svih apsolutnih vrijednosti razlika $b_{2000,0.001}(k) - \pi_2(k)$ omeđen s 0.004, i kako su svi pribrojnici pozitivni, svaki od njih mora biti još i manji. plupart seront bien plus petits encore.

4.2 Normalna i eksponencijalna raspodjela

Podsjetit ćemo se i na dvije kontinuirane realne slučajne varijable. Najjednostavnije ih je definirati u terminima *funkcije distribucije*.

Definicija 4.2.1 (Funkcija distribucije)**.** *Funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ je* funkcija distribucije *ako vrijedi*

- *F je rastuća: $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$.*
- *F je neprekidna zdesna: $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)\ \forall x$.*
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *i* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Funkcija distribucije F je apsolutno neprekidna s gustoćom f *ako vrijedi*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\ \mathrm{d}y . \tag{4.2.1}$$

Veza između funkcije distribucije i slučajne varijable je ta da je za svaku realnu slučajnu varijablu $\mathbb{P}\{X \leqslant t\}$ funkcija distribucije.

Ustvari,

- ako je $s \leqslant t$, onda je $\{X \leqslant s\} \subset \{X \leqslant t\}$, i onda $\mathbb{P}\{X \leqslant s\} \leqslant \mathbb{P}\{X \leqslant t\}$;
- $\lim_{s\to t+} \mathbb{P}\{X \leqslant s\} - \mathbb{P}\{X \leqslant t\} = \lim_{s\to t+} \mathbb{P}\{t < X \leqslant s\} = 0$;
- $\lim_{t\to -\infty} \mathbb{P}\{X \leqslant t\} = 0$ i $\lim_{t\to +\infty} \mathbb{P}\{X \leqslant t\} = 1$.

To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 4.2.2 (Funkcija gustoće slučajne varijable)**.** *Ako je X slučajna varijabla, onda se veličina*

$$F_X(t) = \mathbb{P}\{X \leqslant t\} \tag{4.2.2}$$

zove funkcija distribucije od X*. Ako je F_X apsolutno neprekidna s gustoćom f, kažemo da X* ima funkciju gustoće f *i vrijedi*

$$\mathbb{P}\{X \leqslant t\} = \int_{-\infty}^{t} f(s)\ \mathrm{d}s\ , \tag{4.2.3}$$

$$\mathbb{P}\{a < X \leqslant b\} = \mathbb{P}\{X \leqslant b\} - \mathbb{P}\{X \leqslant a\} = \int_{a}^{b} f(s)\ \mathrm{d}s\ . \tag{4.2.4}$$

U tom slučaju, možemo zamijeniti $<$ s $\leqslant$ i obratno.

Očekivanje realne slučajne varijable s funkcijom gustoće f definira se kao integral

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathrm{d}x\ , \tag{4.2.5}$$

(pod uvjetom da je funkcija $xf(x)$ apsolutno integrabilna; ako nije, kažemo da X nema očekivanje).

Nemaju sve slučajne varijable funkciju gustoće : Na primjer, funkcije distribucije diskretnih slučajnih varijabli kao što su one iz prijašnjeg odjeljka, su po dijelovima konstantne i imaju prekide, pa se ne mogu zapisati kao integrali neprekidne funkcije.

Prvi važni primjer realne slučajne varijable koja ima gustoću je Gaussova ili normalna slučajna varijabla.

Definicija 4.2.3 (Normalna raspodjela)**.** *Kažemo da slučajna varijabla X ima* normalnu raspodjelu s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ*, i pišemo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ako X ima funkciju gustoće*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\ . \tag{4.2.6}$$

Ako je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, kažemo da ta varijabla ima standardnu normalnu raspodjelu.

Lako se provjeri da je za $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ njeno očekivanje $\mathbb{E}(X) = \mu$ i njena varijanca $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Važnost normalne raspodjele slijedi ponajviše iz centralnog graničnog teorema :

Teorem 4.2.4 (Centralni granični teorem)**.** *Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli (skraćenica* n.j.d.*), s konačnim očekivanjem μ i s konačnom varijancom σ^2. Tada slučajna varijabla $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ zadovoljava*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \leqslant \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leqslant b\right\} = \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{d}x\ , \tag{4.2.7}$$

tj. $(S_n - n\mu)/\sqrt{n\sigma^2}$ konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj varijabli.

Drugi primjer raspodjele s funkcijom gustoće, posebno važan za naš kolegij, je eksponencijalna raspodjela.

Definicija 4.2.5 (Eksponencijalna raspodjela). *Kažemo da slučajna varijable X ima* eksponencijalnnu raspodjelu s parametrom $\lambda > 0$*, i pišemo $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, ako vrijedi*

$$\mathbb{P}\{X > t\} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{4.2.8}$$

za svaki $t \geqslant 0$. Njezina funkcija distribucije je dakle $F_X(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ za $t > 0$, i njezina funkcija gustoće je $\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, također za $t > 0$.

Lako se provjeri da eksponencijalna varijabla ima očekivanje $1/\lambda$ i varijancu $1/\lambda^2$. Važno i zanimljivo svojstvo eksponencijalne raspodjele je *Markovljevo svojstvo* ili *svojstvo zaboravljanja* : Za $t > s \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\{X > t | X > s\} = \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} = \mathbb{P}\{X > t - s\} \ . \tag{4.2.9}$$

Ponekad ćemo trebati promatrati i parove ili n-torke slučajnih varijabli s funkcijama gustoće koje ćemo zvati *slučajni vektori*. Njihova *zajednička funkcija gustoće* je definirana kao funkcija f od n varijabli za koju je

$$\mathbb{P}\{X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2, \dots, X_n \leqslant t_n\} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\ \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1 \tag{4.2.10}$$

za svaki izbor $(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Drugim riječima, vrijedi

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \mathbb{P}\{X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2, \dots, X_n \leqslant t_n\} \ . \tag{4.2.11}$$

Slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_n$ su *nezavisne* ako vrijedi

$$\mathbb{P}\{X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2, \dots, X_n \leqslant t_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \leqslant t_1\}\mathbb{P}\{X_2 \leqslant t_2\} \dots \mathbb{P}\{X_n \leqslant t_n\} \tag{4.2.12}$$

za svaki izbor $t_1, t_2, \dots, t_n$. Pokazuje se da je to ekvivalentno s činjenicom da se zajednička funkcija gustoće može pisati kao

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) \tag{4.2.13}$$

za funkcije gustoće $f_1, f_2, \dots, f_n$ (zvane *marginalne gustoće*).

Navedimo još jedan važan rezultat :

Propozicija 4.2.6 (Konvolucija). *Ako su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s funkcijama gustoće f_1 i f_2, redom, onda $X_1 + X_2$ ima funkciju gustoće definiranu konvolucijom*

$$(f_1 * f_2)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - x_2) f_2(x_2)\ \mathrm{d}x_2 \ . \tag{4.2.14}$$

Primjer 4.2.7 (Gamma raspodjela). Neka su $X_1, \dots, X_n$ varijable n.j.d. s raspodjelom $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Računajući konvoluciju njihovih funkcija gustoće, može se indukcijom po n pokazati da njihov zbroj $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ima funkciju gustoće

$$\gamma_{\lambda,n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \tag{4.2.15}$$

za $x \geqslant 0$. Kažemo da S_n ima *Gamma raspodjelu* s parametrima (λ, n).

4.3 Zadatci

Neka je X slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$. *Funkcija izvodnica* od X je funkcija $G_X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}\{X = k\} .$$

Zadatak 4.1. Izračunajte funkcije izvodnice za sljedeće raspodjele"

1. Bernoullijeva: $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - p$, $\mathbb{P}\{X = 1\} = p$, za $p \in [0, 1]$.
2. Binomna: $\mathbb{P}\{X = k\} = b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, za $k = 0, 1, \dots, n$.
3. Poissonova: $\mathbb{P}\{X = k\} = \pi_\lambda(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k / k!$, za $\lambda > 0$ i $k \in \mathbb{N}$.
4. Geometrijska: $\mathbb{P}\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$, za $p \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}^*$.

Zadatak 4.2. Pretpostavimo da G_X postoji za sve z u krugu polumjera strogo većeg od 1. Pokažite da je

$$G_X(1) = 1 , \qquad G'_X(1) = \mathbb{E}(X) , \qquad G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) ,$$

i izvedite izraz za varijancu u terminima funkcije izvodnice. Izračunajte očekivanja i varijance za raspodjele iz prethodnog zadatka.

Zadatak 4.3. Neka su X i Y dvije nezavisne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N}$, i G_X i G_Y njihove funkcije izvodnice. Pokažite da je $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Primjena: Provjerite sljedeće tvrdnje.

1. Zbroj n nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli ima binomnu raspodjelu;
2. Zbroj dviju nezavisnih binomnih slučajnih varijabli ima binomnu raspodjelu;
3. Zbroj dviju nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli ima Poissonovu raspodjelu.

Zadatak 4.4. Neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$, i neka je $G_N(z) = \mathbb{E}(z^N)$ njena funkcija izvodnica. Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N}$, nezavisne s N. Neka je $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$ njihova funkcija izvodnica.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}^*$ i
$$S_n = X_1 + \dots + X_n .$$
Napišite funkciju izvodnicu $\mathbb{E}(z^{S_n})$ od S_n kao funkciju od $G_X(z)$.
2. Neka je
$$S_N = X_1 + \dots + X_N .$$
Pokažite da je funkcija izvodnica $G_S(z) = \mathbb{E}(z^{S_N})$ dana s
$$G_S(z) = G_N(G_X(z)) .$$
Uputa: Napisati $\mathbb{P}\{S_N = k\}$ kao funkciju od $\mathbb{P}\{S_N = k | N = n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Pretpostavimo da N ima Poissonovu raspodjelu s parametrom $\lambda > 0$, i da X_i imaju Bernoullijevu raspodjelu s parametrom $p \in [0, 1]$. Odredite raspodjelu od S_N.

Zadatak 4.5. Neka je U uniformna slučajna varijabla na $[0,1]$, tj. funkcija gustoće joj je karakteristična funkcija $1_{[0,1]}$.

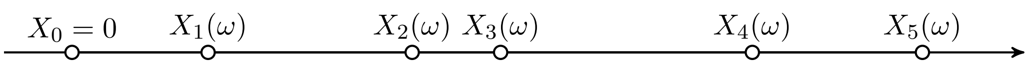
1. Odredite funkciju distribucije za U.
2. Neka je $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ strogo rastuća funkcija koja ima inverznu funkciju φ^{-1}. Odredite funkciju distribucije za slučajnu varijablu $Y = \varphi(U)$.
3. Odredite φ tako da Y bude eksponencijalna s parametrom λ.

Poglavlje 5

Točkovni Poissonovi procesi

Točkovni Poissonov proces je slučajni proces koji pridružuje vjerojatnosnu raspodjelu konfiguracijama točaka na $\mathbb{R}_+$. Te točke mogu modelirati, na primjer, trenutke dolaska autobusa na postaju, vrijeme pristizanja telefonskog poziva na telefonsku centralu i slično.

U određenim slučajevima, na primjer kad autobusi voze po voznom redu i nema smetnji u prometu, dolasci su pravilno raspodijeljeni u vremenu. U drugim situacijama, na primjer kad imamo radove koji ometaju promet, dolasci postaju nepravilno raspodijeljeni i pojavljuju se duga razdoblja čekanja autobusa, nakon kojih sljedeći autobus dolazi gotovo odmah. Poissonov točkovni proces modelira najslučajniju moguću situaciju.



Slika 5.1. Jedna realizacija Poissonovog procesa.

Procese možemo opisati na više različitih načina. Jednu realizaciju možemo specificirati rastućim nizom pozitivnih realnih brojeva

$$X_0 = 0 < X_1(\omega) < X_2(\omega) < X_3(\omega) < \dots , \tag{5.0.1}$$

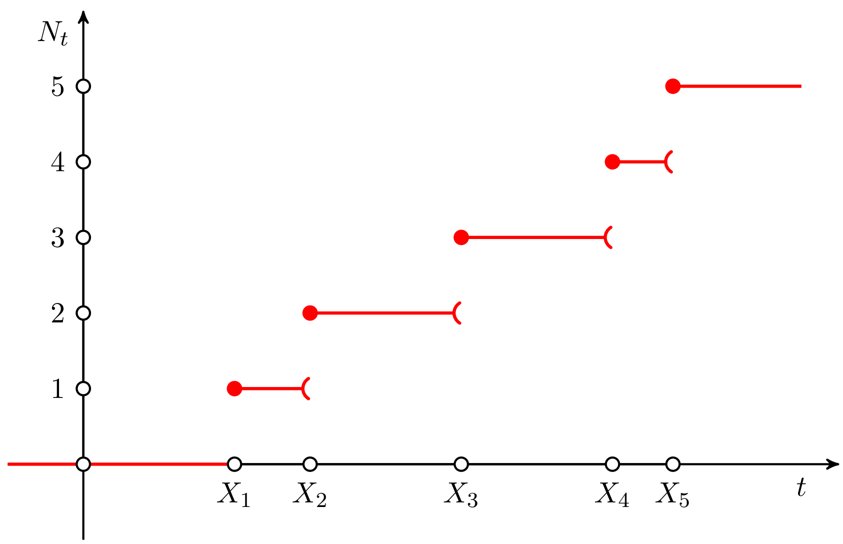
koji opisuju položaje točaka u $\mathbb{R}_+$. Alternativno, realizaciju možemo opisati i zadajući broj točaka $N_I(\omega)$ sadržanih u svakom intervalu I oblika $I = (t, t+s]$. Označimo li kraće abrégeons $N_{(0,t]}$ s N_t (to obično zovemo *brojeća mjera*), imamo $N_{(t,t+s]} = N_{t+s} - N_t$, i vrijednosti N_t su dane kao funkcije od X_n izrazom

$$N_t(\omega) = \sup\{n \geqslant 0 \colon X_n(\omega) \leqslant t\} . \tag{5.0.2}$$

Obratno, vrijednosti X_n se dobivaju iz N_t izrazom

$$X_n(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 \colon N_t(\omega) \geqslant n\} . \tag{5.0.3}$$

Dat ćemo dvije ekvivalentne konstrukcije Poissonovog procesa. Prva polazi od raspodjele za N_t.



SLIKA 5.2. Brojeća mjera jedne realizacije Poissonovog procesa.

5.1 Konstrukcija preko brojeće mjere

Definicija 5.1.1 (Poissonov proces)**.** *Točkovni Poissonov proces zadovo;java sljedeće uvjete:*

1. *N_I ovisi samo o duljini intervala I, tj. $N_{(t,t+s]}$ ima istu raspodjelu kao N_s.*
2. *Ako su $I_1, \dots, I_k$ po parovima disjunktni, $N_{I_1}, \dots, N_{I_k}$ su nezavisne.*
3. *$\mathbb{E}(N_I)$ postoji za svaki interval I (konačne duljine).*
4. *Postoji interval I za koji je $\mathbb{P}\{N_I > 0\} > 0$.*
5. *Nema dvostrukih točaka: $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}\{N_\varepsilon \geqslant 2\} = 0$.*

Pretpostavljajući da takav proces zaista i postoji, možemo izvesti neka njegova svojstva.

Propozicija 5.1.2.

1. *Neka je $\alpha(t) = \mathbb{E}(N_t)$. Tada postoji $\lambda > 0$ takav da je $\alpha(t) = \lambda t$.*
2. *Za svaki omeđeni interval $I \subset \mathbb{R}_+$, vrijedi $\mathbb{P}\{N_I \geqslant 1\} \leqslant \mathbb{E}(N_I)$.*

Dokaz.

1. Kako je $N_0 = 0$, imamo $\alpha(0) = 0$. Štoviše, zbog $N_{t+s} = N_t + N_{(t,t+s]}$ imamo
$$\alpha(t+s) = \alpha(t) + \mathbb{E}(N_{(t,t+s]}) = \alpha(t) + \alpha(s) \; , \tag{5.1.1}$$
zbog uvjeta 1. Po jednom rezultatu iz analize (Cauchyjeva jednadžba), to povlači da je nužno $\alpha(t) = \lambda t$ za neki $\lambda \geqslant 0$, i svojstvo 4. povlači $\lambda > 0$.
2. Kako je $\mathbb{E}(N_I)$ po pretpostavci konačan, imamo
$$\mathbb{E}(N_I) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}\{N_I = k\} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_I = k\} = \mathbb{P}\{N_I \geqslant 1\} \; , \tag{5.1.2}$$
što pokazuje i da je $\mathbb{P}\{N_I \geqslant 1\}$ konačno i da je omeđeno s $\mathbb{E}(N_I)$. □

Važno svojstvo Poissonovog procesa je da slučajne varijable $N_{(t,t+s]}$ nužno imaju Poissonovu raspodjelu.

Teorem 5.1.3. *Ako proces zadovoljava 5 uvjeta iz Definicije 5.1.1, onda slučajne varijable $N_{(t,t+s]}$ imaju Poissonovu raspodjelu s parametrom λs:*

$$\mathbb{P}\{N_{(t,t+s]} = k\} = \pi_{\lambda s}(k) = \mathrm{e}^{-\lambda s}\,\frac{(\lambda s)^k}{k!}\ . \tag{5.1.3}$$

Dokaz. Prema svojstvu 1., dovoljno je pokazati tvrdnju za $t = 0$, tj. za N_s. Podijelimo $(0, s]$ na k intervala jednake duljine, oblika

$$(s_{j-1}, s_j] \qquad \text{gdje je } s_j = \frac{js}{k} \text{ za } 0 \leqslant j \leqslant k\ . \tag{5.1.4}$$

Ideja je pokazati da je, za dovoljno veliki k, malo vjerojatno da ćemo imati više od jedne točke po intervalu, dakle da je raspodjela od $Y_j^{(k)} = N_{(s_{j-1},s_j]}$ gotovo Bernoullijeva. Tada je raspodjela od N_s bliska binomnoj, koju možemo dobro aproksimirati Poissonovom za velike k.

Iz uvjeta 1. i 2. slijedi da su varijable $Y_j^{(k)}$ n.j.d., s istom raspodjelom kao $N_{s_1} = N_{s/k}$, pa imamo

$$N_s = \sum_{j=1}^{k} Y_j^{(k)}\ . \tag{5.1.5}$$

Uvedimo sada slučajne varijable

$$\overline{Y}_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{za } Y_j^{(k)} = 0\ , \\ 1 & \text{za } Y_j^{(k)} \geqslant 1\ . \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Te su varijable $\overline{Y}_j^{(k)}$ također n.j.d., i imaju Bernoullijevu raspodjelu. Slučajna varijabla

$$\overline{N}_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \overline{Y}_j^{(k)}\ , \tag{5.1.7}$$

zadovoljava $\overline{N}_s^{(k)} \leqslant N_s$ za svaki k, pa imamo

$$\mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \geqslant m\} \leqslant \mathbb{P}\{N_s \geqslant m\} \tag{5.1.8}$$

za svaki k i svaki m. Štoviše, $\overline{N}_s^{(k)}$ ima binomnu raspodjelu s parametrom

$$p_k = \mathbb{P}\{\overline{Y}_j^{(k)} = 1\} = \mathbb{P}\{Y_j^{(k)} \geqslant 1\} = \mathbb{P}\{N_{s/k} \geqslant 1\}\ . \tag{5.1.9}$$

Ocijenimo razliku između raspodjela $\overline{N}_s^{(k)}$ i N_s. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \neq N_s\} &= \mathbb{P}\{\exists j \in \{1,\dots,k\} : Y_j^{(k)} \geqslant 2\} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\{Y_j^{(k)} \geqslant 2\} \\ &= k\mathbb{P}\{Y_1^{(k)} \geqslant 2\} = k\mathbb{P}\{N_{s/k} \geqslant 2\}\ . \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Uvjet 5. uz $\varepsilon = s/k$ onda povlači

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \neq N_s\} = 0 \,. \tag{5.1.11}$$

Kako s jedne strane imamo donju ogradu

$$\mathbb{P}\{N_s = m\} \geqslant \mathbb{P}\{N_s = \overline{N}_s^{(k)} = m\} \geqslant \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = m\} - \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \neq N_s\} \,, \tag{5.1.12}$$

a s druge strane gornju ogradu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N_s = m\} &= \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = N_s = m\} + \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \neq N_s = m\} \\ &\leqslant \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = m\} + \mathbb{P}\{N_s \neq \overline{N}_s^{(k)}\} \,, \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = m\} = \mathbb{P}\{N_s = m\} \,. \tag{5.1.14}$$

Ostaje za pokazati da kp_k teži prema λs za $k \to \infty$. Ako je to slučaj, onda Propozicija 4.1.4 povlači da N_s ima Poissonovu raspodjelu s parametrom λs. Imamo

$$\begin{aligned} kp_k = \mathbb{E}(\overline{N}_s^{(k)}) &= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = j\} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{j} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = j\} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{j=\ell}^{\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} = j\} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \geqslant \ell\} \,. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Analogno sa pokaže da je

$$\lambda s = \mathbb{E}(N_s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_s \geqslant \ell\} \,. \tag{5.1.16}$$

Sada iz (5.1.8) slijedi $kp_k \leqslant \lambda s$ za svaki k. Po jednom teoremu iz analize, možemo zamijeniti sumu i limes i pisati

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \geqslant \ell\} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\overline{N}_s^{(k)} \geqslant \ell\} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_s \geqslant \ell\} = \lambda s \,, \tag{5.1.17}$$

zbog (5.1.14). To pokazuje da kp_k zaista konvergira prema λs, i shodno tomu, da je raspodjela od N_s, koja je limes binomne raspodjele s parametrom kp_k, Poissonova raspodjela s parametrom λs. □

5.2 Konstrukcija preko vremena čekanja

Druga konstrukcija točkovnog Poissonovog procesa temelji se na raspodjeli razlika položaja $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Ona jednoznačno karakterizira proces preko relacije

$$X_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} Z_j(\omega) \,. \tag{5.2.1}$$

Važan rezultat je da su varijable Z_j n.j.d. i da imaju eksponencijalnu raspodjelu s parametrom λ.

Teorem 5.2.1. *Za svaki n, slučajne varijable $Z_1, \dots, Z_n$ su nezavisne i imaju istu eksponencijalnu raspodjelu $\mathcal{E}xp(\lambda)$.*

Dokaz. Fiksirajmo trenutke

$$t_0 = 0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_n < t_n \,. \tag{5.2.2}$$

Onda možemo izračunati

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\bigl\{X_1 \in (s_1, t_1], X_2 \in (s_2, t_2], \dots, X_n \in (s_n, t_n]\bigr\} \\
&\quad = \mathbb{P}\bigl\{N_{(0,s_1]} = 0, N_{(s_1,t_1]} = 1, N_{(t_1,s_2]} = 0, \dots, N_{(t_{n-1},s_n]} = 0, N_{(s_n,t_n]} \geqslant 1\bigr\} \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\bigl\{N_{(t_{k-1},s_k]} = 0\bigr\} \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\bigl\{N_{(s_k,t_k]} = 1\bigr\} \, \mathbb{P}\bigl\{N_{(s_n,t_n]} \geqslant 1\bigr\} \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda(s_k - t_{k-1})} \prod_{k=1}^{n-1} \lambda(t_k - s_k) \, \mathrm{e}^{-\lambda(t_k - s_k)} \bigl[1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t_n - s_n)}\bigr] \\
&\quad = \lambda^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (t_k - s_k) \bigl[\mathrm{e}^{-\lambda s_n} - \mathrm{e}^{-\lambda t_n}\bigr] \\
&\quad = \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_2}^{t_2} \dots \int_{s_n}^{t_n} \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda x_n} \, \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \,.
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Zajednička raspodjela od $(X_1, \dots, X_n)$ tada ima gustoću

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda x_n} & \text{za } 0 < x_1 < \dots < x_n \,, \\ 0 & \text{inače} \,. \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Sada možemo izračunati funkciju distribucije za Z_k:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\bigl\{Z_1 \leqslant z_1, \dots, Z_n \leqslant z_n\bigr\} &= \mathbb{P}\bigl\{X_1 \leqslant z_1, X_2 - X_1 \leqslant z_2, \dots, X_n - X_{n-1} \leqslant z_n\bigr\} \\
&= \mathbb{P}\bigl\{X_1 \leqslant z_1, X_2 \leqslant z_2 + X_1, \dots, X_n \leqslant z_n + X_{n-1}\bigr\} \\
&= \int_0^{z_1} \int_{x_1}^{z_2 + x_1} \dots \int_{x_{n-1}}^{z_n + x_{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1 \,.
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Zajednička gustoća od $(Z_1, \dots, Z_n)$ se tada dobiva računajući derivacije

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial z_1 \dots \partial z_n} \mathbb{P}\bigl\{Z_1 \leqslant z_1, \dots, Z_n \leqslant z_n\bigr\} &= f(z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + \dots + z_n) \\
&= \lambda^n \, \mathrm{e}^{-\lambda(z_1 + \dots + z_n)} \,,
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Ta je gustoća zaista zajednička gustoća n nezavisnih eksponencijalnih varijabli s parametrom λ. □

Ovaj nam rezultat daje metodu pomoću koje možemo konstruirati Poissonov proces: svaki X_n se dobiva polazeći od X_{n-1} dodavanjem eksponencijalne slučajne varijable neovisne o prijašnjim varijablama. Uočimo da X_n ima Gamma raspodjelu s parametrima (λ, n).

Uočimo da se Markovljevo svojstvo (4.2.9) može pisati kao

$$\mathbb{P}\bigl\{Z_n > t + \varepsilon \bigm| Z_n > t\bigr\} = \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon} \qquad \forall \varepsilon > 0 \,, \tag{5.2.7}$$

pa je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}\{Z_n \leqslant t+\varepsilon \mid Z_n > t\}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon}}{\varepsilon} = \lambda \ . \tag{5.2.8}$$

Parametar λ predstavlja, dakle, stopu pojavljivanja novih točaka, neovisno o prošlosti. Taj smo rezultat mogli i izravno izvesti preko brojeće mjere.

5.3 Poopćenja

Postoje mnogobrojna poopćenja Poissonovog procesa od kojih neka navodimo ovdje.

1. *Nehomogeni Poissonov proces* : U tom slučaju broj točaka $N_{(t,t+s]}$ ima Poissonovu raspodjelu s parametrom

$$\int_t^{t+s} \lambda(u)\ \mathrm{d}u\ , \tag{5.3.1}$$

   gdje je $\lambda(u)$ pozitivna funkcija koja opisuje stopu u trenutku u. Ovakav proces dopušta opis situacija u kojima se nove točke pojavljuju s promjenjivim intenzitetom, na primjer kada uzimamo u obzir kako dnevne fluktuacije u prometu utječu na dolazak autobusa na postaju. Homogeni Poissonov proces se dobiva ako je $\lambda(u)$ konstanta.
2. *Poissonov proces u dimenziji $n \geqslant 2$* : Ovaj proces možemo definirati preko njegove brojeće mjere zamjenjujući intervale I podskupovima (izmjerivima) od $\mathbb{R}^n$. Broj točaka u dvama disjunktnim skupovima je neovisan, i broj točaka u skupu je proporcionalan njegovom volumenu. Ovakvim procesom možemo, na primjer, modelirati broj zvijezda u određenom području svemira ili neba.
3. *Proces rađanja i umiranja* : Točkovni Poissonov proces možemo promatrati kao čisti proces rađanja : Ako N_t interpretiramo kao broj jedinki u populaciji u trenutku t, taj se broj povećava po konstantnoj stopi λ. Općenitije, u procesu rađanja i umiranja, nove se jedinke rađaju po stopi λ, a postojeće umiru po stopi μ; obje stope mogu ovisiti o trenutnoj brojnosti populacije.
4. *Složeni Poissonov proces* : Neka je N_t brojeća mjera jednostavnog Poissonovog procesa, i neka su $Y_1, Y_2, \dots,$ n.j.d. slučajne varijable neovisne o N_t. Tada proces

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{5.3.2}$$

   zovemo složenim Poissonovim procesom. U svakom trenutku u kojem se Poissonov proces X_n poveća za jedan, složeni proces S_t poveća se za slučajnu vrijednost Y_n. Ako N_t opisuje trenutke dolaska automobila na benzinsku crpku a Y_n opisuje količinu goriva utočenu u automobil n, onda je S_t ukupna količina goriva prodana do trenutka t. Ako su svi Y_i skoro sigurno jednaki 1, dobivamo polazni Poissonov proces.
5. *Proces obnavljanja* : Takav se proces definira kao i Poissonov polazeći od njegovih vremena čekanja, osim što Z_n ne moraju više pratiti eksponencijalnu raspodjelu. Takvim se procesima, na primjer, modeliraju trenutci zamjena strojeva sa slučajnim radnim vijekom (odatle naziv "obnavljanje" : svaki novi stroj traje neovisno o prethodnom, proces zaboravlja svoju prošlost u svakom trennutku obnove). Ovakav proces više ne mora imati svojstvo nezavisnosti brojeće mjere, no uz određene uvjete na raspodjelu od Z_n (postojanje prvih dvaju momenata) postoji asimptotska verzija koja ima ta svojstva.

5.4 Zadatci

Zadatak 5.1. Stranke dolaze u banku po Poissonovom procesu intenziteta λ. Ako znamo da su tijekom prvog sata u banku došle dvije stranke, koja je vjerojatnost

1. da su obje došle tijekom prvih 20 minuta?
2. da je najmanje jedna došla u prvih 20 minuta?

Zadatak 5.2. Računalnom serveru pristižu zahtjevi po točkovnom Poissonovom procesu po stopi od 60 zahtjeva na sat. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja :

1. Interval između dvaju prvih zahtjeva je bio između 2 i 4 minute.
2. Nije bilo ni jednog zahtjeva između 14:00h i 14:05h.
3. Ako znamo da su dva zahtjeva stigla između 14:00 i 14:10, oba su stigla u prvih 5 minuta.
4. Ako znamo da su dva zahtjeva stigla između 14:00 i 14:10, najmanje jedan je stigao u prvih 5 minuta.

Zadatak 5.3. Računalni poslužitelj šalje poruke prema točkovnom Poissonovom procesu. U prosjeku šalje jednu poruku svakih 30 sekundi.

1. Koja je vjerojatnost da poslužitelj ne će poslati ni jednu poruku tijekom prvih dviju minuta rada?
2. U kojem trenutku očekujete drugu poruku (koje je očekivano vrijeme slanja druge poruke)?
3. Koja je vjerojatnost da poslužitelj ne će poslti poruku tijekom prve minute ako znamo da je tijekom prve 3 minute poslao 3 poruke?
4. Koja je vjerojatnost za barem 3 poruke u prve 2 minute ako znamo da je bila barem jedna poruka tijekom prve minute?

Zadatak 5.4. U pozivnom centru pozivi stižu po točkovnom Poissonovom procesu po stopi od 10 poziva na sat.

1. Ako operater ode na pauzu između 10:00 i 10:30 sati, koliko će poziva u prosjeku propustiti?
2. Koja je vjerojatnost da će propustiti više od 2 poziva?
3. Znajući da su bila 4 poziva između 10 i 11 sati, koja je vjerojatnost da tijekom pauze nije propušten ni jedan poziv? Da je propušten barem jedan poziv?
4. Znajući da su bila 2 poziva između 10:30 i 11 sati, koja je vjerojatnost da su oba bila između 10:30 i 10:45?

Zadatak 5.5. Protok vozila po nekoj cesti je modeliran Poissonovim procesom intenziteta $\lambda = 2$ vozila po minuti. Zbog radova, promet se naizmjenično propušta u svakom smjeru. Za to vrijeme vozila u suprotnom smjeru stoje. Pretpostavljamo da svako zaustavljeno vozilo zauzima u prosjeku 8 metara na cesti.

1. Koja je raspodjela vremena pristizanja X_n n-tog vozila?
2. Dajte gaussovsku aproksimaciju raspodjele od X_n uz pomoć centralnog graničnog teorema.
3. Koliko dugo možemo obustaviti promet u jednom smjeru ako želimo da vjerojatnost da kolona zaustavljenih vozila bude ne dulja od 250m iznosi 0.2? (Vrijednost x za koju je $\mathbb{P}\{\mathcal{N}(0,1) < x\} = 0.2$ je $x \simeq -0.85$.)

Zadatak 5.6 (Paradoks autobusa)**.** Vremena dolaska autobusa na postaju su opisana Poissonovim procesom $(X_n)_n$ intenziteta λ. Putnik dolazi na postaju u trenutku t nakon početka vožnje.

1. Izračunajte vjerojatnost da je putnik zakasnio na n-ti autobus ali je stigao na vrijeme za $(n+1)$-vi autobus.
2. Izračunajte vjerojatnost da je zakasnio na n-ti autobus i da će vrijeme čekanja $(n+1)$-vog autobusa biti barem s.
3. Izračunajte vjerojatnost da će morati čekati sljedeći autobus barem s vremena.
4. Izvedite prosječno vrijeme čekanja autobusa i usporedite s prosječnim vremenom između prolazaka autobusa. Što Vam se čini?

Zadatak 5.7. Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ dva nezavisna Poissonova procesa, s intenziteima λ i μ, redom. Neka je $(Z_n)_n$ proces dobiven superpozicijom $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$. Pokažite da je i to Poissonov proces i odredite njegov intenzitet.

Zadatak 5.8. Neka je X_n točkovni Poissonov proces intenziteta λ.
Neka je Y_n proces dobiven brisanjem svakog X_n $(n \geqslant 1)$ s vjerojatnošću $1/2$, neovisno o svima ostalima, i numeriranjem preostalih točaka prirodnim brojevima. Označimo s N_t i M_t, broj X_n i Y_n, redom, u intervalu $(0, t]$.

1. Odredite raspodjelu od N_t.
2. Pokažite da za svaki k, $l \mapsto \mathbb{P}\{M_t = l | N_t = k\}$ ima binomnu raspodjelu i odredite njene parametre.
3. Izvedite raspodjelu za M_t.
4. Pokažite da je Y_n točkovni Poissonov proces i odredite njegov intenzitet.
5. Što se zbiva ako se svaki X_n briše s vjerojatnošću $1 - q$, $0 < q < 1$?

Poglavlje 6

Markovljevi procesi

Markovljevi procesi su analogni Markovljevim lancima u kontinuiranom vremenu. Podsjetimo se bitnog svojstva koje nam dopušta definiranje lanaca, Markovljevog svojatva:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0\} &= \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} \\ &= p_{ij}\end{aligned} \tag{6.0.1}$$

za svako vrijeme n. Markovljev proces se definira uvjetom

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_{s_{n-2}} = i_{n-2}, \ldots, X_{s_0} = i_0\} &= \mathbb{P}\{X_{s+t} = j \mid X_s = i\} \\ &= P_t(i,j)\end{aligned} \tag{6.0.2}$$

za svaki izbor vremena $0 \leqslant s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-2} < s < s+t \in \mathbb{R}_+$. Za svaki $t \geqslant 0$, skup $P_t(i,j)$ mora biti stohastička matrica koju zovemo *jezgra prijelaza*. Njeni elementi su *vjerojatnosti prijelaza*.

Primjer 6.0.1 (Markovljev lanac s neprekidnim vremenom)**.** Neka je Y_n Markovljev lanac s matricom prijelaza P, i neka je N_t brojeća mjera točkovnog Poissonovog procesa sa stopom λ. Onda je

$$X_t = Y_{N_t} \tag{6.0.3}$$

Markovljev proces kojeg zovemo *Markovljev lanac s neprekidnim vremenom*. Taj proces ima prijelaze u slučajnim trenutcima koje daje Poissonov proces umjesto u pravilnim razmacima kao polazni Markovljev lanac. Svojstvo (6.0.2) je posljedica dvaju Markovljevih svojstava : onog od lanca Y_n, i onog od eksponencijalne raspodjele, vidi (4.2.9).

Kako broj skokova N_t do trenutka t ima Poissonovu raspodjelu, vjerojatnosti prijelaza su dane formulom

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{N_t = n\}\mathbb{P}_i\{X_n = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!} p_{ij}^{(n)}\ , \tag{6.0.4}$$

gdje su $p_{ij}^{(n)}$ elementi matrice P^n koji opisuju vjerojatnosti prijelaza u n koraka za Markovljev lanac Y_n.

6.1 Stopa prijelaza

Jezgre prijelaza P_t za različite t nisu proizvoljne nego se ravnaju po Chapman–Kolmogorovljevoj jednadžbi (ona je analogna relaciji (1.2.13) za Markovljeve lance).

Propozicija 6.1.1 (Chapman–Kolmogorovljeva jednadžba)**.** *Familija $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ jezgri prijelaza Markovljevog procesa s prebrojivim skupom stanja $\mathcal{X}$ zadovoljava*

$$P_{s+t}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{X}} P_s(i,k)P_t(k,j) \tag{6.1.1}$$

za svaki izbor $s,t \geqslant 0$ i $i,j \in \mathcal{X}$.

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
P_{s+t}(i,j) &= \mathbb{P}\bigl\{X_{s+t} = j \bigm| X_0 = i\bigr\} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{X}} \frac{\mathbb{P}\{X_{s+t} = j, X_s = k, X_0 = i\}}{\mathbb{P}\{X_0 = i\}} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{X}} \frac{\mathbb{P}\{X_{s+t} = j, X_s = k, X_0 = i\}}{\mathbb{P}\{X_s = k, X_0 = i\}} \frac{\mathbb{P}\{X_s = k, X_0 = i\}}{\mathbb{P}\{X_0 = i\}} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{X}} \underbrace{\mathbb{P}\bigl\{X_{s+t} = j \bigm| X_s = k, X_0 = i\bigr\}}_{=P_t(k,j)} \underbrace{\mathbb{P}\bigl\{X_s = k \bigm| X_0 = i\bigr\}}_{=P_s(i,k)} ,
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

prema Markovljevom svojstvu (6.0.2). □

Chapman–Kolmogorovljeva jednadžba nam pokazuje da ako znamo jezgru prijelaza P_t za sva vremena t u intervalu $(0, t_0]$, onda ju znamo i za sva vremena $t \in \mathbb{R}_+$. To nas navodi na promatranje limesa

$$q(i,j) = \lim_{h\to 0} \frac{P_h(i,j)}{h} , \qquad i \neq j \in \mathcal{X} . \tag{6.1.3}$$

Ako taj limes postoji, to je, po definiciji, desna derivacija od $P_t(i,j)$ u $t = 0$. U tom slučaju veličina $q(i,j)$ se zove *stopa prijelaza iz stanja i u stanje j*.

Primjer 6.1.2 (Markovljev lanac s neprekidnim vremenom)**.** Razvojem izraza (6.0.4) u Taylorov red oko $h = 0$, zbog $p_{ij}^{(0)} = 0$ za $i \neq j$, dobivamo

$$P_h(i,j) = (1 - \lambda h + \dots)(\lambda h p_{ij} + \dots) = \lambda h p_{ij} + \mathcal{O}(h) , \tag{6.1.4}$$

što nam daje stopu prijelaza

$$q(i,j) = \lambda p_{ij} . \tag{6.1.5}$$

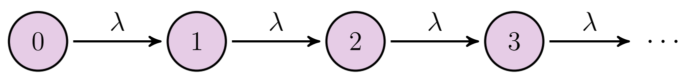
Primjer 6.1.3 (Poissonov proces)**.** Neka je N_t brojeća mjera točkovnog Poissonovog procesa s parametrom λ. Možemo ju promatrati kao Markovljev proces u kojem su dopušteni samo prijelazi između n i $n + 1$. Vjerojatnosti prijelaza su tada dane s

$$P_s(n, n+1) = \mathbb{P}\bigl\{N_{t+s} = n+1 \bigm| N_t = n\bigr\} = \mathbb{P}\bigl\{N_{(t,t+s]} = 1\bigr\} = \lambda s\, \mathrm{e}^{-\lambda s} . \tag{6.1.6}$$

Odgovarajuća stopa prijelaza je onda

$$q(n, n+1) = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda h \, \mathrm{e}^{-\lambda h}}{h} = \lambda \; . \tag{6.1.7}$$

Grafički prikaz lanca daje Slika 6.1.



Slika 6.1. Grafički prikaz Poissonovog procesa, ili čistog procesa rađanja.

U pravilu, Markovljevi se procesu konstruiraju izravno iz stopa prijelaza $q(i, j)$, umjesto polazeći od jezgre prijelaza $P_t(i, j)$. U tu svrhu, definiramo

$$\lambda(i) = \sum_{j \neq i} q(i, j) \; , \tag{6.1.8}$$

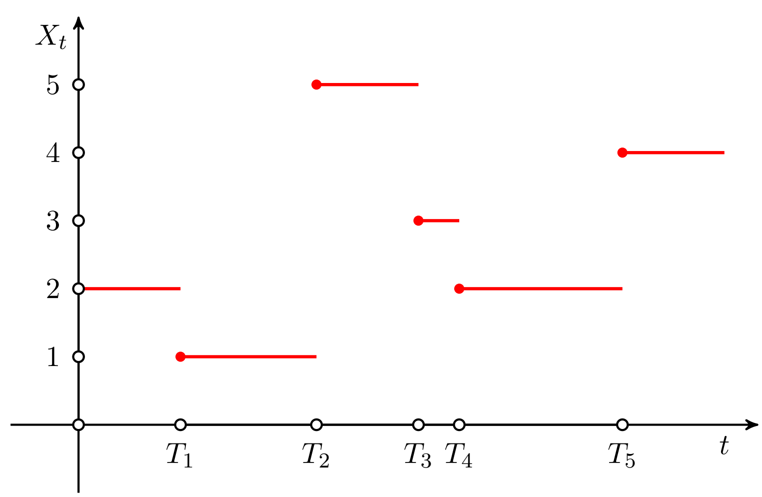
što nam daje stopu po kojoj proces napušta stanje i. Pretpostavimo da je $0 < \lambda(i) < \infty$. U tom nam slučaju

$$r(i, j) = \frac{q(i, j)}{\lambda(i)} \tag{6.1.9}$$

daje vjerojatnost da proces prelazi u stanje j, ako znamo da je napustio stanje i.

Neka je $\{Y_n\}_{n \geqslant 0}$ Markovljev lanac s matricom prijelaza $R = \{r(i, j)\}$. Polazeći od tog lanca možemo konstruirati (i simulirati) Markovljev proces $\{q(i, j)\}$ na sljedeći način :

- Uzmimo n.j.d. slučajne varijable $\tau_0, \tau_1, \dots$ koje imaju eksponencijalnu raspodjelu $\mathcal{E}xp(1)$, neovisne o vjerojatnostima prijelaza lanca Y_n.
- Ako proces odlazi iz stanja $X_0 = Y_0$, mora napuštati to stanje po stopi $\lambda(Y_0)$, što znaći nakon slučajnog vremena t_1 koje ima eksponencijalnu raspodjelu $\mathcal{E}xp(\lambda(Y_0))$. Za to je dovoljno odabrati $t_1 = \tau_0 / \lambda(Y_0)$.



Slika 6.2. Realizacija Markovljevog procesa iz uloženog Markovljevog lanca $(Y_n)_n = (2, 1, 5, 3, 2, 4, \dots)$.

- U trenutku t_1, proces skače u stanje Y_1, u kojem ostaje slučajno vrijeme t_2 koje ima eksponencijalnu raspodjelu $\mathcal{E}xp(\lambda(Y_1))$.

Nastavljajući ovaj postupak, definiramo vremena zadržavanja

$$t_n = \frac{\tau_{n-1}}{\lambda(Y_{n-1})} , \tag{6.1.10}$$

i stavimo

$$X_t = Y_n \qquad \text{za } T_n \leqslant t < T_{n+1} , \tag{6.1.11}$$

gdje su trenutci prijelaza dani s

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} t_i . \tag{6.1.12}$$

Jedina razlika između općeg slučaja i posebnog slučaja Markovljevog lanca s neprekidnim vremenom (Primjer 6.0.1) je što različita vremena zadržavanja ne moraju imati istu raspodjelu.

6.2 Generatorska matrica i Kolmogorovljeve jednadžbe

Pokažimo sada kako određujemo jezgru prijelaza P_t polazeći od stopa $q(i,j)$. Važnu ulogu igra generatorska matrica procesa.

Definicija 6.2.1 (Generatorska matrica)**.** *Neka je X_t Markovljev proces sa stopama prijelaza $\{q(i,j)\}$.* Generatorska matrica (infinitezimalna) *tog procesa je matrica L s elementima*

$$L(i,j) = \begin{cases} q(i,j) & \textit{za } i \neq j , \\ -\lambda(i) & \textit{za } i = j . \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Primijetimo da definicija (6.1.8) od $\lambda(i)$ povlači

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} L(i,j) = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{X} . \tag{6.2.2}$$

Teorem 6.2.2 (Kolmogorovljeve jednadžbe)**.** *Jezgra prijelaza zadovoljava* Kolmogorovljevu jednadžbu unatrag

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t = L P_t , \tag{6.2.3}$$

kao i Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t = P_t L . \tag{6.2.4}$$

Dokaz. Gledamo jednadžbu unatrag. Počinjemo od Chapman–Kolmogorovljeve jednadžbe,

$$\begin{aligned} P_{t+h}(i,j) - P_t(i,j) &= \sum_{k \in \mathcal{X}} P_h(i,k) P_t(k,j) - P_t(i,j) \\ &= \sum_{k \neq i} P_h(i,k) P_t(k,j) + \big[P_h(i,i) - 1\big] P_t(i,j) . \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Dijeljenjem obje strane s h i prijelazom na limes za $h \to 0$ dobivamo derivaciju. Za prvi član na desnoj strani imamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} P_h(i,k)P_t(k,j) = \sum_{k\neq i} q(i,k)P_t(k,j) \ . \tag{6.2.6}$$

Pogledajmo drugi član. Primijetimo da uvjet $\sum_k P_h(i,k) = 1$ povlači

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(P_h(i,i) - 1\Big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\bigg(-\sum_{k\neq i} P_h(i,k)\bigg) = -\sum_{k\neq i} q(i,k) = -\lambda(i) \ . \tag{6.2.7}$$

Uvrštavanjem (6.2.6) i (6.2.7) u (6.2.5), dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_t(i,j) = \sum_{k\neq i} q(i,k)P_t(k,j) - \lambda(i)P_t(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{X}} L(i,k)P_t(k,j) \ , \tag{6.2.8}$$

što nije ništa drugo nego jednadžba (6.2.3) napisana po komponentama. Dokaz tvrdnje za jednadžbu unaprijed ide posve analogno, polazeći od rastava

$$\begin{aligned} P_{t+h}(i,j) - P_t(i,j) &= \sum_{k\in\mathcal{X}} P_t(i,k)P_h(k,j) - P_t(i,j) \\ &= \sum_{k\neq j} P_t(i,k)P_h(k,j) + P_t(i,j)\big[P_h(j,j) - 1\big] \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

umjesto od (6.2.5). □

Kolmogorovljeve jednadžbe su sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi za elemente matrice $P_t(i,j)$. Kako je $P_0 = I$, identiteta, rješenje možemo pisati kao eksponentu matrice Lt,

$$P_t = \mathrm{e}^{Lt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lt)^n}{n!} \ . \tag{6.2.10}$$

Za provjeru je dovoljno derivirati red član po član (što smijemo ako red apsolutno konvergira). U općem je slučaju teško naći eksplicitni oblik za e^{Lt}, no u nekim je posebnim slučajevima to moguće.

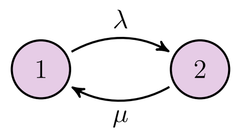
Primjer 6.2.3 (Markovljev lanac s neprekidnim vremenom)**.** Primijenjujući definiciju generatorske matrice na (6.1.5), i koristeći činjenicu da je $\sum_{j\neq i} q(i,j) = \lambda(1-p_{ii})$ jer je matrica P stohastička, dobivamo

$$L = \lambda(P - I) \ . \tag{6.2.11}$$

Općenito, e^{AB} nije jednako $\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$, ali ako je $AB = BA$, imamo $\mathrm{e}^{AB} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$. Kako je $PI = IP$ i $\mathrm{e}^{-\lambda It} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,I$, dobivamo

$$P_t = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{\lambda t P} \ , \tag{6.2.12}$$

što je ekvivalentno sa (6.0.4).



Slika 6.3. Graf Markovljevog procesa s dva stanja.

Primjer 6.2.4 (Poissonov proces)**.** Za Poissonov proces generatorska matrica je dana formulom

$$L(i,j) = \begin{cases} -\lambda & \text{za } j = i \ , \\ \lambda & \text{za } j = i+1 \ , \\ 0 & \text{inače} \ . \end{cases} \tag{6.2.13}$$

Kolmogorovljeva jednadžba unatrag je tada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(i,j) = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j) \ . \tag{6.2.14}$$

Napišimo generatorsku matricu u obliku $L = \lambda(R - I)$ gdje je I jedinična matrica, i $(R)_{ij} = 1$ za $j = i+1$, 0 inače. Kako je $IR = RI$, imamo

$$\mathrm{e}^{Lt} = \mathrm{e}^{-\lambda t I} \,\mathrm{e}^{\lambda t R} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} R^n \ , \tag{6.2.15}$$

jer je $\mathrm{e}^{-\lambda t I} = \mathrm{e}^{-\lambda t} I$. Elementi matrice R^n su jednaki 1 za $j - i = n$ i 0 inače. Odatle, uzimajući matrične elemente (i,j) iz (6.2.15), nalazimo

$$P_t(i,j) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{za } j \geqslant i \ , \\ 0 & \text{inače} \ . \end{cases} \tag{6.2.16}$$

Lako se provjeri da je to zaista rješenje sustava (6.2.14). Mogli smo i izravno dobiti ovaj rezultat primijetivši da je $P_t(i,j)$ vjerojatnost da Poissonov proces ima $j - i$ točaka u intervalu $[0,t)$, što slijedi iz Poissonove raspodjele.

Primjer 6.2.5 (Markovljev proces s dva stanja)**.** Neka je $\mathcal{X} = \{1,2\}$, sa stopama prijelaza $q(1,2) = \lambda$ i $q(2,1) = \mu$ (Slika 6.3). Tada generatorska matrica ima oblik

$$L = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \ . \tag{6.2.17}$$

Izravnim računom se pokaže da je $L^2 = -(\lambda+\mu)L$, pa je $L^n = (-(\lambda+\mu))^{n-1} L$ za svaki $n \geqslant 1$. Slijedi

$$\begin{aligned} P_t = \mathrm{e}^{Lt} &= I + \sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!} (-(\lambda+\mu))^{n-1} L \\ &= I - \frac{1}{\lambda+\mu} \big(\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} - 1\big) L \\ &= \frac{1}{\lambda+\mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda \,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda \,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu \,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu \,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Primijetimo, posebno, da je za $\lambda + \mu > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix} . \tag{6.2.19}$$

To znači da će asimptotski, sustav biti u stanju 1 s vjerojatnošću $\mu/(\lambda+\mu)$, i u stanju 2 s vjerojatnošću $\lambda/(\lambda+\mu)$, kakvo god bilo početno stanje.

6.3 Stacionarne raspodjele

Definicija 6.3.1 (Stacionarna raspodjela)**.** *Vjerojatnosna raspodjela π na $\mathcal{X}$ je* stacionarna *za proces s jezgrom prijelaza P_t ako je*

$$\pi P_t = \pi \qquad \forall t > 0 , \tag{6.3.1}$$

ili, u komponentama,

$$\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi(i) P_t(i,j) = \pi(j) \qquad \forall j \in \mathcal{X},\ \forall t > 0 . \tag{6.3.2}$$

Kako općenito ne znamo jezgru prijelaza, korisniji ćnam biti kriterij u terminima generatorske matrice.

Teorem 6.3.2. *π je stacionarna raspodjela ako i samo ako je $\pi L = 0$, tj.*

$$\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi(i) L(i,j) = 0 \qquad \forall j \in \mathcal{X} . \tag{6.3.3}$$

Dokaz.

$\Rightarrow$: Neka je π stacionarna raspodjela. Napišimo Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed po komponentama

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{X}} P_t(i,k) L(k,j) . \tag{6.3.4}$$

Množeći s $\pi(i)$ i zbrajajući po i dobivamo

$$\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi(i) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(i,j) = \sum_{i,k\in\mathcal{X}} \pi(i) P_t(i,k) L(k,j) . \tag{6.3.5}$$

Lijevu stranu možemo pisati kao

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi(i) P_t(i,j) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pi(j) = 0 . \tag{6.3.6}$$

Zbrajanjem po i na desnoj strani dobivamo

$$\sum_{i,k\in\mathcal{X}} \pi(i) P_t(i,k) L(k,j) = \sum_{k\in\mathcal{X}} \pi(k) L(k,j) . \tag{6.3.7}$$

Jednakost od (6.3.6) i (6.3.7) je zaista ekvivalentna s (6.3.2).

$\Leftarrow$: Pretpostavimo da je $\pi L = 0$. tada, po Kolmogorovljevoj jednadžbi unatrag,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i\in\mathcal{X}}\pi(i)P_t(i,j) &= \sum_{i\in\mathcal{X}}\pi(i)\sum_{k\in\mathcal{X}}L(i,k)P_t(k,j)\\ &= \sum_{k\in\mathcal{X}}\underbrace{\biggl(\sum_{i\in\mathcal{X}}\pi(i)L(i,k)\biggr)}_{=0}P_t(k,j) = 0\;. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Slijedi da je $\sum_i \pi(i)P_t(i,j)$ konstantna, pa mora biti jednaka svojoj vrijednosti za $t = 0$. No ta vrijednost je $\pi(j)$ jer $P_0(i,j) = \delta_{ij}$. To dokazuje da je π stacionarna. □

Primjer 6.3.3 (Markovljev lanac s neprekidnim vremenom)**.** Kako je $L = \lambda(P - I)$, jednadžba $\pi L = 0$ je ekvivalentna s $\pi P = \pi$. Raspodjela π je, dakle, stacionarna za lanac s neprekidnim vremenom $X_t = Y_{N_t}$ ako i samo ako je stacionarna za lanac s diskretnim vremenom Y_n.

Primjer 6.3.4 (Poissonov proces)**.** Poissonov proces nema stacionarnu raspodjelu. Vidjeli smo da je generatorska matrica dana s $L = \lambda(R - I)$, gdje je $(R)_{ij} = 1$ za $j = i + 1$ i 0 inače. Uvjet $\pi L = 0$ je ekvivalentan s $R\pi = \pi$, dakle s $\pi_{i+1} = \pi_i$ za svaki i. No ne postoji vjerojatnosna raspodjela na $\mathbb{N}$ u kojoj bi svi elementi bili jednaki. Izraz (6.2.14) za vjerojatnosti prijelaza također pokazuje da one teže prema 0 kad $t \to \infty$. To je stoga što se raspodjela "proteže do beskonačnosti".

Primjer 6.3.5 (Proces s dva stanja)**.** U slučaju procesa s dva stanja, jednadžba $\pi L = 0$ glasi

$$\pi(1)(-\lambda) + \pi(2)\mu = 0\;. \tag{6.3.9}$$

Kako je $\pi(1) + \pi(2) = 1$, mora biti

$$\pi = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\;. \tag{6.3.10}$$

To doista odgovara graničnoj vrijednosti od P_t iz (6.2.19).

U slučaju Markovljevih lanaca s diskretnim vremenom vidjeli smo da sve početne raspodjele konvergiraju prema jedinstvenoj stacionarnoj raspodjeli pod uvjetom da je lanac ireducibilan, aperiodičan i pozitivno povratan. U slučaju neprekidnog vremena, uvjet aperiodičnosti nije više nužan. To je posljedica slučajne naravi duljine intervala između prijelaza.

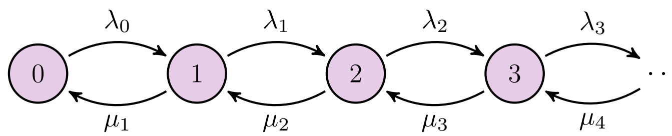
Kažemo da je Markovljev proces *ireducibilan* ako možemo naći, za svaki par stanja (i,j), neki put $(i_0 = i, i_1, \dots, i_n = j)$ takav da je $q(i_k, i_{k+1}) > 0$ za svaki $k = 0, \dots, n-1$.

Teorem 6.3.6. *Ako je Markovljev proces ireducibilan i ima stacionarnu raspodjelu π, onda*

$$\lim_{t\to\infty} P_t(i,j) = \pi(j) \qquad \forall i,j \in \mathcal{X}\;. \tag{6.3.11}$$

Štoviše, ako je $r : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi $\sum_i \pi(i)|r(i)| < \infty$, onda je

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t r(X_s)\,\mathrm{d}s = \sum_i \pi(i)r(i) =: \mathbb{E}_\pi(r)\;. \tag{6.3.12}$$



SLIKA 6.4. Grafički prikaz procesa rađanja i umiranja.

Prihvatit ćemo ovaj rezultat bez dokaza. Relacija (6.3.12) je analogna Teoremu 1.4.13. Posebno, ako je $r(i) = \delta_{ij}$, to pokazuje da je srednje vrijeme provedeno u stanju j jednako $\pi(j)$.

Vidjeli smo da se za reverzibilne Markovljeve lance stacionarna raspodjela lako dobiva iz uvjeta detaljne uravnoteženosti. Na potpuno analogan način kažemo da je je Markovljev proces sa stopama prijelaza $\{q(i,j)\}$ *reverzibilan* ako postoji raspodjela π takva da je

$$\pi(i)q(i,j) = \pi(j)q(j,i) \qquad \forall i,j \in \mathcal{X} \; . \tag{6.3.13}$$

Teorem 6.3.7. *Ako je zadovoljen uvjet detaljne uravnoteženosti* (6.3.13)*, onda je raspodjela π stacionarna.*

Dokaz. Zbrajajući uvjete po svim $i \neq j$ dobivamo

$$\sum_{i\neq j} \pi(i)q(i,j) = \pi(j)\sum_{i\neq j} q(j,i) = \pi(j)\lambda(j) = -\pi(j)L(j,j) \; . \tag{6.3.14}$$

No to je ekvivalentno s $\sum_i \pi(i)L(i,j) = 0$. □

Primjer 6.3.8 (Proces rađanja i umiranja)**.** Neka je $\mathcal{X} = \{0,\dots,N\}$, i pretpostavimo da su jedine stope prijelaza različite od nule dane s

$$\begin{aligned} q(n,n+1) &= \lambda_n && \text{za } 0 \leqslant n < N \; , \\ q(n,n-1) &= \mu_n && \text{za } 0 < n \leqslant N \; . \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

Ovdje X_t predstavlja, na primjer, broj jedinki u nekoj populaciji, koje se rađaju po stopi λ_n i umiru po stopi μ_n, gdje stope mogu ovisiti o broju n tih jedinki. Grafički prikaz daje Slika 6.4.

Pretpostavimo da su stope strogo pozitivne. U tom slučaju može biti zadovoljen uvjet detaljne uravnoteženosti stavljanjem

$$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi(n-1) \; . \tag{6.3.16}$$

Indukcijom dobivamo

$$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_1}\pi(0) \; , \tag{6.3.17}$$

i $\pi(0)$ se određuje iz uvjeta normalizacije $\sum_i \pi(i) = 1$.

6.4 Zadatci

Zadatak 6.1. Promatramo Markovljev proces X_t na $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ s infinitezimalnom generatorskom matricom

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Prikažite proces grafički.
2. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu.
3. Je li proces X_t ireducibilan?
4. Je li proces X_t reverzibilan?

Zadatak 6.2. Poduzetnik ide na službeni put u Pariz, Bordeaux i Marseille. U svakom se gradu zadržava eksponencijalno vrijeme s očekivanjem $1/4$ mjeseca za Pariz i Bordeaux te $1/5$ mjeseca za Marseille. Ako je u Parizu, odlazi u svaki od preostalih gradova s jednakom vjerojatnošću $1/2$. Iz Bordeauxa, odlazi u Pariz s vjerojatnošću $3/4$ i u Marseille s vjerojatnošću $1/4$. Iz Marseillea se uvijek vraća u Pariz.

1. Napišite generatorsku matricu Markovljevog procesa koji opisuje ovaj službeni put.
2. Odredite udio vremena koje putnik provodi u svakom gradu.
3. Koliko će putovanja u prosjeku biti godišnje između Pariza i Bordeauxa?

Zadatak 6.3. Mala prodavaonica informatičke opreme ima najviše tri računala u prodavaonici. Kupci dolaze po stopi od dva tjedno. Ako se u prodavaonici nalazi bar jedno računalo, kupac ga kupi. Ako se u prodavaonici nalazi najviše jedno računalo, poslovođa naruči dva računala. Vrijeme čekanja je eksponencijalno s očekivanjem od 1 tjedna.

1. Napišite generatorsku matricu Markovljevog procesa koji opisuje broj računala u prodavaonici.
2. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu.
3. Koja je stopa prodaje računala?

Zadatak 6.4. Biciklistu se mogu dogoditi nezgode jednog od dvaju tipova koje nastupaju po Poissonovom procesu :

- Pada u jarak u prosjeku jednom u 10 sati vožnje. U tom mu slučaju treba eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 0.1 sata za dovođenje bicikla u vozno stanje.
- Probuši mu se guma u prosjeku jednom u 25 sati vožnje. Za popravak mu treba eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 1 sata.

1. Odredite stacionarnu raspodjelu.
2. Koji udio vremena biciklist provede u vožnji?
3. Poopćite rješanje na slučaj N različitih tipova nezgoda od kojih svaka nastupa po stopi μ_i i zahtijeva eksponencijalno vrijeme za popravak s očekivanjem $1/\lambda_i$.

Zadatak 6.5. Molekula hemoglobina može na sebe vezati ili molekulu kisika ili molekulu ugljičnog monoksida. Pretpostavimo da molekule pristižu po Poissonovom procesu sa stopama λ_{O_2} i λ_{CO} i ostaju vezane tijekom vremena koje ima eksponencijalnu raspodjelu sa stopama μ_{O_2} i μ_{CO}, redom. Odredite udio vremena koji molekula hemoglobina provede u svakom od stanja : slobodna molekula, vezana s kisikom, vezana s ugljičnim monoksidom.

Zadatak 6.6. Vozila dolaze na benzinsku crpku po stopi od 20 vozila na sat. Na crpki je samo jedan uređaj za punjenje. Ako vozač nađe uređaj slobodan, staje i puni spremnik gorivom. Za to mu treba eksponencijalno vrijeme s očekivanjem 6 minuta. Ako je u trenutku dolaska vozača uređaj zauzet i ako nitko ne čeka, vozač staje u rep. Ako se u repu već nalazi jedno vozilo, vozač ne staje na toj crpki.

1. Formulirajte problem kao Markovljev proces i nađite njegovu stacionarnu raspodjelu.
2. Odredite prosječni broj vozača koji natoče gorivo u jednom satu.

Zadatak 6.7. Modeliramo radioaktivni raspad N atoma Markovljevim procesom $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ na skupu stanja $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$ sa stopom prijelaza $q(n, n-1) = \mu$, gdje X_t označava broj neraspadnutih atoma u trenutku t.

1. Promatrajmo slučaj $N = 1$:

$$0 \xleftarrow{\mu} 1$$

   Odredite generatorsku matricu L. Izračunajte L^2, pa L^n za svaki n. Izvedite jezgru prijelaza P_t.
2. Promatrajmo sada slučaj $N = 2$:

$$0 \xleftarrow{\mu} 1 \xleftarrow{\mu} 2$$

   Odredite generatorsku matricu L i napišite Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed. Riješite te jednadžbe za početni uvjet $X_0 = 2$, tj. nađite $P_t(2, j)$ za $j = 2, 1, 0$.
   Uputa : Rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\mu x + f(t)$ dano je formulom

$$x(t) = x(0)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\, f(s)\,\mathrm{d}s \,.$$

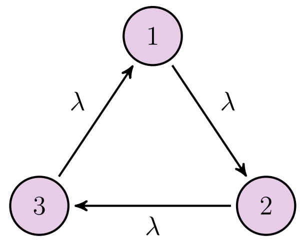
3. Na isti način, izračunajte $P_t(N, j)$ za $j = N, N-1, \ldots, 0$ za proizvoljan N.
4. Izračunajte

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(Y_t)$$

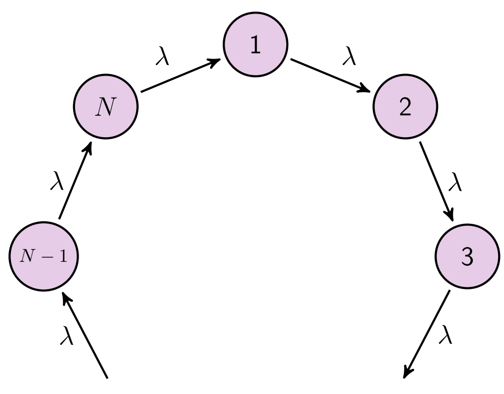
   gdje je $Y_t = N - X_t$ broj raspadnutih atoma u trenutku t ako je bilo N atoma u trenutku 0.

Zadatak 6.8. Promatrajmo čisti lanac umiranja sa stopom umiranja $q(n, n-1) = \mu$ za sve $n \geqslant 1$. Odredite jezgru prijelaza $P_t(i, j)$.

Zadatak 6.9. Promatrajmo Markovljev proces na skupu $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ čiji je graf prikazan na slici:



1. Napišite generatorsku matricu tog procesa.
2. Odredite stacionarnu raspodjelu tog procesa.
3. Neka je R matrica za koju je $L = -\lambda I + \lambda R$. Izračunajte R^2, R^3, i R^n za svaki $n \in \mathbb{N}$.
4. Izvedite $\mathrm{e}^{\lambda t R}$, i jezgru prijelaza P_t za svaki t.
5. Promatrajmo sada Markovljev proces na skupu $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ sa sljedećim grafom:



   Napišite generatorsku matricu L ovog procesa.
6. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu π.
7. Naznačite oblik jezgre prijelaza P_t za svaki t.

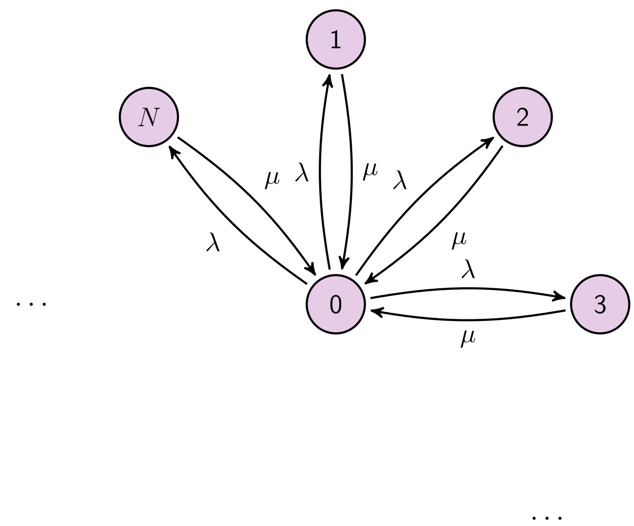
Uputa: Možemo se koristiti sljedećim razvojima.
Neka je $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ i

$$f(x) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{\bar{\omega} x}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\big(\sqrt{3}x/2\big)\Big)\,.$$

Tada je

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{1}{(3n)!}x^{3n} + \dots \\ f'(x) &= \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(3n-1)!}x^{3n-1} + \dots \\ f''(x) &= x + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(3n-2)!}x^{3n-2} + \dots\ . \end{aligned}$$

Zadatak 6.10. Neka su $\lambda, \mu > 0$. Promatrajmo Markovljev proces na skupu stanja $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, N\}$ sa sljedećim grafom:



1. Odredite generatorsku matricu L tog procesa.
2. Odredite njegovu stacionarnu raspodjelu π.
3. Je li taj proces reverzibilan?
4. Promatrajte slučaj $N = 1$. Izračunajte L^n za svaki $n \in \mathbb{N}$, i odredite jezgru prijelaza P_t za sve $t \geqslant 0$.
5. Promatrajte slučaj $N > 1$, uz $\lambda = \mu$. Za svaki$j \in \mathcal{X}$ stavimo
$$Q_t(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P_t(k, j) \; .$$
Pomoću Kolmogorovljevih jednadžbi izrazite
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(0, j) \qquad \text{i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t(j)$$
kao funkciju od $P_t(0, j)$ i $Q_t(j)$. Koristeći rezultat stavka 4., izvedite $P_t(0, j)$ i $Q_t(j)$ za svaki $j \in \mathcal{X}$. Razlikujte slučajeve $j = 0$ i $j > 0$.
6. Neka je $i \in \{1, \ldots, N\}$. Izračunajte
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t(i, j)$$
i izvedite $P_t(i, j)$ za svaki $j \in \mathcal{X}$. Razlikujte slučajeve $j = 0$ i $j > 0$.
7. Što će biti
$$\lim_{t \to \infty} P_t \; ?$$

Poglavlje 7

Teorija repova

7.1 Klasifikacija i Kendallova notacija

Teorija repova (engl. “queueing theory”) dopušta nam modeliranje situacija u kojima stranke (klijenti) dolaze u slučajnim vremenima do poslužitelja (servera). Poslužitelj može biti šalter u banci ili pošti, blagajna u prodavaonici, no isto tako i računalni procesor čiji su klijenti programi koji stižu na izvršenje. Vrijeme potrebno za poslužiti stranku je također slučajno.

Željeli bismo biti u mogućnosti odgovoriti na sljedeća pitanja:

- Koje je srednje vrijeme čekanja za stranku koja dolazi u rep?
- Koji dio vremena je poslužitelj zauzet?
- Koja je vjerojatnosna raspodjela duljine repa?
- Prema kojem procesu se ravnaju stranke koje, nakon što su poslužene, odlaze iz sustava?

Postoji čitav niz modela repova koji se razlikuju po raspodjelama vremena dolazaka, vremena posluživanja, po broju poslužitelja, po ograničenjima duljine repa i poretku posluživanja stranaka.

Kendallova notacija dopušta nam specifikaciju spomenutih modela u kompaktnom obliku. Najčešće se takva oznaka sastoji od tri simbola:

$$\mathrm{A}/\mathrm{B}/s\ , \tag{7.1.1}$$

gdje A označava raspodjelu vremenskih intervala u kojima dolaze stranke, B označava raspodjelu vremena usluge i s je broj poslužitelja. Najčešće vrijednosti za A i B su sljedeće:

- **M (Markov) :** Exponencijalna raspodjela. Znamo da takva raspodjela povlači Markovljevo svojstvo. Ovaj je slučaj najjednostavniji za analizu.
- **D (Deterministički) :** Konstantna vremena. A = D znači da stranke stižu u pravilnim intervalima, dok B = D znači da je vrijeme usluge jednako za sve stranke.
- **E (Erlang) :** Erlangova raspodjela. To je, ustvari, gama raspodjela, po kojoj se ravna zbroj eksponencijalnih varijabli.
- **G (Opći) :** Proizvoljna raspodjela. Taj se simbol rabi kad gledamo svojstva koja ne ovise o pojedinoj raspodjeli.

Ako je duljina repa ograničena konačnom vrijednošću N, koristimo oznaku

$$\mathrm{A}/\mathrm{B}/s/N\ . \tag{7.1.2}$$

Ako nije drukčije rečeno, uzimamo $N = \infty$.

Konačno, možemo specificirati i poredak kojim se stranke poslužuju. Ako nije drukčije rečeno, smatra se da je to FIFO (first in, first out), što znači da se stranke poslužuju redom kojim dolaze. Alternativa je LIFO (last in, first out). U tom se slučaju novopristigle stranke stavljaju na čelo repa i poslužuju se čim se server oslobodi.

7.2 Markovljev slučaj: M/M/s rep

Markovljevi lanci M/M/s su najjednostavniji za analizirati, jer markovska priroda vremena dolazaka i usluga znači da je duljina repa ustvari Markovljev proces. Stoga možemo primijeniti metode razvijene u prethodnim poglavljima.

Primjer 7.2.1 (M/M/1 rep)**.** Najjednostavniji slučaj imamo za jedan server na koji stranke dolaze prema Poissonovom procesu s parametrom λ, i na kojem je vrijeme usluge eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom μ. Pretpostavka o Poissonovim vremenima dolazaka je relativno realistična, jer smatramo da klijenti dolaze iz velikog skupa nezavisnih jedinki. Pretpostavka o eksponencijalnim vremenima usluge je već diskutabilna. Uzimamo ju ponajviše stoga što dopušta eksplicitne formula za veličine koje promatramo.

Neka je N_t duljina repa u trenutku t. Ona se razvija po procesu sa stopom prijelaza

$$\begin{aligned} q(n, n+1) &= \lambda \qquad \text{za } n \geqslant 0 \;, \\ q(n, n-1) &= \mu \qquad \text{za } n \geqslant 1 \;. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Drugim riječima, N_t je proces rađanja i umiranja u kojem dolazak nove stranke odgovara rađanju, a odlazak poslužene stranke umiranju (Slika 7.1).

Iz relacije (6.3.17) slijedi da proces ima stacionarnu raspodjelu π, dakle zadovoljava

$$\pi(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0) \;. \tag{7.2.2}$$

Konstanta $\pi(0)$ se određuje iz uvjeta da zbroj svih $\pi(n)$ mora biti jednak 1. Taj je zbroj geometrijski red pa dobivamo

$$\pi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad \text{za } \lambda < \mu \;. \tag{7.2.3}$$

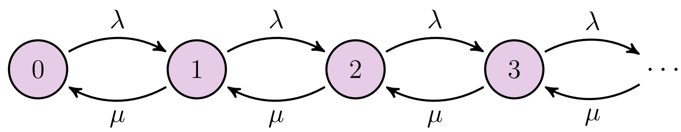
Stacionarna raspodjela je dakle geomterijska (pomaknuta u 0). Ako je $\lambda \geqslant \mu$, red divergira i ne postoji stacionarna raspodjela. U tom slučaju, stopa dolazaka novih klijenata prelazi kapacitet poslužitelja i duljina repa raste neograničeno.

Pretpostavimo da je $\lambda < \mu$ i da se rep uravnotežio. Tada možemo izračunati razne zanimljive veličine.

- Vjerojatnost da je poslužitelj zauzet dana je s

$$\mathbb{P}_\pi\{N_t > 0\} = 1 - \pi(0) = \frac{\lambda}{\mu} \;. \tag{7.2.4}$$

  To je upravo udio vremena koji server provede zauzet.



Slika 7.1. Graf pridružen M/M/1 repu.

- Prosječna duljina repa dana je s

$$\mathbb{E}_\pi(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi(n) = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} \ , \tag{7.2.5}$$

gdje smo koristili izraz za vrijednost očekivanja geometrijske slučajne verijable. Primijetimo da vrijednost divergira kada λ/μ teži prema 1.
- Neka je W vrijeme čekanja stranke prije početka posluživanja. Razlikujemo dva slučaja. Ako je rep bio prazan, vrijeme čekanja je nula i imamo

$$\mathbb{P}_\pi\bigl\{W = 0\bigr\} = \mathbb{P}_\pi\bigl\{N_t = 0\bigr\} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \ . \tag{7.2.6}$$

U suprotnom, ako je rep duljine $n > 0$ u trenutku dolaska stranke, moramo čekati dok tih n stranaka ne bude posluženno. Vrijeme čekanja je dakle zbroj n nezavisnih eksponencijalnih varijabli s parametrom μ, što je gama varijabla s parametrima (n, μ). Funkcija gustoće za W je dana s

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)\, \mathrm{e}^{-\mu t}\, \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \mathrm{e}^{-\mu t}\, \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{\mu}(\mu - \lambda)\, \mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t} \ . \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

Drugim riječima, uz uvjet $W > 0$, W je eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\mu - \lambda$.
- Prosječno vrijeme čekanja do početka posluživanja dano je s

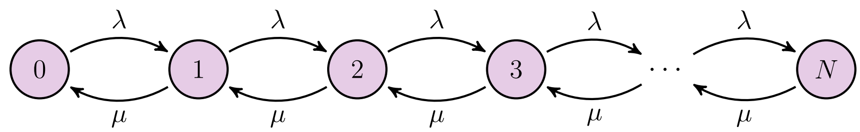
$$\mathbb{E}_\pi(W) = \int_0^\infty t f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \ . \tag{7.2.8}$$

Prosječno ukupno vrijeme čekanja, uključujući vrijeme posluživanja, je tada

$$\mathbb{E}_\pi(W) + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \ . \tag{7.2.9}$$

Primjer 7.2.2 (M/M/1/N rep)**.** Promatrajmo slučaj kada je duljina repa ograničena s N. Ako stranka dođe i nađe rep duljine N, otići će i ne će se priključiti repu. U tom slučaju sustav je opisan Markovljevim procesom sa stopama prijelaza

$$\begin{aligned} q(n, n+1) &= \lambda \qquad \text{za } 0 \leqslant n < N \ , \\ q(n, n-1) &= \mu \qquad \text{za } 0 < n \leqslant N \ . \end{aligned} \tag{7.2.10}$$



SLIKA 7.2. Graf pridružen M/M/1/N repu.

To je još uvijek proces rađanja i umiranja (Slika 7.2), i relacija (7.2.2) i dalje vrijedi za $1 \leqslant n \leqslant N$. Jedina razlika je normalizacija, što rezultira stacionarnom raspodjelom

$$\pi(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & \text{za } \lambda \neq \mu \;, \\ \dfrac{1}{N+1} & \text{za } \lambda = \mu \;. \end{cases} \tag{7.2.11}$$

Za razliku od repa proizvoljne duljine, stacionarna raspodjela uvijek postoji. Ako je $\lambda < \mu$ i ako N neograničeno raste, dobivamo stacionarnu raspodjelu M/M/1 repa.

Primjer 7.2.3 (M/M/s rep)**.** Pretpostavimo da stranke formiraju jedan rep za s poslužitelja koji rade paralelno. Kad se jedan poslužitelj oslobodi, dolazi mu stranka s čela repa. U tom slučaju, uvijek imamo $q(n, n+1) = \lambda$, no imamo dvije različite stope $q(n, n-1)$. Ako je duljina n repa manja od s, tada je samo n poslužitelja aktivno i odlasci se zbivaju po stopi $n\mu$. U suprotnom, ako je duljina repa veća ili jednaka od broja poslužitelja s, svi su poslužitelji zauzeti i stopa odlazaka je $s\mu$. Imamo

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu & \text{za } n < s \;, \\ s\mu & \text{za } n \geqslant s \;. \end{cases} \tag{7.2.12}$$

I ovo je proces rađanja i umiranja (Slika 7.3), i stacionarna raspodjela, ako postoji, zadovoljava

$$\pi(n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)\pi(0) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0) & \text{za } n \leqslant s \;, \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)\prod_{k=s+1}^{n}\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)\pi(0) = \frac{1}{s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi(0) & \text{za } n > s \;. \end{cases} \tag{7.2.13}$$

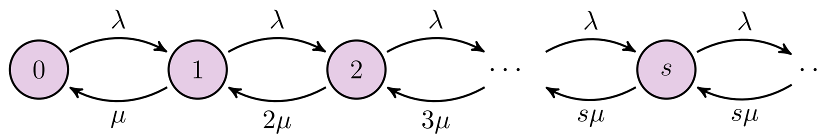
Ako je $\lambda < \mu s$, možemo odrediti $\pi(0)$ tako da π bude vjerojatnosna raspodjela pa postoji stacionarno stanje. U suprotnom rep nema stacionarnu raspodjelu.

Možemo izračunati sve one veličine koje smo izračunali za M/M/1 rep, samo što su svi izrazi kompliciraniji. Iznimka je prosječni broj zauzetih poslužitelja koji je dan s

$$\sum_{n=1}^{s} n\pi(n) + \sum_{n=s+1}^{\infty} s\pi(n) \;. \tag{7.2.14}$$

Primijetimo li u izrazu (7.2.13) za stacionarnu raspodjelu da je

$$\frac{\lambda}{\mu}\pi(n-1) = \begin{cases} n\pi(n) & \text{za } n \leqslant s \;, \\ s\pi(n) & \text{za } n > s \;, \end{cases} \tag{7.2.15}$$



Slika 7.3. Graf pridružen M/M/s repu.

možemo napisati (7.2.14) u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu}\pi(n-1) = \frac{\lambda}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\pi(n) = \frac{\lambda}{\mu} \ . \tag{7.2.16}$$

Kako stacionarna raspodjela postoji uz uvjet $\lambda/\mu < s$, lako se dobije da je prosječan broj zauzetih poslužitelja manji od s. Udio zauzetih poslužitelja jednak je $\lambda/\mu s$.

Primjer 7.2.4 (M/M/∞ rep)**.** Pretpostavka o beskonačnom broju poslužitelja može se činiti nerealnom, no pokazuje se da ona može dobro poslužiti za opis situacije kad je broj poslužitelja velik u odnosu na broj stranaka, kao, na primjer, kod nekih telefonskih centrala.

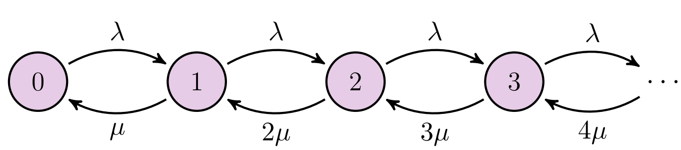
U tom slučaju, stope prijelaza su dane s

$$\begin{aligned} q(n,n+1) &= \lambda \qquad \text{za } n \geqslant 0 \ , \\ q(n,n-1) &= n\mu \qquad \text{za } n \geqslant 1 \ . \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

Stacionarna raspodjela može se izračunati kao i u prijašnjim slučajevima i dana je eksplicitnom formulom

$$\pi(n) = \mathrm{e}^{-\lambda/\mu}\,\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \ . \tag{7.2.18}$$

Duljina repa, koja je jednaka broju zauzetih poslužitelja, ravna se po Poissonovoj raspodjeli s očekivanjem λ/μ.



Slika 7.4. Graf pridružen M/M/∞ repu.

Navodimo važan rezultat koji vrijedi za sve M/M/s repove.

Teorem 7.2.5. *Ako je $\lambda < s\mu$, onda stranke napuštaju M/M/s rep prema Poissonovom procesu intenziteta λ.*

Dokaz. Ako imamo samo jedan server, $s = 1$, tvrdnja se provjerava izravnim računom. Promatramo dva slučaja.

1. Imamo n stranaka u repu. U tom slučaju, sljedeći odlazak stranke iz repa dogodit će se poslije eksponencijalnog vremena sa stopom μ.

2. Rep je prazan. Tada treba čekati vrijeme T_1 po raspodjeli $\mathcal{E}xp(\lambda)$ do dolaska prve stranke, plus vrijeme T_2, nezavisno, po raspodjeli $\mathcal{E}xp(\mu)$, dok ta stranka ne bude poslužena. Funkcija gustoće varijablee $T_1 + T_2$ dobiva se kao konvolucija,

$$\int_0^t \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda s}\,\mu\,\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\,\mathrm{d}s = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\big(\mathrm{e}^{-\mu t} - \mathrm{e}^{-\lambda t}\big)\;. \tag{7.2.19}$$

Prvi slučaj nastupa s vjerojatnošću λ/μ, a drugi s vjerojatnošću $1-\lambda/\mu$. Funkcija gustoće za vrijeme sljedećeg odlaska dobiva se kombiniranjem tih dvaju slučajeva i glasi

$$\frac{\lambda}{\mu}\mu\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\big(\mathrm{e}^{-\mu t} - \mathrm{e}^{-\lambda t}\big) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\;. \tag{7.2.20}$$

To je upravo funkcija gustoće eksponencijalne varijable s parametrom λ.

U općenitom slučaju tvrdnja se dokazuje koristeći reverzibilnost. Analogno postupku u dokazu formule (1.5.2), počevši od stacionarne raspodjele, proces N_t ima istu raspodjelu kao i proces s okrenutim vremenom N_{T-t}. Okretanje vremena zamjenjuje uloge stranaka koje dolaze u rep i onih koje odlaze iz njega, pa i dolazni i odlazni proces imaju istu raspodjelu. □

Ovaj je rezultat bitan u teoriji repova jer on opisuje raspodjelu stranaka koje staju u drugi rep nakon što su bile poslužene u prvom repu.

7.3 Općeniti slučaj: G/G/1 rep

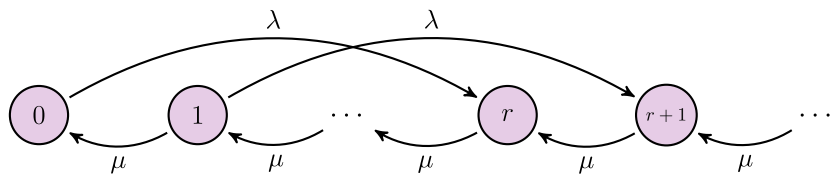
Repovi u kojima vremena dolazaka stranaka i vremena usluge nisu eksponencijalna su osjetno teži za proučavanje. Razlog tomu je da više nemamo Markovljevo svojstvo i trenutačno stanje više nije dovoljno za poznavanje budućnosti, koja sad ovisi i o vremenu koje je stranka koju se upravo poslužuje već provela u posluživanju.

U nekim se slučajevima ovakvi repovi mogu svesti na Markovljeve repove uvodeći dodatna stanja.

Primjer 7.3.1 (M/E$_r$/1 rep)**.** Pretpostavimo da stranke dolaze prema Poissonovom procesu intenziteta λ, ali da vremena usluge imaju gama raspodjelu s parametrima (r,μ) uz $r \geqslant 2$. Moguća interpretacija je situacija u kojoj stranka treba r uzastopnih usluga od kojih svaka treba eksponencijalno vrijeme s parametrom μ. Ako N_t označava zbroj broja stranaka u repu i broja usluga koje još treba obaviti za stranku koju se u trenutku poslužuje, onda se N_t ponaša kao Markovljev proces sa stopama prijelaza

$$\begin{aligned} q(n,n-1) &= \mu \qquad \text{za } n \geqslant 1\;,\\ q(n,n+r) &= \lambda \qquad \text{za } n \geqslant 0\;. \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Broj usluga se smanjuje za 1 po stopi μ, a povećava za r dolaskom svake nove stranke. Ako je $\lambda < \mu$, može se pokazati da sustav ima stacionarnu raspodjelu koja je linearna kombinacija geometrijskih raspodjela.



Slika 7.5. Graf pridružen Markovljevom prikazu repa M/E$_r$/1.

U pravilu, ovakva Markovljeva reprezentacija nije moguća i moramo se služiti teorijom *procesa obnavljanja*. Takav je proces karakteriziran nizom slučajnih vremena $0 < T_1 < T_2 < \dots$, zvanih vremena obnavljanja, takvih da je ponašanje na svakom vremenskom intervalu $[T_n, T_{n+1})$ nezavisno i s istom raspodjelom kao i na drugim intervalima.

Trebat će nam sljedeći rezultat, poznat kao jaki zakon velikih brojeva.

Teorem 7.3.2 (Zakon velikih brojeva za procese obnavljanja)**.** *Neka je $1/\mu$ očekivanje intervala $T_{n+1} - T_n$, i neka je $N_t = \sup\{n \colon T_n \leqslant t\}$ brojeća mjera vremena obnavljanja. Tada je*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} N_t = \mu\right\} = 1 \ . \tag{7.3.2}$$

Štoviše,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}(N_t) = \mu \ . \tag{7.3.3}$$

Relacija (7.3.3) potvrđuje da prosječni broj vremena obnavljanja konvergira prema μ u srednjem ergodičnom. Veličinu μ možemo dakle promatrati kao stopu procesa.

Promatrajmo rep u koji stranke dolaze prema procesu obnavljanja sa stopom λ, i u kojem je vrijeme usluge slučajno s očekivanjem $1/\mu$.

Teorem 7.3.3. *Ako je $\lambda < \mu$, i ako je početna duljina repa konačna, onda će duljina repa dostići 0 u konačnom vremenu skoro sigurno. Štoviše, udio vremena u kojem će poslužitelj biti zauzet je λ/μ.*

Dokaz. Vrijeme T_n dolaska n-te stranke je zbroj n nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem $1/\lambda$. Jaki zakon velikih brojeva kaže da s vjerojatnošću 1 imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda} \ . \tag{7.3.4}$$

Neka je Z_0 vrijeme potrebno za poslužiti stranke koje su u repu u trenutku 0 i neka je s_i vrijeme potrebno za poslužiti i-tu stranku koja dođe poslije vremena 0. Znamo da je $\mathbb{E}(s_i) = 1/\mu$. Pretpostavimo suprotno, da će poslužitelj biti uvijek zauzet. Tada n-ta stranka odlazi u vrijeme $Z_0 + S_n$, gdje je $S_n = s_1 + \dots + s_n$. Jaki zakon velikih brojeva povlači da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_0 + S_n}{n} = \frac{1}{\mu} \ . \tag{7.3.5}$$

Kako je $1/\mu < 1/\lambda$, to povlači da za velike n, n-ta stranka odlazi iz repa prije nego što je došla, što je nemoguće. Dakle poslužitelj ne može biti cijelo vrijeme zauzet.

Neka je sada A_n vrijeme koje je server proveo zauzet u trenutku T_n. Tada imamo

$$A_n = S_n - Z_n \ , \tag{7.3.6}$$

gdje je Z_n vrijeme potrebno za isprazniti rep od stranaka u njemu u trenutku T_n. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n/n}{T_n/n} = \frac{\lambda}{\mu} \ . \tag{7.3.7}$$

S druge strane, ako rep dostiže ravnotežu, $\mathbb{E}(Z_n)$ mora ostati ograničeno, dakle Z_n/n mora težiti u 0. □

Za slučaj M/M/s repa smo pokazali izravnim računom da je udio vremena tijekom kojeg je poslužitelj zauzet jednak λ/μ. Sljedeći rezultat nam kaže da je to istina i za sve druge G/G/1 repove.

Neka je X_t duljina repa u trenutku t, i neka je W_n vrijeme čekanja n-te stranke. Dvije važne veličine su srednja duljina repa

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s \ , \tag{7.3.8}$$

i srednje vrijeme čekanja

$$W = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_n \ . \tag{7.3.9}$$

Teorem 7.3.4 (Littleov zakon)**.** *Neka je λ^* stopa kojom stranke dolaze i priključuju se repu. Tada je*

$$L = \lambda^* W \ . \tag{7.3.10}$$

U slučaju M/M/1 repa imamo $\lambda^* = \lambda$. Izravnim računom smo dobili prosječnu duljinu repa $(\lambda/\mu)/(1-(\lambda/\mu))$ i prosječno vrijeme čekanja $1/(\mu-\lambda)$. Littleov zakon je, dakle, provjeren za taj slučaj. Imajmo, međutim, na umu da je to prosječna vrijednost u odnosu na stacionarnu raspodjelu. No pokazuje se da su ti prosjeci jednaki ergodičkim prosjecima za Markovljeve procese.

Promotrimo, konačno, važan posebni slučaj repa M/G/1, u kojem stranke dolaze po Poissonovom procesu intenziteta λ. Znamo da poslužitelj naizmjence prolazi kroz zauzeta i slobodna razdoblja. Neka je O_n trajanje n-tog razdoblja zauzetosti. Slobodna razdoblja imaju srednje trajanje $1/\lambda$. Udio vremena tijekom kojeg je poslužitelj slobodan je dan s

$$\frac{1/\lambda}{1/\lambda + \mathbb{E}(O_n)} \ . \tag{7.3.11}$$

S druge strane, Teorem 7.3.3 pokazuje da je taj udio jednak $1 - \lambda/\mu$. Zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(O_n) = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} \ . \tag{7.3.12}$$

Konačno, važno svojstvo repova M/G/1 je sljedeće.

Teorem 7.3.5 (Svojstvo PASTA)**.** *Neka je $\pi(n)$ udio vremena tijekom kojeg je rep duljine n, i neka je a_n asimptotski udio stranaka koje na dolasku nalaze rep duljine n. Tada je*

$$a_n = \pi(n) \; . \tag{7.3.13}$$

Skraćenica PASTA dolazi od engleskog "Poisson arrivals see time averages". To svojstvo ne mora vrijediti za vremena dolaska koja ne slijede Poissonovu raspodjelu.

7.4 Zadatci

Zadatak 7.1. Benzinska crpka ima samo jedan uređaj za punjenje. Vozila dolaze po Poissonovim procesu po stopi od 20 vozila na sat. Vrijeme punjenja je eksponencijalna slučajna varijabla s očekivanjem 2 minute.

1. Odredite stacionarnu raspodjelu broja vozila na crpki.
2. Odredite prosječno vrijeme čekanja do početka punjenja i ukupno vrijeme.
3. Koji udio vozila mora čekati prije početka punjenja? Koji udio mora čekati dulje od 2 minute?

Pretpostavimo sada da vozači koji na crpki zateknu 2 vozila odlaze bez točenja goriva.

4. Odredite stacionarnu raspodjelu broja vozila na crpki. Koja je vjerojatnost da će vozilo otići bez punjenja?
5. Odredite prosječna vremena čekanja i usluge.

Zadatak 7.2. Stranke pristižu u frizerski salon po Poissonovom procesu po stopi od 5 stranaka na sat. Radi samo jedan frizer i njegovo vrijeme usluge za pojedinu stranku je eksponencijalno s očekivanjem 15 minuta. Čekaonica ima samo dva stolca; ako stranka dođe dok su oba zauzeta, odlazi neuslužena.

1. Izračunajte stacionarnu raspodjelu.
2. Koja je vjerojatnost da će stranka morati čekati prije početka usluge?
3. Odredite prosječno vrijeme čekanja.
4. Koji je prosječni broj stranaka posluženih u jednom satu?
5. Pretpostavimo sada da imamo dva frizera od kojih svakom treba vrijeme za jednu stranku koje ima eksponencijalnu raspodjelu s očekivanjem pola sata. Izračunajte prosječni broj klijenata usluženih u jednom satu.

Zadatak 7.3. Pozivni centar osiguravajućeg zavoda prima u prosjeku 40 poziva na sat. Ima 3 operatera koji odgovaraju na pozive i trajanje poziva je eksponencijalno s očekivanjem 3 minute.

1. Koji je prosječni broj operatera koji su zauzeti?
2. Koja je vjerojatnost da će stranka morati čekati odgovor na poziv?

Zadatak 7.4. Čekaonica doktora H ima dva stolca. Pacijenti dolaze po Poissonovom procesu po stopi od 6 pacijenata na sat. Pacijenti koji nađu 3 stolice zauzete odlaze naći drugog liječnika. Trajanje konzultacija je eksponencijalno s očekivanjem 3 minute.

1. Koja je vjerojatnost da je čekaonica puna?
2. Izračunajte očekivano vrijeme čekanja pacijenta prije pregleda.
3. Koliko pacijenata liječnik prosječno pregleda na sat?

Zadatak 7.5. Thelma i Louise imaju frizerski salon čija čekaonica ima dva stolca. Svakoj od njih za uslužiti jednu stranku treba eksponencijalno vrijeme s očekivanjem 30 minuta. Stranke dolaze po Poissonovom procesu po stopi od 5 na sat. Ako su oba stolca u čekaonici zauzeta, odlaze neobavljena posla.

1. Odrediti stacionarnu raspodjelu procesa.
2. Koja je vjerojatnost da je čekaonica puna?
3. Koja je vjerojatnost da su obje frizerke zauzete? Da je samo jedna zauzeta? Da nijedna nije zauzeta?
4. Koje je srednje vrijeme čekanja stranaka?
5. Koji je udio vremena Louise zauzeta? Jeste li morali nešto posebno pretpostaviti kako biste dobili rezultat?

Zadatak 7.6. Madame Jamilah proriče sudbinu na sajmu u Patelin-sur-Loire. Stranke dolaze po Poissonovom procesu intenziteta 4 po satu, a trajanje konzultacije ime eksponencijalnu raspodjelu s očekivanjem od 10 minuta.

1. Pretpostavimo da red pred njenim šatorom može biti dugačak koliko god treba. Izračunajte
   (a) stacionarnu raspodjelu duljine repa;
   (b) prosječno vrijeme čekanja stranke;
   (c) prosječni broj stranaka po satu.
2. Uslijed problema s javnim redom i mirom, organizatori sajma zabranili su čekanje u redu izvan šatora, a u maloj čekaonici u šatoru ima mjesta za samo jednu stranku. Odredite
   (a) stacionarnu raspodjelu broja stranaka;
   (b) prosječno vrijeme čekanja stranke;
   (c) prosječni broj stranaka po satu.

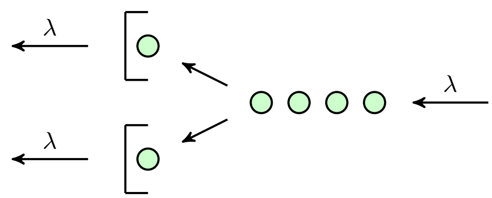
Zadatak 7.7. Promatramo M/M/2 rep koji uslužuje stranke po stopi μ, i M/M/1 rep koji uslužuje stranke po stopi 2μ. Za koji od tih repova je veća vjerojatnost da je poslužitelj zauzet?

Zadatak 7.8 (M/M/s/0 rep)**.** Pozivi dolaze na telefonsku centralu po Poissonovom procesu sa stopom λ. Centrala ima s raspoloživih linija, a poziv na jednoj liniji ima eksponencijalno trajanje s očekivanjem $1/\mu$. Poziv koji dolazi kad su sve linije zauzete biva odbijen.

1. Nađite stacionarnu raspodjelu.
2. Izračunajte vjerojatnost odbijanja poziva.

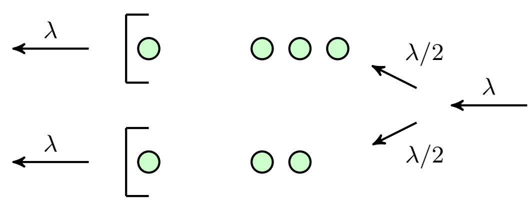
Zadatak 7.9. Cilj ovog zadatka je usporediti dva tipa repa s dva poslužitelja.

U prvom slučaju stranke formiraju jedan rep i biraju prvog poslužitelja koji bude slobodan (M/M/2 rep). Pretpostavimo da stranke stižu po Poissonovom procesu sa stopom λ, i da je vrijeme usluživanja eksponencijalno s parametrom $\mu = \lambda$.



1. Odredite stacionarnu raspodjelu π za ovaj rep.
2. Koja je vjerojatnost da stranka ne će morati čekati prije početka usluživanja?
3. Koje je prosječno vrijeme čekanja prije početka usluživanja?
4. Neka je S broj zauzetih poslužitelja. Odredite $\mathbb{E}_\pi(S)$.

U drugom slučaju imamo za svakog uslužitelja poseban rep. Stranke biraju svaki od njih s vjerojatnošću 1/2.



5. Objasnite zašto je, s gledišta stranke, ovaj slučaj ekvivalentan jednom M/M/1 repu sa stopom $\lambda/2$ i λ.
6. Odredite stacionarnu raspodjelu π za ovaj rep.
7. Koja je vjerojatnost da stranka ne će morati čekati prije početka usluživanja?
8. Koje je prosječno vrijem čekanja prije početka usluživanja?
9. Neka je S broj zauzetih poslužitelja. Odredite $\mathbb{E}_\pi(S)$.
10. Usporedite ova dva sustava.

Dodatak A

Rješenja nekih zadataka

Ovaj dodatak sadrži rješenja nekih zadataka. Dani odgovori služe samo za provjeru vaših rješenja i ne pružaju detaljne upute.

A.1 Zadatci iz Poglavlja 1

Zadatak 1.1

1. Numeriramo stanja ovim redom: Tête Rousse, Aiguille du Goûter, Nid d'Aigle, Mont Blanc.
$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 \\ q & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} , \qquad R = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} .$$
Fundamentalna matrica :
$$F = \frac{1}{1-pq} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} .$$
2. $\mathbb{P}_1\{X_\tau = 4\} = p^2/(1-pq)$.
3. $p^\star = (\sqrt{5}-1)/2$.
4. $\mathbb{E}_1(\tau) = (1+p^\star)/[1-p^\star(1-p^\star)] = (1+\sqrt{5})/[2(3-\sqrt{5})] \cong 2.118$.

Zadatak 1.2

1.
$$F = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 5/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 5/4 \end{pmatrix} .$$
2. $\mathbb{P}_1\{X_\tau = 4\} = 1/2$, $\mathbb{P}_2\{X_\tau = 4\} = 3/4 = \mathbb{P}_3\{X_\tau = 4\}$.
3. $\mathbb{E}_1(\tau) = 5/2$, $\mathbb{E}_2(\tau) = 9/4 = \mathbb{E}_3(\tau)$.

Zadatak 1.3

1. Numeriramo stanja : E, prednost A, prednost B, A pobjeđuje, B pobjeđuje,
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix} .$$

3. $\mathbb{P}_1\{A \text{ pobjeđuje}\} = 9/13$.
4. $\mathbb{E}_1(\tau) = 50/13$.

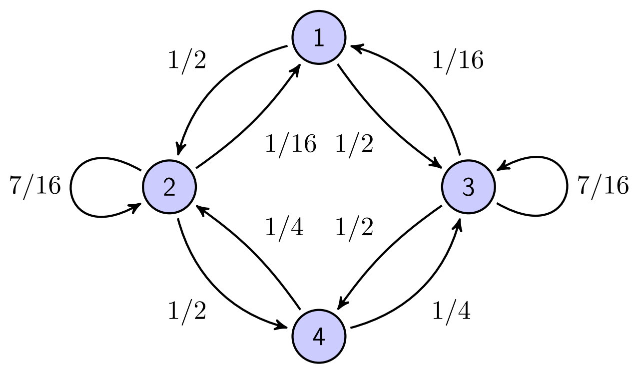
Zadatak 1.4

1. Matrica prijelaza u kanonskom obliku i fundamentalna matrica su dane s

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad F = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 33 & 16 & 15 \\ 12 & 32 & 12 \\ 15 & 16 & 33 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbb{E}_1(\tau) = 8/3$.
3. $\mathbb{P}_1\{X_\tau = 5\} = 3/8$.

Zadatak 1.5



2. P^2 ima samo pozitivne elemente, dakle je lanac regularan.
3. $\pi = \frac{1}{33}(1, 8, 8, 16)$.

Zadatak 1.6

1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Lanac je ireducibilan.
3. Lanac je regularan (svi elementi od P^4 su strogo pozitivni).
4. $\pi = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$.
5. Lanac je reverzibilan.

Zadatak 1.7

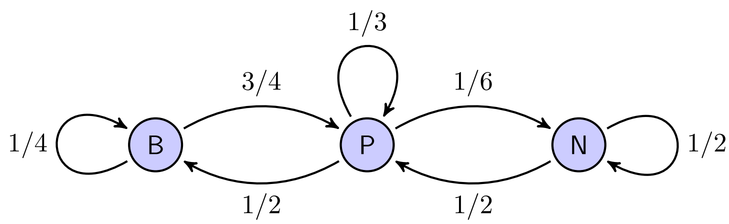
1.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Lanac je ireducibilan.

2. Lanac je regularan (svi elementi od P^2 su strogo pozitivni).
3. $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
4. Lanac nije reverzibilan. Na primjer, $\pi_1 p_{13} = 0 \neq \pi_3 p_{31}$.

Zadatak 1.8

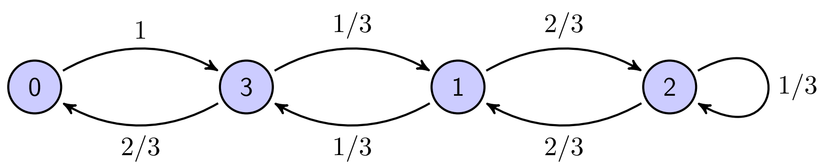


1. Lanac je regularan s matricom prijelaza (za stanja $\mathcal{X} = (\text{Lijepo}, \text{Kiša}, \text{Snijeg})$)

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

2. $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$.
3. $\mathbb{E}_{\text{Snijeg}}(\tau_{\text{Snijeg}}) = 6$.

Zadatak 1.9



1.
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2. Lanac je regularan.
3. $\pi = (\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11}, \frac{3}{11})$, dakle $\pi(0) = \frac{2}{11}$.
4. $\frac{1}{3} \cdot \pi(0) = \frac{2}{33}$.

Zadatak 1.10

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{za } j = i - 1 \;, \\ 1 - \frac{i}{N} & \text{za } j = i + 1 \;, \\ 0 & \text{inače} \;, \end{cases} \quad \text{dakle} \quad p_{ij} = \begin{cases} \frac{j+1}{N} & \text{za } i = j + 1 \;, \\ \frac{N-j+1}{N} & \text{za } i = j - 1 \;, \\ 0 & \text{inače} \;. \end{cases}$$

Neka je

$$\pi_i = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{i!(N-i)!} \;.$$

Onda je

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N}\pi_i p_{ij} &= \frac{N!}{2^N}\left[\frac{1}{(j-1)!(N-j+1)!}\frac{N-j+1}{N}+\frac{1}{(j+1)!(N-j-1)!}\frac{j+1}{N}\right]\\ &= \frac{N!}{N\cdot 2^N}\frac{j+N-j}{j!(N-j)!}=\pi_j\ .\end{aligned}$$

Zadatak 1.11

1. Lanac je
   - apsorbirajući za $p=0$ ili $q=0$;
   - ireducibilan neregularan za $p=q=1$;
   - regularan u ostali slučajevima.
2. Jezgra je generirana s $(p,-q)^T$; slika s $(1,1)^T$.
3. Izravnim se računaom dobije

   $$Q=\frac{1-(p+q)}{p+q}\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}$$

   zatim $Q^2=[1-(p+q)]Q$ i onda $Q^n=[1-(p+q)]^{n-1}Q$ za svaki $n\geqslant 2$.
4. $P^2=(Q+\Pi)^2=Q^2+\Pi Q+Q\Pi+\Pi^2=Q^2+\Pi$, pa je

   $$P^n=Q^n+\Pi=\frac{[1-(p+q)]^n}{p+q}\begin{pmatrix}p & -p\\ -q & q\end{pmatrix}+\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q & p\\ q & p\end{pmatrix}\ .$$

   Slijedi da za $0<p+q<2$ vrijedi $\lim_{n\to\infty}P^n=\Pi$.
   Ako je $p=q=1$, onda je $P^n=I$ za paran n i $P^n=P=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ za neparan n.
   Ako je $p=q=0$, matrica Q nije definirana, no $P=I$ pa i $P^n=I$ za svaki n.

Zadatak 1.12

Očekivano vrijeme povratka je $60/2=30$.

Zadatak 1.13

1. $420/3=140$.
2. $208/3$.
3. $280/7=40$. (Pazite, lovac se kreće samo po poljima iste boje!)

Zadatak 1.14

1. Stacionarna raspodjela je uniformna : $\pi_i=1/N\ \forall i$.
2. Lanac je reverzibilan ako i samo ako je $p=1/2$.

Zadatak 1.15

2. $\pi_i=N_i/\sum_{j\in V}N_j$ gdje je N_i broj susjeda vrha i.

A.2 Zadatci iz Poglavlja 2

Zadatak 2.2

1. Lanac je ireducibilan za $0 < p < 1$.
2. $\mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\} = p^{n-1}(1-p)$ (geometrijska raspodjela).
3. Zbrajajući geometrijski red provjerava se da je $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\} = 1$.
4. Vrijedi $\mathbb{E}_0(\tau_0) = \sum_{n \geqslant 0} np^{n-1}(1-p) = 1/(1-p) < \infty$.
5. Kako je $\mathbb{P}_0\{X_1 = 0\} > 0$ i $\mathbb{P}_0\{X_2 = 0\} > 0$, stanje 0 je aperiodično.
6. $\pi_0 = 1/\mathbb{E}_0(\tau_0) = 1 - p$.
7. $\pi_i = (1-p)p^i$ za svaki $i \geqslant 0$ (još jednom geometrijska raspodjela).

Zadatak 2.3

1. Lanac je ireducibilan ako za svaki $n \geqslant 0$, postoji $m \geqslant n$ takav da je $p_m > 0$.
2. $\mathbb{P}_0\{\tau_0 = n\} = p_{n-1}(1-p)$.
3. $\mathbb{P}_0\{\tau_0 < \infty\} = \sum_{n \geqslant 2} p_{n-1} = 1$.
4. Vrijedi $\mathbb{E}_0(\tau_0) = \sum_{n \geqslant 2} np_{n-1} = \sum_{n \geqslant 1}(n+1)p_n = \mathbb{E}(L) + 1 < \infty$.
5. Dovoljno je NZD$\{k\colon p_k > 0\} = 1$.
6. $\pi_0 = 1/(\mathbb{E}(L) + 1)$.
7. $\pi_1 = \pi_0$ i $\pi_i = (1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_{i-1})\pi_0$ za svaki $i \geqslant 2$.

Zadatak 2.4

1. Lanac je ireducibilan.
2. $\mathbb{P}_1\{\tau_1 = 2n\} = 2^{-n}$ dakle je 1 povratno.
3. $\mathbb{E}_1(\tau_1) = 4$ dakle je 1 pozitivno povratno.
4. Stanje 1 nije aperiodično, ima period 2.
5. $\pi_1 = 1/4$.
6. $\pi_i = 2^{-(|i|+1)}$ za svaki $i \neq 0$.

Zadatak 2.5

1. $p(0) = 0$ i $p(N) = 1$.
7. $p(i) = i/N$ za $i = 0, 1, \dots N$.

Zadatak 2.6

2. $f(0) = f(N) = 0$.
7. $f(i) = i(N - i)$ za $i = 0, 1, \dots N$.

Zadatak 2.7

1. $h(0) = 1$ jer je $\tau_0 = 1$.
2. $h(i) = 1$ za svaki i.
6. $p\alpha^2 - \alpha + 1 - p = 0$ dakle je $\alpha \in \{1, (1-p)/p\}$.
7. Kada je $p < 1/2$, $\alpha = 1$ je jedino dopustivo rješenje, što daje $h(i) = 1\ \forall i$.
   Kada $p > 1/2$, dva rješenja $\alpha \in \{1, (1-p)/p\}$ mogu biti vjerojatnosti. Može se pokazati da je $\alpha = (1-p)/p$ ispravno rješenje, dakle je $h(i) = [(1-p)/p]^i$.

Zadatak 2.8

1. Lanac je ireducibilan za $0 < p < 1$.
2. Lanac je aperiodičan.
3. $\alpha_n = (p/(1-p))^n \alpha_0$.
4. Mora biti $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n < \infty$, dakle $p < 1/2$. U tom slučaju dobivamo

$$\pi_n = \frac{\alpha_n}{\sum_{m \geqslant 0} \alpha_m} = \frac{1-2p}{1-p} \left(\frac{p}{1-p} \right)^n .$$

5. Lanac je pozitivno povratan za $p < 1/2$.
6. $\mathbb{E}_0(\tau_0) = 1/\pi_0 = (1-p)/(1-2p)$.
7. Očekivani položaj je

$$\mathbb{E}_\pi(X) = \sum_{n \geqslant 0} n\pi_n = \frac{p}{1-2p} .$$

Zadatak 2.9

1. $f(0, \lambda) = 0$ i $f(N, \lambda) = 1$.
4. $\cosh(c) = \mathrm{e}^\lambda$.
5. $a = -b = 2/\sinh(cN)$, i onda

$$f(i, \lambda) = \frac{\sinh(ci)}{\sinh(cN)} .$$

6. Vrijedi

$$f(i, \lambda) = \frac{i}{N} - \frac{i(N^2 - i^2)}{3N} \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) ,$$

pa onda imamo $\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} = i/N$ i $\mathbb{E}_i(\tau 1_{\{X_\tau = N\}}) = i(N^2 - i^2)/(3N)$.

Zadatak 2.10

1. Lanac je ireducibilan za $0 < p < 1$.
2. Lanac nije aperiodičan (period mu je 2).
3.

$$\mathbb{P}_0\{X_{2n} = 0\} = p^n (1-p)^n \binom{2n}{n}$$

4.

$$\mathbb{P}_0\{X_{2n} = 0\} \simeq \frac{\big(4p(1-p)\big)^n}{\sqrt{\pi n}} .$$

Lanac je prolazan za $p \neq 1/2$, povratan za $p = 1/2$.

6. Y_n je prolazan za $p > 1/2$.
7. Y_n ima stacionarnu raspodjelu pa je pozitivno povratan ako i samo ako je $p < 1/2$.
8. Y_n nul-povratan ako je $p = 1/2$.

Zadatak 2.11

1. $f(0) = 0$ i $f(N) = 1$.
3. $z_+ = 1$ i $z_- = \rho$.

4. $a = 1/(1-\rho^N) = -b$, dakle

$$\mathbb{P}_i\{X_\tau = N\} = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N} .$$

6. $\gamma = 1/(1-2p)$.
7. $a = -N/((1-2p)(1-\rho^N)) = -b$, dakle

$$\mathbb{E}_i(\tau) = \frac{N}{1-2p}\left[\frac{i}{N} - \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}\right] .$$

A.3 Zadatci iz Poglavlja 4

Zadatak 4.1

1. Bernoullijeva: $G_X(z) = 1 - p + pz$.
2. Binomna: $G_X(z) = (1 - p + pz)^n$.
3. Poissonova: $G_X(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$.
4. Geometrijska: $G_X(z) = pz/[1-(1-p)z]$.

Zadatak 4.2

1. Bernoullijeva: $\mathbb{E}(X) = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
2. Binomna: $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
3. Poissonova: $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.
4. Geometrijska: $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

Zadatak 4.4

1. $\mathbb{E}(z^{S_n}) = G_X(z)^n$.
3. $G_S(z) = \mathrm{e}^{\lambda p(z-1)}$ dakle S ima Poissonovu raspodjelu s parametrom $q\lambda$.

Zadatak 4.5

2. $\mathbb{P}\{Y \leqslant y\} = \mathbb{P}\{U \leqslant \varphi^{-1}(y)\} = \varphi^{-1}(y)$.
3. $\varphi(u) = -\log(1-u)/\lambda$.

A.4 Zadatci iz Poglavlja 5

Zadatak 5.1

1. 1/9.
2. 5/9.

Zadatak 5.2

1. $\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-4}$.
2. e^{-5}.
3. 1/4.
4. 3/4.

Zadatak 5.3

1. e^{-4}.
2. Poslije 1 minute.
3. $(2/3)^3 = 8/27$.
4. $8\,\mathrm{e}^{-4}/(1-\mathrm{e}^{-2})$.

Zadatak 5.4

1. 5.
2. $(37/2)\,\mathrm{e}^{-5}$.
3. $1/16$ i $1/4$.
4. $1/4$.

Zadatak 5.5

1. Gamma raspodjela s parametrom $(n, 2)$.
2. Raspodjela od $(X_n - n/2)/\sqrt{n/4}$ je približno standardna normalna raspodjela.
3. $T \cong 13.59$ minuta.

Zadatak 5.6

1. $\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$.
2. $\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}(\lambda t)^n/n!$.
3. $\mathrm{e}^{-\lambda s}$.
4. $1/\lambda$, dakle jednako očekivanom vremenu između prolaza.

Zadatak 5.7

To je Poissonov proces intanziteta $\lambda + \mu$.

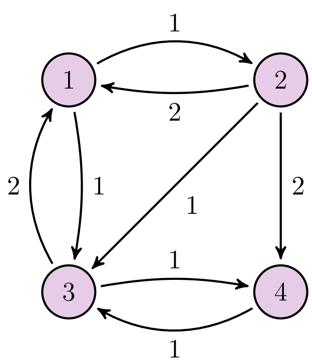
Zadatak 5.8

1. N_t ima Poissonovu raspodjelu s parametrom λt.
2. Vrijedi
$$\mathbb{P}\{M_t = l | N_t = k\} = \frac{1}{2^k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\,.$$
3. M_t ima Poissonovu raspodjelu s parametrom $\lambda t/2$.
4. Intenzitet od Y_n je $\lambda/2$.
5. Y_n je Poissonov proces intenziteta $q\lambda$.

A.5 Zadatci iz Poglavlja 6

Zadatak 6.1

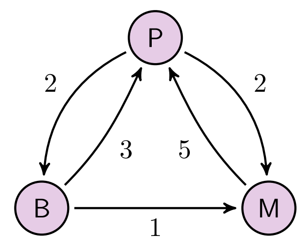
1.



2. $\pi = (\frac{5}{16}, \frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16})$.
3. Proces je ireducibilan.
4. Proces nije reverzibilan.

Zadatak 6.2

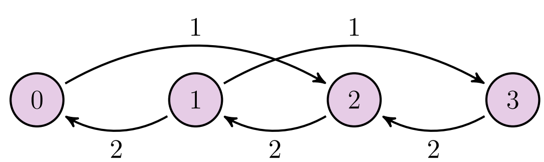
1. $$L = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} .$$



2. $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
3. 12 putovanja godišnje.

Zadatak 6.3

1.



$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} .$$

2. $\pi = (0.4, 0.2, 0.3, 0.1)$.
3. 1.2 računala mjesečno.

Zadatak 6.4

1. $\pi = \frac{1}{105}(100, 1, 4)$.
2. Udio vremena je $\frac{100}{105} = \frac{20}{21}$.
3. Općenito,

$$\pi(0) = \frac{1}{1 + \sum_j \mu_j/\lambda_j} \qquad \text{i} \qquad \pi(i) = \frac{\mu_i/\lambda_i}{1 + \sum_j \mu_j/\lambda_j} \quad \text{za } i = 1, \dots, N .$$

Zadatak 6.5

Udjeli vremena su jednaki vrijednostima π, koje se izražavaju kao u prethodnom zadatku, opći slučaj.

Zadatak 6.6

1. $\pi = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$.
2. 50/7 stranaka na sat.

Zadatak 6.7

1. Za $N = 1$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu & \mu \end{pmatrix} , \qquad L^n = (-\mu)^{n-1} L \quad \forall n > 1 , \qquad P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mu t} & \mathrm{e}^{-\mu t} \end{pmatrix} .$$

2. Za $N = 2$,

$$\begin{aligned} P_t(2,2) &= \mathrm{e}^{-\mu t} , \\ P_t(2,1) &= \mu t \, \mathrm{e}^{-\mu t} , \\ P_t(2,0) &= 1 - (1 + \mu t) \, \mathrm{e}^{-\mu t} . \end{aligned}$$

3. Za proizvoljan N,

$$\begin{aligned} P_t(N,j) &= \frac{(\mu t)^{N-j}}{(N-j)!} \, \mathrm{e}^{-\mu t} , & j = 1, \dots, N , \\ P_t(N,0) &= 1 - \left(1 + \mu t + \dots + \frac{(\mu t)^{N-1}}{(N-1)!} \right) \mathrm{e}^{-\mu t} . \end{aligned}$$

4. Vrijedi

$$\mathbb{E}(Y_t) = \sum_{j=0}^{N} (N-j) P_t(N,j) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\mu t)^k}{(k-1)!} \, \mathrm{e}^{-\mu t} + N P_t(N,0) ,$$

što povlači

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}(Y_t) = \mu t .$$

Zadatak 6.8

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mu t} & \mathrm{e}^{-\mu t} & 0 & \dots & \dots \\ 1 - (1 + \mu t) \, \mathrm{e}^{-\mu t} & \mu t \, \mathrm{e}^{-\mu t} & \mathrm{e}^{-\mu t} & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Zadatak 6.9

1.

$$L = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix} .$$

2. $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
3. $$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad R^3 = I ,$$

   pa je $R^n = R^{n \pmod 3}$.
4. $$\mathrm{e}^{\lambda t R} = \begin{pmatrix} f(\lambda t) & f''(\lambda t) & f'(\lambda t) \\ f'(\lambda t) & f(\lambda t) & f''(\lambda t) \\ f''(\lambda t) & f'(\lambda t) & f(\lambda t) \end{pmatrix}$$

   i $P_t = \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{\lambda t R}$.

Zadatak 6.10

1. $$L = \begin{pmatrix} -N\lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \mu & -\mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & 0 & -\mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \mu & 0 & 0 & \dots & -\mu \end{pmatrix} .$$
2. $$\pi = \frac{1}{\mu + N\lambda}(\mu, \lambda, \dots, \lambda) .$$
3. Sustav je reverzibilan.
4. $$P_t = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \mu + \lambda \, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda - \lambda \, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\ \mu - \mu \, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda + \mu \, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} .$$
5. Za $j = 0$,

   $$P_t(0,0) = \frac{1 + N \, \mathrm{e}^{-(N+1)\mu t}}{N+1} ,$$
   $$Q_t(0) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-(N+1)\mu t}}{N+1} ,$$

   i za $j \neq 0$

   $$P_t(0,j) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-(N+1)\mu t}}{N+1} ,$$
   $$Q_t(j) = \frac{1 + \frac{1}{N} \, \mathrm{e}^{-(N+1)\mu t}}{N+1} .$$
6. Za svaki $i \neq 0$, $P_t(i,0) = Q_t(0)$ i

   $$P_t(i,j) = \left(\delta_{ij} - \frac{1}{N}\right) \mathrm{e}^{-\mu t} + Q_t(j)$$

   za svaki $j \neq 0$.
7. $\lim_{t\to\infty} P_t(i,j) = \dfrac{1}{N+1}$ za sve i, j.

A.6 Zadatci iz Poglavlja 7

Zadatak 7.1

1. $\pi(n) = (1/3)(2/3)^n$.
2. 4 minute i 6 minuta.
3. $2/3$ i $(2/3)\,\mathrm{e}^{-1/3} \cong 0.48$.
4. $\pi = \frac{1}{19}(9, 6, 4)$. Vjerojatnost odlaska je $4/19$.
5. $28/19 \cong 1.47$ minuta i $66/19 \cong 3.47$ minuta.

Zadatak 7.2

1. $\pi(0) = 64/369$ i $\pi(n) = (5/4)^n \pi(0)$.
2. $305/369 \cong 0.827$.
3. $\pi(0) \cdot 655/256 \cong 0.444$ sata $= 26.6$ minuta.
4. $1220/369 \cong 3.31$ stranaka na sat.
5. $4 \cdot 1685/1973 \cong 3.41$ stranaka na sat.

Zadatak 7.3

1. $47/24 \cong 1.958$ zauzetih operatera.
2. $11/24 \cong 0.458$.

Zadatak 7.4

1. $\pi(3) = 27/65 \cong 0.415$.
2. $387/13 \cong 29.77$ minuta.
3. $228/65 \cong 3.5$ stranaka na sat.

Zadatak 7.5

1. $\pi(0) = 625/1364\,(1, 2/5, 8/25, 32/125, 128/625)$.
2. $128/1363 \cong 9.39\%$.
3. 35.8%, 18.34% i 45.85%.
4. $(904/1363) \cdot 15$ minuta $\cong 9.95$ minuta.
5. $613/1363 \cong 44.97\%$.

Zadatak 7.6

1. (a) $\pi_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (b) $\mathbb{E}_\pi(W) = \frac{1}{3}$ sata $= 20$ minuta.
   (c) 4 stranke na sat.
2. (a) $\pi = \frac{1}{19}(9, 6, 4)$.
   (b) $\mathbb{E}_\pi(W) = \frac{140}{19} \cong 7.37$ minuta.
   (c) $\frac{60}{19} \cong 3.16$ stranaka na sat.

Zadatak 7.7

Vjerojatnost je dvostruko veća za lanac M/M/1.

Zadatak 7.8

1.
$$\pi(n) = \frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}\,, \qquad n = 0, \ldots, s\,.$$

2. Poziv se odbija s vjerojatnošću $\pi(s)$.

Zadatak 7.9

1. $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \ldots\right)$.
2. $\mathbb{P}_\pi\{W = 0\} = 2/3$.
3. $\mathbb{E}_\pi(W) = 1/(3\lambda)$.
4. $\mathbb{E}_\pi(S) = 1$.
6. $\pi(n, m) = 2^{-(n+m+2)}$, gdje su n i m broj stranaka u svakom repu.
7. $\mathbb{P}_\pi\{W = 0\} = 1/2$.
8. $\mathbb{E}_\pi(W) = 2/\lambda$.
9. $\mathbb{E}_\pi(S) = 5/4$.
10. S gledišta stranaka, prvi sustav je bolji: prosječno vrijeme čekanja je kraće i vjerojatnost da će biti odmah posluženi je veća. Drugi sustav daje nešto veću stopu zauzetosti.

Bibliografija i izvori nadahnuća

- I. Adan, J. Resing, *Queueing Theory*, notes de cours, Eindhoven University of Technology (2002)
- E. Bolthausen, *Einführung in die Stochastik*, notes de cours, Université de Zurich (2007)
- P. Bougerol, *Processus de Sauts et Files d'Attente*, notes de cours, Université Pierre et Marie Curie (2002)
- R. Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, 1999.
- C. M. Grinstead, J. L. Snell, *Introduction to Probability*, web book,
  `http://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/prob/prob.pdf`
- J. Lacroix, *Chaînes de Markov et Processus de Poisson*, notes de cours, Université Pierre et Marie Curie (2002)