Nikola Sandrić
Kristina Ana Škreb

Stohastički procesi

Zbirka zadataka

Građevinski fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Sadržaj

Predgovor

Poštovani čitatelji, pred vama se nalazi nastavni materijal za kolegij *Stohastički procesi* koji se predaje u prvom semestru Diplomskog studija na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Cilj kolegija, pa samim time i ove zbirke zdataka, je upoznati studente nematematičkih fakulteta s osnovnim pojmovima teorije slučajnih procesa. Sam izbor tema (zadataka) obrađenih u zbirci prati sadržaj kolegija koji se predaje prema referenci [1].

Zbirka počinje zadacima vezanim za Markovljeve lance s konačnim skupom stanja. U prvom poglavlju obrađuje se Markovljevo svojstvo i Chapman-Kolmogorovljeva jednakost. Drugo poglavlje posvećeno je apsorpcijskim vjerojatnostima, dok u trećem i četvrtom poglavlju diskutira se klasifikacija stanja (ireducibilnost, povratnost i prolaznost) i periodičnost. Peto i šesto poglavlje posvećeni su stacionarnosti i reverzibilnosti Markovljevih lanaca s konačnim skupom stanja. U sedmom poglavlju promatraju se Markovljevi lanci s prebrojivim skupom stanja, s naglasakom na procese rađanja i umiranja. Osmo poglavlje posvećeno je Markovljevim procesima (s konačnim ili prebrojivim skupom stanja). U devetom poglavlju obrađen je secijali slučaj Markovljevog procesa – Poissonov proces. Konačno, u zadnjem, desetom poglavlju primjenjuju se prethodno naučeni pojmovi i tehnike u teoriji repova.

Na kraju zbirke dan je pregled literature koji je korišten u pripremi ovog materijala. Također, isti može poslužiti zainteresiranom čitatelju u pronalasku dodatnih zadataka za vježbu, ali i u produbljivanju teorijskog znanja o temama obrađenim u ovoj zbirci.

U Zagrebu, 2016.

Nikola Sandrić
Kristina Ana Škreb

Poglavlje 1

Markovljevi lanci

Neka je $\mathbb{T} \neq \emptyset$ vremenski skup indeksa (npr. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ili podskup nekog od tih skupova) i neka je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ familija slučajnih varijabli definirana na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Familiju $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ zovemo **stohastičkim procesom**. On opisuje dinamiku neke slučajne pojave.

Za fiksni $\omega \in \Omega$, funkciju $t \mapsto X_t(\omega)$ nazivamo **trajektorijom procesa** $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. Za razliku od klasičnih funkcija kod kojih u pravilu znamo izračunati njihovu vrijednost u pojedinoj točki domene, to nije slučaj sa slučajnim varijablama pa tako niti stohastičkim procesima. Jedino što možemo je izračunati vjerojatnost da X_t, $t \in \mathbb{T}$, poprima neku vrijednost ili vrijednosti u nekom skupu.

U ovom kolegiju promatrat ćemo samo slučajeve kad je $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ ili $\mathbb{R}_+$. Nećemo se baviti teorijom generalnih stohastičkih procesa, već samo specijalnim klasama - **Markovljevim lancima i Markovljevim procesima**. Termin lanac koristimo kad je $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$, a termin proces kad je $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$.

Definicija 1.1. Markovljev lanac (proces) je stohastički proces koji zadovoljava tzv. **Markovljevo svojstvo**: ponašanje procesa u (neposrednoj) budućnosti i ponašanje u prošlosti uvjetno su nezavisna uz danu sadašnjost.

Drugim riječima, da bismo predvidjeli buduće ponašanje procesa, dovoljno je poznavati trenutno ponašanje (prošlost je irelevantna).

Markovljeve lance (procese) možemo klasificirati prema skupu stanja $S \subseteq \mathbb{R}$ ($R(X_t) \subseteq S, \forall t \in \mathbb{T}$). Taj skup može biti **diskretan** (konačan ili prebrojiv) ili **opći** (neprebrojiv). U ovom kolegiju bavit ćemo se samo s Markovljevim lancima (procesima) s diskretnim skupom stanja. Analiza Markovljevih lanaca (procesa) s općim skupom stanja analitički je znatno zahtjevnija.

Markovljevo svojstvo možemo zapisati na sljedeći način: za svaki $n \in \mathbb{N}$, sva stanja $s_1, \dots, s_n \in S$ i sve vremenske trenutke $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$, $0 \leqslant t_1 <$

$\cdots < t_n$, vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = s_n | X_{t_{n-1}} = s_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = s_1) = \mathbb{P}(X_{t_n} = s_n | X_{t_{n-1}} = s_{n-1}).$$

Nadalje, zbog lakše analize ovih modela, pretpostavit ćemo da radimo samo s **vremenski homogenim** Markovljevim lancima (procesima), tj.

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = s_n | X_{t_{n-1}} = s_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n - t_{n-1}} = s_n | X_0 = s_{n-1}).$$

U nastavku pretpostavljamo da je skup S konačan. Uočimo da Markovljevo svojstvo uz vremensku homogenost onda prelazi u

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i). \end{aligned}$$

Dakle, ponašanje lanca je u potpunosti određeno raspodjelom slučajne varijable X_0 (početna raspodjela lanca) i raspodjelama prijelaza iz jednog stanja u neko drugo stanje u jednom vremenskom koraku. Preciznije, neka je $\{\lambda_i\}_{i \in S}$ raspodjela od X_0, tj. $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$, $i \in S$, (λ je početna raspodjela od $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$), i za $i, j \in S$ označimo $p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Broj p_{ij} predstavlja vjerojanost prijelaza lanca $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ iz stanja i u stanje j u jednom koraku. Koristeći prethodno uvedene oznake, ponašanje lanca možemo zapisati i matrično kao $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$. Matricu P nazivamo **matricom prijelaza** lanca $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Primjer 1.1. Neka je skup stanja lanca $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dan sa $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nadalje, neka je $p_{i,i+1} = 0.3$ i $p_{i,i-1} = 0.7$ za $0 < i < 4$ te $p_{0,0} = 1$ i $p_{4,4} = 1$. Tada je pripadna matrica prijelaza dana sa

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Zadatak 1.1. Pojednostavnite sljedeći izraz:

$$\mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5, X_4 = i_4 | X_3 = i_3, X_2 = i_2).$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5, X_4 = i_4 | X_3 = i_3, X_2 = i_2) \\
&= \mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5, X_4 = i_4 | X_3 = i_3) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5, X_4 = i_4, X_3 = i_3)}{\mathbb{P}(X_3 = i_3)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_4 = i_4, X_3 = i_3)}{\mathbb{P}(X_4 = i_4, X_3 = i_3)} \\
&= \mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5 | X_4 = i_4, X_3 = i_3) \cdot \mathbb{P}(X_4 = i_4 | X_3 = i_3) \\
&= \mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5 | X_4 = i_4) \cdot p_{i_3 i_4} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_6 = i_6, X_5 = i_5, X_4 = i_4)}{\mathbb{P}(X_4 = i_4)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_5 = i_5, X_4 = i_4)}{\mathbb{P}(X_5 = i_5, X_4 = i_4)} \cdot p_{i_3 i_4} \\
&= \mathbb{P}(X_6 = i_6 | X_5 = i_5) \cdot \mathbb{P}(X_5 = i_5 | X_4 = i_4) \cdot p_{i_3 i_4} \\
&= p_{i_3 i_4} p_{i_4 i_5} p_{i_5 i_6}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Zadatak 1.2. Neki stroj ima tri kritična dijela koja se mogu pokvariti. Međutim, sve dok barem dva dijela funkcioniraju stroj može raditi. Kad se dva dijela pokvare, zamjene se i stroj može sutradan natrag u pogon. Pretpostavimo da se nikoja dva dijela ne mogu pokvariti isti dan i da su vjerojatnosti kvarova dijelova 1, 2, 3, redom, 0.01, 0.02 i 0.04. Napišite matricu prijelaza pripadnog lanca.

Rješenje. Skup stanja je $S = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$, a matrica prijelaza:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 13 \\ 23 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 12 & 13 & 23 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.93 & 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.94 & 0 & 0 & 0.02 & 0.04 & 0 \\
0 & 0 & 0.95 & 0 & 0.01 & 0 & 0.04 \\
0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0.01 & 0.02 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.$$

Npr. $p_{0,0} = \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0) = 1 - (0.01 + 0.02 + 0.04) = 0.93$ je vjerojatnost da se niti jedan dio nije pokvario u prvom danu.

Izračunajmo sad $\mathbb{P}(X_3 = 23, X_2 = 2, X_1 = 2)$. Prirodno je za prepostaviti da je $\lambda_0 = 1$ (krećemo s 0 pokvarenih dijelova) pa je

$$\mathbb{P}(X_3 = 23, X_2 = 2, X_1 = 2) = p_{0,2} p_{2,2} p_{2,23} = 0.00076. \qquad \square$$

Zadatak 1.3. Dva lovca, L_1 i L_2, gađaju glinene golubove. Pobjednik je onaj tko prvi napravi dva pogotka razlike. Poznate su sljedeće vjerojatnosti u igri:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{“}L_1 \text{ pogodio, a } L_2 \text{ nije”}) = 0.25\\
&\mathbb{P}(\text{“}L_2 \text{ pogodio, a } L_1 \text{ nije”}) = 0.2\\
&\mathbb{P}(\text{“}L_1 \text{ i } L_2 \text{ su oba pogodila ili oba promašila”}) = 0.55.
\end{aligned}$$

Opišite pripadni lanac.

Rješenje. Skup stanja je $S = \{0, L_1^1, L_2^1, L_1^2, L_2^2\}$, gdje je:
0 - “oba lovca su pogodila ili promašila, tj. neriješeno je‘”
L_1^1 - “vodi lovac L_1 za jedan pogodak”
L_2^1 - “vodi lovac L_2 za jedan pogodak”
L_1^2 - “pobjeda lovca L_1”
L_2^2 - “pobjeda lovca L_2”.

Matrica prijelaza lanca je onda

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ L_1^1 \\ L_2^1 \\ L_1^2 \\ L_2^2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & L_1^1 & L_2^1 & L_1^2 & L_2^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.55 & 0.25 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.55 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.55 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Izračunajmo sada $\mathbb{P}(X_3 = L_2^1, X_2 = L_1^2, X_1 = L_1^1, X_0 = 0)$. Opet je prirodno za pretpostaviti da je $\lambda_0 = 1$ pa dobivamo

$$\mathbb{P}(X_3 = L_2^1, X_2 = L_1^2, X_1 = L_1^1, X_0 = 0) = p_{0,L_1^1} p_{L_1^1,L_1^2} p_{L_1^2,L_2^1} = 0. \qquad \square$$

Vezano uz prethodni zadatak, prirodno se nameće pitanje kolika je vjerojatnost da će u trenutku 3 pobijediti L_2. Za odgovor na ovo pitanje trebaju nam prijelazne vjerojatnosti višeg reda.

Neka je P matrica prijelaza lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Pogledajmo matricu P^2 i označimo njene elemente s $p_{ij}^{(2)}$, $i, j \in S$. Znamo da je

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}.$$

Dakle, broj $p_{ij}^{(2)}$ predstavlja vjerojatnost da je lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ došao iz stanja i u stanje j u dva koraka. Analogno, elementi matrice P^{n+1} su dani s

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k_1\in S}\sum_{k_2\in S}\cdots\sum_{k_n\in S} p_{ik_1} p_{k_1k_2}\cdots p_{k_nj}.$$

Dakle, brojevi $p_{ij}^{(n+1)}$ predstavljaju vjerojatnost prelaska lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ iz stanja i u stanje j u $(n+1)$ koraka. Iz gornjih razmatranja zaključujemo tzv. **Chapman-Kolmogorovljevu jednakost**: za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

Drugim rječima, vjerojatnost prijelaza lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ iz stanja i u stanje j u $(m+n)$ koraka jednaka je vjerojatnosti prijelaza lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ iz stanja i u neko stanje k u m koraka i onda iz stanja k u stanje j u preostalih n koraka.

Kao posljedicu Champan-Kolmogorovljeve jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_n = i) &= \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(m)} \\ \mathbb{P}(X_m = j) &= \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_m = j | X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) \\ &= \sum_{i\in S} \lambda_i p_{ij}^{(m)}.\end{aligned}$$

Odgovor na pitanje iz prethodnog zadatka glasi

$$\mathbb{P}(X_3 = L_2^2) = \sum_{i\in S} \lambda_i p_{iL_2^2}^{(3)} = p_{0L_2^2}^{(3)} \quad \text{(ovdje smo pretpostavili da je } \lambda_0 = 1).$$

Zadatak 1.4. Neka Markovljev lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ predstavlja socijalni status (klasu) n-te generacije neke obitelji. Socijalne klase su dane na sljedeći način:

$$1 - \text{niža} \qquad 2 - \text{srednja} \qquad 3 - \text{viša}.$$

Promjene klasa dane su matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Kolika je vjerojatnost da ste vi u višoj klasi, a vaša djeca u nižoj klasi ako znate da su vaši roditelji bili u srednjoj klasi?

(b) Kolika je vjerojatnost da su vaša djeca u nižoj klasi ako znate da su vaši roditelji u srednjoj klasi?

Rješenje. (a) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 3 | X_0 = 2) = p_{23}p_{31} = 0.04.$

(b) $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 2) = p_{21}^{(2)} = p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} = 0.4.$ □

Zadatak 1.5. Statistički podatci iz 1990. g. pokazuju da 88% stanovnika grada Zagreba živi u vlastitom stanu, a ostali unajmljuju stan. U sljedećoj dekadi, 3% vlasnika stanova postaju unajmitelji i 8% unajmitelja postaju vlasnici stanova. Odredite postotak vlasnika stanova u 2000. g. i u 2010. g.

Rješenje. Pripadna matrica prijelaza lanca koji opisuje dani problem dana je s

$$P = \begin{array}{c} \\ V \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.08 & 0.92 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dakle, uz početnu raspodjelu $\lambda = (0.88, 0.12)$, u 2000. g. traženi podatci su

$$\lambda P = (0.8632, 0.1368),$$

a za 2010. g. su

$$\lambda P^2 = (0.84825, 0.15175).$$ □

Zadatak 1.6. Pretpostavimo da vjerojatnost da danas kiši iznosi 0.3 ako je jučer bilo sunčano i prekjučer bilo sunčano, odnosno 0.6 ako je ili jučer ili prekjučer kišilo. Neka V_n označava vrijeme u danu n, K stanje za kišu, a S za sunce. $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nije Markovljev lanac, ali $X_n = (V_{n-1}, V_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, je lanac s prostorom stanja $S = \{KK, KS, SK, SS\}$.

(a) Nađite matricu prijelaza lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Izračunajte vjerojatnost da će kišiti u srijedu ako nije kišilo ni u nedjelju ni u ponedjeljak.

Rješenje. (a) Tražena matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c} \\ KK \\ KS \\ SK \\ SS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} KK & KS & SK & SS \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Vjerojatnost da će kišiti u srijedu ako nije kišilo ni u nedjelju ni u ponedjeljak je

$$p_{SS,KK}^{(2)} + p_{SS,SK}^{(2)} = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.39.$$ □

Zadatak 1.7. Vozač taksija vozi na relaciji aerodrom A i dva hotela B i C prema sljedećim pravilima. Ako se nalazi na aerodromu, onda vozi prema hotelima s jednakom vjerojatnošću. Ako se nalazi u hotelu, onda se vraća na aerodrom s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$ i ide u drugi hotel s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$. Pretpostavimo da vozač kreće s aerodroma. Izračunajte vjerojatnost svih mogućih odredišta u trenutku $n = 2$ i vjerojatnost da se nalazi u hotelu B u trenutku $n = 3$.

Rješenje. Pripadna matrica prijelaza je dana s

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nadalje,

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.125 & 0.125 \\ 0.1875 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.40625 & 0.40625 \\ 0.609375 & 0.1875 & 0.203125 \\ 0.609375 & 0.203125 & 0.1875 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dakle,

$$p_{AA}^{(2)} = 0.75, \quad p_{AB}^{(2)} = 0.125 \quad \text{i} \quad p_{AC}^{(2)} = 0.125.$$

Vjerojatnost da se u trenutku $t = 3$ nalazimo u hotelu B je

$$p_{AB}^{(3)} = 0.40625. \qquad \square$$

Često će nas zanimati prijelazne vjerojatnosti viših redova, tj. P^n i $p_{ij}^{(n)}$ za velike n. Naravno, to uvijek možemo izračunati izravno, ali to baš i nije uvijek zgodno. Opisat ćemo jednostavniju proceduru. Pretpostavimo da S ima m elemenata i da želimo izračunati $p_{ij}^{(n)}$.

(i) Izračunamo svojstvene vrijednosti matrice P. Neka su to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

(ii) Ako su sve svojstvene vrijednosti različite, onda $p_{ij}^{(n)}$ tražimo u obliku

$$p_{ij}^{(n)} = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + \cdots + a_m\lambda_m^n,$$

gdje su $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ i oni ovise o i i j. Ako se neka svojstvena vrijednost, recimo λ_1, ponavlja k_1 puta, onda koeficijent uz λ_1^n postaje

$$a_{1,0} + a_{1,1}n + \cdots + a_{1,k_1-1}n^{k_1-1}.$$

Zadatak 1.8. Neka je matrica prijelaza nekog Markovljevog lanca dana s

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array},$$

gdje su $0 \leqslant a, b \leqslant 1$. Izračunajte P^n.

Rješenje. Tražimo svojstvene vrijednosti.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - P) &= \begin{vmatrix} \lambda + a - 1 & -a \\ -b & \lambda + b - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + a - 1)(\lambda + b - 1) - ab \\ &= \lambda^2 + \lambda(a + b - 2) - a - b + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Iz čega slijedi da je

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= \frac{-a - b + 2 \pm \sqrt{(a + b - 2)^2 + 4a + 4b - 4}}{2} \\ &= \frac{-a - b + 2 \pm (a + b)}{2}, \end{aligned}$$

tj. $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1 - a - b$. Dakle, $p_{11}^{(n)} = a_1 1^n + a_2(1 - a - b)^n$. Sada iz sustava

$$\begin{aligned} 1 = p_{11}^{(0)} &= a_1 + a_2 \\ 1 - a = p_{11}^{(1)} &= a_1 + (1 - a - b)a_2 \end{aligned}$$

dobijemo da je $a_1 = \frac{b}{a+b}$ i $a_2 = \frac{a}{a+b}$. Konačno,

$$p_{11}^{(n)} = \frac{b}{a + b} + \frac{a}{a + b}(1 - a - b)^n.$$

Analogno odredimo $p_{12}^{(n)}$, $p_{21}^{(n)}$ i $p_{22}^{(n)}$. □

Zadatak 1.9. Neka je matrica prijelaza nekog Markovljevog lanca dana s

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Odredite $p_{ij}^{(n)}$.

Rješenje. Tražimo svojstvene vrijednosti.

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - P) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - \dfrac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Iz čega slijedi da je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}i$ i $\lambda_3 = -\frac{1}{2}i$. Dakle,

$$p_{11}^{(n)} = a_1 1^n + a_2 \frac{i^n}{2^n} + a_3 \frac{(-i)^n}{2^n}.$$

Sada iz sustava

$$\begin{aligned}1 &= p_{11}^{(0)} = a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 &= p_{11}^{(1)} = a_1 + \frac{i}{2}a_2 - \frac{i}{2}a_3 \\ 0 &= p_{11}^{(2)} = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = 0 = a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_3\end{aligned}$$

dobijemo da je $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{3}{5} + \frac{i}{2}$ i $a_3 = \frac{2}{5} - \frac{i}{2}$. Konačno,

$$p_{11}^{(n)} = \frac{1}{5}1^n + \left(\frac{3}{5} + \frac{i}{2}\right)\frac{i^n}{2^n} + \left(\frac{2}{5} - \frac{i}{2}\right)\frac{(-i)^n}{2^n}.$$

Analogno odredimo i ostale $p_{ij}^{(n)}$. $\square$

Poglavlje 2

Apsorpcijske vjerojatnosti

Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.1. Statistički podaci dvogodišnje visoke škole su sljedeći:

- 60% upisanih brucoša završi prvu godinu, 25% ostane na prvoj godini i 15% odustane od studija
- 70% studenata druge godine okonča svoj studij, 20% ostane na drugoj godini i 10% odustane.

Postavljaju se dva pitanja:

- Koliki postotak studenata (novoupisanih) završi studij?
- Koliko prosječno godina je prosječnom studentu potrebno da završi studij ili da odustane?

Prije nego damo odgovore na prethodna pitanja uvedimo neke oznake koje će na trebati. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S. Za proizvoljno stanje $i \in S$ i proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ uvodimo zapis

$$\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = i).$$

Dakle, promatramo vjerojatnost događaja A uz uvjet da je lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ krenuo iz stanja i. Nadalje, definiramo slučajnu varijablu

$$T_i = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = i\}$$

koju zovemo **prvo vrijeme dolaska** lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ u stanje i. Slično, za skup $A \subseteq S$, sa

$$T_A = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in A\}$$

definiramo **prvo vrijeme dolaska** lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ u skup A.

Napišimo sada matricu prijelaza Markovljevog lanca iz našeg primjera.

$$P = \begin{array}{c} \\ B \\ 2 \\ D \\ O \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & 2 & D & O \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

gdje su

$$\begin{aligned} B &= \text{brucoši} \\ 2 &= \text{studenti druge godine} \\ D &= \text{studenti koji su diplomirali} \\ O &= \text{studenti koji su odustali od studija.} \end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ kao vjerojatnost da će student koji je trenutno u statusu i diplomirati. Dakle, $h(i) = \mathbb{P}_i(T_D < T_O)$, gdje su T_D i T_O prva vremena dolaska lanca u stanja D i O. Očito je $h(D) = 1$, $h(O) = 0$ i $h(i) = \sum_{j\in S} p_{ij}h(j)$ za $i \in S \setminus \{D, O\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(B) &= 0.25h(B) + 0.6h(2) \\ h(2) &= 0.2h(2) + 0.7, \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(2) = \frac{7}{8}$ i $h(B) = 0.7$. Dakle, zaključujemo da 70% novoupisanih studenata (brucoša) završi studij.

Za odgovor na drugo pitanje stavimo $A = \{D, O\}$ i definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ s $g(i) = \mathbb{E}_i(T_A)$, gdje je T_A prvo vrijeme dolaska lanca u skup A i oznaka $\mathbb{E}_i$ znači očekivanje obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}_i$. Očito vrijedi $g(D) = g(O) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij}g(j)$ za $i \in S \setminus A$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(B) &= 1 + 0.25g(B) + 0.6g(2) \\ g(2) &= 1 + 0.2g(2), \end{aligned}$$

čije rješenje je $g(2) = 1.25$ i $g(B) = 2.33$. Uočimo da u gornjim relacijama konstanta 1 znači da je jedna vremenska jedinica prošla nakon jednog skoka. Dakle, prosječno vrijeme trajanja studija za brucoše (ili je završio studij ili je odustao) je 2.33 godine.

Općenito, odgovori na ovakva pitanja slijede iz sljedećih rezultata.

Teorem. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac s prostorom stanja S i neka su a i b neka stanja iz S.

(i) Neka je $h\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi $h(a) = 1$, $h(b) = 0$ i

$$h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j), \quad i \in S \setminus \{a, b\}.$$

Tada, ako vrijedi $\mathbb{P}_i(\min\{T_a, T_b\} < \infty) > 0$ za sve $\in S \setminus \{a, b\}$, onda je

$$h(i) = \mathbb{P}_i(T_a < T_b),$$

tj. vjerojatnost da smo prije došli u stanje a nego u stanje b ako smo krenuli iz stanja i.

(ii) Neka je $A \subseteq S$ i neka je $g\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi $g(i) = 0$, za sve $i \in A$, i

$$g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j), \quad i \in S \setminus A.$$

Tada, ako vrijedi $\mathbb{P}_i(T_A < \infty) > 0$ za sve $i \in S \setminus A$, onda je

$$g(i) = \mathbb{E}_i(T_A),$$

tj. očekivani broj koraka do posjete skupu A ako krećemo iz stanja i.

Definicija. Za stanje $i \in S$ kažemo da je **apsorbirajuće** ako vrijedi $p_{ii} = 1$ (iz njega se ne može više izaći). Za Markovljev lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ kažemo da je **apsorbirajući** ako za svako stanje iz S postoji neko apsorbirajuće stanje u koje možemo doći.

Zadatak 2.1. Dva prijatelja, Johann i Otto, natječu se tko će brže preplivati dionicu od 50 metara. Poprilično su izjednačeni te je vjerojatnost da Johann brže prepliva 50 metara jednaka 0.6. Brži u jednoj utrci osvaja jedan bod te se natječu sve dok jedan od njih nema dva boda prednosti. Kolika je vjerojatnost da će pobijediti Johann? Koliko je očekivano vrijeme trajanja njihove igre?

Rješenje. Formirajmo matricu prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

gdje je

$$\begin{aligned} 2 &= \text{ukupna pobjeda Johanna} \\ -2 &= \text{ukupna pobjeda Otta.} \end{aligned}$$

Neka je funkcija $h\colon S \to \mathbb{R}$ definirana kao vjerojatnost pobjede Johanna pri rezultatu i, tj. $h(i) = \mathbb{P}_i(T_2 < T_{-2})$. Tada vrijedi $h(2) = 1$, $h(-2) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{2, -2\}$. Raspisivanjem sustava dobijemo

$$\begin{aligned} h(1) &= 0.6 + 0.4h(0) \\ h(0) &= 0.6h(1) + 0.4h(-1) \\ h(-1) &= 0.6h(0), \end{aligned}$$

odnosno matrično

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & 0 \\ -0.6 & 1 & -0.4 \\ 0 & -0.6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(1) \\ h(0) \\ h(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je gornji sustav zapravo sustav oblika

$$(I - Q) \begin{bmatrix} h(1) \\ h(0) \\ h(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje je Q matrica koju dobijemo iz matrice P kad izbacimo stanja 2 i -2 (apsorbirajuća stanja). Dakle

$$\begin{bmatrix} h(1) \\ h(0) \\ h(-1) \end{bmatrix} = (I - Q)^{-1} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8769 \\ 0.6923 \\ 0.4154 \end{bmatrix}.$$

Matricu $(I - Q)^{-1}$ označavamo s F i nazivamo **fundamentalnom matricom** apsorbirajućeg Markovljevog lanca. Element f_{ij} te matrice predstavlja očekivani broj posjeta (prolaza) kroz stanje j polazeći iz stanja i:

$$f_{ij} = \mathbb{E}_i \left[\sum_{n \in \mathbb{N}_0} 1_{\{X_n = j\}} \right].$$

Također, suma elemenata po retcima predstavlja očekivano vrijeme do apsorpcije lanca: neka je

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{\text{“skup apsorbirajućih stanja”}\}\},$$

onda vrijedi

$$\mathbb{E}_i[T] = \sum_{j=1}^{l} f_{ij},$$

gdje je l dimenzija matrice F, tj. broj neapsorbirajućih stanja.

Da bismo izračunali očekivano vrijeme trajanja igre definiramo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ kao očekivano vrijeme trajanja igre pri rezultatu i, tj. $g(i) = \mathbb{E}_i(T_A)$, gdje je $A = \{2, -2\}$. Očito je $\mathbb{P}_i(T_A < \infty) > 0$ te vrijedi $g(2) = g(-2) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus A$. Slično kao i gore, sustav prelazi u

$$(I - Q) \begin{bmatrix} g(1) \\ g(0) \\ g(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} g(1) \\ g(0) \\ g(-1) \end{bmatrix} = (I - Q)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{50}{13} \\ \frac{43}{13} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Zadatak 2.2. Dan je lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ s matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Početna raspodjela lanca je uniformna.

(a) Odredite očekivano vrijeme prvog posjeta stanju 1.

(b) Marko se kladio s Ivanom u 100kn da će stanje 1 biti posjećeno prije stanja 4. Koliki dobitak očekuje Marko?

Rješenje. Početna raspodjela lanca je uniforma, tj.

$$\lambda = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25).$$

(a) Neka je $g(i) := \mathbb{E}_i(T_1)$. Tada vrijedi da je $g(1) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j)$ za $i \neq 1$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 + 0.3g(2) + 0.3g(3) + 0.2g(4) \\ g(3) &= 1 + 0.1g(2) + 0.1g(3) + 0.5g(4) \\ g(4) &= 1 + 0.3g(2) + 0.2g(3) + 0.1g(4), \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$g(2) = 3.68, \quad g(3) = 3.215, \quad g(4) = 3.05.$$

Konačno,

$$\mathbb{E}(T_1) = \sum_{i \in S} \lambda_i \mathbb{E}_i(T_1) = \frac{1}{4} \sum_{i \in S} g(i) = 2.48625.$$

(b) Definiramo sad $h(i) := \mathbb{P}_i(T_1 < T_4)$. Vrijedi $h(1) = 1$, $h(4) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, 4\}$, iz čega dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(2) &= 0.2 + 0.3h(2) + 0.3h(3) \\ h(3) &= 0.3 + 0.1h(2) + 0.1h(3) \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$h(2) = \frac{9}{20}, \quad h(3) = \frac{23}{60}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(T_1 < T_4) = \sum_{i \in S} \lambda_i \mathbb{P}_i(T_1 < T_4) = \frac{1}{4} \sum_{i \in S} h(i) = \frac{110}{240} = \frac{11}{24}.$$

Znači da Marko očekuje $100 \cdot \frac{11}{24} = \frac{275}{6}$kn. □

Zadatak 2.3. Neka je lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zadan matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ako je početna raspodjela lanca $\lambda = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ izračunajte vjerojatnost da lanac posjeti stanje 1 prije stanja 3. Koliko je očekivano vrijeme do prvog posjeta lanca skupu $\{1, 3\}$?

Rješenje. Definiramo $h(i) := \mathbb{P}_i(T_1 < T_3)$. Vrijedi $h(1) = 1$, $h(3) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, 3\}$. Dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h(4) \\ h(4) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} h(2) + \frac{2}{5} h(4) \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$h(2) = \frac{2}{5}, \quad h(4) = \frac{3}{5}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(T_1 < T_3) = \sum_{i \in S} \lambda_i \mathbb{P}_i(T_1 < T_3) = \sum_{i \in S} \lambda_i h(i) = \frac{1}{2}.$$

Stavimo sad $A = \{1, 3\}$ i definiramo $g(i) := \mathbb{E}_i(T_A)$. Vrijedi $g(1) = g(3) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus A$. Dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 + \frac{1}{4} g(4) \\ g(4) &= 1 + \frac{2}{5} g(2) + \frac{2}{5} g(4) \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$g(2) = \frac{17}{10}, \quad g(4) = \frac{14}{5}.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}(T_A) = \sum_{i \in S} \lambda_i \mathbb{E}_i(T_A) = \sum_{i \in S} \lambda_i g(i) = \frac{45}{30} = 1.5. \qquad \square$$

Zadatak 2.4. Marko i još četvero djece stoje na vrhovima pravilnog peterokuta te se dodaju loptom tako da s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ dodaju loptu svakom od dvoje djece koja stoje na najbliža dva vrha. Kolika je vjerojatnost da ako lopta krene od Marka obiđe svu ostalu djecu prije nego se vrati Marku?

Rješenje. Vrhove peterokuta numeriramo s $1, 2, 3, 4, 5$ tako da Marko stoji na vrhu 1. Dakle, računamo

$$\mathbb{P}_1(\max\{T_2, T_3, T_4, T_5\} < T_1).$$

Imamo,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_1(\max\{T_2, T_3, T_4, T_5\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_2(\max\{T_3, T_4, T_5\} < T_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_5(\max\{T_2, T_3, T_4\} < T_1) \\ &= \mathbb{P}_2(\max\{T_3, T_4, T_5\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(\max\{T_4,\ T_5\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(T_4 < T_1, T_5 < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(T_5 < T_1), \end{aligned}$$

gdje smo u drugom koraku koristili simetriju, a u zadnjem činjenicu da ako je $T_5 < T_1$, onda je i $T_4 < T_1$. Definirajmo sad $h(i) := \mathbb{P}_i(T_5 < T_1)$. Vrijedi $h(5) = 1$, $h(1) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, 5\}$. Dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{1}{2} h(3) \\ h(3) &= \frac{1}{2} h(2) + \frac{1}{2} h(4) \\ h(4) &= \frac{1}{2} h(3) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$h(2) = \frac{1}{4}, \quad h(3) = \frac{1}{2}, \quad h(4) = \frac{3}{4}.$$

Dakle, vjerojatnost da lopta obiđe svu ostalu djecu prije nego se vrati Marku je

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}_3(T_5 < T_1) = \frac{1}{2} h(3) = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

Zadatak 2.5. Pčela oprašuje cvjetove u vrtu malog Ivice. On ima 5 cvjetova: ljubičicu (stanje 1), ivančicu (stanje 2), tratinčicu (stanje 3), maslačak (stanje 4) i ružu (stanje 5), koji rastu tim redom u vrhovima pravilnog peterokuta. Nakon što se napije nektara i usput opraši cvijet, pčela odleti sa tog cvijeta na jedan od njemu dva susjedna, s jednakom vjerojatnošću.

(a) Izračunajte vjerojatnost da ivančica bude oprašena prije ljubičice, ako je pčela prvo sletjela na maslačak.

(b) Ako pčela počinje oprašivanje od ivančice, izračunajte očekivano vrijeme do trenutka kada pčela (prvi put) sleti na tratinčicu ili ružu.

Rješenje. Neka Markovljev lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ opisuje kretanje pčele po cvijeću u vrtu prilikom oprašivanja. Matrica prijelaza je dana s

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ kao vjerojatnost da će pčela oprašiti ivančicu prije ljubičice ako trenutno u stanju i. Dakle, $h(i) = \mathbb{P}_i(T_2 <$

T_1). Očito je $h(2) = 1, h(1) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, 2\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(3) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h(4) \\ h(4) &= \frac{1}{2} h(3) + \frac{1}{2} h(5) \\ h(5) &= \frac{1}{2} h(4), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(3) = \frac{3}{4}$, $h(4) = \frac{1}{2}$ i $h(5) = \frac{1}{4}$. Dakle, vjerojatnost da ivančica bude oprašena prije ljubičice ako je pčela prvo sletjela na maslačak (krećemo iz stanja 4) je $\frac{1}{2}$.

(b) Označimo s $A = \{3, 5\}$ i definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ s $g(i) = \mathbb{E}_i(T_A)$. Očito vrijedi $g(3) = g(5) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus A$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 + \frac{1}{2} g(2) \\ g(2) &= 1 + \frac{1}{2} g(1) \\ g(4) &= 1, \end{aligned}$$

čije rješenje je $g(1) = 2$, $g(2) = 2$ i $g(4) = 1$. Dakle, očekivano vrijeme da pčela sleti na tratinčicu ili ružu ako je počela oprašivanje od ivančice (krećemo iz stanja 2) je 2. □

Zadatak 2.6. Tigar šeće zaštićenim rezervatom i obilazi istaknuta mjesta svog teritorija, koja označavamo elementima iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Njegovo kretanje modeliramo Markovljevim lancem sa skupom stanja S i matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ne znamo gdje se tigar nalazi kada počinjemo promatrati njegovo kretanje, ali na osnovi prethodnih istraživanja znamo da je početna raspodjela lanca $\lambda = (0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.2)$.

(a) Izračunajte vjerojatnost da tigar stigne prije u stanje 1 nego u stanje 4.

(b) Izračunajte očekivani broj koraka do prvog posjeta stanju 1 ili 2.

Rješenje. (a) Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ kao vjerojatnost da tigar stigne u stanje 1 prije nego u stanje 4 ako je krenuo iz stanja i. Dakle, $h(i) = \mathbb{P}_i(T_1 < T_4)$. Očito je $h(1) = 1, h(4) = 0$ i $h(i) = \sum_{j\in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, 4\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(2) &= 0.2 + 0.3h(2) \\ h(3) &= 0.25h(2) + 0.5h(3) + 0.25h(5) \\ h(5) &= \frac{1}{3}h(3) + \frac{2}{3}h(5), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(2) = h(3) = h(5) = \frac{2}{7}$. Dakle, vjerojatnost da je stigao u stanje 1 prije nego u stanje 4 je

$$\mathbb{P}(T_1 < T_4) = \sum_{i\in S} \lambda_i \mathbb{P}_i(T_1 < T_4) = \sum_{i\in S} \lambda_i h(i) = 0.3.$$

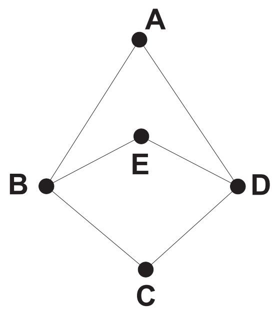
(b) Označimo s $A = \{1, 2\}$ i definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ s $g(i) = \mathbb{E}_i(T_A)$ (očekivani broj koraka do prvog posjeta stanju 1 ili 2 ako smo krenuli iz stanja i). Očito vrijedi $g(1) = g(2) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus A$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(3) &= 1 + 0.5g(3) + 0.25g(5) \\ g(4) &= 1 \\ g(5) &= 1 + \frac{1}{3}g(3) + \frac{2}{3}g(5), \end{aligned}$$

čije rješenje je $g(3) = 7$, $g(4) = 1$ i $g(5) = 10$. Dakle, očekivani broj koraka do prvog posjeta stanju 1 ili 2 je

$$\mathbb{E}(T_A) = \sum_{i\in S} \lambda_i \mathbb{E}_i(T_A) = \sum_{i\in S} \lambda_i g(i) = 4.3. \qquad \square$$

Zadatak 2.7. Trgovački putnik obilazi naseljeno područje koje se sastoji od gradića A, B, C, D i E i koje ima oblik grafa na slici.



Njegova putovanja se odvijaju kao slučajna šetnja na zadanom grafu, te on u svakom vrhu (gradiću) bira neki od njemu susjednih vrhova (gradića) s jednakom vjerojatnošću. Ako je poznato da se trgovački putnik upravo nalazi u gradiću A, izračunajte

(a) vjerojatnost da će prije posjetiti gradić B nego gradić C.

(b) očekivani broj putovanja prije prvog posjeta gradiću E (pod putovanjem misli se na posjet jednom gradiću).

Rješenje. Matrica prijelaza Markovljevog lanca koji opisuje gibanje trgovačkog putnika, na osnovu podataka iz zadatka, je

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Definirajmo funkciju $h\colon S \to R$ kao vjerojatnost da trgovački putnik posjeti gradić B prije gradića C ako je krenuo iz gradića i. Dakle, $h(i) = \mathbb{P}_i(T_B < T_C)$. Očito je $h(B) = 1, h(C) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{B, C\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(A) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h(D) \\ h(D) &= \frac{1}{3} h(A) + \frac{1}{3} h(E) \\ h(E) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h(D), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(A) = \frac{3}{4}$, $h(D) = \frac{1}{2}$ i $h(E) = \frac{3}{4}$. Dakle, vjerojatnost da je posjetio gradić B prije gradića C ako je krenuo iz gradića A je $\frac{3}{4}$.

(b) Definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ s $g(i) = \mathbb{E}_i(T_E)$ (očekivani broj putovanja do prvog posjeta gradiću E ako smo krenuli iz gradića i). Očito vrijedi $g(E) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus \{E\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(A) &= 1 + \frac{1}{2} g(B) + \frac{1}{2} g(D) \\ g(B) &= 1 + \frac{1}{3} g(A) + \frac{1}{3} g(C) \\ g(C) &= 1 + \frac{1}{2} g(B) + \frac{1}{2} g(D) \\ g(D) &= 1 + \frac{1}{3} g(A) + \frac{1}{3} g(C) \end{aligned}$$

čije rješenje je $g(A) = g(C) = 6$ i $g(B) = g(D) = 5$. Dakle, očekivani broj putovanja do prvog posjeta gradiću E ako je trgovački putnik krenuo iz vrha A je 6. □

Riješimo sada Zadatak 2.4 u općenitom slučaju.

Zadatak 2.8. Marko i još $(n-1)$-tero djece $(n \geqslant 3)$ stoje na vrhovima pravilnog n-terokuta te se dodaju loptom tako da s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ dodaju loptu svakom od dvoje djece koja stoje na najbliža dva vrha. Kolika je vjerojatnost da ako lopta krene od Marka obiđe svu ostalu djecu prije nego se vrati Marku?

Rješenje. Vrhove n-terokuta numeriramo s $1, 2, \ldots, n$ tako da Marko stoji na vrhu 1. Dakle, računamo

$$\mathbb{P}_1(\max\{T_2, T_3, \ldots, T_n\} < T_1).$$

Imamo,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_1(\max\{T_2, T_3, \ldots, T_n\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_2(\max\{T_3, \ldots, T_n\} < T_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_n(\max\{T_2, \ldots, T_{n-1}\} < T_1) \\ &= \mathbb{P}_2(\max\{T_3, \ldots, T_n\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(\max\{T_4, \ldots, T_n\} < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(T_4 < T_1, T_5 < T_1, \ldots, T_n < T_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_3(T_n < T_1), \end{aligned}$$

gdje smo u drugom koraku koristili simetriju a u zadnjem činjenicu da ako je $T_n < T_1$, onda je i $T_i < T_1$ za $4 \leqslant i \leqslant n-1$. Definirajmo sad $h(i) := \mathbb{P}_i(T_n < T_1)$, tj. vjerojatnost da je lopta došla prije do n-tog djeteta nego nazad do Marka. Vrijedi $h(n) = 1$, $h(1) = 0$ i $h(i) = \sum_{j \in S} p_{ij} h(j)$ za $i \in S \setminus \{1, n\}$. Dobijemo sustav

$$\begin{aligned} h(2) &= \frac{1}{2} h(3) \\ h(3) &= \frac{1}{2} h(2) + \frac{1}{2} h(4) \\ &\vdots \\ h(n-1) &= \frac{1}{2} h(n-2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$h(2) = \frac{1}{n-1}, \dots, h(n-1) = \frac{n-2}{n-1}.$$

Dakle, vjerojatnost da lopta obiđe su ostalu djecu prije nego se vrati Marku je

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}_3(T_n < T_1) = \frac{1}{2} h(3) = \frac{1}{n-1}. \qquad \square$$

Poglavlje 3

Klasifikacija stanja

Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S. Za stanje $i \in S$ definiramo slučajnu varijablu

$$\bar{T}_i = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$$

koju zovemo **prvo vrijeme povratka** lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ u stanje i (usporedite s prvim vremenom dolaska). Označimo s

$$\rho_{ii} = \mathbb{P}_i(\bar{T}_i < \infty).$$

Broj ρ_{ii} je vjerojatnost da se lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ vrati u stanje i ako kreće iz stanja i. Uočimo da smo prilikom definicije slučajne varijable $\bar{T}_i$ isključili slučaj $n = 0$ (prvo vrijeme dolaska lanca u i), jer bi tada uvijek bilo $\rho_{ii} = 1$. Induktivno možemo definirati slučajne varijable koje opisuju k-to vrijeme povratka u promatrano stanje. Preciznije, za $i \in S$ i $k \in \mathbb{N}$ neka je

$$\bar{T}_i^k = \min\{n > \bar{T}_i^{k-1} : X_n = i\}.$$

Analogno kao i prije, označimo

$$\rho_{ii}^k = \mathbb{P}_i(\bar{T}_i^k < \infty).$$

Imamo dvije mogućnosti:

(i) ako je $\rho_{ii} < 1$, onda je $\lim_{k\to\infty} \rho_{ii}^k = 0$ i stanje i s ovim svojstvom nazivamo **prolaznim** ili **tranzijentnim**.

(ii) ako je $\rho_{ii} = 1$, onda je $\rho_{ii}^k = 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$ i stanje i s ovim svojstvom nazivamo **povratnim** ili **rekurentnim**.

Zadatak 3.1. Neka je Markovljev lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan sljedećom matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Klasificirajte stanja lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rješenje. Računamo prvo $\rho_{00} = \mathbb{P}_0(\bar{T}_0 < \infty)$. Očito je $\rho_{00} = 1$, jer je $p_{00} = 1$. Analogno vrijedi $\rho_{44} = 1$, pa zaključujemo da su stanja 0 i 4 povratna. Pogledajmo sad ρ_{11},

$$\rho_{11} = \mathbb{P}_1(\bar{T}_1 < \infty) = 1 - \mathbb{P}_1(\bar{T}_1 = \infty) \leqslant 1 - p_{10} = 0.7.$$

Analogno,

$$\begin{aligned} \rho_{22} &= \mathbb{P}_2(\bar{T}_2 < \infty) = 1 - \mathbb{P}_2(\bar{T}_2 = \infty) \leqslant 1 - p_{21}p_{10} = 0.91 \\ \rho_{33} &= \mathbb{P}_3(\bar{T}_3 < \infty) = 1 - \mathbb{P}_3(\bar{T}_3 = \infty) \leqslant 1 - p_{34} = 0.3. \end{aligned}$$

Dakle, stanja 1, 2 i 3 su prolazna. □

Uočimo da su apsorbirajuća stanja uvijek povratna.

Zadatak 3.2. Klasificirajte stanja Markovljevog lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadanog sljedećom matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. Prvo uočimo da je $p_{i1} \geqslant 0.3$ za $i = 1, 2, 3$. Dakle,

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \mathbb{P}_1(\bar{T}_1 < \infty) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\bar{T}_1 \leqslant n) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(\bar{T}_1 > n) \\ &\geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} 0.7^n = 1. \end{aligned}$$

Slično,

$$\rho_{22} \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} 0.9^n = 1$$

$$\rho_{33} \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} 0.6^n = 1.$$

Dakle, sva stanja su povratna. □

Neka su sad $i, j \in S$ dva proizvoljna stanja i označimo

$$\rho_{ij} = \mathbb{P}_i(\bar{T}_j < \infty).$$

Broj ρ_{ij} je vjerojatnost da lanac posjeti stanje j ako krene iz stanja i. Nadalje, za stanja $i, j \in S$ kažemo da je stanje j **dostižno** iz stanja i, u oznaci $i \to j$, ako vrijedi $\rho_{ij} > 0$. Primijetimo da ako je $i \to j$, ne mora biti $j \to i$ (u Zadatku 3.1 0 je apsorbirajuće stanje pa je npr. 0 dostižno iz 1, ali 1 nije dostižno iz 0).

Definicija 3.1. Skup $A \subseteq S$ je **zatvoren** ako za svaki $i \in A$ i $j \in A^c$ vrijedi $p_{ij} = 0$, tj. ako ne možemo izaći iz skupa A.

Uočio da je unija dva zatvorena skupa je uvijek zatvoren skup.

Definicija 3.2. Skup $B \subseteq S$ je **ireducibilan** ako za bilo koja dva stanja $i, j \in B$ vrijedi $i \to j$. Ako je skup stanja S ireducibilan, onda kažemo da je lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ **ireducibilan**.

Vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) ako je $i \to j$ i $j \to k$, onda je $i \to k$.

(ii) ako je $\rho_{ij} > 0$, ali $\rho_{ji} < 1$, onda je stanje i prolazno (iz stanja i dolazimo u stanje j s pozitivnom vjerojatnošću, ali nije sigurno da ćemo se vratiti nazad u i).

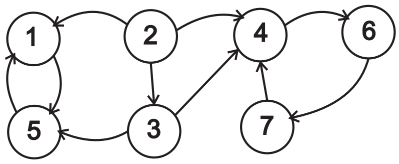
(iii) ako je $C \subseteq S$ zatvoren i ireducibilan skup, onda su sva stanja u C povratna.

Uočimo da kao posljedica tvrdnje (ii) vrijedi sljedeće. Ako je stanje i povratno i $\rho_{ij} > 0$, onda je $\rho_{ji} = 1$. Štoviše, u tom slučaju je stanje j također povratno. Dakle, ako je i povratno stanje ireducibilnog lanca, onda su sva stanja povratna. Odnosno, kod ireducibilnog lanca su sva stanja povratna.

Zadatak 3.3. Klasificirajte stanja Markovljevog lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadanog sljedećom matricom prijelaza:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. Iz matrice prijelaza možemo dobiti sljedeći graf.



Uočimo da je $\rho_{j2} < 1$ i $\rho_{j3} < 1$ za sve $j \in S$. Dakle, po (ii), stanja 2 i 3 su prolazna. Nadalje, očito su skupovi $\{1, 5\}$ i $\{4, 6, 7\}$ zatvoreni i ireducibilni, pa su prema (iii) stanja 1, 4, 5, 6 i 7 povratna. $\square$

Postupak iz gornjeg zadatka se može poopćiti. Iz tvrdnji (i), (ii) i (iii) slijedi sljedeći postupak klasifikacije stanja. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac sa skupom stanja S. Tada se S može zapisati (rastaviti) kao disjunktna unija

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k,$$

gdje su C_i, $i = 1, \ldots, k$, zatvoreni ireducibilni skupovi sastavljeni samo od povratnih stanja, a skup T je skup prolaznih stanja.

Algoritam za opisani rastav glasi:

(i) Neka je T skup svih $i \in S$ za koje postoji $j \in S$ takav da je $i \to j$ i $j \not\to i$. Po (ii), skup T sadrži samo prolazna stanja.

(i) Za proizvoljni $i \in S \setminus T$ stavimo

$$C_i = \{j \in S : i \to j\}.$$

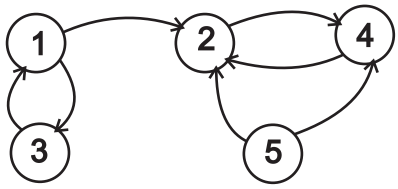
Može se pokazati da je C_i zatvoren i ireducibilan, pa prema tome sadrži samo povratna stanja. Uočimo, da za $j \in C_i$ vrijedi $C_i = C_j$.

Zadatak 3.4. Klasificirajte stanja Markovljevog lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ danog sljedećim matricama prijelaza:

(a)
$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

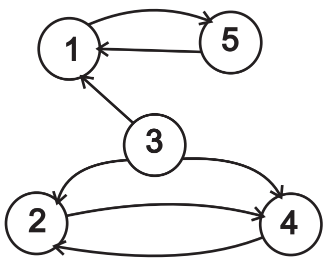
(b)
$$P_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. (a) Nacratjmo prvo pripadni graf.



Iz (i) vidimo da je $T = \{1, 3, 5\}$, tj. stanja $1, 3, 5$ su prolazna, a sva ostala stanja su povratna. Također, očito je $C_2 = \{2, 4\}$ zatvoren i ireducibilan skup.

(b) Analogno kao u (a), prvo nacrtajmo pripadni graf.

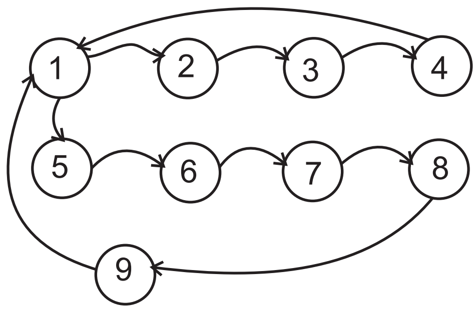


Sada jednostavno zaključujemo da je $T = \{3\}$, tj. stanje 3 je prolazno, a sva ostala stanja su povratna. Nadalje, jasno je da su $C_1 = \{1, 5\}$ i $C_2 = \{2, 4\}$ zatvoreni i ireducibilni skupovi. □

Zadatak 3.5. Provjerite ireducibilnost lanca $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zadanog sljedećom matricom prijelaza:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. Nacrtajmo prvi pripadni graf



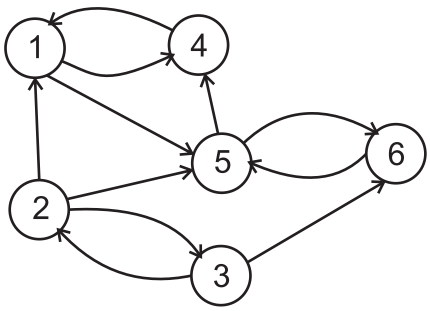
Kako postoji usmjeren put između svaka dva stanja, znači da je lanac ireducibilan. Specijalno, lanac je povratan. □

Zadatak 3.6. Klasificirajte stanja Markovljevog lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadanog sljedećim matricama prijelaza:

(a)
$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

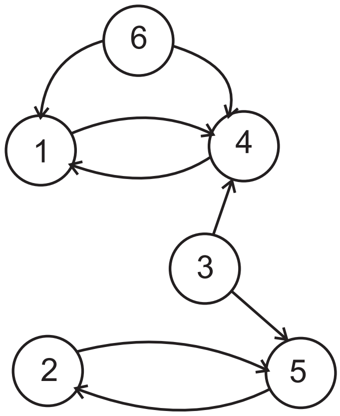
(b)
$$P_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješenje. (a) Nacrtajmo prvo pripadni graf.



Iz svojstva (i) vidimo da je $T = \{2, 3\}$, tj. stanja 2 i 3 su prolazna, dok su sva ostala stanja povratna. Nadalje, $C = \{1, 4, 5, 6\}$ je jedini zatvoren ireducibilan skup.

(b) Ponovno, nartajmo prvo pripadni graf.



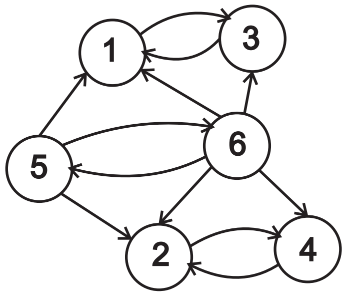
Iz svojstva (i) vidimo da je $T = \{3, 6\}$, tj. stanja 3 i 6 su prolazna, a sva ostala su povratna. Također, jasno je da su $C_1 = \{1, 4\}$ i $C_2 = \{2, 5\}$ zatvoreni i ireducibilni skupovi. $\square$

Zadatak 3.7. Neka je Markovljev lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dan sljedećim matricama prijelaza:

$$
\text{(a)} \quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\text{(b)} \quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Klasificirajte stanja i izračunajte $\mathbb{P}_4(T_5 = 5)$.

Rješenje. (a) Nacrtajmo prvo pripadni graf.

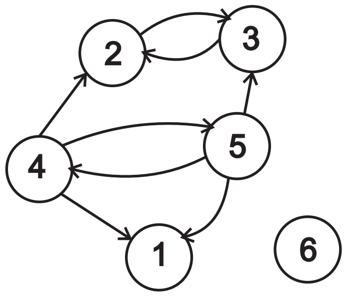


Jasno je da je $T = \{5, 6\}$, $C_1 = \{1, 3\}$ i $C_2 = \{2, 4\}$. Dakle,

$$\mathbb{P}_4(T_5 = 5) = 0,$$

jer iz stanja 4 nikako ne možemo doći u stanje 5.

(b) Ponovno, nacrtajmo prvo pripadni graf.



Jasno je da je $T = \{4, 5\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$ i $C_6 = \{6\}$. Dakle,

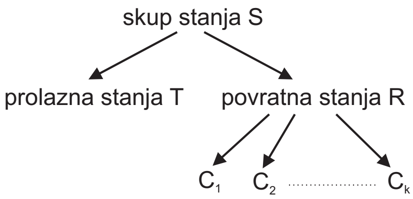
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_4(T_5 = 5) &= \mathbb{P}_4(X_1 \neq 5, X_2 \neq 5, X_3 \neq 5, X_4 \neq 5, X_5 = 5)\\ &= p_{44}^{(4)} p_{45}\\ &= \frac{1}{8^4} \cdot \frac{3}{8},\end{aligned}$$

jer ne smijemo doći u C_1, C_2 ili C_6 prije nego dođemo u stanje 5, pa nam preostaje jedino stanje 4. $\square$

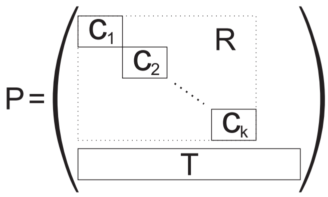
Poglavlje 4

Periodičnost

U prethodnom poglavlju skup stanja S Markovljevog lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ klasificirali smo na sljedeći način:

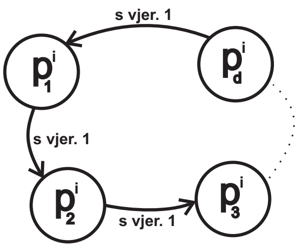


ili matrično,

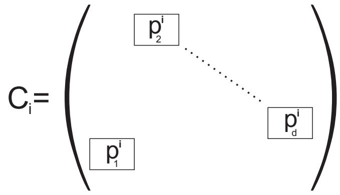


gdje su C_i, $i = 1, \dots, k$, ireducibilni zatvoreni skupovi stanja.

U ovom poglavlju napravit ćemo daljnju analizu skupa stanja. Preciznije, pokazat će se da se svaki skup C_i može rastaviti na disjunktnu uniju skupova $P_1^i, \dots, P_d^i$, tj. $C_i = P_1^i \cup \dots \cup P_d^i$, s periodičnim svojstvom



ili matrično,



Dakle, iz skupa P_j^i prelazimo u skup P_{j+1}^i s vjerojatnošću 1, za $j = 1, \ldots, d-1$, a iz skupa P_d^i prelazimo u skup P_1^i s vjerojatnošću 1. Drugim riječima, u skup P_j^i se vraćamo natrag točno nakon d koraka.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ireducibilan. Nadalje, period stanja i definiramo kao najveći zajednički djelitelj (NZD) skupa

$$I_i = \{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Vrijedi sljedeće:

(i) skup I_i je **aditivan**, tj. ako su $m, n \in I_i$, onda je i $m + n \in I_i$.

(ii) stanje i ima period 1 ako, i samo ako, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ vrijedi $n \in I_i$.

(iii) ako je $p_{ii} > 0$, onda i ima period 1.

(iv) ako postoje dva uzastopna broja $n_0, n_0 + 1 \in I_i$, onda stanje i ima period 1.

(v) ako je $\rho_{ij} > 0$ i $\rho_{ji} > 0$, onda i i j imaju isti period.

Specijalno, iz (iv) slijedi da u ireducibilnom lancu sva stanja imaju isti period. Ako pri tome sva stanja imaju period 1, onda lanac nazivamo **aperiodičnim**.

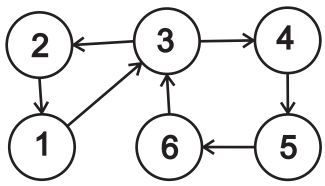
Zadatak 4.1. Analizirajte lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dan sljedećim matricama prijelaza:

(a) $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

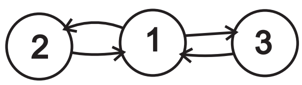
(e) $P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje. (a) Nacrtajmo prvo pripadni graf.



Očito je lanac ireducibilan pa sva stanja imaju isti period. Odredimo period npr. stanja 3. Jasno je da su $3, 4 \in I_3$. Dakle, po svojstvu (i), $\{3, 4, \dots\} \subseteq I_3$. Sada, prema (ii), zaključujemo da je period stanja 3 jednak 1. Specijalno, i period svih ostalih stanja je 1.

(b) Prvo nacrtajmo pripadni graf.

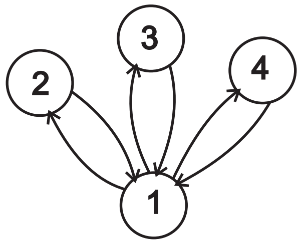


Lanac je ireducibilan pa sva stanja imaju isti period. Odredimo period npr. stanja 2. Očito je $2 \in I_2$. Nadalje, jasno je da niti jedan neparan broj ne može biti u I_2, iz čega zaključujemo da stanje 2 ima period 2 pa i sva ostala stanja imaju isti period. Specijalno, periodička dekompozija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2,$$

gdje su $P_1 = \{1\}$ i $P_2 = \{2, 3\}$.

(c) Graf pripadnog lanca je sljedeći

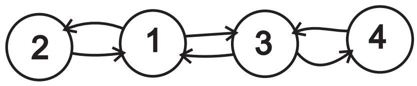


Očito je opet lanac ireducibilan pa sva stanja imaju isti period. Odredimo period npr. stanja 4. Kao i ranije jasno je da je $2 \in I_4$ i da niti jedan neparan broj ne može biti u I_4. Sada zaključujemo da stanje 4 ima period 2. Dakle, i sva ostala stanja imaju isti period. Specijalno, periodička dekompozija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2,$$

gdje su $P_1 = \{1\}$ i $P_2 = \{2, 3, 4\}$.

(d) Nacrtajmo prvo pripadni graf.

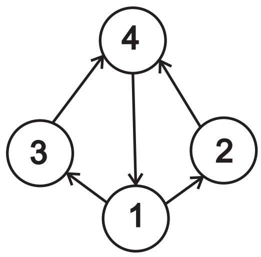


Opet je lanac ireducibilan pa sva stanja imaju isti period. Odredimo period npr. stanja 4. Kao i ranije jasno je da je $2 \in I_4$ i da niti jedan neparan broj ne može biti u I_4. Dakle, period svih stanja je 2. Periodička dekompozija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2,$$

gdje su $P_1 = \{1, 4\}$ i $P_2 = \{2, 3\}$.

(e) Prvo nacrtajmo pripadni graf.



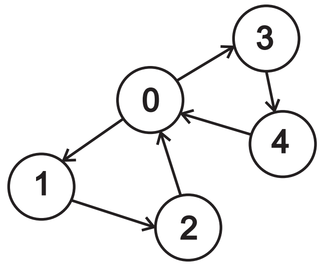
Sva stanja imaju isti period zbog ireducibilnosti. Odredimo period npr. stanja 2. Očito je $3 \in I_2$. Nadalje, jednostavno se vidi da brojevi oblika $3k+1$ i $3k+2$, $k \in \mathbb{N}_0$, ne mogu biti u I_2. Dakle, period svih stanja je 3. Periodička dekompozija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2 \cup P_3,$$

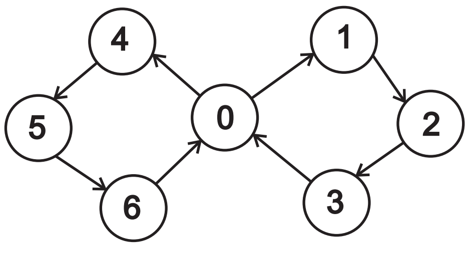
gdje su $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{2,3\}$ i $P_3 = \{4\}$. □

Zadatak 4.2. Neka je Markovljev lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zadan sljedećim grafovima:

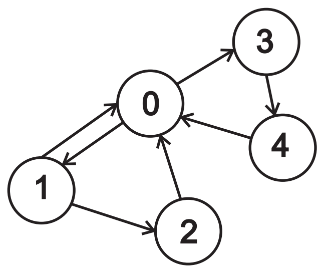
(a)



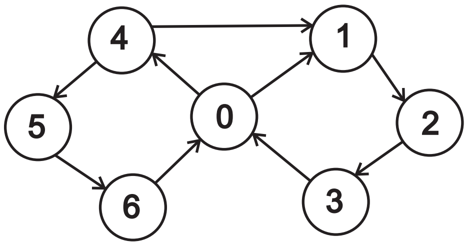
(b)



(c)



(d)



Klasificirajte stanja lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rješenje. Očito su svi lanci ireducibilni. Dakle, sva stanja su povratna i imaju isti period. Odredimo sad periode i periodičke klase.

(a) Očito je $3 \in I_0$ i jasno je da brojevi oblika $3k+1$ i $3k+2$ za $k \in \mathbb{N}_0$ ne mogu biti u I_0. Dakle, sva stanja lanca imaju period 3. Periodička dekompozicija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2 \cup P_3,$$

gdje su $P_1 = \{1,3\}$, $P_2 = \{2,4\}$ i $P_3 = \{0\}$.

(b) Očito je $4 \in I_0$ i jasno je da brojevi oblika $4k+1$, $4k+2$ i $4k+3$ za $k \in \mathbb{N}_0$ ne mogu biti u I_0. Dakle, sva stanja lanca imaju period 4. Periodička dekompozicija skupa stanja je

$$S = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4,$$

gdje su $P_1 = \{1,4\}$, $P_2 = \{2,5\}$, $P_3 = \{3,6\}$ i $P_4 = \{0\}$.

(c) Očito su $2,3 \in I_0$, iz čega zaključujemo da $\{2,3,\dots\} \subseteq I_0$. Dakle, lanac je aperiodičan.

(d) Očito su $4,5 \in I_0$. Dakle, $\{8,9,\dots\} \subseteq I_0$ pa je lanac aperiodičan. $\square$

Poglavlje 5

Stacionarna raspodjela

U ovom poglavlju proučavat ćemo granično ponašanje niza vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j)$, $i, j \in S$, koje ne ovisi o početnom stanju i, tj. zanimat će nas $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Prisjetimo se, stanje $j \in S$ je prolazno ako je $\rho_{jj} < 1$, a povratno ako je $\rho_{jj} = 1$. Može se pokazati sljedeće:

(i) stanje j je prolazno ako, i samo ako, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ za svaki $i \in S$.

(ii) stanje j je povratno ako, i samo ako, $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$.

Dakle, ako je stanje j prolazno, onda je

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad i \in S.$$

Nadalje, primijetimo da ako stanja i i j pripadaju različitim zatvorenim ireducibilnim klasama, onda je

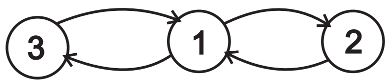
$$p_{ij}^{(n)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u ovim slučajevima $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ne ovisi o početnom stanju i jednak je 0. Ostaje nam razmotriti slučaj kad stanja i i j pripadaju istoj zatvorenoj ireducibilnoj klasi (dakle i i j su nužno povratna stanja) pa bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je naš lanac ireducibilan.

Primjer 5.1. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac zadan matricom prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pripadni graf je



Dakle, lanac je ireducibilan i periodičan s periodom 2. Periodička dekompozicija lanca je $S = P_1 \cup P_2$, gdje su $P_1 = \{1\}$ i $P_2 = \{2, 3\}$. Nadalje, uočimo da je zbog periodičnosti $p_{11}^{(2n)} = 1$ i $p_{11}^{(2n+1)} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)}$ ne postoji.

Na osnovu gornje diskusije, u nastavku pretpostavljamo da radimo samo s aperiodičnim ireducibilnim lancima. Za takve lance vrijedi sljedeće:

(i) $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ za svaki $i \in S$.

(ii) brojevi π_j, $j \in S$, su jedinstveni, strogo pozitivni i zadovoljavaju $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$. Dakle, $\{\pi_j\}_{j\in S}$ je raspodjela na S.

(iii) za svaki $j \in S$ vrijedi
$$\mathbb{E}_j(\bar{T}_j) = \frac{1}{\pi_j}.$$

(iv) za svaku funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) \to \sum_{j\in S} f(j)\pi_j.$$

Nadalje, uočimo
$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}.$$

Raspodjele koje zadovoljavaju gornje svojstvo nazivamo **stacionarnim raspodjelama**. Dakle, svaka granična raspodjela Markovljevog lanca je i stacionarna.

Zašto takve raspodjele nazivamo stacionarnima? Pretpostavimo da je π stacionarna raspodjela lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada, uz π kao početnu raspodjelu od $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(X_1 = j) &= \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j \\
\mathbb{P}_\pi(X_2 = j) &= \sum_{i\in S} \pi_i \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj} \\
&= \sum_{k\in S} \left(\sum_{i\in S} \pi_i p_{ik} \right) p_{kj} \\
&= \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\pi_j = \mathbb{P}_\pi(X_1 = j) = \mathbb{P}_\pi(X_2 = j) = \dots, \quad j \in S$$

Odnosno, uz π kao početnu raspodjelu, lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima svojstvo stacionarnosti, tj. njegova raspodjela kroz vrijeme se ne mijenja.

Pogledajmo sada još jednu interpretaciju stacionarne raspodjele π. Neka je $i \in S$ fiksan. U svojstvu (iv) za funkciju f uzmimo

$$f(j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_m = i\}},$$

tj. prosječan broj posjeta stanju i. S druge strane, kad pustimo $n \to \infty$, po svojstvu (iv), to je jednako

$$\sum_{j\in S} f(j)\pi_j = \pi_i.$$

Dakle, broj π_i se može interpretirati kao prosječno vrijeme boravka u stanju i (okupiranost stanja i).

Iz prethodnih razmatranja vidimo da postupak određivanja granične raspodjele, tj. računanja $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, nije prvište zahtjevan. Zbog stacionarnosti od π i činjenice da je π vjerojatnosna raspodjela, postupak se svodi na traženje rješenja sljedećeg sustava:

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S, \\
1 &= \sum_{i\in S} \pi_i.
\end{aligned}$$

Zadatak 5.1. Izračunajte stacionarne raspodjele lanaca danih sljedećim matricama prijelaza:

$$\text{(a)}\quad P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

Rješenje. (a) Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.4\pi_1 + 0.8\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2, \end{aligned}$$

dobijemo da je $\pi_1 = \frac{1}{3}$, $\pi_2 = \frac{2}{3}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{2}{3}.$$

(b) Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.7\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.2\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \end{aligned}$$

dobijemo da je $\pi_1 = \frac{22}{47}$, $\pi_2 = \frac{16}{47}$ i $\pi_3 = \frac{9}{47}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{22}{47}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{16}{47} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} p_{i3}^{(n)} = \frac{9}{47}.$$

(c) Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1-a)\pi_1 + b\pi_2 \\ \pi_2 &= a\pi_1 + (1-b)\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2, \end{aligned}$$

dobijemo da je $\pi_1 = \frac{b}{a+b}$ i $\pi_2 = \frac{a}{a+b}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)} = \frac{b}{a+b} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{a}{a+b}.$$

Napomenimo ovdje da smo u prvom poglavlju izravno izračunali

$$P^n = \frac{1}{a+b}\left(\begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + (1-a-b)^n \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}\right),$$

iz čega ponovno slijede prethodni zaključci. □

Zadatak 5.2. Izračunajte stacionarnu raspodjelu lanca danog sljedećom matricom prijelaza:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Problem možemo riješiti kao i ranije. Međutim, primjetimo da je gornja matrica prijelaza **dvostruko stohastička** (ili **bistohastička**), tj.

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = \sum_{i \in S} p_{ij} = 1.$$

Kod takvih lanaca stacionarna raspodjela je uvijek uniformna

$$\pi_i = \frac{1}{5}, \quad i \in S.$$ □

Općenito, ako je matrica prijelaza Markovljevog lanaca $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sa skupom stanja S dvostruko stohastička, onda je

$$\pi_i = \frac{1}{|S|}, \quad i \in S,$$

gdje $|S|$ označava broj elemenata skupa S.

Zadatak 5.3. Luka igra na poziciji obrambenog igrača u nekoj košarkaškoj momčadi. Njegov broj koševa po utakmici kreće se između tri stanja: 1 (0-1 koš), 2 (2-5 koševa) i 3 (više od 5 koševa). U jednoj utakmici Luka je postigao puno koševa pa su mu na sljedećoj utakmici njegovi ljubomorni kolege odbili dodavati loptu. Stoga je u sljedećoj utakmici Luka postigao 0 ili 1 koš. Timski statističar je nakon razmatranja utvrdio da se Lukin učinak može modelirati Markovljevim lancem koji je dan sljedećom matricom prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte frekvenciju utakmica u kojima Luka postiže puno koševa (stanje 3).

(b) Luka je plaćen po utakmici i to 1000kn po utakmici s puno koševa (stanje 3), 800kn po utakmici s 2-5 koševa (stanje 2) i 600kn po utakmici s 0-1 košem (stanje 1). Kolika je prosječna plaća koju Luka dobiva po utakmici?

Rješenje. Tražimo stacionarnu raspodjelu lanca. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \end{aligned}$$

dobijemo

$$\pi = (0.45, 0.15, 0.4).$$

(a) Postotak utakmica u kojima Luka postiže puno koševa je $\pi_3 = 0.4$.

(b) Definirajmo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 600, & i = 1 \\ 800, & i = 2 \\ 1000, & i = 3. \end{cases}$$

Sada dobijemo da je prosječna Lukina plaća po utakmici

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i f(i) = 790\text{kn}.$$ □

Zadatak 5.4. Jedna marketinška agencija je na temelju istraživanja zaključila da u periodu od 5 godina 8% TV pretplatnika operatera OP odustane od TV pretplate, a 26% novih korisnika se odluči za pretplatu. Provjerite korektnost istraživanja agencije ako znamo sljedeće podatke:

- 1990. g. 56.4% populacije je pretplaćeno na OP
- 1995. g. 63.4% populacije je pretplaćeno na OP
- 2000. g. 68% populacije je pretplaćeno na OP.

Koliki je prosječan broj korisnika operatera OP? Ako pretplata košta 5000kn po razdoblju od pet godina, kolika je prosječna zarada operatera OP po TV korisniku u razdoblju od pet godina?

Rješenje. Pripadna matrica prijelaza je dana s

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.26 & 0.74 \end{bmatrix} \end{array},$$

gdje stanje 1 predstavlja korisnike OP usluge, a stanje 2 korisnike bez OP usluge.
Dakle, ako je 1990. g. 56.4% populacije koristilo OP uslugu, to znači da je početna raspodjela dana s $\lambda = (0.564, 0.436)$. Nakon 5 godina raspodjela će biti jednaka

$$\lambda P = (0.632, 0.368).$$

Nadalje, 1995. g. je 63.4% populacije koristilo OP usluge, pa je početna raspodjela jednaka $\lambda = (0.634, 0.366)$. Sada, nakon 5 godina raspodjela iznosi

$$\lambda P = (0.678, 0.322).$$

Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da su istraživanja agencije bila točna.

Izračunajmo sad pripadnu stacionarnu raspodjelu lanca. Rješavanjem sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.92\pi_1 + 0.26\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.08\pi_1 + 0.74\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2, \end{aligned}$$

dobivamo $\pi_1 = 0.7647$ i $\pi_2 = 0.2353$. Dakle, prosječno 76.47% populacije koristi OP uslugu.

Na kraju, definirajmo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 5000, & i = 1 \\ 0, & i = 2. \end{cases}$$

Sada dobijemo da je prosječna zarada po korisniku jednaka

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \sum_{i=1}^{2} \pi_i f(i) = 3822.5\text{kn}. \qquad \square$$

Zadatak 5.5. Za dionicu autoceste ZG-KA dani su sljedeći statistički podaci: tri od četiri kamiona prati po jedan automobil, dok samo jedan od pet automobila prati jedan kamion. Koliki je postotak kamiona na autocesti? Ako cestarina za taj dio autoceste košta 30kn za automobile i 60kn za kamione, kolika je prosječna zarada po vozilu?

Rješenje. Matrica prijelaza je dana s

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & K \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ K \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Da bismo dobili postotak kamiona na autocesti trebamo izračunati stacionarnu raspodjelu lanca. Nju dobijemo rješavajući sustav

$$\begin{aligned} \pi P &= \pi \\ \pi_A + \pi_K &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\pi = (0.79, 0.21)$, iz čega zaključujemo da su 21% vozila kamioni.

Nadalje, definiramo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 30, & i = A \\ 60, & i = K. \end{cases}$$

Sada dobijemo da je prosječna zarada po vozilu jednaka

$$\pi_A f(A) + \pi_K f(K) = 36.3\,\text{kn}.$$

□

Zadatak 5.6. Ivo ima tri kišobrana. Neke drži u uredu, a neke kod kuće. Kada ujutro kreće na posao ili navečer kući s vjerojatnošću 0.2 pada kiša i u tom slučaju uzima kišobran ako ga ima. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac koji predstavlja broj kišobrana u danom trenutku na danoj lokaciji. Odredite matricu prijelaza lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i prosječno vrijeme koje će Ivo biti bez kišobrana.

Rješenje. Matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Rješavanjem sustava $\pi P = \pi$ dobijemo da je stacionarna raspodjela jednaka

$$\pi = (0.22, 0.26, 0.26, 0.26).$$

Zaključujemo da je prosječno vrijeme koje Ivo provede bez kišobrana $\pi_0 = 0.22$. □

Zadatak 5.7. Luka ima dvije žarulje u garaži. U slučaju kada obje pregore Luka ih obje zamijeni i sutradan ima dvije žarulje u garaži. U slučaju kada obje rade vjerojatnost da će jedna pregorjeti je 0.02 (isključujemo mogućnost da obje pregore isti dan). Kada radi samo jedna, vjerojatnost da će pregorjeti je 0.05. Odredite prosječno vrijeme rada jedne žarulje (postotak vremena rada samo jedne žarulje) i očekivano vrijeme između zamjena žarulja.

Rješenje. Matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.05 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.98 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Iz $\pi P = \pi$ dobijemo da je stacionarna raspodjela jednaka

$$\pi = (0.014, 0.28, 0.706).$$

Zaključujemo da 28% vremena radi jedna žarulja (to je prosječno vrijeme rada jedne žarulje), a da je očekivano vrijeme između zamjena žarulja

$$\mathbb{E}_0(\bar{T}_0) = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{0.014} = 71.428.$$ □

Zadatak 5.8. Statistički podaci kažu da $\frac{1}{3}$ godine u gradu Rijeci pada kiša te da kišni dan slijedi nakon kišnog dana s vjerojatnošću 0.5. Odredite matricu prijelaza pripadnog lanca.

Rješenje. Znamo da je matrica prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ K \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} K & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{array}$$

i da je stacionarna raspodjela $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sada, iz $\pi P = \pi$, slijedi da je $p = 0.25$. □

Zadatak 5.9. Svestrani slikar koristi tri metode u izradi svojih slika:

$$
\begin{aligned}
1 - &\quad \text{akvarel}\\
2 - &\quad \text{ulje na platnu}\\
3 - &\quad \text{mozaik.}
\end{aligned}
$$

Kojom metodom će naslikati sljedeću sliku on odlučuje na temelju matrice prijelaza

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

(a) Ako je njegova prva slika bila akvarel, izračunajte koliki je očekivani broj slika koje će slikar napraviti do prvog sljedećeg akvarela.

(b) Koliki će postotak od ukupnog broja slika činiti ulja na platnu (nakon dugog vremena slikarevog bavljenja slikarstvom)?

(c) Slikar prodaje akvarele za 100kn, ulja na platnu za 1000kn, te mozaike za 700kn. Izračunajte prosječni slikarov dobitak po slici.

Rješenje. (a) Traži se $\mathbb{E}_1(T_1)$ što znamo da je jednako $\frac{1}{\pi_1}$, gdje je $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ stacionarna raspodjela lanca. Rješavanjem sustava

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_3\\
\pi_2 &= 0.5\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.4\pi_3\\
\pi_3 &= 0.2\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3\\
1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3,
\end{aligned}
$$

dobivamo

$$
\pi = \left(\frac{12}{37}, \frac{16}{37}, \frac{9}{37}\right).
$$

Dakle, traženo očekivanje je

$$
\mathbb{E}_1(T_1) = \frac{1}{\pi_1} = \frac{37}{12} \approx 3.083.
$$

(b) Ulja na platnu će činiti $\pi_2 = \frac{16}{37} \approx 43.24\%$ slika.

(c) Definiramo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 100, & i = 1 \\ 1000, & i = 2 \\ 700, & i = 3. \end{cases}$$

Sada dobijemo da je prosječni dobitak po slici jednak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i f(i) = \frac{23500}{37}\text{kn} \approx 635.14\text{kn}. \qquad \square$$

Zadatak 5.10. Na blagdanskom stolu jedne obitelji nalaze se kolači u vrlo velikim količinama. Osoba A konzumira samo 4 vrste kolača: sirne štrukle (stanje 1), orehnjaču (stanje 2), čupavce (stanje 3) te ledene kocke (stanje 4) i to slučajnim izborom na osnovi matrice prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Ako je poznato da je osoba A prvo konzumirala sirne štrukle, izračunajte očekivani broj pojedenih kolača do ponovne konzumacije sirnih štrukli.

(b) Odredite postotak konzumacije orehnjače (nakon dugog vremena jedenja).

Rješenje. (a) Traži se opet $\mathbb{E}_1(T_1)$ što znamo da je jednako $\frac{1}{\pi_1}$, gdje je $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ stacionarna raspodjela lanca. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.2\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.2\pi_4 \\ \pi_2 &= 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.2\pi_3 + 0.1\pi_4 \\ \pi_3 &= 0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.6\pi_3 + 0.3\pi_4 \\ \pi_4 &= 0.2\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 + 0.4\pi_4 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\pi = \left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{5}{11}, \frac{3}{11}\right).$$

Dakle, traženo očekivanje je

$$\mathbb{E}_1(T_1) = \frac{1}{\pi_1} = 11.$$

(b) Postotak konzumacije orehnjače osobe A je $\pi_2 = \frac{2}{11} \approx 18.18\%$. $\square$

Zadatak 5.11. Svake noći jedan od tri vojnika (nazovimo ih jednostavno A, B i C) mora ostati budan i čuvati stražu. Izbor stražara određuje se slučajno, ovisno o tome koji od njih je stražario protekle noći, i to prema matrici prijelaznih vjerojatnosti

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

(a) Nakon stražarenja vojnika B koje je očekivano vrijeme (u danima) do njegovog ponovnog poziva na stražu?

(b) Koliki udio stražarenja će odraditi vojnik A (nakon mnogo vremena)?

Rješenje. (a) Traži se $\mathbb{E}_B(T_B)$ (očekivanje vremena prvog povratka u stanje B) što znamo da je jednako $\frac{1}{\pi_B}$, gdje je $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$ stacionarna raspodjela lanca. Rješavanjem sustava

$$
\begin{aligned}
\pi_A &= \frac{2}{3}\pi_B + \frac{1}{3}\pi_C \\
\pi_B &= \frac{1}{3}\pi_A + \frac{1}{3}\pi_C \\
\pi_C &= \frac{2}{3}\pi_A + \frac{1}{3}\pi_B + \frac{1}{3}\pi_C \\
1 &= \pi_A + \pi_B + \pi_C,
\end{aligned}
$$

dobivamo

$$
\pi = \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{7}{16}\right).
$$

Dakle, traženo očekivanje je

$$
\mathbb{E}_B(T_B) = \frac{1}{\pi_B} = 4.
$$

(b) Vojnik A će odraditi $\pi_A = \frac{5}{16} = 31.25\%$ stražarenja. $\square$

Zadatak 5.12. Čamac svaki dan plovi s jedne na drugu obalu rijeke, vozi samo jednom i u samo jednom smjeru, a može povesti najviše jednog putnika. U tom kraju živi samo dvoje mještana, koji se na početku nalaze na istoj strani rijeke kao i čamac. Svakog jutra, ukoliko ima (barem jednog) mještana na istoj strani rijeke, onda čamac s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ prevozi jednog od njih, a s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ ne uzima putnika. Ukoliko pak nema mještana na istoj strani rijeke, onda čamac vozi bez putnika.

(a) Koliki udio vremena će se dva mještana nalaziti na različitim stranama rijeke?

(b) Kolika je vjerojatnost da će nakon trećeg dana mještani biti na različitim stranama rijeke?

Rješenje. Problem ćemo modelirati kao Markovljev lanac s tri stanja: 0, 1 i 2, koja označavaju broj mještana koji se tog jutra nalaze na istoj obali rijeke kao i čamac. Matrica prijelaza je sljedeća:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Da bismo dobili udio vremena koji mještani provedu na različitim stranama rijeke trebamo prvo izračunati stacionarnu raspodjelu lanca π. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 &= \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Sad je traženi udio $\pi_1 = \frac{2}{5}$, tj. 40%.

(b) Mještani se nalaze na različitim stranama točno onda kad je Markovljev lanac u stanju 1. Na početku je lanac u stanju 2. Iz

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \end{array}$$

odmah očitamo

$$\mathbb{P}(X_3 = 1 | X_0 = 2) = p_{21}^{(3)} = \frac{1}{2}.$$

Ovaj dio zadatka može se riješiti i klasičnim putem, bez matrice prijelaza. Tri su mogućnosti: ili čamac prva dva dana ne prevozi nikoga, a treći dan poveze jednog mještana; ili čamac prvi dan ima putnika, a ostala dva dana ne; ili čamac sva tri dana prevozi po jednog putnika. Vjerojatnost za to je:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Poglavlje 6

Reverzibilnost

Za Markovljev lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ kažemo da je **reverzibilan** ako postoji raspodjela π za koju vrijedi stri

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \quad i, j \in S.$$

Također, za tu raspodjelu kažemo da je **detaljno uravnotežena**. Uočimo da reverzibilnost znači da se uz početnu raspodjelu π, raspodjela lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ unaprijed podudara s raspodjelom unazad. Preciznije, ako π_i označava količinu informacije (materije) u stanju i, a p_{ij} je proporcija informacije (materije) koja se prenosi iz stanja i u stanje j, onda gornja relacija kaže da se jednaka količina informacije (materije) prenese iz stanja i u stanje j i iz stanja j u stanje j. Dakle, sustav ostaje u ravnoteži.

Nadalje, uočimo da ta relacija također povlači da je raspodjela π u biti stacionarna raspodjela. Zaista, imamo

$$\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i\in S} \pi_j p_{ji} = \pi_j \underbrace{\sum_{i\in S} p_{ji}}_{=1} = \pi_j.$$

Zadatak 6.1. Ispitajte reverzibilnost lanaca danih matricama prijelaza:

$$\text{(a) } P_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } P_2 = [p_{ij}] \text{ i } p_{ij} = p_{ji}.$$

Rješenje. (a) Tražimo stacionarnu raspodjelu. Iz $\pi P = \pi$ dobivamo da je

$$\pi = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right).$$

Sada se lako provjeri da relacija detaljne uravnoteženosti vrijedi za sve $i, j \in S$.

(b) Pripadna matica prijelaza P_2 je simetrična

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Dakle, P_2 je dvostruko stohastička matrica pa je pripadna stacionarna raspodjela uniformna, tj.

$$\pi = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Sad zbog $p_{ij} = p_{ji}$ relacija detaljne uravnoteženosti slijedi izravno. □

Zadatak 6.2. Ispitajte reverzibilnost lanca zadanog matricom prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Prvo računamo pripadnu stacionarnu raspodjelu. Matrica P je dvostruko stohastička pa je

$$\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Budući da je

$$\pi_1 p_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \pi_2 p_{21}$$

zaključujemo da lanac nije reverzibilan. □

Zadatak 6.3. Svaki dan zeko obilazi svoje područje u potrazi za raznovrsnom hranom. Njegova omiljena poslastica je mrkva. Ako je vedro vrijeme (stanje V) on pojede šest mrkvi, ako je kišovito vrijeme (stanje K) dvije mrkve, a ako je oblačno vrijeme (stanje O) tri mrkve. Matrica prijelaza tipa vremena po danima je dana s

$$P = \begin{array}{c} \\ V \\ K \\ O \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & K & O \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(a) Izračunajte postotak oblačnih dana (dugoročno gledajući).

(b) Izračunajte prosječan broj mrkvi koje zeko dnevno pojede.

(c) Ispitajte je li promatrani Markovljev lanac reverzibilan.

Rješenje. (a) Da bismo dobili postotak oblačnih dana trebamo prvo izračunati stacionarnu raspodjelu lanca. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \pi_V &= 0.5\pi_V + 0.4\pi_K + 0.2\pi_O \\ \pi_K &= 0.2\pi_V + 0.3\pi_K + 0.5\pi_O \\ \pi_O &= 0.3\pi_V + 0.3\pi_K + 0.3\pi_O \\ 1 &= \pi_V + \pi_K + \pi_O, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\pi = \left(\frac{34}{90}, \frac{29}{90}, \frac{27}{90}\right).$$

Dakle, ima $\pi_O = \frac{27}{90} \approx 30\%$ oblačnih dana.

(b) Definiramo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 6, & i = V \\ 2, & i = K \\ 3, & i = O. \end{cases}$$

Sad dobijemo da je prosječan broj mrkvi koje zeko dnevno pojede jednak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \frac{343}{90} \approx 3.81.$$

(c) Lanac je reverzibilan ako vrijedi relacija detaljne uravnoteženost. Kako je

$$p_{VK}\pi_V = 0.2 \cdot \frac{34}{90} \neq 0.4 \cdot \frac{29}{90} = p_{KV}\pi_K,$$

vidimo da tražena relacija nije zadovoljena, tj. lanac nije reverzibilan. □

Zadatak 6.4. Mali genijalac Dexter po cijele dana provodi u svom laboratoriju radeći pokuse. Ishod njegovog pokusa može biti: uspješan (stanje 1), neuspješan (stanje 2) i neočekivan (stanje 3). Dexterovo vršenje pokusa modeliramo Markovljevim lancem s matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Početna raspodjela lanca je $\lambda = (0.6, 0.3, 0.1)$.

(a) Klasificirajte stanja Markovljevog lanca.

(b) Izračunajte očekivano vrijeme do pojave prvog pokusa s neočekivanim ishodom.

(c) Izračunajte očekivano vrijeme između dva uzastopna pokusa s neočekivanim ishodom.

(d) Izračunajte postotak neuspješnih pokusa (nakon dugo vremena provedenog u laboratoriju).

(e) Dexter posjeduje i zavidne marketinške sposobnosti pa svoja otkrića zna dobro plasirati na tržištu. Stoga mu svaki uspješan pokus donosi profit od 360\$, svaki neuspješan gubitak od 90\$, a svaki pokus s neočekivanim ishodom profit od 600\$. Izračunajte Dexterov prosječni dobitak.

(f) Je li zadani Markovljev lanac reverzibilan?

Rješenje. (a) Lanac je očito ireducibilan, pa je stoga i povratan. Lako se vidi i da je lanac aperiodičan (zbog $p_{11} > 0$ je period od stanja 1 jednak 1).

(b) Definirajmo funkciju $g\colon S \to \mathbb{R}$ s $g(i) = \mathbb{E}_i(T_3)$ (očekivano vrijeme do pojave prvog pokusa s neočekivanim ishodom ako smo krenuli iz stanja i). Očito vrijedi $g(3) = 0$ i $g(i) = 1 + \sum_{j\in S} p_{ij} g(j)$ za $i \in S \setminus \{3\}$. Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 + 0.6g(1) + 0.2g(2) \\ g(2) &= 1 + 0.5g(1) + 0.3g(2), \end{aligned}$$

čije rješenje je $g(1) = 5$ i $g(2) = 5$. Dakle, očekivano vrijeme do pojave prvog pokusa s neočekivanim ishodom je

$$\mathbb{E}(T_3) = \sum_{i\in S} \lambda_i \mathbb{E}_i(T_3) = \sum_{i\in S} \lambda_i g(i) = \frac{9}{2} = 4.5.$$

(c) Tražimo $\mathbb{E}_3(T_3)$ (ovdje slučajna varijabla T_3 predstavlja prvo vrijeme povratka u stanje 3) što znamo da je jednako $\frac{1}{\pi_3}$, gdje je $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$

stacionarna raspodjela lanca. Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0.6\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.4\pi_3\\ \pi_2 &= 0.2\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3\\ \pi_3 &= 0.2\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.4\pi_3\\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3,\end{aligned}$$

dobivamo

$$\pi = \left(\frac{19}{36}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}\right).$$

Dakle, traženo očekivanje je

$$\mathbb{E}_3(T_3) = \frac{1}{\pi_3} = 4.$$

(d) Postotak neuspješnih pokusa je $\pi_2 = \frac{2}{9} \approx 22.22\%$.

(e) Definiramo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ s

$$f(i) = \begin{cases} 360, & i = 1\\ -90, & i = 2\\ 600, & i = 3\end{cases}$$

Sad dobijemo da je prosječan Dexterov dobitak po pokusu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(X_m) = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = 320\$.$$

(f) Kako je

$$\pi_3 p_{32} = \frac{1}{4} \cdot 0.2 \neq \frac{2}{9} \cdot 0.2 = \pi_2 p_{23}$$

zaključujemo da lanac nije reverzibilan. □

Reverzibilni Markovljevi lanci se prirodno pojavljuju uz probleme toka/ transporta na mrežama. **Mreža** je konačan skup vrhova koji su međusobno povezani bridovima (ne nužno svaki sa svakim) i kod koje svaki brid ima svoju karakteristiku zvanu **provodljivost** za koju vrijedi

$$c_{ij} = c_{ji} \geqslant 0.$$

Dakle, provodljivost od vrha i prema vrhu j je jednaka kao provodljivost od vrha j prema i (usporedi s reverzibilnošću). Nadalje, $c_{ij} = 0$ ako, i samo ako, vrhovi i i j nisu spojeni bridom. **Kapacitet** pojedinog vrha definira se s

$$c_i = \sum_{j\in S} c_{ij}.$$

Izdvojimo sad iz mreže dva vrha A i B koji će predstavljati ulaz i izlaz na mreži (na A i B priključujemo bateriju, dovodimo i odvodimo neki fluid, A je dostavljač, a B naručitelj robe itd.). Dakle, na vrhove A i B dovodimo potencijal i to tako da vrh A ima potencijal 1, a vrh B potencijal 0. Kao posljedicu toga na svakom vrhu i imamo potencijal ϕ_i.

Struja ili **tok** je veličina koju definiramo s

$$\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j) \quad (\textbf{Ohmov zakon}).$$

Uočimo da je $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, tj. tok iz i u j je jednak po iznosu, ali različit po smjeru, od toka iz j u i. Prirodno je i pretpostaviti da je

$$\sum_{j \in S} \gamma_{ij} = 0, \quad i \notin \{A, B\} \quad (\textbf{Kirchhoffov zakon}).$$

Za konkretnu mrežu, uz dane potencijale $\phi_A = 1$ i $\phi_B = 0$ te provodljivost c_{ij}, zanimat će nas potencijali ostalih vrhova ϕ_i. Ako mrežu između A i B promatramo kao jedan vodič, zanimat će nas i vodljivost tog vodiča, tzv. **efektivna vodljivost** C_{AB} (ili **efektivni otpor** $R_{AB} = \frac{1}{C_{AB}}$).

Ideja je vjerojatnosno sagledati ovaj problem. Definirajmo Markovljev lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sa skupom stanja točno jednakim skupu vrhova mreže i s matricom prijelaza

$$P = [p_{ij}], \qquad p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

Lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je reverzibilan. Zaista, ako stavimo da je $c = \sum_i c_i$ i $\pi_i = \frac{c_i}{c}$ imamo

$$\pi_i p_{ij} = \frac{c_i}{c} \cdot \frac{c_{ij}}{c_i} = \frac{c_{ij}}{c} = \frac{c_{ji}}{c} = \frac{c_j}{c} \cdot \frac{c_{ji}}{c_j} = \pi_j p_{ji}.$$

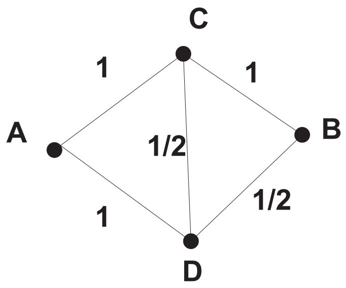
Nadalje, može se pokazati da vrijedi sljedeće:

(i) $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$ za sve $i \in S$

(ii) $C_{AB} = \frac{\gamma_A}{\phi_A - \phi_B}$

(iii) $\mathbb{P}_A(T_B < \bar{T}_A) = \frac{\gamma_A}{c_A}$.

Zadatak 6.5. Kroz strujni krug puštamo napon od 1V tako da je $\phi_A = 1$ i $\phi_B = 0$. Otpori na pojedinim žicama su zapisani na odgovarajućim bridovima mreže.



(a) Odredite kapacitete vrhova i pripadnu matricu prijelaza.

(b) Odredite tokove struje za vrh C.

(c) Odredite efektivni otpor.

(d) Odredite vjerojatnost da pripadni lanac na gornjoj mreži koji kreće iz vrha A stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A.

Rješenje. (a) Prvo računamo kapacitete vrhova

$$c_A = 2, \quad c_B = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3, \quad c_C = 1 + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4, \quad c_D = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5.$$

Dakle, pripadna matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

(b) Imamo $\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)$, $\phi_A = 1$, $\phi_B = 0$ i $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ s $h(i) := \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Vrijedi $h(A) = 1$, $h(B) = 0$ i $h(i) = \sum_j p_{ij} h(j)$ za $i \notin \{A, B\}$. Dobili smo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} h(C) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} h(D) \\ h(D) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} h(C), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(C) = \frac{7}{16}$ i $h(D) = \frac{3}{8}$. Dakle, $\phi_C = \frac{7}{16}$ i $\phi_D = \frac{3}{8}$. Sada slijedi da je

$$\gamma_{CA} = -\frac{9}{16}, \quad \gamma_{CD} = \frac{2}{16} \quad \text{i} \quad \gamma_{CB} = \frac{7}{16}.$$

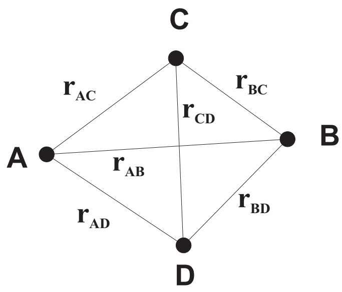
(c) Efektivni otpor je

$$R_{AB} = \frac{1}{\gamma_A} = \frac{1}{\gamma_{AC} + \gamma_{AD}} = \frac{1}{\frac{9}{16} + \frac{5}{8}} = \frac{16}{19}.$$

(d) Vjerojatnost da lanac stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A je

$$\mathbb{P}_A(T_B < \bar{T}_A) = \frac{\gamma_A}{c_A} = \frac{\frac{19}{16}}{2} = \frac{19}{32}.$$ □

Zadatak 6.6. Dana je mreža vodovodnih cijevi kao na slici. Duljina svake cijevi je 1 i odgovarajući polumjeri cijevi su zapisani na pripadajućim bridovima mreže. Pretpostavimo da se u vrh A pustila količina tekućine jednaka 1 koja izlazi iz vrha B.



$$r_{AC} = r_{CD} = r_{BD} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad r_{AB} = r_{BC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad r_{AD} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

(a) Odredite kapacitete vrhova i pripadnu matricu prijelaza.

(b) Odredite tokove tekućine za vrh D.

(c) Odredite efektivni kapacitet.

(d) Odredite vjerojatnost da pripadni lanac koji kreće iz vrha A stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A.

Rješenje. Uočimo prvo da su pripadne provodljivosti cijevi dane s $c_{ij} = r_{ij}^2 \pi$. Dakle,

$$c_{AC} = 1, \quad c_{AD} = 3, \quad c_{AB} = 2, \quad c_{CD} = 1, \quad c_{CB} = 2, \quad c_{BD} = 1.$$

(a) Prvo računamo kapacitete vrhova

$$c_A = 6, \quad c_B = 5, \quad c_C = 4, \quad c_D = 5.$$

Sada zaključujemo da je matrica prijelaza dana s

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

(b) Imamo $\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)$, $\phi_A = 1$, $\phi_B = 0$ i $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ s $h(i) := \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Vrijedi $h(A) = 1$, $h(B) = 0$ i $h(i) = \sum_j p_{ij}h(j)$ za $i \notin \{A, B\}$. Dobili smo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} h(C) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h(D) \\ h(D) &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}h(C), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(C) = \frac{8}{19}$ i $h(D) = \frac{13}{19}$. Dakle, $\phi_C = \frac{8}{19}$ i $\phi_D = \frac{13}{19}$. Sada slijedi da je

$$\gamma_{DA} = -\frac{18}{19}, \quad \gamma_{DC} = \frac{5}{19} \quad \text{i} \quad \gamma_{DB} = \frac{13}{19}.$$

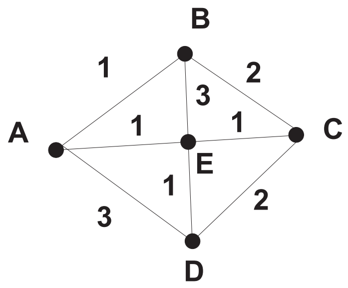
(c) Efektivni kapacitet je

$$C_{AB} = \gamma_A = \gamma_{AC} + \gamma_{AB} + \gamma_{AD} = \frac{11}{19} + 2 + \frac{18}{19} = \frac{67}{19}.$$

(d) Vjerojatnost da lanac stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A je

$$\mathbb{P}_A(T_B < \bar{T}_A) = \frac{\gamma_A}{c_A} = \frac{\frac{67}{19}}{6} = \frac{67}{114}. \qquad \square$$

Zadatak 6.7. Mreža prometnica s pripadnim kapacitetima je dana na slici. Pretpostavimo da u vrh A ulazi 1 vozilo (količina 1) koje izlazi iz vrha B.



(a) Odredite kapacitete vrhova i pripadnu matricu prijelaza.

(b) Odredite tokove vozila za vrh E.

(c) Odredite efektivni kapacitet.

(d) Odredite vjerojatnost da pripadni lanac na gornjoj mreži koji kreće iz vrha A stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A.

Rješenje. (a) Prvo računamo kapacitete vrhova

$$c_A = 5, \quad c_B = 6, \quad c_C = 5, \quad c_D = 6, \quad c_E = 6,$$

iz čega dobivamo matricu prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

(b) Imamo $\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)$, $\phi_A = 1$, $\phi_B = 0$ i $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ s $h(i) := \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Vrijedi $h(A) = 1$, $h(B) = 0$ i $h(i) = \sum_j p_{ij}h(j)$ za $i \notin \{A, B\}$. Dobili smo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} h(C) &= \frac{2}{5}h(D) + \frac{1}{5}h(E) \\ h(D) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}h(C) + \frac{1}{6}h(E) \\ h(E) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}h(C) + \frac{1}{6}h(D), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(C) = \frac{1}{3}$, $h(D) = \frac{2}{3}$ i $h(E) = \frac{1}{3}$. Dakle, $\phi_C = \frac{1}{3}$, $\phi_D = \frac{2}{3}$ i $\phi_E = \frac{1}{3}$. Sada slijedi da je

$$\gamma_{EA} = -\frac{2}{3}, \quad \gamma_{EB} = 1, \quad \gamma_{EC} = 0 \quad \text{i} \quad \gamma_{ED} = -\frac{1}{3}.$$

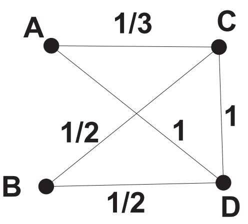
(c) Efektivni kapacitet je

$$C_{AB} = \gamma_A = \gamma_{AE} + \gamma_{AB} + \gamma_{AD} = \frac{2}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}.$$

(d) Vjerojatnost da lanac stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A je

$$\mathbb{P}_A(T_B < \bar{T}_A) = \frac{\gamma_A}{c_A} = \frac{\frac{8}{3}}{5} = \frac{8}{15}. \qquad \square$$

Zadatak 6.8. Kroz strujni krug puštamo napon od 1V tako da je $\phi_A = 1$ i $\phi_B = 0$. Otpori na pojedinim žicama su zapisani na odgovarajućim bridovima mreže.



(a) Odredite kapacitete vrhova i pripadnu matricu prijelaza.

(b) Odredite tokove struje za vrh D.

(c) Odredite efektivni otpor.

(d) Odredite vjerojatnost da pripadni lanac na gornjoj mreži koji kreće iz vrha A stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A.

Rješenje. (a) Prvo računamo kapacitete vrhova

$$c_A = 4, \quad c_B = 4, \quad c_C = 6, \quad c_D = 4.$$

Sada zaključujemo da je matrica prijelaza dana s

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}.$$

(b) Imamo $\gamma_{ij} = c_{ij}(\phi_i - \phi_j)$, $\phi_A = 1$, $\phi_B = 0$ i $\phi_i = \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$. Definirajmo funkciju $h\colon S \to \mathbb{R}$ s $h(i) := \mathbb{P}_i(T_A < T_B)$ (vjerojatnost da smo u vrh A stigli prije nego u vrh B ako smo krenuli iz vrha i). Vrijedi $h(A) = 1$, $h(B) = 0$ i $h(i) = \sum_j p_{ij} h(j)$ za $i \notin \{A, B\}$. Dobili smo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} h(C) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} h(D) \\ h(D) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} h(C), \end{aligned}$$

čije rješenje je $h(C) = \frac{13}{23}$ i $h(D) = \frac{9}{23}$. Dakle, $\phi_C = \frac{13}{23}$ i $\phi_D = \frac{9}{23}$. Sada slijedi da je

$$\gamma_{DA} = -\frac{14}{23}, \quad \gamma_{DB} = \frac{18}{23} \quad \text{i} \quad \gamma_{DC} = -\frac{4}{23}.$$

(c) Efektivni otpor je

$$R_{AB} = \frac{1}{\gamma_A} = \frac{1}{\gamma_{AC} + \gamma_{AD}} = \frac{1}{\frac{30}{23} + \frac{14}{23}} = \frac{23}{44}.$$

(d) Vjerojatnost da lanac stigne u vrh B prije nego se vrati nazad u vrh A je

$$\mathbb{P}_A(T_B < \bar{T}_A) = \frac{\gamma_A}{c_A} = \frac{\frac{44}{23}}{4} = \frac{11}{23}.$$ $\square$

Poglavlje 7

Beskonačni skup stanja

U slučaju kada je skup stanja lanca $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ beskonačan (ali prebrojiv), njegova priroda ponašanja je vrlo slična kao i u slučaju konačnog skupa stanja. Dakle, kada je skup stanja S beskonačan, konačnu matricu prijelaza zamijenjujemo beskonačnom matricom prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Nadalje, ako na primjer želimo izračunati $p_{ij}^{(2)}$, opet vrijedi

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in S} p_{ik}p_{kj}.$$

Međutim, u ovom slučaju se ne radi o konačnoj sumi, već o redu. Jasno je da i u slučaju beskonačnog skupa stanja vrijedi Chapman-Kolmogorovljeva jednakost, pojam povratnosti, prolaznosti, komuniciranja, ireducibilnosti i periodičnosti. Također, skup stanja S može dekomponirati kao

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots,$$

gdje je T skup prolaznih stanja, a C_i su zatvoreni ireducibilni skupovi povratnih stanja. Uočimo da zbog beskonačnosti skupa stanja S, skupovi $T, C_1, C_2, \ldots$ ne moraju biti svi konačni i da skupova C_i može biti beskonačan broj. Dekompozicija se može izvršiti kao i ranije. Preciznije, stavimo

$$\bar{T} = \{i \in S : \text{ postoji } j \in S \text{ t.d. } i \to j, \text{ ali } j \not\to i\}.$$

Dakle, $\bar{T}$ sadrži prolazna stanja, ali ne nužno sva kao u slučaju konačnog skupa stanja. Nadalje, za proizvoljan $i \in S \setminus \bar{T}$ stavimo

$$\bar{C}_1 = \{j \in S : i \leftrightarrow j\}$$

te za $i \in S \setminus \{\bar{T} \cup \bar{C}_1\}$ stavimo

$$\bar{C}_2 = \{j \in S : i \leftrightarrow j\},$$

itd. Na ovaj način dobijemo niz ireducibilnih i zatvorenih skupova $\bar{C}_i$. Međutim, ti skupovi ne moraju biti povratni kao što ćemo pokazati u primjeru dolje. Kao i ranije, vrijedi da ako je stanje i povratno i $i \leftrightarrow j$, onda je i stanje j povratno. Analogna tvrdnja vrijedi i za prolazna stanja. Sada stavimo

$$T = \bar{T} \bigcup_{\bar{C}_i \text{ prolazni}} \bar{C}_i,$$

a ostatak $\bar{C}_i$ preimenujemo u C_i. Time smo dobili traženu dekompoziciju.

Vratimo se sad tvrdnji da ireducibilan i zatvoren lanac s beskonačnim skupom stanja ne mora biti povratan (kao i u slučaju konačnog skupa stanja). Neka je X_i, $i \in \mathbb{N}$, niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Definirajmo novi proces s

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proces $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ nazivamo **slučajna šetnja**. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X_i, $i \in \mathbb{N}$, svaka slučajna šetnja je Markovljev lanac. Nadalje, pretpostavimo da je raspodjela slučajnih varijabli X_i, $i \in \mathbb{N}$, dana s

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Takvu slučajnu šetnju nazivamo **jednostavnom slučajnom šetnjom**. Jasno je da je skup stanja $\mathbb{Z}$ i u slučaju kada je $0 < p < 1$, $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je ireducibilan Markovljev lanac. Zanimljivo da $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ može biti povratan i prolazan Markovljev lanac, ovisno o vrijednosti p. Sjetimo se zakona velikih brojeva koji kaže da je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[X_1] = 1 - 2p.$$

Dakle, ako je $p \neq \frac{1}{2}$, onda je $1 - 2p \neq 0$ i za velike $n \in \mathbb{N}$ je $S_n \approx n(1 - 2p)$. Iz toga možemo zaključiti da je $\{S_n\}$ prolazan lanac. S druge strane, kad je $p = \frac{1}{2}$ može se pokazati da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

pa koristeći karakterizaciju povratnosti zaključujemo da je $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ povratan lanac. Dakle, u slučaju beskonačnog skupa stanja ireducibilnost i zatvorenost lanca ne impliciraju povratnost.

Nadalje, u slučaju lanca s konačnim skupom stanja vidjeli smo da ako je lanac ireducibilan i aperiodičan (dakle sva stanja su povratna), onda postoji jedinstvena stacionarna raspodjela π za koju vrijedi

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_j(T_j)} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i,j \in S.$$

Međutim, u slučaju kad je skup stanja beskonačan to ne mora vrijediti. Problem je što očekivano vrijeme povratka u stanje i ako smo krenuli iz i, $\mathbb{E}_i(T_i)$, može biti beskonačno, za razliku od slučaja s konačnim skupom stanja. Uočimo da je za prolazno stanje i očekivanje $\mathbb{E}_i(T_i) = \infty$ neovisno o tome je li skup stanja konačan ili beskonačan.

Za lance s beskonačnim skupom stanja vrijedi sljedeće:

(i) ako je lanac ireducibilan, aperiodičan i ako su mu sva stanja povratna (tj. lanac je povratan), onda lanac ima stacionarnu mjeru ν koja je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu. To znači da ako je ν stacionarna mjera lanca, tj. mjera za koju vrijedi

$$\nu P = \nu,$$

onda je i $c\nu$ stacionarna mjera lanca i to za svaki $c > 0$. Napomenimo da ν ne mora biti konačna (vjerojatnosna) mjera.

(ii) ako još uz prtpostavke iz (i) vrijedi da je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ za svaki $i \in S$, onda postoji jedinstvena stacionarna raspodjela π za koju vrijedi

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbb{E}_j(T_j)} \qquad \text{i} \qquad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad i,j \in S.$$

U biti se može pokazati da je dovoljno zahtijevati da je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ za barem jedan $i \in S$, jer onda to implicira da je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ za sve $i \in S$.

(iii) ako lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima stacionarnu raspodjelu, onda uz pretpostavku ireducibilnosti i aperiodičnosti vrijedi

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \frac{1}{\pi_i}, \quad i \in S.$$

Dakle, $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ za sve $i \in S$ i imamo ekvivalenciju s tvrdnjom iz (ii).

Nakon gornjih razmatranja pojam povratnosti možemo još malo detaljnije razložiti. Za povratno stanje $i \in S$ kažemo da je **nul-povratno** ako je $\mathbb{E}_i(T_i) = \infty$, odnosno **pozitivno povratno** ako je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$. Na primjer, uočimo da su u slučaju jednostavne simetrične slučajne šetnje ($p = \frac{1}{2}$) sva stanja nul-povratna. Zaista, očito je mjera dana s

$$\nu_i = 1, \quad i \in \mathbb{Z},$$

stacionarna mjera za $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sada zbog jedinstvenosti stacionarne mjere do na multiplikativnu konstantu zaključujemo da sve stacionarne mjere za $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljavaju

$$\sum_{i\in S} \nu_i = \infty.$$

Dakle, lanac $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ne može biti pozitivno povratan.

Primjer 7.1 (**Reflektirajuća slučajna šetnja**)**.** Neka je $0 < p < 1$ proizvoljan. Zamislimo materijalnu točku koja se giba po skupu $\mathbb{N}_0$ tako da skače udesno s vjerojatnošću p i skače ulijevo s vjerojatnošću $1-p$. Dakle, imamo Markovljev lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sa skupom stanja $\mathbb{N}_0$ i sa sljedećim vjerojatnostima prijelaza:

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= p, \quad i \in \mathbb{N}_0, \\ p_{i,i-1} &= 1-p, \quad i \in \mathbb{N}, \\ p_{00} &= 1-p. \end{aligned}$$

Lagano se vidi da pripadna stacionarna mjera ν zadovoljava:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{p}{1-p}\nu_0 \\ \nu_2 &= \frac{p}{1-p}\nu_1 \\ &\vdots \\ \nu_{i+1} &= \frac{p}{1-p}\nu_i, \quad i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Dakle, $\nu_{i+1} = \frac{p}{1-p}\nu_i$. Ako sad označimo s $c = \nu_0$ dobivamo

$$\nu_{i+1} = \frac{p}{1-p}\nu_i = \frac{p^2}{(1-p)^2}\nu_{i-1} = \cdots = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{i+1}\nu_0 = c\left(\frac{p}{1-p}\right)^{i+1}.$$

Kako je $0 < p < 1$, jasno je da je lanac ireducibilan i aperiodičan. Dakle, da bismo klasificirali lanac $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dovoljno je promatrati red $\sum_{i\in\mathbb{N}_0}\nu_i$. Taj red je geometrijski i imamo tri slučaja:

(i) ako je $p < \frac{1}{2}$, onda je $\frac{p}{1-p} < 1$. Dakle, $\sum_{i \in S} \nu_i < \infty$. Prikladnim izborom konstante c ($c = \frac{1-2p}{1-p}$) dobivamo $\sum_{i \in S} \nu_i = 1$, tj. lanac $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ima stacionarnu raspodjelu pa zaključujemo da je pozitivno povratan.

(ii) ako je $p > \frac{1}{2}$, onda je $\frac{p}{1-p} > 1$. Dakle, $\sum_{i \in S} \nu_i = \infty$ i može se pokazati da je lanac prolazan.

(iii) ako je $p = \frac{1}{2}$, onda je $\frac{p}{1-p} = 1$ i $\sum_{i \in S} \nu_i = \infty$. Međutim, to ne znači da je lanac prolazan. Naime, može se pokazati da je povratan i $\mathbb{E}_0(T_0) = \infty$. Dakle, lanac je nul-povratan.

Primjer 7.2 (Proces grananja). Promatramo neku populaciju u kojoj u n-toj generaciji svaka jedinka nezavisno daje potomke (k potomaka koji su članovi $(n+1)$-ve generacije) s vjerojatnošću p_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Broj članova populacije u trenutku n je X_n. Dakle, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je Markovljev lanac sa skupom stanja $\mathbb{N}_0$ i vjerojatnostima prijelaza

$$
\begin{aligned}
&p_{00} = 1 \\
&p_{ij} = \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_i = j), \quad i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}
$$

gdje su slučajne varijable $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ nezavisne i jednako distribuirane i vrijedi

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = p_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zanima nas vjerojatnost da će populacija izumrijeti. Stavimo

$$\mu = \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k.$$

Dakle, μ je očekivani broj potomaka jedne jedinke. U slučaju kad je $\mu < 1$, može se pokazati da populacija izumire s vjerojatnošću 1.

Pretpostavimo sad da je $\mu \geqslant 1$. Neka je ρ vjerojatnost da populacija izumre ako je $X_0 = 1$. Tada vrijedi

$$\rho = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \rho^k$$

(vjerojatnost da je X_1 jednaka k je p_k, a vjerojatnost da njihovi potomci izumru je ρ^k). Vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Vjerojatnost izumiranja populacije je najmanje rješenje jednadžbe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad x \in [0,1].$$

(ii) Ako je $\mu > 1$, onda je $\rho < 1$.

(iii) Ako je $\mu = 1$, onda je $\rho = 1$ (ovdje isključujemo slučaj $p_1 = 1$).

Zadatak 7.1. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ proces granjanja s $p_0 = 1 - p$ i $p_2 = p$, $p \in [0,1]$. Diskutirajte izumiranje populacije.

Rješenje. Promatramo jednadžbu

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k = 1 - p + px^2.$$

Lako se provjeri da su rješanja tražene jednadžbe $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1-p}{p}$ kada je $p \neq 0$ te $x = 1$ kada je $p = 0$. Dakle, za $p \leqslant \frac{1}{2}$ je vjerojatnost izumiranja 1, a za $p > \frac{1}{2}$ je vjerojatnost izumiranja $\frac{1-p}{p}$. □

Označimo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

Tada vrijedi:

(i) $\mathbb{E}(X_1) = P'(1)$

(ii) $\mathbb{E}(X_n) = (\underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ puta}})'(1)$.

Zadatak 7.2. Neka inicijalna krvna kultura starta s jednom crvenom krvnom stanicom. U danoj jedinici vremena crvena stanica odumire i biva zamjenjena s 2 crvene stanice s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$, s 1 crvenom i 1 bijelom stanicom s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$ i s 2 bijele stanice s vjerojatnošću $\frac{1}{12}$. Svaka crvena stanica reproducira se na opisani način, dok svaka bijela stanica odumire u danoj vremenskoj jedinici bez reprodukcije. Izračunajte vjerojatnost izumiranja kulture i očekivani broj crvenih krvnih stanica u drugoj generaciji.

Rješenje. Imamo $p_0 = \frac{1}{12}$, $p_1 = \frac{2}{3}$ i $p_2 = \frac{1}{4}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{6} > 1.$$

Tražimo rješenje od

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2.$$

Dobijemo $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{3}$. Dakle, vjerojatnost izumiranja populacije je $\frac{1}{3}$.

Izračunajmo još i očekivani broj crvenih krvnih stanica u drugoj generaciji. Imamo, $P(x) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2$ pa je

$$P'(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x.$$

Budući da je $P(1) = 1$ i $P'(1) = \mathbb{E}(X_1) = \mu$ slijedi

$$\mathbb{E}(X_2) = (P \circ P)'(1) = P'(P(1))P'(1) = P'(1)^2 = \mu^2 = \frac{49}{36}.$$ □

Zadatak 7.3. Promatramo populaciju u kojoj svaki muškarac ima točno dvoje djece. Dijete je dječak ili djevojčica s istom vjerojatnošću. Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ proces grananja koji predstavlja broj muškaraca u n-toj generaciji. Pokažite da populacija muškaraca sigurno izumire. Nadalje, izračunajte vjerojatnost izumiranja ako svaki muškarac ima troje djece.

Rješenje. Imamo $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$ i $p_2 = \frac{1}{4}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

odnosno populacia izumire.

Ako imamo troje djece, onda je $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{3}{8}$ i $p_3 = \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3+6+3}{8} = \frac{3}{2} > 1.$$

Tražimo rješenje od

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3,$$

odnosno

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Očito je jedno rješenje $x_1 = 1$. Dakle,

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x-1)(x^2 + 4x - 1) = 0.$$

Sada se jednostavno izračunaju $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ i $x_3 = -2 + \sqrt{5}$. Dakle, vjerojatnost izumiranja je $\sqrt{5} - 2$. □

Zadatak 7.4. Promatramo dva procesa grananja $\{X_n^1\}$ i $\{X_n^2\}$, prvi s binomnom raspodjelom grananja $B(3, \frac{2}{3})$, a drugi s raspodjelom grananja danom s $P(x) = 0.2 + 0.4x + 0.3x^2 + 0.1x^3$. Kolika je vjerojatnost da će procesi izumrijeti?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} p_0^1 = \frac{1}{3^3}, \quad p_1^1 = \frac{2}{3^2}, \quad p_2^1 = \frac{4}{3^2}, \quad p_3^1 = \frac{8}{3^3} \\ p_0^2 = 0.2, \quad p_1^2 = 0.4, \quad p_2^2 = 0.3, \quad p_3^2 = 0.1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \cdot \frac{1}{27} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{54}{27} = 2 > 1, \\ \mu_2 &= 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 1.3 > 1. \end{aligned}$$

Tražimo rješenje od

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{27} \cdot 1 + \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{27}x^3 \\ x &= 0.2 \cdot 1 + 0.4x + 0.3x^2 + 0.1x^3, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 8x^3 + 12x^2 - 21x + 1 = 0 \\ x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Jasno je da je $x_1^1 = x_1^2 = 1$. Dakle,

$$\begin{aligned} 8x^3 + 12x^2 - 21x + 1 &= (x-1)(8x^2 + 20x - 1) = 0, \\ x^3 + 3x^2 - 6x + 2 &= (x-1)(x^2 + 4x - 2) = 0. \end{aligned}$$

Sada se jednostavno izračunaju

$$\begin{aligned} x_2^1 &= \frac{-5 - 3\sqrt{3}}{4} \quad \text{i} \quad x_3^1 = \frac{-5 + 3\sqrt{3}}{4}, \\ x_2^2 &= -2 - \sqrt{6} \quad \text{i} \quad x_3^2 = -2 + \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnosti izumiranja su $\frac{3\sqrt{3}-5}{4}$ i $\sqrt{6} - 2$. □

Zadatak 7.5. Neka je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ proces grananja. Nadalje, neka je $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ukupna populacija u svim generacijama. Izračunajte $\mathbb{P}(S = \infty)$ za

(a) $P(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x^2$

(b) $P(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2$.

Rješenje. (a) Imamo $p_0 = \frac{1}{3}$, $p_1 = \frac{1}{6}$ i $p_2 = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{6} > 1.$$

Nadalje, ako je $S = \infty$, to znači da populacija nije izumrla. Tražimo rješenje od

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x^2,$$

odnosno

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0.$$

Očito su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{2}{3}$. Dakle, $\mathbb{P}(S = \infty) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

(b) Imamo $p_0 = \frac{1}{3}$, $p_1 = \frac{1}{3}$ i $p_2 = \frac{1}{3}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

odnosno populacija izumire s vjerojatnošću 1. Dakle, $\mathbb{P}(S = \infty) = 0$. □

Zadatak 7.6. Promatramo proces grananja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ kojem je raspodjela grananja dana s $P(x) = \frac{1}{4}(1+x+x^2+x^3)$. Ako proces starta od jedne jedinke izračunajte vjerojatnost izumiranja populacije i očekivani broj jedinki u prvoj i drugoj generaciji.

Rješenje. Imamo $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ i $p_3 = \frac{1}{4}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} > 1.$$

Tražimo rješenje jednadžbe

$$x = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3,$$

odnosno

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Jasno je da je $x_1 = 1$. Dakle,

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x-1)(x^2 + 2x - 1) = 0.$$

Sada se jednostavno izračunaju druga rješenja $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ i $x_3 = -1 + \sqrt{2}$. Dakle, vjerojatnost izumiranja je $\rho = \sqrt{2} - 1$.

Očekivani broj jedinki u prvoj generaciji je $\mu = \frac{3}{2}$. Izračunajmo još i očekivani broj jedinki u drugoj generaciji. Vrijedi

$$\mathbb{E}(X_2) = (P \circ P)'(1) = P'(P(1))P'(1) = P'(1)^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 = \mu^2 = \frac{9}{4}. \quad \square$$

Općenito, očekivani broj jedinki (potomaka) u n-toj generaciji možemo dobiti kao

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1)^n = \mu^n.$$

Zadatak 7.7. Populacija krijesnica se sastoji od zelenih i zlatnih krijesnica, koje se razmnožavaju na sljedeći način: svaka zelena krijesnica prije nego umre daje 3 nove krijesnice od kojih je svaka s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, neovisno o ostalima, zelena ili zlatna, a svaka zlatna krijesnica umire u danoj vremenskoj jedinici bez reprodukcije. Ako populacija starta od jedne zelene krijesnice izračunajte vjerojatnost izumiranja populacije i očekivani broj zelenih krijesnica u petoj generaciji.

Rješenje. Dovoljno je promatrati samo zelene krijesnice, jer zlatne ne daju potomke. Imamo $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = 3 \cdot \frac{1}{8}$, $p_2 = 3 \cdot \frac{1}{8}$ i $p_3 = \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2} > 1.$$

Tražimo rješenje jednadžbe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3,$$

odnosno

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Očito je jedno rješenje $x_1 = 1$, dakle

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x-1)(x^2 + 4x - 1) = 0.$$

Sada se jednostavno izračunaju druga dva rješenja $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ i $x_3 = -2 + \sqrt{5}$. Dakle, vjerojatnost izumiranja populacije je $\rho = \sqrt{5} - 2$.

Izračunajmo još i očekivani broj zelenih krijesnica u petoj generaciji. Prema prethodnom zadatku imamo

$$\mathbb{E}(X_5) = \mathbb{E}(X_1)^5 = \mu^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}. \qquad \square$$

Zadatak 7.8. Neka je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ jednostavan proces grananja u kojemu je raspodjela razmnožavanja takva da svaka jedinka rađa najviše dva potomka. Pri tome vrijedi da je vjerojatnost da će jedinka roditi dva potomka jednaka vjerojatnosti da će jedinka roditi najviše jednog potomka i vjerojatnost da će jedinka roditi jednog potomka je trostruko veća od vjerojatnosti da neće roditi nijednog.

(a) Pokažite da je raspodjela broja potomaka u prvoj generaciji

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Izračunajte vjerojatnost izumiranja populacije.

Rješenje. (a) Na osnovi onoga što je zadano u zadatku vrijedi:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &\mathbb{P}(X_1 = 1) = 3\mathbb{P}(X_1 = 0). \end{aligned}$$

Budući da jedinka daje najviše dva potomka vrijedi

$$1 = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) = 8\mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Konačno, dobijemo da je

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{3}{8} \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2},$$

što je i trebalo pokazati.

(b) Prema (a) dijelu zadatka imamo da je $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = \frac{3}{8}$ i $p_2 = \frac{1}{2}$. Dakle,

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{8} > 1.$$

Tražimo rješenje jednadžbe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}x^2.$$

Dobijemo $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{4}$. Dakle, vjerojatnost izumiranja populacije je $\rho = \frac{1}{4}$. □

Poglavlje 8

Markovljevi procesi

Do sada smo promatrali Markovljeve modele samo s diskretnim vremenskim parametrom $n \in \mathbb{N}_0$. Sada ćemo prijeći na Markovljeve modele s kontinuiranim vremenskim parametrom $t \in \mathbb{R}_+$, tzv. **Markovljeve procese**. Skup stanja koji promatramo je i dalje diskretan (konačan ili prebrojiv).

Dakle, **Markovljev proces** je slučajan proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ za koji vrijedi **Markovljevo svojstvo**: za sve $n \in \mathbb{N}$, sve vremenske trenutke $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ i sva stanja $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i, j \in S$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i, \ldots, X_{t_1} = i_1) =& \mathbb{P}(X_{t_n} = j | X_{t_{n-1}} = i)\\ &= p_{ij}^{(t_{n-1},t_n)}.\end{aligned}$$

Kao što smo već prije spomenuli, mi ćemo promatrati samo **vremenski homogene** Markovljeve modele, tj. one za koje je

$$p_{ij}^{(s,t)} = p_{ij}^{t-s},$$

za bilo koja dva vremenska trenutska s i t za koje je $s \leqslant t$. Dakle, svaki Markovljev proces je zadan familijom prijelaznih vjerojatnosti p_{ij}^t, $t \in \mathbb{R}_+$ i $i, j \in S$. Jasno je da

$$p_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

U slučaju Markovljevih procesa također vrijedi **Chapman - Kolmogorovljeva jednakost**: za sve $i, j \in S$ i sve $s, t \in \mathbb{R}_+$ imamo

$$p_{ij}^{s+t} = \sum_{k\in S} p_{ik}^s p_{kj}^t.$$

Dakle, Chapman-Kolmogorovljeva jednakost nam govori da ako znamo prijelazne vjerojatnosti za sve $0 < t \leqslant t_0$ (gdje je $t_0 > 0$ fiksan), onda znamo prijelazne vjerojatnosti za sve $t \in \mathbb{R}_+$. Nažalost, za razliku od diskretno-vremenskog slučaja, u kontinuirano-vremenskom slučaju nemamo minimalno vrijeme t iz kojeg možemo generirati cijelu familiju p_{ij}^t, $t \in \mathbb{R}_+$. Ideja je gledati derivaciju funkcije $t \mapsto p_{ij}^t$ u točki 0. Dakle, u nastavku pretpostavljamo da radimo s Markovljevim procesima za koje postoji

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}^t - p_{ij}^0}{t} = \begin{cases} \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}^t}{t}, & i \neq j \\ \lim_{t\to 0} \frac{p_{ii}^t - 1}{t}, & i = j, \end{cases}$$

za sve $i, j \in S$. Označimo

$$q_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}^t}{t} \quad \text{i} \quad \lambda_i = \lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}^t}{t}.$$

Očito je $q_{ij} \geqslant 0$ i $\lambda_i \geqslant 0$ za sve $i, j \in S$. Nadalje,

$$-\lambda_i + \sum_{j\neq i} q_{ij} = \sum_{j\in S} \lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}^t - p_{ij}^0}{t} = \lim_{t\to 0} \sum_{j\in S} \frac{p_{ij}^t - p_{ij}^0}{t} = 0,$$

tj. $\lambda_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$. Dakle, q_{ij} je intenzitet skoka iz i u j, a λ_i je intenzitet napuštanja stanja i. Nadalje, zbog tehničkih razloga, pretpostavimo da je

$$0 < \min\{\lambda_i : i \in S\} \leqslant \max\{\lambda_i : i \in S\} < \infty$$

(što je sigurno zadovoljeno ako je S konačan). Matricu $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$, gdje su $q_{ii} = -\lambda_i$, zovemo **generatorskom matricom** od $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ i vrijedi

$$P(t) = e^{tQ} \quad \text{i} \quad P'(t) = QP(t) = P(t)Q.$$

Promotrimo sljedeću konstrukciju. Neka je $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$ generatorska matrica od $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Definirajmo brojeve $a_{ij} = \frac{q_{ij}}{\lambda_i}$ za $i \neq j$ te $a_{ii} = 0$. Dakle, matrica $A = (a_{ij})_{i,j\in S}$ je matrica prijelaza jednog Markovljevog lanca. Ako se $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nalazi u stanju i, onda se u stanje j, za $i \neq j$, prelazi s vjerojatnošću a_{ij} nakon vremena čekanja koje je eksponencijalno distribuirano s parametrom λ_i.

Diskutirajmo sad osnovne pojmove vezane za Markovljeve procese. Za $i \in S$ definiramo

$$T_i = \min\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t = i\}.$$

Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j **dostižno** iz i, u oznaci $i \to j$, ako je $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0$. Stanja i i j **komuniciraju**, u oznaci $i \leftrightarrow j$, ako $i \to j$ i $j \to i$. Proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ je **ireducibilan** ako sva stanja komuniciraju. Za stanje $i \in S$ kažemo da je **povratno** ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, a **prolazno** ako je $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$. Vrijedi sljedeće:

(i) Neka je $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovljev lanac s matricom prijelaza $A = (a_{ij})_{i,j\in S}$. Tada je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ireducibilan ako, i samo ako, je $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ireducibilan. Nadalje, stanje $i \in S$ je povratno za $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ako, i samo ako, je povratno za $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dakle, ako je proces ireducibilan, onda su sva stanja povratna ili su sva stanja prolazna. Posebno, ako je S konačan, onda su sva stanja povratna. Ponovno, S možemo zapisati kao

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots ,$$

gdje je T skup prolaznih stanja,a C_i su zatvoreni ireducibilni skupovi koji sadrže povratna stanja. Na kraju napomenimo da je pojam periodičnosti u kontinuirano-vremenskom slučaju nešto suptilniji nego u diskreto-vremenskom i ovdje ga nećemo analizirati. Međutim, jasno je (barem intuitivno) da zbog eksponencijalnog vremena čekanja u pojedinom stanju (ireducibilni) Markovljevi procesi ne mogu biti periodični.

(ii) Neka je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Markovljev proces s generatorskom matricom Q. Tada za mjeru ν na S kažemo da je **stacionarna** za $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ako vrijedi

$$\nu Q = 0.$$

Neka je $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pripadni Markovljev lanac s matricom prijelaza $A = (a_{ij})_{i,j\in S}$. Tada je ν stacionarna mjera za $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ako, i samo ako, je $\mu = \{\lambda_i \pi_i\}_{i\in S}$ stacionarna mjera za $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tj. $\mu A = \mu$.

(iii) Ako je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ireducibilan i povratan proces, onda on ima jedinstvenu stacionaranu mjeru (do na multiplikativnu konstantu). Ako je k tome još i $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$ za sve $i \in S$ (ili. ekvivalentno, za neki $i \in S$), onda postoji jedinstvena stacionarna raspodjela π za koju vrijedi

$$\pi_i = \frac{1}{\lambda_i \mathbb{E}_i(T_i)}, \quad i \in S.$$

U tom slučaju, kad je $\mathbb{E}_i(T_i) < \infty$, kažemo da je proces pozitivno povratan, a inače je nul-povratan.

(iv) Za ireducibilan i povratan proce vrijedi: ako je ν stacionarna mjera za $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, onda je $\nu Q = 0$ ako, i samo ako, je $\nu P(t) = \pi$ za svaki $t \in \mathbb{R}_+$, što opravdava naziv stacionarnosti.

(v) Ako je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ireducibilan Markovljev proces koji ima stacionarnu raspodjelu π, onda vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^t = \pi_j, \quad i, j \in S.$$

Zadatak 8.1. Promatramo stroj koji može biti u dva stanja: 0-ispravno i 1-neispravno. Stroj je ispravan u eksponencijalno distribuiranom vremenu očekivane duljine $\frac{1}{\lambda} > 0$. Nakon što nastupi kvar, trajanje popravka je eksponencijalno distribuirano vrijeme s očekivanom duljinom $\frac{1}{\mu} > 0$. Neka je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ proces koji označava stanje stroja u trenutku t. Neka je $S = \{0, 1\}$ skup stanja. Odredite matricu prijelaza diskretnog lanca, generatorsku matricu procesa $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ i izračunajte funkcije prijelaza. Koliki postotak vremena je stroj ispravan?

Rješenje. Jasno je da je pripradni diskretni lanac dan sljedećom matricom prijelaza

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nadalje, $\lambda_0 = \lambda$ i $\lambda_1 = \mu$. Stoga je generatorska matrica procesa $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ dana s

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nadalje, iz $P'(t) = QP(t)$, imamo

$$\begin{bmatrix} {p_{11}^t}' & {p_{12}^t}' \\ {p_{21}^t}' & {p_{22}^t}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^t & p_{12}^t \\ p_{21}^t & p_{22}^t \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} {p_{11}^t}' &= -\lambda p_{11}^t + \lambda p_{21}^t = -\lambda(p_{11}^t - p_{21}^t) \\ {p_{21}^t}' &= \mu p_{11}^t - \mu p_{21}^t = \mu(p_{11}^t - p_{21}^t). \end{aligned}$$

Uočimo da je dovoljno izračunati p_{11}^t i p_{21}^t, jer je $p_{12}^t = 1 - p_{11}^t$ i $p_{22}^t = 1 - p_{21}^t$. Oduzimajući gornje jednadžbe dobijemo

$${p_{11}^t}' - {p_{21}^t}' = (p_{11}^t - p_{21}^t)' = -(\lambda + \mu)(p_{11}^t - p_{21}^t),$$

tj. jednadžbu oblika $f'(t) = -(\lambda + \mu)f(t)$ čije je rješenje $f(t) = Ce^{-(\lambda+\mu)t}$ za neki $C > 0$. Dakle,

$$p_{11}^t - p_{21}^t = Ce^{-(\lambda+\mu)t},$$

za neki $C > 0$. Kako je $p_{11}^0 = 1$ i $p_{21}^0 = 0$, dobivamo da je $C = 1$. Sada slijedi da je

$${p_{11}^t}' = -\lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \quad \text{i} \quad {p_{21}^t}' = \mu e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Odnosno,

$$\begin{aligned}
p_{11}^t &= \int_0^t {p_{11}^s}' ds + 1 \\
&= 1 - \lambda \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)s} ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \\
p_{21}^t &= \int_0^t {p_{21}^s}' ds \\
&= \mu \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)s} ds \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.
\end{aligned}$$

Na kraju rješavamo sustav $\pi Q = 0$, uz $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Očito je

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \text{i} \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Dakle, stroj je ispravan $\frac{\mu}{\mu+\lambda}\%$ vremena. □

Prisjetimo se sada da za nezavisne slučajne varijable $X \sim \text{Exp}(a)$ i $Y \sim \text{Exp}(b)$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{a}{a+b} \quad \text{i} \quad \min\{X, Y\} \sim \text{Exp}(a+b).$$

Zadatak 8.2. Brod ima dva navigacijska sustava i jednog mehaničara koji otklanja kvarove. Svaki od uređaja radi eksponencijalno vrijeme s očekivanjem trajanja od 30 dana dok svaki kvar zahtijeva popravak s očekivanjem trajanja od 2 dana. Odredite pripradni diskretni lanac s prostorom stanja $S = \{0, 1, 2\} = \{\text{“broj ispravnih uređaja”}\}$. Odredite generatorsku matricu pripadnog procesa te odredite postotak vremena neispravnosti oba uređaja.

Rješenje. Odredimo prvo matricu prijelaza pripadnog diskretnog lanca. Označimo slučajnim varijablama $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{30})$ vrijeme ispravnosti uređaja, a s $Y \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$ vrijeme potrebno mehaničaru za popravak. Sada imamo

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{15}{16} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

jer je

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \mathbb{P}(\text{“uređaj će se prije pokvariti nego drugi popraviti”}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 < Y) = \mathbb{P}(X_2 < Y) = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{30} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{16} \\
a_{12} &= \mathbb{P}(\text{“neispravan uređaj će se prije popraviti nego ispravan pokvariti”}) \\
&= \mathbb{P}(Y < X_1) = \mathbb{P}(Y < X_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{30}} = \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

Nadalje, odredimo vremena čekanja λ_0, λ_1 i λ_2 u pripadnim stanjima. Imamo $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, jer izlazak iz stanja 0 ovisi samo o mehaničaru,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30},$$

što je parametar od $\min\{X_1, Y\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{2} + \frac{1}{30})$ ili $\min\{X_2, Y\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{2} + \frac{1}{30})$, jer izlazimo iz stanja 1 ako je mehaničar popravio pokvareni uređaj prije nego što se ispravni pokvario, ili ako se ispravni uređaj pokvario prije nego što je mehaničar popravio neispravni. Na sličan način dobijemo

$$\lambda_2 = \frac{1}{30} + \frac{1}{30},$$

što je parametar od $\min\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{30} + \frac{1}{30})$. Dakle,

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{30} & -\frac{16}{30} & \frac{15}{30} \\ 0 & \frac{2}{30} & -\frac{2}{30} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Konačno, iz $\pi Q = 0$ i $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ imamo

$$\pi_0 = \frac{2}{257} = 0.78\%.$$

□

Zadatak 8.3. Jedan frizer može završiti frizuru s očekivanim vremenom eksponencijalne raspodjele od $\frac{1}{3}$ sata. Mušterije se pojavljuju po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem od $\frac{1}{2}$ sata, ali ako su obje stolice za čekanje zauzete, ne vraćaju se više. Koliki postotak vremena su u radnji 3 mušterije?

Rješenje. Skup stanja je $S = \{0, 1, 2, 3\} = \{\text{“broj mušterija u radnji”}\}$. Označimo s $X_i \sim \text{Exp}(2)$, $i = 1, 2, 3$, vremena dolazaka mušterija, a s $Y \sim \text{Exp}(3)$ duljinu frizerovog posla. Sada imamo

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

jer je

$$a_{10} = p_{21} = \mathbb{P}(Y < X_i) = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$
$$a_{12} = p_{23} = \mathbb{P}(X_i < Y) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

Nadalje, $\lambda_0 = 2$ jer $X_i \sim \text{Exp}(2)$, $\lambda_1 = 2+3 = 5$ jer $\min\{Y, X_i\} \sim \text{Exp}(2+3)$, $\lambda_2 = 2+3 = 5$ jer $\min\{Y, X_i\} \sim \text{Exp}(2+3)$ i $\lambda_3 = 3$ jer $Y \sim \text{Exp}(3)$. Dakle,

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Konačno, iz $\pi Q = 0$ i $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ imamo

$$\pi_3 = \frac{8}{65} \approx 12.307\%. \qquad \square$$

Zadatak 8.4. Vrijeme u nekom mjestu može biti sunčano, maglovito i kišovito. Vrijeme ostaje sunčano eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 3 dana, onda postaje maglovito. Vrijeme ostaje maglovito eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 4 dana, onda nastupi kiša. Vrijeme u mjestu ostaje kišovito eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 1 dan, a onda opet nastupi sunčano vrijeme. Odredite postotke vremena pojedinih stanja vremenskih prilika.

Rješenje. Očito je matrica prijelaza pripadnog diskretnog lanca

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nadalje,

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 1.$$

Dakle,

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Sada, rješavanjem sustava $\pi Q = 0$ uz $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, dobivamo

$$\pi_1 = \frac{3}{8}, \quad \pi_2 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \pi_3 = \frac{1}{8}.$$

□

Zadatak 8.5. Trnoružica spava po cijele dane u dvorcu okovanom trnjem čekajući princa da ju oslobodi čarolije zle vještice. Trnoružica može spavati u dvije različite pozicije: na leđima i na trbuhu. Na leđima spava eksponencijalno vrijeme s očekivanjem pola sata, pa se zatim zbog udobnosti premjesti u poziciju spavanja na trbuhu, u kojoj provede eksponencijalno vrijeme s očekivanjem 20 minuta, nakon koje se opet zbog udobnosti okrene na leđa itd. Odredite postotak vremena koji Trnoružica provede spavajući na trbuhu.

Rješenje. Prostor stanja je $S = \{1, 2\}$, gdje je 1 - spavanje na leđima i 2 - spavanje na trbuhu. Očito je matrica prijelaza pripadnog diskretnog lanca

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nadalje,

$$\lambda_1 = \frac{1}{30} \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \frac{1}{20},$$

pa je generatorska matrica Q jednaka

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Sada, rješavanjem sustava $\pi Q = 0$ uz $\pi_1 + \pi_2 = 1$, dobijemo stacionarnu raspodjelu

$$\pi_1 = \frac{3}{5} \quad \text{i} \quad \pi_2 = \frac{2}{5}.$$

Dakle, Trnoružica $\pi_2 = \frac{2}{5} = 40\%$ vremena provede spavajući na trbuhu. □

Zadatak 8.6. Robot ima dva nezavisna zgloba za obavljanje neke funkcije. Svaki od zglobova ispravno radi eksponencijalno vrijeme s očekivanim trajanjem 40 dana. Popravak zgloba koji se nalazi u stanju kvara traje eksponencijalno vrijeme s očekivanim trajanjem 2 dana. Modelirajte pripadni Markovljev lanac sa skupom stanja koji označava broj ispravnih zglobova. Izračunajte postotak vremena koje robot provede normalno obavljajući svoju funkciju.

Rješenje. Označimo s $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{40})$ slučajne varijable koje označavaju vrijeme ispravnosti zglobova, a s $Y \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$ vrijeme popravka zgloba. Ako sa $S = \{0, 1, 2\}$ označimo skup stanja (koji opisuje broj ispavnih zglobova), imamo da je matrica prijelaza pripadnog diskretnog Markovljevog lanca

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{21} & 0 & \frac{20}{21} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

jer je

$$\begin{aligned} a_{10} &= \mathbb{P}(\text{“zglob će se prije pokvariti nego drugi popraviti”}) \\ &= \mathbb{P}(X_i < Y) = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{40} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{21} \\ a_{12} &= \mathbb{P}(\text{“neispravan zglob će se prije popraviti nego ispravan pokvarit”i}) \\ &= \mathbb{P}(Y < X_i) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{40}} = \frac{20}{21}. \end{aligned}$$

Nadalje, odredimo vremena čekanja λ_0, λ_1 i λ_2 u pripadnim stanjima. Imamo $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, jer izlazak iz stanja 0 ovisi samo o popravku zgloba,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{40} = \frac{21}{40},$$

što je parametar od $\min\{X_1, Y\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{2} + \frac{1}{40})$ ili $\min\{X_2, Y\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{2} + \frac{1}{40})$, jer izlazimo iz stanja 1 ako je popravljen neispravan zglob prije nego što se ispravni pokvario, ili ako se ispravni zglob pokvario prije nego što je popravljen neispravni. Na sličan način dobijemo

$$\lambda_2 = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20},$$

što je parametar od $\min\{X_1, X_2\} \sim \text{Exp}(\frac{1}{40} + \frac{1}{40})$. Dakle, generatorska matrica je

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{40} & -\frac{21}{40} & \frac{20}{40} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Konačno, iz $\pi Q = 0$ i $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ dobivamo stacionarnu raspodjelu

$$\pi_0 = \frac{1}{221}, \quad \pi_1 = \frac{20}{221} \quad \text{i} \quad \pi_2 = \frac{200}{221}.$$

Postotak vremena ispravnosti oba zgloba (normalno obavljanje funkcije) je

$$\pi_2 = \frac{200}{221} \approx 90.5\%. \qquad \square$$

Zadatak 8.7. Vozila međusobno nezavisno dolaze na benzinsku pumpu s punom uslugom, po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem od $\frac{1}{20}$ sata. Ipak, vozila odlaze na drugu benzinsku pumpu ako vide da su na pumpi dva vozila, jer jedno se poslužuje, a drugo čeka svoj red. Pretpostavimo da je vrijeme posluživanja eksponencijalno distribuirano s očekivanjem 6 minuta. Koliki postotak vremena benzinska pumpa zjapi prazna (tj. nema nijednog vozila koje se poslužuje na njoj)?

Rješenje. Označimo s $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(20)$ slučajne varijable koje označavaju vremena dolazaka na pumpu, a s $Y \sim \text{Exp}(10)$ (6 minuta $= \frac{1}{10}$ sata) duljinu posluživanja vozila. Ako sa $S = \{0, 1, 2\}$ označimo skup stanja (koji opisuje broj vozila na pumpi) imamo da je matrica prijelaza pripadnog diskretnog Markovljevog lanca

$$A = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

jer je

$$\begin{aligned} a_{10} &= \mathbb{P}(\text{“prije će biti posluženo vozilo nego što novo vozilo dođe”}) \\ &= \mathbb{P}(Y < X_i) = \frac{10}{10+20} = \frac{1}{3} \\ a_{12} &= \mathbb{P}(\text{“prije će novo vozilo doći na pumpu nego što završi posluživanje vozila”}) \\ &= \mathbb{P}(X_i < Y) = \frac{20}{20+10} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nadalje, odredimo vremena čekanja λ_0, λ_1 i λ_2 u pripadnim stanjima. Imamo $\lambda_2 = 10$, jer izlazak iz stanja 2 ovisi samo o posluživanju vozila,

$$\lambda_1 = 20 + 10 = 30,$$

što je parametar od $\min\{X_1, Y\} \sim \text{Exp}(20 + 10)$ ili $\min\{X_2, Y\} \sim \text{Exp}(20 + 10)$, jer izlazimo iz stanja 1 ako je vozilo posluženo prije nego je novo došlo, ili ako novo vozilo dođe prije nego je staro posluženo. Na kraju $\lambda_0 = 20$, jer izlazak iz stanja 0 ovisi samo o dolasku vozila. Dakle, generatorska matrica je

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 10 & -30 & 20 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Konačno, iz $\pi Q = 0$ i $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ dobivamo stacionarnu raspodjelu

$$\pi_0 = \frac{1}{7}, \quad \pi_1 = \frac{2}{7} \quad \text{i} \quad \pi_2 = \frac{4}{7}.$$

Pumpa zjapi prazna $\pi_0 = \frac{1}{7} \approx 14.28\%$ vremena. $\square$

Poglavlje 9

Poissonov proces

Neka je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Markovljev proces sa skupom stanja $\mathbb{N}_0$ dan sljedećom generatorskom matricom

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nazivamo **Poissonovim procesom**. Rješavajući jednadžbu

$$P'(t) = P(t)Q,$$

dobivamo

$$p_{ij}^t = \begin{cases} 0, & i > j \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & i \leqslant j. \end{cases}$$

Dakle, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nazivamo Poissonovim procesom jer slučajna varijabla X_t ima Poissonovu raspodjelu $\mathrm{Poi}(\lambda t)$, za svaki $t \in (0,\infty)$.

Može se pokazati da je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poissonov proces ako, i samo ako,

(i) $X_0 = 0$

(ii) $X_{t+s} - X_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$, za sve $s, t \in (0,\infty)$

(iii) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ima nezavisne priraste, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, slučajne varijable $X_{t_1} - X_{t_0}$, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $\ldots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne.

Imajući na umu gornju karakterizaciju Poissonovog procesa, taj proces se najčešće koristi za modeliranje slučajnih dolazaka (stranaka, informacija,...).

Naime, ako Poissonov proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ označava broj dolazaka do trenutka $t \in \mathbb{R}_+$ s intenzitetom $\lambda > 0$, onda ako je broj dolazaka do trenutka $s \in \mathbb{R}_+$ jednak i, da bismo došli do $j \geqslant i$ dolazaka do trenutka $t+s$, potrebno je $j-i$ dolazaka u periodu $t \in \mathbb{R}_+$. Dakle,

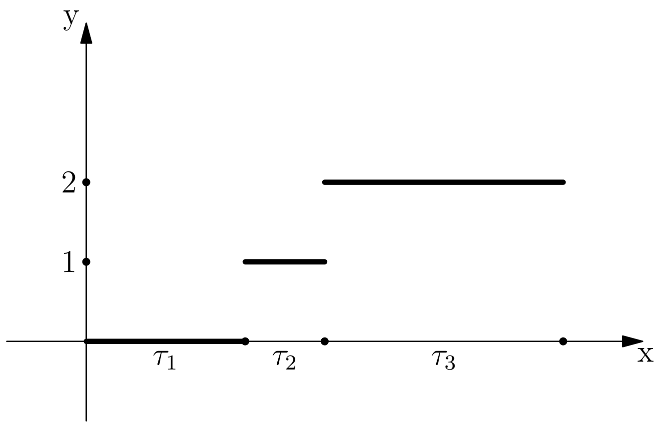
$$p_{ij}^t = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}.$$

Zadatak 9.1. Neka e-mail poruke stižu po Poissonovom procesu intenziteta $\lambda = 0.2$ poruke po satu. Ako se svaki sat provjerava je li došla poruka, kolika je vjerojatnost za nula ili jednu poruku? Ako pretpostavimo da se čitav dan nije provjerilo je li stigla poruka, kolika je onda vjerojatnost da nema poruke? Kolika je vjerojatnost da u 15 sati imamo 7 poruka ako smo u 11 sati imali 2 poruke? Izračunajte $\mathbb{E}(X_{12}|X_7 = 3, X_4 = 1)$ i $\mathbb{P}(X_2 = 2, X_4 = 4)$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0) &= \frac{(0.2\cdot 1)^0}{0!} e^{-0.2\cdot 1},\\
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \frac{(0.2\cdot 1)^1}{1!} e^{-0.2\cdot 1},\\
\mathbb{P}(X_{24} = 0) &= \frac{(0.2\cdot 24)^0}{0!} e^{-0.2\cdot 24},\\
\mathbb{P}(X_{15} = 7|X_{11} = 2) &= p_{2,7}^{15-11} \frac{(0.2\cdot 4)^{7-2}}{(7-2)!} e^{-0.2\cdot(15-11)},\\
\mathbb{E}(X_{12}|X_7 = 3, X_4 = 1) &= \mathbb{E}(X_{12}|X_7 = 3)\\
&= \mathbb{E}(X_{12}|X_7 = 0) + 3\\
&= \mathbb{E}[X_5|X_0 = 0] + 3\\
&= 0.2\cdot 5 + 3\\
&= 4,\\
\mathbb{P}(X_2 = 2, X_4 = 4) &= \mathbb{P}(X_4 = 4|X_2 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2) = p_{24}^2 p_{02}^2.
\end{aligned}$$ $\square$

Poissonov proces možemo gledati i na drugi (ekvivalentan) način. Neka je $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s eksponencijalnom raspodjelom s parametrom λ. Nadalje, neka je $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s raspodjelom $\mathbb{P}(Y_i = 1) = 1$. Definirajmo proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ kao $X_t = \max\{n \in \mathbb{N} : \tau_1 + \cdots + \tau_n \leqslant t\}$.



Odnosno, X_t predstavlja broj stranaka do trenutka $t \in \mathbb{R}_+$, što je upravo Poissonov proces.

Označimo sad s T_n vrijeme dolaska n-te mušterije, tj. $T_n = \min\{t > 0 : X_t = n\}$. Tada je funkcija gustoće od T_n dana s

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Zadatak 9.2. Pretpostavimo da je broj poziva po satu nekog pozivnog servisa dan Poissonovim procesom s intenzitetom 4. Kolika je vjerojatnost da će biti manje od dva poziva u prvom satu? Ako je u prvom satu bilo 6 poziva, kolika je vjerojatnost da će biti manje od dva poziva u drugom satu? Pretpostavimo da operater dobiva pauzu nakon svakih 10 poziva. Koliko je u prosjeku dug njegov radni period? Izračunajte $\mathbb{E}(T_{12}|X_2 = 5)$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 0 \text{ ili } X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= p_{00} + p_{01}, \\ \mathbb{P}(X_2 < 8|X_1 = 6) &= \mathbb{P}(X_2 = 6 \text{ ili } X_2 = 7|X_1 = 6) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 = 6) + \mathbb{P}(X_2 = 7|X_1 = 6) \\ &= p_{66}p_{67}, \\ \mathbb{E}(T_{10}) &= \frac{1}{9!}\int_0^\infty (4x)^{10} e^{-4x} dx, \\ \mathbb{E}(T_{12}|X_2 = 5) &= \mathbb{E}(T_7|X_2 = 0) \\ &= \mathbb{E}(T_7|X_0 = 0) + 2 \\ &= 2 + \frac{1}{6!}\int_0^\infty (4x)^7 e^{-4x} dx. \end{aligned}$$

□

Zamijenimo sada skokove $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Poissonovog procesa $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ generalnijim skokovima. Neka je $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Definirajmo proces $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ s

$$Z_t = Y_1 + \cdots + Y_{X_t}.$$

Drugim riječima, proces $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ je Markovljev proces koji je konstruiran na isti način kao i Poissonov proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, samo u trenutcima $\tau_1 + \cdots + \tau_i$, umjesto skoka visine 1, imamo skok visine Y_i. Proces $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ zovemo **složeni Poissonov proces**. Vrijedi sljedeće:

(i) $\mathbb{E}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_i)$

(ii) $\mathrm{Var}(Z_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_i^2)$.

Zadatak 9.3. Fran lovi ribu po Poissonovom procesu s intenzitetom 3 ribe po satu. Pretpostavimo da je prosječna težina ribe 1kg sa standardnom devijacijom od 0.5kg. Odredite očekivanje i standardnu devijaciju ukupne količine ribe koju Fran ulovi u roku od tri sata.

Rješenje. Želimo izračunati $\mathbb{E}(Z_3)$ i $\sigma(Z_3)$ (σ je oznaka za standardnu devijaciju), gdje je

$$Z_t = Y_1 + \cdots + Y_{X_t}.$$

Proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ je Poissonov proces s intenzitetom $\lambda = 3$, a za $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$\mathbb{E}(Y_i) = 1 \quad \text{i} \quad \sigma(Y_i) = 0.5.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Z_3) = 9 \\ &\sigma(Z_3) = \sqrt{\mathrm{Var}(Z_3)} = 3\sqrt{\mathbb{E}(Y_3^2)} = 3\sqrt{\sigma(Y_3)^2 + \mathbb{E}(Y_3)^2} = 3\sqrt{1.25} \end{aligned}$$ □

Zadatak 9.4. Jedna udruga volontera čisti cestu od starih boca. Volonteri dolaze na posao po Poissonovom procesu s očekivanjem (intenzitetom) od 60 volontera po danu. Dvije trećine volontera je entuzijastično oko posla i u prosjeku sakupi 100 boca sa standardnom devijacijom od 30 boca, dok jedna trećina je lijena i u prosjeku sakupi 30 boca sa standardnom devijacijom od 10 boca. Odredite srednju vrijednost i standardnu devijaciju sakupljenih boca u jednom danu.

Rješenje. Neka je $\{X_t^1\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poissonov proces s očekivanjem $\frac{2}{3}\cdot 60 = 40$ i neka je $\{X_t^2\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poissonov proces s očekivanjem $\frac{1}{3}\cdot 60 = 20$. Nadalje, neka su

$$Z_t^1 = Y_1^1 + \cdots + Y_{X_t^1}^1 \quad \text{i} \quad Z_t^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_{X_t^2}^2$$

složeni Poissonovi procesi, gdje je $\mathbb{E}(Y_i^1) = 100$, $\mathbb{E}(Y_i^2) = 30$, $\sigma(Y_i^1) = 30$ i $\sigma(Y_i^2) = 10$. Računamo $\mathbb{E}(Z_1^1 + Z_1^2)$ i $\sigma(Z_1^1 + Z_1^2)$. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1^1 + Z_1^2) &= \mathbb{E}[Z_1^1] + \mathbb{E}[Z_1^2] = 4600, \\
\sigma(Z_1^1 + Z_1^2) &= \sqrt{\mathrm{Var}(Z_1^1 + Z_1^2)} \\
&= \sqrt{\mathrm{Var}(Z_1^1) + \mathrm{Var}(Z_1^2)} \\
&= \sqrt{40\mathbb{E}((Y_1^1)^2) + 20\mathbb{E}((Y_1^2)^2)} \\
&= \sqrt{40(\sigma(Y_1^1)^2 + \mathbb{E}(Y_1^1)^2) + 20(\sigma(Y_1)^2)^2 + \mathbb{E}(Y_1^2)^2)} \\
&= \sqrt{40(30^2 + 100^2) + 20(10^2 + 30^2)} \\
&= 675.27,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj relaciji u drugom koraku koristili nezavisnost. □

U slučaju Poissonovog procesa vremena između dolazaka, $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imaju eksponencijalnu raspodjelu. Međutim, to nije uvijek opravdano. Neka je $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(\tau_i > 0) = 1$. Slučajnu šetnju $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, zovemo **procesom obnavljanja**. Stavimo,

$$X_t = \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leqslant t\}.$$

Dakle, ako su $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eksponencijalne onda je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Poissonov proces. Općenito, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nije vremenski homogen Markovljev proces. Proces $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ima sličnu interpretaciju kao i Poissonov proces. Ako τ_i označava vijek trajanja i-te žarulje, onda je $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ vrijeme pregaranja n-te žarulje, a X_t je broj promijenjenih žarulja do trenutka $t \in \mathbb{R}_+$. Ako je $\mathbb{E}(\tau_i) = \mu$, onda je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Drugim riječima, ako je prosječan vijek trajanja žarulje jednak μ, onda nakon t vremena treba promijeniti $\frac{t}{\mu}$ žarulja.

Neka je sad $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ proces obnavljanja i neka je

$$X_t = \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leqslant t\}.$$

Nadalje, neka je $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada definiramo **proces obnavljanja s nagradom** izrazom

$$Z_t = Y_1 + \cdots + Y_{X_t}.$$

Drugim riječima, ako domar prilikom zamjene i-te žarulje dobije nagradu Y_i, onda je ukupna nagrada koju domar dobije do trenutka t jednaka Z_t. Ako je $\mathbb{E}(\tau_i) = \mu$ i $\mathbb{E}(Y_i) = \nu$, onda je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Zadatak 9.5. Automobili se parkiraju jedan iza drugog počevši od zida. Duljina automobila je dana nizom nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Svaki automobil ostavlja razmak između sebe i automobila ispred sebe po raspodjeli s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je X_t broj automobila parkiranih do udaljenosti t od zida. Odredite prosječan broj automobila po jedinici duljine u slučaju kada je

(i) $\mathbb{P}(L_i = 5) = 1$, tj. svi automobili su duljine 5.

(ii) L_i je eksponencijalno distribuirana s parametrom 0.3.

Rješenje. Računamo $\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t}$. Neka je $\{lu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je $\tau_i = l_i + L_i$. Dakle, $\mu = \mathbb{E}(l_i + L_i)$.

(i) Imamo

$$\mu = 5 + \mathbb{E}(l_i) = 5 + \int_0^1 x dx = \frac{11}{2}.$$

Stoga,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{2}{11}.$$

(ii) Imamo

$$\mu = \mathbb{E}(L_i) + \mathbb{E}(l_i) = \frac{1}{0.3} + \frac{1}{2} = \frac{23}{6}.$$

Stoga,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{6}{23}.$$

□

Zadatak 9.6. Ivica vodi restoran. Pretpostavimo da su vremena dolazaka gostiju u restoran nezavisna i jednako distribuirana te da je očekivano vrijeme između dolazaka 10 min. Trošak po večeri za gosta je slučajan i ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1000}{9}x^{-2}, & x \in [100, 1000] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uz pretpostavku da gosti troše nezavisno jedan od drugog, nađite prosječan utržak po satu.

Rješenje. U ovom zadatku imamo posla s procesom obnavljanja s nagradom, gdje nagrade $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imaju gustoću $f(x)$. Dakle, računamo $\lim_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t}$. Kako je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau_i) &= 10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h} \\ \mathbb{E}(Y_i) &= \frac{1000}{9} \int_{100}^{1000} x \cdot x^{-2} dx = \frac{1000}{9} \ln 10, \end{aligned}$$

to je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t} = \frac{6000}{9} \ln 10 \text{ kn/h.}$$ □

Zadatak 9.7. Marko radi honorarne poslove. Njegov prosječan posao traje 3 mjeseca i u prosjeku biva plaćen s 5000kn mjesečno. Ako je količina vremena koju Marko potroši na čekanje posla eksponencijalno distribuirana s očekivanjem od 2 mjeseca, koliko Marko zaradi u prosjeku mjesečno?

Rješenje. Računamo $\lim_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t}$. Kako je

$$\mathbb{E}(X_i) = 5000 \quad \text{i} \quad \mathbb{E}(\tau_i) = 3 + 2,$$

to je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z_t}{t} = \frac{15000}{5} = 3000 \text{ kn/mj.}$$ □

Zadatak 9.8. Vijek trajanja žarulje u prosjeku traje dvije godine. Domar dolazi i kontrolira žarulje po Poissonovom procesu s parametrom od 3 dolaska mjesečno i mijenja žarulju ako je pregorjela.

(a) Kojom se brzinom mijenjaju žarulje?

(b) Odredite prosječan broj posjeta u kojima žarulja radi.

Rješenje. (a) Neka je $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ proces koji predstavlja broj žarulja zamijenjen do trenutka t, tj. Poissonov proces s parametrom 3. Kako je

$$\mathbb{E}(\tau_i) = 24 + \frac{1}{3} = \frac{73}{3},$$

to je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t} = \frac{3}{73}.$$

(b) Neka je $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ broj dolazaka domara do trenutka t, tj. Poissonov proces s parametrom 3. Dakle, $\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{t} = 3$. Traženi rezultat je sad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{Y_t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{X_t}{t} \cdot \frac{t}{Y_t} \right) = \frac{3}{73} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{73}.$$

Dakle, u prosječno 72 posjeta žarulja radi (tj. nema promjene). □

Poglavlje 10

Teorija repova

U ovom poglavlju obradit ćemo tzv. M/M/k rep. To je sustav u kojem se obavljaju neke usluge i u koji dolaze potrošači tih usluga po Poissonovom procesu $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ s intenzitetom λ. Sustav ima $k \in \mathbb{N}$ uslužitelja čije je vrijeme usluživanja distribuirano po istoj eksponencijalnoj distribuciji s parametrom μ. Ako u sustavu postoji slobodno mjesto za obavljanje usluge, potrošač koji je upravo stigao odmah se počinje usluživati. Kad su sva mjesta zauzeta, stvara se rep, u kojem se čeka da se oslobodi mjesto za usluživanje. Označimo s $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ proces odlazaka, tj. $\tilde{X}_t$ je broj usluženih potrošača do trenutka t. Nas zanima proces $Y_t = X_t - \tilde{X}_t$, tj. broj potrošača koji se u trenutku t upravo uslužuju ili čekaju u repu. Pokazuje se da je proces $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Markovljev proces dan sljedećom generatorskom matricom:

$$
\begin{aligned}
q_{i,i+1} &= \lambda, \quad i \in \mathbb{N}_0, \\
q_{i,i-1} &= \begin{cases} i\mu, & 1 \leqslant i \leqslant k \\ k\mu, & i \geqslant k, \end{cases} \\
q_{i,i} &= \begin{cases} -\lambda, & i = 0 \\ -(\lambda + i\mu), & 1 \leqslant i \leqslant k \\ -(\lambda + k\mu), & i \geqslant k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da je $\frac{\lambda}{k\mu} < 1$. Tada vrijedi sljedeće:

(i) Rep će se isprazniti s vjerojatnošću 1.

(ii) Proces $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ je pozitivno povratan sa stacionarnom raspodjelom

$$
\pi_i = \begin{cases} \frac{c}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, & 0 \leqslant i \leqslant k \\ \frac{c}{k!k^{i-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, & i \geqslant k. \end{cases}, \quad i \in \mathbb{N}_0,
$$

gdje je

$$c^{-1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{(k - \frac{\lambda}{\mu})k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}.$$

Napomenimo da kad je $\lambda = k\mu$, onda je proces $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nul-povratan, a kad je $\lambda > k\mu$, onda je prolazan.

(iii) Proces $\{\tilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ je Poissonov proces s parametrom λ.

Uočimo da se broj $\pi_0 = c$ može interpretirati kao vjerojatnost da je sustav usluživanja bez posla. Promotrimo sljedeće veličine za M/M/k rep:

- L - prosječan broj korisnika u sustavu
- L_r - prosječan broj korisnika u repu
- L_u - prosječan broj korisnika na usluživanju
- W - prosječno vrijeme provedeno u sustavu
- W_r - prosječno vrijeme provedeno u repu
- W_u - prosječno vrijeme provedeno na usluživanju.

Vrijedi sljedeće:

(i) $L = L_r + L_u$ i $W = W_r + W_u$

(ii) $L = \lambda W$, $L_r = \lambda W_r$ i $L_u = \lambda W_u$

(iii) $L = \dfrac{\lambda}{\mu}\left(1 + \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k c}{\left(k - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2 (k-1)!}\right)$, $L_r = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k c}{\left(k-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 (k-1)!}$ i $L_u = \frac{\lambda}{\mu}$.

U slučaju kad je $k = 1$ imamo

$$\pi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad L_r = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{i} \quad L_u = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Zadatak 10.1. U stanicu hitne pomoći dolazi prosječno 96 pacijenata u 24h po Poissonovom procesu. Hitna pomoć ima jedan prijem i prosječno vrijeme obrade pacijenta je eksponencijalno s očekivanjem 10 min. Diskutirajte ovaj sustav.

Rješenje. U ovom slučaju radi se o M/M/1 repu. Očito je

$$\lambda = \frac{96}{24} = 4 \quad \text{i} \quad \mu = \frac{60}{10} = 6.$$

Dakle, vjerojatnost da je osoblje hitne pomoći nezaposleno je

$$\pi_0 = 1 - \frac{4}{6} = \frac{1}{3},$$

$$L_u = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad L_r = \frac{16}{6(6-4)} = \frac{4}{3}, \quad L = 2,$$

$$W_u = \frac{1}{6}, \quad W_r = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad W = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Zadatak 10.2. Stranke dolaze u sustav po Poissonovom procesu s intenzitetom jedna stranka u 10 min. Sustav ima jednog uslužitelja koji uslužuje po eksponencijalnom vremenu s očekivanjem 8 min.

(a) Diskutirajte sustav.

(b) Diskutirajte sustav ako se intenzitet dolazaka poveća za 10%.

Rješenje. Opet se radi o M/M/1 repu.

(a) Očito je $\lambda = \frac{1}{10}$ i $\mu = \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\pi_0 = 1 - \frac{8}{10} = \frac{1}{5},$$

$$L_u = \frac{4}{5}, \quad L_r = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{8}(\frac{1}{8} - \frac{1}{10})} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{320}} = \frac{32}{10}, \quad L = 4,$$

$$W_u = 8, \quad W_r = 32 \quad \text{i} \quad W = 40.$$

(b) U ovom slučaju je $\lambda = \frac{11}{100}$ i $\mu = \frac{1}{8}$. Dakle,

$$\pi_0 = 1 - \frac{88}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25},$$

$$L_u = \frac{22}{25}, \quad L_r = \frac{\frac{121}{10000}}{\frac{1}{8}(\frac{1}{8} - \frac{11}{100})} = \frac{\frac{121}{10000}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{200}} = \frac{484}{75}, \quad L = \frac{22}{3},$$

$$W_u = 8, \quad W_r = \frac{176}{3} \quad \text{i} \quad W = \frac{200}{3}. \qquad \square$$

Zadatak 10.3. Proces usluživanja u jednoj manjoj banci je M/M/1 rep. Stranke dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom od 2 stranke u minuti. Želi se postići da se u sustavu 99% vremena nalazi uvijek manje od 5 stranaka. Kolika brzina usluživanja treba biti da bi se to postiglo?

Rješenje. Očito je $\lambda = 2$. Nadalje, s π_n označimo vjerojatnost da je n stranaka u sustavu. Tražimo μ takav da je

$$\mathbb{P}(\text{“manje od 5 stranaka u sustavu”}) \geqslant 0.99.$$

Računamo

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“više ili jednako od 5 stranaka u sustavu”})\\ &= \sum_{n=5}^{\infty} \pi_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5.\end{aligned}$$

Treba vrijediti

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \leqslant 0.01,$$

što je ekvivalentno s $\mu^5 \geqslant 100 \cdot 2^5$, odnosno $\mu \geqslant 2\sqrt[5]{100}$. □

Zadatak 10.4. Ljudi dolaze u telefonsku govornicu po Poissonovom procesu s intenzitetom od 12 ljudi po satu. Vrijeme telefoniranja je eksponencijalno distribuirano s očekivanjem od 2 minute.

(a) Kolika je vjerojatnost da će sljedeća osoba koja dođe naći telefonsku govornicu zauzetu?

(b) Politika telefonske kompanije je da se instalira još jedna telefonska govornica ako je prosječno vrijeme čekanja veće ili jednako od 3 minute. Pronađite graničnu prosječnu brzinu (intenzitet) koji osigurava uvođenje nove govornice.

Rješenje. Ovo je M/M/1 rep s $\lambda = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ i $\mu = \frac{1}{2}$.

(a) Vjerojatnost da je govornica zauzeta je

$$1 - \pi_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5}.$$

(b) Prosječno vrijeme čekanja je W_r. Dakle, tražimo λ takav da je $W_r \geqslant 3$. Imamo,

$$W_r = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \lambda)} \geqslant 3,$$

što je ekvivalentno s $\lambda \geqslant \frac{3}{10}$. □

Zadatak 10.5. U nekoj prodavaonici obuće rade 4 prodavačice. Kupci dolaze po Poissonovom procesu brzinom od 20 ljudi po satu. Svaka prodavačica se prosječno bavi kupcem eksponencijalno vrijeme s očekivanjem od 6 minuta.

(a) Kolika je vjerojatnost da su sve prodavačice besposlene?

(b) Kolika je vjerojatnost da su sve prodavačice zaposlene?

(c) Kolika je vjerojatnost da je barem jedna prodavačica besposlena?

(d) Diskutirajte ovaj sustav.

Rješenje. Ovo je M/M/4 rep. Očito je $\lambda = 20$ i $\mu = 10$.

(a) Znamo da je $\pi_0 = c$, gdje je

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=0}^{4} \frac{2^i}{i!} + \frac{2^5}{(4-2)4!} \approx 7.7.$$

Dakle, $\pi_0 = 0.13$.

(b) Kako je $\pi_i = \frac{c}{i!}2^i$, za $i = 0, 1, 2, 3, 4$, imamo

$$\pi_1 \approx 0.26, \quad \pi_2 \approx 0.26, \quad \pi_3 \approx 0.17.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(\text{“sve prodavačice su zauzete”}) = 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3 \approx 0.17.$$

(c) Analogno kao i u (b) imamo

$$\mathbb{P}(\text{“barem jedna prodavačica je besposlena”}) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \approx 0.83.$$

(d) Konačno,

$$L_u = 2, \quad L_r = \frac{2^5 \cdot c}{(4-2)^2 3!} \approx 0.17, \quad L = 2.17,$$

$$W_u = 0.1, \quad W_r = 0.0085, \quad \text{i} \quad W = 0.1085. \qquad \square$$

Zadatak 10.6. U jednom tvorničkom pogonu postoji jednak broj istovrsnih strojeva. Za njihovo održavanje postoje tri istovrsne ekipe radnika. Ustanovljeno je da se strojevi kvare prosječnom brzinom od dva stroja po satu. Pojedina ekipa obavi popravak stroja za prosječno jedan sat rada. Uz pretpostavku da se radi o M/M/3 repu pronađite:

(a) vjerojatnost da su sve tri ekipe zaposlene;

(b) vjerojatnost da su sve tri ekipe bez posla;

(c) vjerojatnost da na popravak čeka više od jednog stroja;

(d) diskutirajte sustav.

Rješenje. Očito je $\lambda = 2$ i $\mu = 1$. Dakle,

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!} + \frac{2^4}{3!} = 9.$$

(a) Kako je $\pi_i = \frac{c}{i!}2^i$, za $i = 0, 1, 2, 3$, imamo

$$\pi_0 = \frac{1}{9}, \quad \pi_1 = \frac{2}{9}, \quad \pi_2 = \frac{2}{9}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(\text{“sve tri ekipe su zaposlene”}) = 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 = \frac{4}{9}.$$

(b) Analogno kao i u (a) zaključujemo

$$\mathbb{P}(\text{“sve tri ekipe su bez posla”}) = \pi_0 = \frac{1}{9}.$$

(c) Slično,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{“na popravak čeka više od jednog stroja”})\\ &= \pi_5 + \pi_6 + \cdots\\ &= 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3 - \pi_4,\end{aligned}$$

gdje su $\pi_3 = \frac{4}{27}$ i $\pi_4 = \frac{c2^4}{3!\cdot 3} = \frac{8}{81}$. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{16}{81}$.

(d) Konačno,

$$\begin{aligned}L_u = 2, \quad L_r = \frac{2^4 \cdot c}{2} = \frac{8}{9}, \quad L = \frac{26}{9},\\ W_u = 1, \quad W_r = \frac{4}{9}, \quad \text{i} \quad W = \frac{13}{9}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 10.7. U nekoj banci rade 2 službenika na šalteru. Klijenti dolaze u banku po Poissonovom procesu s intenzitetom od 30 ljudi po satu. Prosječno vrijeme usluživanja službenika je eksponencijalno distribuirano s očekivanjem 3 minute.

(a) Kolika je vjerojatnost da oba službenika rade?

(b) Koliki je prosječan broj klijenata u banci?

Rješenje. Riječ je o M/M/2 repu. Očito je $\lambda = 30$ i $\mu = 20$.

(a) Znamo da je $\pi_0 = c$, gdje je

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=0}^{2} \frac{3^i}{2^i i!} + \frac{27}{8} = 7.$$

Dakle, $\pi_0 = \frac{1}{7}$. Nadalje, kako je $\pi_i = \frac{c2^i}{3^i i!}$, za $i = 0, 1, 2$, imamo

$$\pi_1 = \frac{2}{21}, \quad \pi_2 = \frac{4}{63}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(\text{“oba službenika rade”}) = 1 - \pi_0 - \pi_1 = \frac{16}{21}.$$

(b) Prosječan broj klijenata u banci je $L = \frac{24}{7}$. □

Na kraju, uočimo da možemo promatrati i M/M/k repove kad $k \to \infty$, tzv. M/M/∞ repove. U tom slučaju nema nikakve restrikcije na parametre λ i μ. Vrijedi sljedeće:

(i) Za $i \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\pi_i = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

(ii) $L_r = W_r = 0$.

Zadatak 10.8. U veliku robnu kuću dolaze kupci po Poissonovom procesu s intenzitetom od 3 kupca po minuti. Vrijeme zadržavanja pojedinog kupca je eksponencijalno s očekivanjem od 10 minuta.

(a) Kolika je vjerojatnost da u robnoj kući bude više od 20 kupaca?

(b) Koliki je očekivani broj kupaca u robnoj kući?

Rješenje. Ovo je M/M/∞ rep. Očito je $\lambda = 3$ i $\mu = \frac{1}{10}$.

(a) Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{“u robnoj kući ima više od 20 kupaca”}) \\
&= \sum_{i=21}^{\infty} \frac{30^i}{i!} e^{-30} \\
&= 1 - \pi_0 - \pi_1 - \cdots - \pi_{20} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{20} \frac{30^i}{i!} e^{-30}.
\end{aligned}$$

(b) $L = L_u = 30.$ □

Literatura

[1] N. Berglund, *Processus aléatoires et applications*. Web skripta, dostupno na `http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/`, 2014. Hrvatski prijevod T. Došlić, dostupno na `http://www.grad.unizg.hr/_download/repository/Stohasticki_procesi_-_predavanja.pdf`.

[2] R. Durrett, *Essentials of stochastic processes*. Springer, New York, 2012.

[3] S. Resnick, *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*. Web skripta, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml13-predavanja.html`, 2009.

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi*, Web skripta, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp14-predavanja.html`, 2010.

[7] Zadaci s kolokvija iz kolegija *Markovljevi lanci* koji se izvodi na PMF - Matematičkom odsjeku, Sveučilište u Zagrebu. Dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mala/`