Tomislav Došlić
Nikola Sandrić

MATEMATIKA 1

Građevinski fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Predgovor

Poštovani čitatelji,
u rukama imate nastavni materijal koji izlaže gradivo kolegija Matematika 1 za studente prve godine Građevinskog fakulteta. Možda se pitate zašto nam, unatoč dostupnosti niza dobrih udžbenika na hrvatskom jeziku koji obrađuju sadržaje ovog kolegija, treba (i) ova skripta. Pitanje je to koje smo si i mi kao autori postavili kad smo procjenjivali trebamo li pristupiti radu na njoj. Odgovor do kojeg smo došli očito je bio dovoljno poticajan da ju napišemo; ponudit ćemo ga i vama u nadi da će i za vas biti dobra motivacija da se njome služite.

Prvi dio odgovora je sadržan u samom pitanju. Točno, postoji više dobrih udžbenika, no niti jedan od njih ne pokriva u potpunosti program našeg kolegija. Jedan od uzroka takve situacije je i nedavna reforma visokog obrazovanja, koja je uvjetovala sažimanje nastavnih planova i smanjenje broja i satnice matematičkih kolegija. Posljedično, u okviru kolegija Matematika 1 našli su se zajedno sadržaji iz linearne algebre i iz matematičke analize, dvaju područja koja su zbog svoga opsega i značaja vrlo rijetko zastupljena u istom udžbeniku. Nadalje, postojeće knjige iz linearne algebre obuhvaćaju i teme kojima u našem kolegiju nije bilo mjesta, kao što su teorija grupa ili teorija linearnih operatora. Pisanjem materijala koji će uključivati samo relevantne sadržaje iz obaju područja željeli smo otkloniti potrebu konzultiranja više udžbenika i probleme vezane s njihovim nabavljanjem. Osim toga, zajednički okvir omogućio je i standardiziranje notacije i olakšao pozivanje na prijašnje rezultate.

Drugi dio odgovora vezan je uz dojam da su postojeći udžbenici po koncepciji i načinu izlaganja više orijentirani prema publici kojoj je matematika primarni interes. Shodno tomu, primjerena se pozornost posvećuje strogosti formulacije rezultata te njihovim izvodima i dokazima. Nama se, pak, čini da je u nastavnom materijalu namijenjenom studentima tehničkih fakulteta nužno i korisno u izvjesnoj mjeri odstupiti od tih standarda i umjesto na matematičku rigoroznost naglasak staviti na motivaciju, primjere i primjene pojmova koji se obrađuju. Skripta pred vama je rezultat našeg pokušaja nalaženja dobrog kompromisa između tih zahtjeva. Kompromis je vidljiv već i u samom izgledu teksta, posebno u dijelovima otisnutima sitnijim slovima. Te dijelove, koji uglavnom sadrže dokaze, moguće je izostaviti pri spremanju ispita. Oni služe za zadovoljenje intelektualne znatiželje zahtjevnijeg čitatelja.

Pri pisanju skripte nismo se posebno trudili učiniti ju sažetom. Uostalom, Matematika 1 je opsežan kolegij, s velikom satnicom (4+4), koji nosi 9 ECTS bodova (najviše na prvoj godini studija), i željeli smo već i samim opsegom skripte naglasiti potrebu kontinuiranog rada i učenja.

Ugodna nam je dužnost zahvaliti Alanu Filipinu, Dori Pokaz i Martini Benković, koji su pozorno čitali dijelove rukopisa, predložili nam mnoga poboljšanja i pronašli brojne pogreške. Zahvaljujemo i studentima Matiji Sočevu, Dejanu Stojakoviću, Mati Stojanovu, Marku Vlainiću i Igoru Daidžiću koji su nam ukazali na pogreške u ranijoj verziji skripte. Bit ćemo zahvalni svima koji nas upozore na preostale propuste i nedostatke.

U Zagrebu, rujna 2008.

Tomislav Došlić
Nikola Sandrić

Sadržaj

Uvod

Zašto (i kako) treba učiti matematiku?

Matematika je nezaobilazan dio programa na svim tehničkim fakultetima. Predaje se, tradicionalno, na prvim godinama i mnogim studentima predstavlja ozbiljnu, ponekad i nepremostivu prepreku na putu do stjecanja akademskog stupnja. Razumljivo je, stoga, da si mnogi studenti postavljaju pitanja: A zašto nam to, uopće, treba? Zašto moramo ulagati puno truda i vremena u učenje stvari koje nisu ono čime se u životu želimo baviti? I zašto nam te stvari, ako nam i trebaju, predaju na apstraktan način koji nam je stran i koji nije blizak našoj svakodnevnoj praksi i iskustvu? Unatoč tomu što su to smislena i legitimna pitanja, ona se rijetko postavljaju javno i naglas - studenti se ne žele dovesti u položaj da im se s visoka odgovori kako je to jasno, očito, da je tako uvijek bilo i da nije moguće biti dobar inženjer ne znajući matematiku. Svrha je ovog uvodnog poglavlja odgovoriti na ta i slična pitanja i uvjeriti studente da je ulaganje truda i vremena u svladavanje programa ovog kolegija dobra investicija. Za početak, ispričat ćemo vam priču.

Na nekom tržištu za pretplatnike se nadmeću dvije tvrtke mobilne telefonije, MobiFon i TeleZvon. MobiFon nudi usluge uz mjesečnu pretplatu od $200\ kn$ i cijenu razgovora od $1\ kn/min$. TeleZvon traži $0\ kn$ mjesečne pretplate, ali minuta razgovora naplaćuje se $2\ kn$. Koju od njih odabrati ako očekujemo da ćemo telefonirati po $5\ min$ svaki dan? Treba li taj izbor preporučiti i prijatelju koji priča po dva sata dnevno?

U istom gradu su i dvije tvrtke za iznajmljivanje automobila. Tvrtka OdiMi traži $400\ kn$ za vozilo i još $1\ kn$ po prijeđenom kilometru, dok tvrtka DojdiMi naplaćuje $800\ kn$ za početak i $0.5\ kn$ po kilometru. Kod koje od njih treba iznajmiti automobil za odlazak u grad udaljen $600\ km$ i povratak iz njega? Je li to ista tvrtka kod koje treba iznajmiti vozilo za odlazak po poslovnog partnera na aerodrom udaljen $20\ km$?

Na gornja će pitanja odgovoriti svatko tko je svladao četiri računske operacije, jer odgovor ne zahtijeva ništa više od nekoliko zbrajanja i množenja. Uz nešto eksperimentiranja i pogađanja moguće je ustanoviti i da su za neku kilometražu (ili minutažu) troškovi isti; u našem primjeru, to je $800\ km$. No je li to jedina takva vrijednost? Mogu li se troškovi podudarati i za neku manju vrijednost? Ili za neku veću? Možemo li biti sigurni da je na sva putovanja dulja od $800\ km$ ponuda DojdiMi povoljnija od OdiMi, ili za neke velike udaljenosti ponovo OdiMi postaje jeftinija? I kako bismo u to uvjerili skeptika kojem to nije jasno i očito? I može li nam odgovor na ova pitanja nekako pomoći odgovoriti na slična pitanja o mobitelima?

Gornji su primjeri jednostavni, gotovo karikirani. Unatoč tome, njihovom analizom možemo doći do odgovora na neka od pitanja s početka ovog poglavlja. Prvo, uočimo da je zajednička karakteristika obaju problema to što ovise samo o stvarima koje se dobro opisuju brojevima. Nije bitan tip mobitela, niti marka automobila, niti grad u koji se putuje. Bitne su cijene, udaljenosti, trajanje. Bitni su, dakle, kvantitativni aspekti. Nadalje, jednom kad zanemarimo mobitele i automobile i probleme svedemo na kvantitativne aspekte, vidimo da oba naša problema imaju istu strukturu; u oba slučaja jedna veličina (cijena) ovisi o drugoj (minute, kilometri) tako da se iznos druge množi konstantnim faktorom (cijena po minuti, po kilometru) i da se tome dodaje konstantan iznos (pretplata, startna cijena). Uz nešto malo truda moguće je sjetiti se i drugih problema s takvom strukturom: cijena vožnje taksijem, troškovi proizvodnje, porez. Jasno je da razumijevanje jednoga od njih znači i razumijevanje svih ostalih, i da sposobnost rješavanja jednog od njih znači i sposobnost rješavanja ostalih. Treba nam, dakle, okvir u kojem ćemo moći formulirati i riješiti opći, arhetipski, problem koji će opisivati sve ostale probleme tog tipa. Takav nam okvir daje matematika.

Matematika je, dakle, skup znanja i umijeća pomoću kojih se realni objekti i njihovi odnosi prikazuju pomoću apstraktnih objekata i njihovih odnosa. Takve prikaze zovemo matematičkim modelima. Iz naših primjera vidimo da se različite realne situacije mogu prikazivati istim matematičkim modelom: linearna funkcija $f(x) = ax + b$ služi nam i za opis situacije s mobitelima i s rent-a-car tvrtkama. Vrijedno je, dakle, uložiti trud u razumijevanje svojstava linearne funkcije, jer ćemo to znanje moći primijeniti u brojnim realnim kontekstima. Na istom primjeru vidimo da matematika **mora** biti apstraktna: mobitelska matematika bi bila beskorisna kod rent-a-cara, i obratno; apstraktna matematika u kojoj baratamo linearnim funkcijama je korisna za sve probleme u kojima se javlja linearna ovisnost. Isto tako nema smisla govoriti o građevinskoj matematici, jer bi građevinaru za uspješno bavljenje strukom još trebala i ekonomska, ekološka, geodetska, prometna i tko zna kakva sve još matematika. Bolje je, stoga imati i naučiti samo jednu, pa makar i apstraktnu.

Primjeri iz naše pričice su, ponavljamo, karikirani. Naveli smo ih stoga jer ste se s linearnom funkcijom i rješavanjem linearnih jednadžbi već sreli u dosadašnjem tijeku svog obrazovanja. No znate li koji apstraktni matematički koncept opisuje kvantitativne aspekte zajedničke izmjeni godišnjih doba, rada srca, izmjeni plime i oseke i škripanju tramvaja u zavoju? Znate li da su porast broja stanovnika na zemlji, koncentracija radioaktivnih tvari i zarada pri oročenju nekog iznosa novca opisani istim matematičkim modelom? Znate li što je zajednički matematički model za osjetljivost ljudskog uha, kiselost sapuna i snagu potresa? I kako se pomoću toga može odrediti koliko je star pretpovijesni kostur? I znate li da ste i te stvari već učili u srednjoj školi?

Možda vam se gornja pitanja čine nebitnima za vaš budući rad. Svakako, sapuni, kosturi i porast broja stanovnika ne spadaju u probleme s kojima se svakodnevno susreće inženjer građevine. No teško je zanijekati da su nam sile, momenti, brzine i ubrzanja bitni. Sve se te veličine matematički opisuju pomoću pojma vektora. Isplati se, dakle, naučiti baratati vektorima, jer su oni nezaobilazni u problemima mehanike i statike. Nadalje, ravnoteža nekog fizikalnog sustava matematički se opisuje nečim što se zove diferencijalna jednadžba. Diferencijalna se zove stoga što se u njoj pojavljuju derivacije nepoznate funkcije. No što su derivacije? Matematički koncept kojim se opisuje i kvantificira brzina promjene neke veličine. A kakve to ima veze s ravnotežom? Sila je, po 2. Newtonovom zakonu, produkt mase i ubrzanja, ubrzanje je promjena brzine u vremenu, a brzina je promjena položaja u vremenu. Izgleda, dakle, da su i derivacije nešto što treba inženjeru (pa i studentu) građevine. Uz ravnotežu je vezan i pojam težišta. A kako se određuje položaj težišta nekog tijela? Integriranjem. A integriranje je postupak suprotan deriviranju. Dakle, i to nam treba.

Nadamo se da vas je ovih nekoliko rečenica uvjerilo da su svi sadržaji obuhvaćeni kolegijom Matematika 1 bitni za vaše obrazovanje i rad. Nadamo se i da vas je priča o mobitelima i rent-a-caru uvjerila da je snaga matematike upravo u njenoj apstraktnosti. Ostaje nam još odgovoriti na dva pitanja koja se, također, ponekad čuju. Prvo je: A zašto to sve moramo učiti kad postoje priručnici i tablice? Drugo je nešto modernija inačica: A zašto to sve moramo učiti kad imamo računala i software?

Pođimo redom. Istina je da se mnoge stvari mogu naći u priručnicima i tablicama. To nam je dovoljno dok ostajemo u okviru onoga što je netko negdje nekada već izračunao, isprojektirao i izgradio. No što ako poželimo izgraditi nešto novo? Što ako poželimo izgraditi nešto naše, originalno, bez premca i uzora? Ako poželimo (ili budemo primorani) biti kreativni? U tom slučaju, gotovo, knjiško, tablično znanje ne će nam biti od velike koristi. Mi danas ne znamo tko će od nas provesti svoj cijeli radni vijek kao rutinski inženjer koji svoje znanje crpi iz tablica, a tko će poželjeti biti više od toga. Što je najbolje, ni vi to ne znate. Mudro je, stoga, ne ograničiti si buduće mogućnosti i ne zatvoriti si vrata stručnom i osobnom napredovanju. A upravo je to opasnost kojoj se izlažete oslanjajući se samo na tuđe znanje.

Glede drugog pitanja, nepobitno je da nam računala i software pružaju brojne mogućnosti koje prijašnji naraštaji stručnjaka nisu imali. Tim se mogućnostima treba u punoj mjeri koristiti. Te mogućnosti međutim, nisu neiscrpne i neograničene. Prvo je ograničenje isto kao i kod literature - možemo naći samo ono što je netko već napravio, izračunao ili isprogramirao. Drugo je ograničenje suptilnije i vezano je s činjenicom da računala daju odgovore koji su dobri samo onoliko koliko su dobra pitanja koja im postavljamo. Ne znamo li dobro formulirati pitanje, nećemo dobiti dobar odgovor. Čak i na korektno postavljeno pitanje možemo dobiti odgovor koji nije lako interpretirati. Prisjetimo se samo kako malo informacija neškolovanom oku pruža rendgenska snimka ili elektrokardiogram. Dakle, računala su korisna samo ako im znamo postaviti smisleno pitanje i ako znamo pravilno interpretirati odgovor.

Nadamo se da su vas do sada rečene stvari uvjerile da treba (na)učiti matematiku. Sada kad više nije sporno zašto, recimo nešto o tome kako to treba učiniti. U dvije riječi - s razumijevanjem. Nitko nema nikakve koristi od napamet naučenog odgovora, izrecitirane definicije, šablonski riješenog zadatka. Ocjena stečena temeljem takvog znanja nije korisna nikome, ponajmanje studentu koji ju je dobio. Koristi od matematike koje smo gore spominjali imaju samo oni koji razumiju što su naučili.

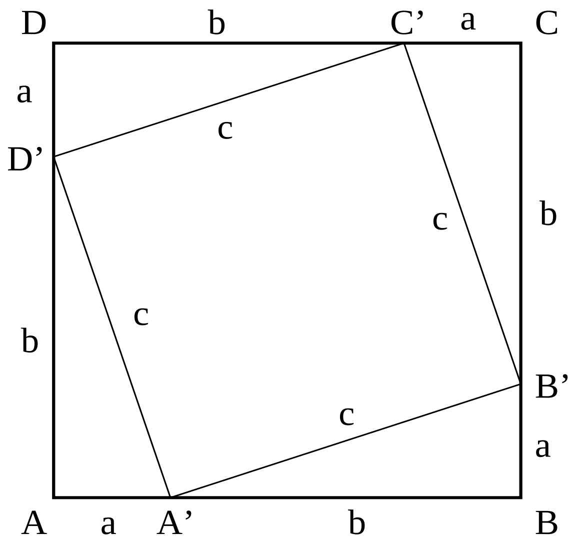
Učenje matematike, više nego većine stvari, podsjeća na izgradnju vrlo visoke zgrade. Najbitniji su temelji. A oni se u matematici polažu od samih početaka formalnog obrazovanja. Kao što se na lošim temeljima ne može izgraditi solidna zgrada, tako se s nedovoljnim predznanjem ne može smisleno, s razumijevanjem, naučiti matematiku.

Prvi je, dakle, preduvjet dobro predznanje. Kao ni jedan drugi predmet, matematika ovisi o onome što ste naučili tijekom osnovne i srednje škole. Želimo li vam dati nova znanja, moramo podrazumijevati da ih imate na čemu temeljiti. Na mnoge stvari koje ste čuli ćemo vas podsjećati i u ovoj knjizi i na nastavi, no ne bi bilo realno očekivati da možemo time pokriti sadržaje koji se provlače kroz dvanaest godina obrazovanja. Svjesni smo da studenti dolaze na fakultet s različitim razinama predznanja, kako zbog razlika u školama, tako i zbog različitih individualnih sklonosti prema matematici. No i studenti moraju biti svjesni da je stjecanje zajedničke razine predznanja propisane srednjoškolskim programom isključivo njihova odgovornost. Solidno svladan gimnazijski program dobar je temelj, no programi pojedinih srednjih stručnih škola mogu se pokazati nedostatnima. Iskustvo nam govori da studenti iz takvih škola moraju uložiti više truda i napora kako bi mogli kvalitetno pratiti nastavu i usvajati nove sadržaje. Iskustvo nam, također, pokazuje da uz takav pristup razlike u predznanju bivaju uspješno nadoknađene.

Drugi uvjet za uspješno svladavanje programa kolegija je stalan i kontinuiran rad. Matematika je opsežan predmet. Razumijevanje je nužan, no ne i dovoljan uvjet za uspjeh. Potrebna je i rutina. A rutina se stječe samo radom i vježbom. Pri tome ne mislimo samo na rutinu pri računanju i rješavanju zadataka, već i na rutinu u prepoznavanju matematičkog sadržaja u nekom problemu i u izboru odgovarajućeg matematičkog modela.

Razumijevanje i rutina su, dakle, dvije komponente uspjeha. No važnu ulogu igra i njihov međusobni odnos te organizacija i balansiranje rada u njihovu postizanju. Pogrešan se pristup najčešće sreće pri uobičajenom odnosu prema teoriji i zadatcima. Uobičajeno je naime, da se na pismenom dijelu ispita rješavaju zadatci, a na usmenom se provjerava poznavanje teorijskih osnova. Kako pismeni ispit prethodi usmenom (i eliminatoran je), tako studenti vrlo često prvo ulažu napor u šablonsko rješavanje nekoliko tipova zadataka, a zatim, prođu li pismeni ispit, pokušavaju u dva - tri dana "naučiti teoriju". Nedvojbeno je da takav pristup ponekad rezultira polaganjem ispita, no svaki tako položen ispit je gubitak za sve koji u tome sudjeluju. Najveći je, svakako, gubitak za studenta koji je tako "položio" ispit. Ako ne mislite tako, pokušajte dati dobar odgovor na pitanje, kakva je korist od rješavanja zadataka bez njihovog razumijevanja? Nitko od vas ne će za plaću rješavati zadatke iz matematike. Ono što će vam u radu trebati, tj. prepoznavanje matematičkih sadržaja u stvarnim problemima, ne ćete postići rješavanjem ispitnih zadataka. Steći ćete to upoznajući apstraktne matematičke koncepte i učeći se uočavati ih u stvarnim situacijama. Ako nikad niste čuli za linearnu funkciju, teško ćete ju prepoznati u našim primjerima s početka; ako ne znate uvjete uz koje linearni sustav ima jedinstveno rješenje nikad nećete biti sigurni da su uvjeti jedne od tvrtki povoljniji za sve udaljenosti veće od $800\ km$. Zadatci na ispitu služe tomu da se vidi jeste li ovladali matematičkim ("teorijskim", ako hoćete) konceptima koji se u njima javljaju, i jeste li stekli dovoljno rutine da ih možete riješiti u za to propisanom vremenu. I samo tomu. Dakle, prvo "teorija", onda zadatci.

Spomenuli smo da nam matematika jamči da je ponuda tvrtke DojdiMi povoljnija za sve udaljenosti veće od $800\ km$. Time smo se dotakli jednog aspekta matematičkog znanja o kome još nismo govorili: matematičko znanje je sigurno, izvjesno, apsolutno. Ono ne ovisi o mjerenjima ni empiričkim opažanjima, već se se do njega dolazi postupkom logičkog zaključivanja. Drugim riječima, matematičke spoznaje se temelje na dokazima. Ilustrirajmo to na primjeru s kojim smo se svi sreli, na Pitagorinom poučku. Pitagorin poučak je tvrdnja da je u svakom pravokutnom trokutu kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata kateta. To se još uobičajeno zapisuje kao $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su s a i b označene katete a s c hipotenuza pravokutnog trokuta. Za zadani pravokutni trokut je vrlo lako provjeriti da Pitagorin poučak vrijedi. No takva provjera za jedan trokut ništa ne govori o istinitosti poučka za neki drugi trokut. Kako možemo biti sigurni da ta tvrdnja vrijedi za **sve pravokutne** trokute?
Pogledajmo Sliku 1. Na njoj je u kvadrat $ABCD$ upisan kvadrat $A'B'C'D'$, a ostatak čine četiri sukladna pravokutna trokuta. Dakle je površina kvadrata $ABCD$ jednaka zbroju površine kvadrata $A'B'C'D'$ i četverostruke površine



Slika 1: Pitagorin poučak.

jednog od tih trokuta, recimo $A'BB'$. No površina velikog kvadrata je jednaka kvadratu njegove stranice, a duljina stranice je zbroj kateta pravokutnog trokuta, $a + b$. Imamo

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{1}{2}ab.$$

Kvadriranjem izraza na lijevoj strani i sređivanjem dobivamo

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

a to je upravo tvrdnja Pitagorinog poučka. Kako gornji postupak možemo provesti za bilo koji pravokutan trokut, vidimo da i Pitagorin poučak vrijedi za **sve** pravokutne trokute. Dali smo **dokaz** te tvrdnje. Ne trebamo više provjeravati njenu istinitost za svaki pojedinačni slučaj.

Dokazi su bit matematike. Dokazi izdvajaju matematičko znanje od svih ostalih vrsta znanja. Dokazi ga čine apsolutnim. Do matematičkih se spoznaja dolazi na razne načine: intuicijom, empirijom, formalnim manipulacijama, no matematičkim istinama one postaju tek kad budu dokazane. Bilo bi, stoga, razumno očekivati da u nastavnom materijalu za matematički kolegij sve relevantne tvrdnje budu potkrijepljene dokazima. Moramo vas, nažalost, razočarati. Prelistate li na brzinu ovu knjigu, vidjet ćete da je većina tvrdnji izrečena bez dokaza. Čak i tamo gdje se nalazi dokaz, najčešće je otisnut sitnijim slovima, što upućuje na mogućnost preskakivanja tog dijela pri prvom čitanju, pa i potpunog izostavljanja. Takav je pristup rezultat kompromisa. S jedne smo strane željeli proširiti knjigu dijelom materijala koji se odnosi na srednjoškolsko gradivo, a s druge smo strane morali voditi računa o njenoj opsežnosti i zadržati ju u razumnim okvirima. Zainteresirani se čitatelj za izostavljene dokaze može obratiti nastavnicima ili će ih potražiti u literaturi.

Evo na kraju i posljednjeg savjeta. Nastavni materijal koji imate pred sobom bit će najbolje iskorišten u kombinaciji s redovitim pohađanjem predavanja. Treba ga gledati prije kao dopunu predavanjima nego kao zamjenu za njih. Tek kad je student oslobođen potrebe grozničavog zapisivanja i prepisivanja s ploče može se u potpunosti koncentrirati na ono što se na predavanju govori. S druge strane, nastavnik oslobođen pritiska detaljnog formuliranja iskaza i njegovog zapisivanja na ploču može više pozornosti posvetiti izlaganju konteksta i motivacije te tako više približiti gradivo studentima. Nadamo se da će tako ostvarena sinergija rezultirati kvalitetnijim nastavnim procesom i poboljšati njegove učinke.

Poglavlje 1

Vektorski račun

1.1 Vektori i osnovne operacije s njima

U egzaktnim znanostima osim skalarnih veličina (masa, duljina, temperatura itd.) imamo i veličine kod kojih nam je bitan smjer (brzina, sila, akceleracija itd.) Takve veličine zovemo vektorskima. Temeljna je razlika između skalarnih i vektorskih veličina u tome što nam je za matematički opis skalarne veličine dovoljan jedan realan broj, dok nam za vektorske veličine treba više realnih brojeva. U ovom ćemo poglavlju opisati matematičke koncepte i tehnike koje nam omogućuju efikasno matematičko modeliranje vektorskih veličina.

Primjer 1.1. *Na* 20 m *od vas nalazi se kamion koji vozi brzinom od* 72 km/h (20 m/s). *Što ćete poduzeti?*

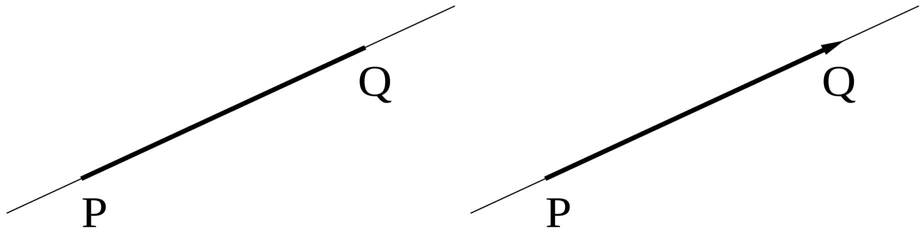
Za donošenje odluke o tome treba li skočiti u stranu ili ostati na mjestu nije nam dovoljna samo informacija o iznosu brzine. Treba nam i podatak jesmo li na pravcu kojim se kamion giba, i ako jesmo, giba li se prema nama ili od nas.

Označimo s E naš trodimenzionalni prostor koji ima točkastu strukturu tj. njegovi elementi su točke.

Definicija 1.1. *Neka su dane točke* $P, Q \in E$. ***Dužina*** $\overline{PQ}$ *je skup svih točaka pravca kroz* P *i* Q *koje se nalaze između* P *i* Q*, uključivo* P *i* Q.

Primijetimo da iz Definicije 1.1 direktno slijedi da je $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

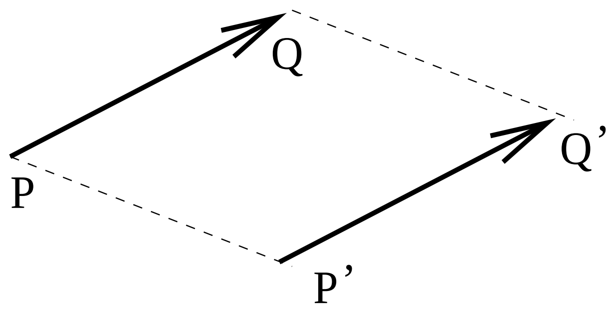
Definicija 1.2. ***Vektor*** *ili* ***usmjerena dužina*** $\overrightarrow{PQ}$ *je dužina kod koje su rubne točke uređene, tj. jedna od njih je početak* P *a druga je kraj* Q. *Početak još zovemo* ***hvatište***.



Slika 1.1: Dužina i usmjerena dužina.

Iz Definicije 1.2 slijedi da je općenito $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{QP}$, jer imaju različite početke i krajeve.

Definicija 1.3. *Kažemo da su vektori* $\overrightarrow{PQ}$ *i* $\overrightarrow{P'Q'}$ ***jednaki*** *ako postoji translacija prostora koja prevodi* P *u* P' *i* Q *u* Q'.



Slika 1.2: Jednakost vektora.

Ova nam definicija zapravo govori da su dva vektora jednaka ako jedan vektor možemo translacijom prevesti na drugi.

Koje su nam informacije nužne i dovoljne da bismo mogli jedinstveno definirati vektor (jedinstvenost podrazumijevamo u smislu gornje definicije, tj. do na translaciju prostora)?

1. Prirodno je vektoru pridružiti njegovu **duljinu** (normu, intenzitet). Duljinu vektora $\overrightarrow{PQ}$ označavamo s $d(P,Q) = \mid \overrightarrow{PQ} \mid$.

2. Pravac koji prolazi kroz P i Q zovemo **nositelj** ili **smjer** vektora $\overrightarrow{PQ}$.

3. Za vektor $\overrightarrow{PQ}$ kažemo da je **orijentiran** od P prema Q, tj. počinje u P a završava u Q.

Provjerimo jesu li nam ova tri uvjeta nužna i dovoljna (u smislu Definicije 1.3). Ako za neki ne-nul vektor znamo njegovu duljinu i smjer, jasno nam je da imamo samo dva vektora te duljine i tog smjera (u smislu Definicije 1.3). Sada samo izaberemo orijentaciju koja nam treba.

Napomena 1.1. *O istoj ili suprotnoj orijentaciji ima smisla govoriti ako i samo ako vektori imaju isti smjer.*

Napomena 1.2. *Ako uzmemo proizvoljnu točku $P \in E$ i zadani vektor $\overrightarrow{a}$, onda postoji jedna jedina točka $Q \in E$ takva da vrijedi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{a}$.*

Definicija 1.4. *Vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su **kolinearni** ako leže na istom pravcu ili na paralelnim pravcima.*

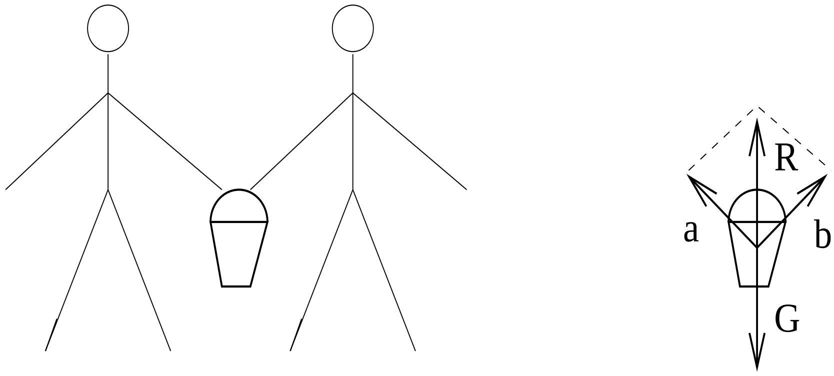
Vektor kod kojeg su početak i kraj jednaki, tj. $P = Q$, zvat ćemo **nul vektor** i označavati s $\overrightarrow{0}$. Pogledajmo sada neka svojstva nul vektora:

1. Očito je $|\overrightarrow{0}| = 0$.

2. Nul vektor nema smjer jer ga možemo translatirati na svaki pravac (tj. kolinearan je sa svakim vektorom).

3. Jednako je orijentiran kao i svaki vektor pa nema ni orijentaciju.

Zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ definiramo kao vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ koji dobijemo tako da početak vektora $\overrightarrow{b}$ translatiramo na kraj vektora $\overrightarrow{a}$ i vektorom $\overrightarrow{c}$ zovemo vektor koji ima početak u početku od $\overrightarrow{a}$ a kraj u kraju od $\overrightarrow{b}$. Preciznije, uzmemo proizvoljni $O \in E$ i uzmemo $A, B \in E$ takve da je $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Iz Napomene 1.2 znamo da takve točke A i B postoje i da su jedinstvene. Tada je $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OB}$.



Slika 1.3: Motivacija za definiciju zbrajanja vektora.

Napomena 1.3. *Za bilo koje tri točke* $P, O, Q \in E$ *vrijedi* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$.

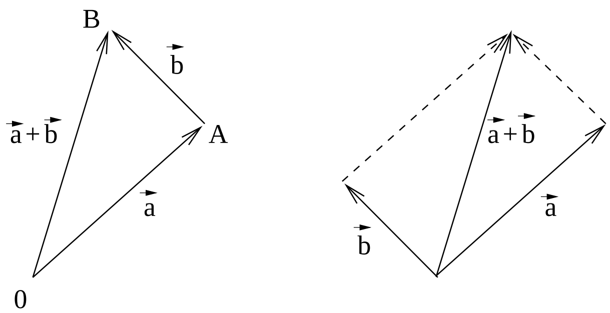
Teorem 1.1 (Svojstva zbrajanja vektora)**.** *Za sve vektore vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ *(asocijativnost).*

2. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ *(nul vektor je neutralni element u odnosu na zbrajanje vektora).*

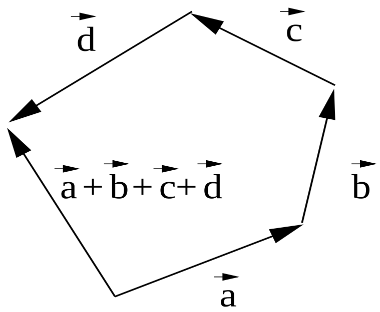
3. *Za svaki vektor* $\overrightarrow{a}$ *postoji vektor* $\overrightarrow{a'}$ *takav da vrijedi* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. *Vektor* $\overrightarrow{a'}$ *zovemo* ***suprotni*** *vektor vektora* $\overrightarrow{a}$, *i označavamo ga s* $\overrightarrow{a'} = -\overrightarrow{a}$.

4. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ *(komutativnost).* ♣



Slika 1.4: Pravilo trokuta i pravilo paralelograma.

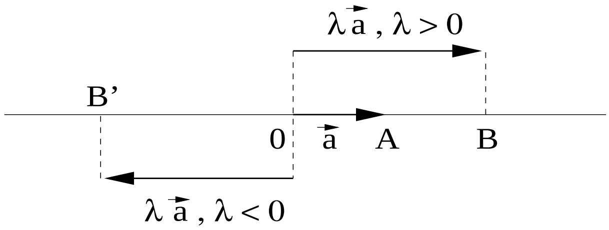
Teorem 1.1 nam kaže da zbrajanje vektora ima ista svojstva kao obično zbrajanje realnih brojeva.



Slika 1.5: Pravilo mnogokuta za zbrajanje više vektora.

Napomena 1.4. *Vektor $\overrightarrow{a'} = -\overrightarrow{a}$ iz Teorema 1.1 ima sljedeća svojstva: ima istu dužinu i isti smjer kao i vektor $\overrightarrow{a}$, ali je suprotne orijentacije. Dakle ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, onda je $-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BA}$.*

Za slučaj $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}$ pišemo $2\overrightarrow{a}$ (tj. vektor koji je istog smjera i iste orijentacije ali dvostruke duljine od vektora $\overrightarrow{a}$). Slično $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{a}$, itd. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo induktivno $n\overrightarrow{a} = (n-1)\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}$. Još dodatno definiramo $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ i $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Time je motivirana sljedeća opća definicija množenja vektora skalarom, tj. realnim brojem.



Slika 1.6: Množenje vektora skalarom.

Za $\lambda \in \mathbb{R}$, definiramo $\lambda\overrightarrow{a}$ kao vektor:

1. čija je duljina jednaka $|\lambda||\overrightarrow{a}|$,

2. koji ima isti smjer kao $\overrightarrow{a}$,

3. koji ima istu orijentaciju kao vektor $\overrightarrow{a}$ za $\lambda > 0$, a suprotnu orijentaciju od vektora $\overrightarrow{a}$ za $\lambda < 0$.

Teorem 1.2 (Svojstva množenja vektora skalarom)**.** *Za sve vektore i sve skalare vrijedi:*

1. $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ *(distributivnost obzirom na zbrajanje vektora),*
2. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ *(distributivnost obzirom na zbrajanje skalara),*
3. $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$ *(homogenost),*
4. $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ *(postojanje jedinice).*♣

Definicija 1.5. *Neka je V neki neprazan skup na kojem imamo definirane operacije zbrajanja elemenata i množenja elemenata skupa skalarom (realnim brojem) takve da vrijedi :*

1. *za sve $a, b \in V$ je $a + b \in V$,*
2. *za svaki $a \in V$ i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda \cdot a \in V$,*
3. *operacije zbrajanja i množenja sa skalarom zadovoljavaju svojstva iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2.*

*Tada kažemo da je skup V **(realni) vektorski prostor** (realni jer su skalari realni brojevi). Elemente od skupa V zovemo **vektori**.*

Primijetimo da se u Definiciji 1.5 nigdje ne govori o geometrijskim veličinama. Iz nje vidimo da pojam vektora nije ograničen na geometrijske objekte.

Vratimo se sada Definiciji 1.4 i pokušajmo definirati kolinearnost u drugim terminima. Neka je dan **polupravac (zraka)** s početkom u O, i neka je $A \neq O$ točka koja leži na tom polupravcu. Tada je jasno da za proizvoljnu točku $P \in E$ vrijedi: P leži na polupravcu ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{OP} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$.
Ako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni, onda, uz pretpostavku $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, postoji pravac p i točke $O, A, B \in E$ na p takve da je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$. Imamo da je $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, gdje je

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{a}|}{|\overrightarrow{b}|} \quad \text{ako } \overrightarrow{a} \text{ i } \overrightarrow{b} \text{ imaju istu orijentaciju i}$$

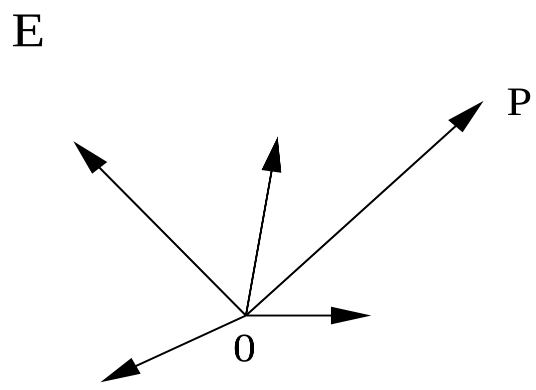
$$\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \quad \text{ako } \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ imaju suprotnu orijentaciju.}$$

Imamo sljedeći zaključak: vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Pri tome $\vec{a}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ imaju istu orijentaciju za $\lambda > 0$ a suprotan za $\lambda < 0$. (Usporedimo ovo s Definicijom 1.4).

Primijetimo još jednu zanimljivu stvar: za svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ možemo konstruirati **jedinični vektor** ili **ort vektor**, tj. vektor koji ima dužinu 1 i ima isti smjer i orijentaciju kao i $\vec{a}$. Kako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, onda je $|\vec{a}| \neq 0$, pa možemo definirati $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Očito je $|\vec{a_0}| = 1$ i $\vec{a_0}$ ima isti smjer i orijentaciju kao i $\vec{a}$, te vrijedi $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a_0}$.

1.2 Vektorski prostor $X_O(E)$. Linearna kombinacija vektora

Neka je $O \in E$ proizvoljna istaknuta točka prostora E. Tada znamo da svakoj drugoj točki $P \in E$ pripada potpuno određen vektor $\overrightarrow{OP}$. Taj vektor zovemo **radij-vektor** ili **vektor položaja** točke P u odnosu na točku O. Na taj način imamo definiranu bijekciju između skupa E i skupa $X_O(E) = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$ (skup svih radij-vektora, odnosno svih vektora s početkom u O i završetkom negdje u E). Bijekcija je konstruirana na prirodan način, tj. svakoj točki $P \in E$ pridružen je vektor $\overrightarrow{OP}$.



Slika 1.7: Radij-vektori u $X_0(E)$.

Neka su sada $\vec{a}, \vec{b} \in X_O(E)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Vektore $\vec{a} + \vec{b}$ i $\lambda\vec{a}$ nanosimo od točke O tako da je $\vec{a} + \vec{b} \in X_O(E)$ i $\lambda\vec{a} \in X_O(E)$ (Napomena 1.1).

Imamo zadane dvije operacije (funkcije):

1. $(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} + \vec{b}$ je funkcija sa $X_O(E) \times X_O(E) \longrightarrow X_O(E)$.

2. $(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda\vec{a}$ je funkcija sa $\mathbb{R} \times X_O(E) \longrightarrow X_O(E)$.

Vidjeli smo da operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom zadovoljavaju svojstva iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2. Stoga je skup $X_O(E)$ **vektorski prostor prostora** E **pridružen točki** O (Definicija 1.5).

Napomena 1.5. *Uzmemo li neku drugu točku $Q \in E$, $Q \neq O$, onda je $X_Q(E)$ vektorski prostor prostora E pridružen točki Q ustvari translacija vektorskog prostora $X_O(E)$ za vektor $\overrightarrow{OQ}$.*

Napomena 1.6. *Slično definiramo vektorski prostor $X_O(M) = \{\overrightarrow{OP} : P \in M\}$ za ravninu M i vektorski prostor $X_O(p) = \{\overrightarrow{OP} : P \in p\}$ za pravac p.*

Neka su sada $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in X_O(E)$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Tada za vektor $\vec{a} \in X_O(E)$ koji je oblika $\vec{a} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n}$ kažemo da je **linearna kombinacija** vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ s koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Kaže se još da je vektor $\vec{a}$ **rastavljen** u linearnu kombinaciju od $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$.

Definicija 1.6. *Za vektore $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in X_O(E)$ kažemo da su **linearno zavisni** ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$ i bar jedan od skalara $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ je različit od nule. Vektori $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in X_O$ koji nisu linearno zavisni su **linearno nezavisni** .*

Napomena 1.7. *Iz Definicije 1.6 izravno slijedi:*

1. *Vektori $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in X_O$ su linearno nezavisni ako i samo ako iz $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n} = \vec{0}$ slijedi da su $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = 0$.*

2. *Ako su $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in X_O$ linearno zavisni, onda barem jedan od njih možemo prikazati kao linearnu kombinaciju drugih.*

3. *Ako je barem jedan od vektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n} \in X_O(E)$ jednak nul vektoru, onda su ti vektori linearno zavisni, jer uz nul vektor možemo staviti proizvoljan skalar različit od nule.*

4. *Ako imamo dva vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in X_O(E)$, onda su oni linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.*

Teorem 1.3. *Bilo koja dva vektora iz $X_O(p)$ su linearno zavisna.* ♣

Tvrdnja Teorema 1.3 je jasna, jer se nalazimo na pravcu, a na pravcu su bilo koja dva vektora kolinearna pa tvrdnja Teorema 1.3 slijedi iz Napomene 1.7.

Teorem 1.4. *Ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ bilo koja dva linearno nezavisna vektora iz $X_O(M)$, onda je svaki vektor $\overrightarrow{c} \in X_O(M)$ moguće rastaviti u linearnu kombinaciju od $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Štoviše, takav rastav je jedinstven.*♣

Jednostavna posljedica Teorema 1.4 je da su svaka tri vektora iz $X_O(M)$ linearno zavisna.

Teorem 1.5. *Ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ tri linearno nezavisna vektora iz $X_O(E)$, onda je svaki vektor $\overrightarrow{d} \in X_O(E)$ moguće rastaviti kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. Štoviše, taj rastav je jedinstven.*♣

Iz Teorema 1.5 izravno slijedi da su svaka četiri vektora iz $X_O(E)$ linearno zavisna.

Napomena 1.8. *Neka su $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{e_3}$ vektori iz $X_O(E)$ koji ne leže u istoj ravnini. Tada su oni linearno nezavisni.*

Dokaz:

Linearna kombinacija bilo koja dva vektora od $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ i $\overrightarrow{e_3}$ leži u ravnini u kojoj leže i ta dva vektora. Kako treći vektor po pretpostavci ne leži u ravnini u kojoj leže druga dva, on se ne može izraziti kao njihova linearna kombinacija, pa slijedi da su oni linearno nezavisni.♣

1.3 Baza vektorskog prostora $X_O(E)$. Koordinatni sustav

Definicija 1.7. *Uređena trojka* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *triju linearno nezavisnih vektora iz* $X_O(E)$ *zove se* ***baza vektorskog prostora*** $X_O(E)$. *Analogno, uređeni par* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *linearno nezavisnih vektora iz* $X_O(M)$ *je baza vektorskog prostora* $X_O(M)$.

Napomena 1.9. *Primijetimo da je baza vektorskog prostora* $X_O(p)$ *svaki ne-nul vektor iz* $X_O(p)$.

Neka je $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ bilo koja baza vektorskog prostora $X_O(E)$ i $\overrightarrow{a}$ bilo koji vektor iz $X_O(E)$. Tada je $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, pri čemu su skalari a_1, a_2 i a_3 jednoznačno određeni vektorom $\overrightarrow{a}$ (Teorem 1.5). Kako su ti skalari jednoznačno određeni, zaključujemo da nam je dovoljno znati tri skalara kao informaciju da bismo znali neki vektor u $X_O(E)$. Skalare a_1, a_2 i a_3 zovemo **komponente** ili **koordinate** vektora $\overrightarrow{a}$ u bazi $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
Jasno je da uređenih trojki linearno nezavisnih vektora u $X_O(E)$ ima beskonačno mnogo. Zanimaju nas takve trojke (baze) u kojoj će komponente svakog vektora iz $X_O(E)$ biti jednostavne ili lake za odrediti. Konstruirajmo jednu takvu bazu na sljedeći način:
Uzmimo točku O kao ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, te točke $E_x = (1, 0, 0)$, $E_y = (0, 1, 0)$ i $E_z = (0, 0, 1)$. Definirajmo $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OE_x}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OE_y}$ i $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OE_z}$. Kako vektori $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ ne leže u istoj ravnini, prema Napomeni 1.8 oni su linearno nezavisni, pa čine bazu. Štoviše, duljine su im 1 i leže na okomitim pravcima, pa kažemo da čine **ortonormiranu bazu** vektorskog prostora $X_O(E)$.

Neka je sada $\overrightarrow{a}$ proizvoljan vektor iz $X_O(E)$. Tada znamo da vrijedi $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ i koordinate (a_x, a_y, a_z) su jednoznačno određene.
Ako su sada $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in X_O(E)$, onda imamo

$$\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}.$$

Iz svojstava zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom (Teorem 1.1 i Teorem 1.2) imamo

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k}\,.}$$

S druge strane vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ također ima razvoj u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tj. $\vec{c} = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$. Zbog jednoznačnosti koeficijenata imamo da je

$$\boxed{c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z.}$$

Zaključujemo da se zbrajanje vektora svodi na zbrajanje njihovih odgovarajućih koordinata.
Analogno, imamo

$$\boxed{\lambda\,\vec{a} = (\lambda a_x)\,\vec{i} + (\lambda a_y)\,\vec{j} + (\lambda a_z)\,\vec{k}\,.}$$

Uzmimo sada bazu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ i točku P s koordinatama (x, y, z). Tada je jasno da su koordinate vektora $\overrightarrow{OP}$ vezane uz koordinate točke P, tj. vrijedi $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
Za točku P' s koordinatama (x', y', z') znamo da je $\overrightarrow{OP'} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$. Sada je, zbog $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$ (pravilo trokuta za zbrajanje vektora), moguće prikazati $\overrightarrow{PP'}$ kao

$$\boxed{\overrightarrow{PP'} = (x' - x)\,\vec{i} + (y' - y)\,\vec{j} + (z' - z)\,\vec{k}\,.}$$

Dakle, komponente (koordinate) vektora $\overrightarrow{PP'}$ se dobivaju kao razlika koordinata njegove krajnje i početne točke.

Napomena 1.10. *Vidjeli smo da je* $\overrightarrow{PP'} = (x'-x)\,\vec{i} + (y'-y)\,\vec{j} + (z'-z)\,\vec{k}$. *Znamo da je* $|\overrightarrow{PP'}| = d(P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$, *pa slijedi da je duljina proizvoljnog vektora jednaka*

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$$

1.4 Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ bilo koja baza od $X_O(E)$. Tada znamo da za proizvoljni $\vec{a} \in X_O(E)$ postoje i jedinstveni su $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$.

Ako sada identificiramo $\overrightarrow{a} \in X_O(E)$ s uređenom trojkom njegovih koordinata, $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$, pravila za zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom (koja su opisana u točki 1.3) nam daju pravila za takve operacije nad uređenim trojkama:

1. $(a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$,

2. $\lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Sada zaboravimo geometriju (jer ne možemo lako predočiti takve skupove) i za proizvoljni $n \in \mathbf{N}$ definirajmo takve operacije nad uređenim *n-torkama* realnih brojeva $(x_1, x_2, ..., x_n)$ gdje su $x_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, ..., n$. Skup svih takvih *n-torki* označavat ćemo sa $\mathbb{R}^n$. Dakle $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, ..., n\}$. Za $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo:

$$\boxed{(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),}$$

$$\boxed{\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).}$$

Lako je provjeriti da zbrajanje uređenih n-torki i njihovo množenje skalarom zadovoljavaju svojstva analogna svojstvima iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2. Odatle slijedi da je $\mathbb{R}^n$ **vektorski prostor** za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$.

U točki 1.3 smo vidjeli da se svaki vektor iz $X_0(E)$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz svake baze od $X_0(E)$. To svojstvo baze od $X_0(E)$ zovemo **potpunost**. Linearna nezavisnost baze jamči jedinstvenost takvog prikaza. Sada možemo definirati bazu u $\mathbb{R}^n$ kao potpun i linearno nezavisan skup vektora iz $\mathbb{R}^n$. Može se pokazati da skup od n vektora $\overrightarrow{e_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ čija je i-ta koordinata 1 a sve ostale su nula, $i = 1, ..., n$, čini bazu u $\mathbb{R}^n$. Kako ta baza ima n vektora, kažemo da je $\mathbb{R}^n$ n-**dimenzionalni realni vektorski prostor**.

1.5 Skalarni produkt

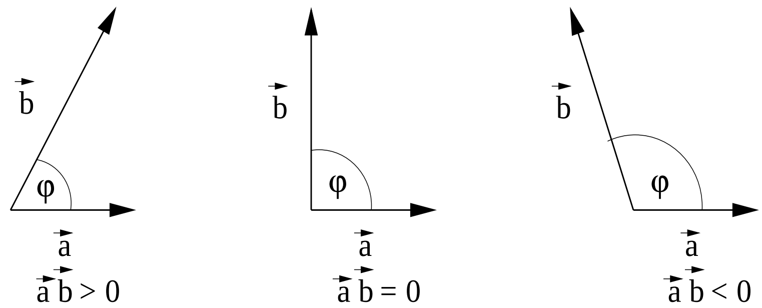
Vektori su generalizacija brojeva. Želimo imati operacije koje imamo za brojeve i koje se svode na operacije s brojevima za $n = 1$ (slučaj $n = 1$ svodi se na vektorski prostor $X_O(p)$ ili $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$). Do sada smo vidjeli kako možemo vektore zbrajati i množiti skalarom. Želimo uvesti i množenje vektora. Kao motivacija može nam poslužiti pojam rada sile na nekom putu.

Znamo da je rad sile F na putu s dan formulom $W = F \cdot s$ (odnosno $W = |\vec{F}||\vec{s}|$), ako su sila i put kolinearni. Želimo imati sličan izraz i za slučaj kad $\vec{F}$ i $\vec{s}$ nisu kolinearni. U tu svrhu moramo na odgovarajući način definirati produkt dvaju vektora. Kako je rad skalarna veličina, rezultat produkta vektora mora biti skalar. Osim toga, novodefinirani produkt se za slučaj kolinearnosti $\vec{F}$ i $\vec{s}$ mora svoditi na gornju formulu za rad.

Definicija 1.8. *Neka su $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$.* ***Skalarni produkt*** *vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_O(E)$ je skalar koji označavamo s $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i definiramo formulom*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,}$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. (Uzimamo $0 \leq \varphi \leq \pi$, odnosno manji od dvaju kutova između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.) Ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nul vektor, onda je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



Slika 1.8: Uz definiciju skalarnog produkta.

Zaključujemo da iz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (tj. iz $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$) slijedi da su ili $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **okomiti** (tj. kut φ među njima je $\frac{\pi}{2}$) ili je barem jedan od njih nul vektor.

Što učiniti ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nemaju zajedničko hvatište (tj. nisu iz $X_O(E)$)? Uzmimo njima jednake vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ iz $X_O(E)$, pa imamo definiran skalarni produkt za svaka dva vektora.

Pogledajmo sada jedinične vektore $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ baze pravokutnog koordinatnog sustava (iz točke 1.3). Iz Tablice 1.1 vidimo da su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ međusobno okomiti (ortogonalni) i jedinični (normirani), pa kažemo da je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **ortonormirana baza** vektorskog prostora $X_O(E)$. Primijetimo da $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Tablica 1.1: Skalarno množenje vektora baze pravokutnog koordinatnog sustava

nije jedina takva baza (npr. $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ je druga takva baza). Svaka tri vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ za koje vrijede relacije kao gore čine ortonormiranu bazu u $X_O(E)$.

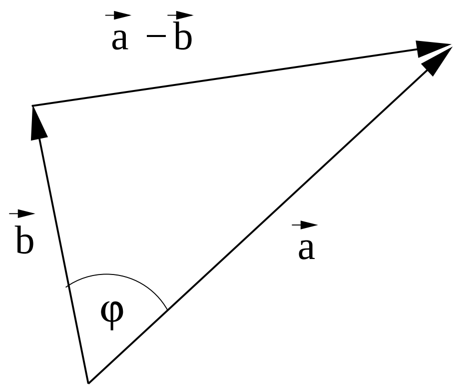
Sada si postavimo pitanje, kako izračunati skalarni produkt?

Neka su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Tada je

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k},$$

odnosno

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}.$$



Slika 1.9: Računanje skalarnog produkta.

Sada iz kosinusovog poučka za trokut OAB imamo

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Kako je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

to imamo

$$(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Odatle sređivanjem dobijemo

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.}$$

Napomena 1.11. *Primijetimo da skalarni produkt možemo generalizirati na vektore prostora proizvoljne dimenzije.*
Neka su $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Tada skalarni produkt vektora* x *i* y *definiramo kao*

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.}$$

Teorem 1.6 (Svojstva skalarnog produkta)**.** *Za sve vektore iz* $X_0(E)$ *i sve skalare iz* $\mathbb{R}$ *vrijedi:*

1. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *(aditivnost),*
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *(homogenost),*
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(simetričnost).*♣

1. Uvrštavajući $\vec{b} = \vec{a}$ u definiciju skalarnog produkta dobijemo $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|$, tj.

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$$

   Ova se formula za dužinu vektora, slaže s Napomenom 1.10.

2. Polazeći od $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ dobivamo za ne-nul vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.}$$

   Time smo dobili korisnu formulu za kut između dva vektora.

Definicija 1.9. *Neka su V i W realni vektorski prostori. Za preslikavanje (funkciju) sa V u W, tj. $f : V \longrightarrow W$ kažemo da je **linearni operator** ako vrijedi*

$$\boxed{f(\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}) = \lambda f(\overrightarrow{a}) + \mu f(\overrightarrow{b})}$$

*za sve $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ i sve $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Posebno, ako je vektorski prostor $W = \mathbb{R}$, onda f zovemo **linearni funkcional**.*

Primjer 1.2. *Neka je $\overrightarrow{c} \in X_O(E)$ fiksan vektor. Tada je skalarno množenje s fiksnim vektorom $\overrightarrow{c}$ linearni funkcional.*

Imamo definiranu funkciju $f : X_O(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ s $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$. Neka su sada $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in X_O(E)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ proizvoljni, onda imamo

$$f(\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \mu \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \lambda f(\overrightarrow{a}) + \mu f(\overrightarrow{b}).\spadesuit$$

Neka je sada $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ naša standardna ortonormirana baza vektorskog prostora $X_O(E)$ (konstruirana u točki 1.3). Tada za proizvoljni $\overrightarrow{a} \in X_O(E)$ vrijedi $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$. Pomnožimo li sada prethodnu jednakost redom vektorima baze $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ te iskoristimo svojstvo ortonormiranosti baze dobijemo:

$$a_x = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}, \ \ a_y = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j}, \ \ a_z = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{k}.$$

Dakle imamo

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i})\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j})\overrightarrow{j} + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{k})\overrightarrow{k}.}$$

Napomena 1.12. *Analogna formula*

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{w}$$

vrijedi za bilo koju ortonormiranu bazu, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Uzmimo proizvoljni jedinični vektor $\overrightarrow{a} \in X_O(E)$ i rastavimo ga u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ od $X_O(E)$. Kako je $|\overrightarrow{a}| = 1$, vrijedi $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$. Tada su očito $a_x, a_y, a_z \in [-1, 1]$, pa postoje brojevi $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ takvi da je

$$a_x = \cos\alpha, \ \ a_y = \cos\beta, \ \ a_z = \cos\gamma.$$

Odatle je

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{i}$$

$$\overrightarrow{a} = \cos\alpha \overrightarrow{i} + \cos\beta \overrightarrow{j} + \cos\gamma \overrightarrow{k}.$$

Brojeve $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ zovemo **kosinusi smjera** vektora $\overrightarrow{a}$.

Neka je sada $\overrightarrow{a} \in X_O(E)$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ proizvoljan (ne nužno jedinični) vektor. Pogledajmo vektor $\overrightarrow{a_0} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$. Već smo rekli (točka 1.1) da je $\overrightarrow{a_0}$ jedinični i iste orijentacije i smjera kao i $\overrightarrow{a}$. Štoviše, vrijedi

$$\boxed{\overrightarrow{a_0} = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|} \overrightarrow{i} + \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|} \overrightarrow{j} + \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|} \overrightarrow{k}.}$$

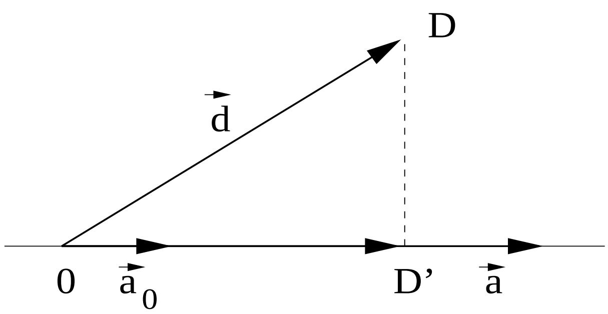
Dakle su kosinusi smjera vektora $\overrightarrow{a}$ definirani s

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}.}$$

Iz definicije skalarnog produkta i gornjih razmatranja slijedi da su koordinate vektora jednake duljini njegovih projekcija na koordinatne osi.

Možemo promatrati i općenitiji problem:

Kako projicirati zadani vektor na proizvoljni pravac?
Neka je $\overrightarrow{d} \in X_O(E)$. Tada postoji $D \in E$ takva da je $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD}$. Uzmimo proizvoljan pravac p kroz O i neka je $\overrightarrow{OD'}$ ortogonalna projekcija vektora $\overrightarrow{d}$ na p. Nadalje, neka je $\overrightarrow{a} \in X_O(E)$ proizvoljan vektor koji leži na p i $\overrightarrow{a_0}$ njegov



Slika 1.10: Projekcija vektora na pravac.

jedinični vektor. Tada imamo

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \lambda\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{D'D}.$$

Množeći gornju jednadžbu s $\overrightarrow{a_0}$ dobivamo

$$\overrightarrow{a_0} \cdot \overrightarrow{d} = \lambda \overrightarrow{a_0}^2 = \lambda,$$

jer su $\overrightarrow{a_0}$ i $\overrightarrow{D'D}$ okomiti. Dakle imamo $\overrightarrow{OD'} = (\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{a_0})\overrightarrow{a_0}$ jer je $\overrightarrow{OD'} = \lambda \overrightarrow{a_0}$. Ako sada uvedemo oznaku $\overrightarrow{d'}$ za $\overrightarrow{OD'}$, imamo

$$\boxed{\overrightarrow{d'} = (\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{a_0})\overrightarrow{a_0}.}$$

1.6 Digresija - determinante matrica 2. i 3. reda

Iz prethodnih smo odjeljaka mogli vidjeti da se uvođenjem vektora i pravila za računanje s njima dobiva mogućnost sažetog iskazivanja i zapisivanja rezultata. U ovom se odjeljku upoznajemo s pojmom determinante koji igra važnu ulogu u sažetom i elegantnom formuliranju rezultata o linearnim sustavima, a koristan je i pri radu s vektorima. Determinante se povijesno javljaju u kontekstu rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Pogledajmo sljedeći sustav:

$$ax + by = \alpha$$
$$cx + dy = \beta.$$

Ako pomnožimo prvu jednadžbu s d, drugu s $-b$ i zbrojimo ih, dobijemo

$$(ad - bc)x = \alpha d - \beta b,$$

odnosno, za $ad - bc \neq 0$,

$$x = \frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}.$$

S druge strane, ako prvu jednadžbu pomnožimo s c, drugu s $-a$ i zbrojimo ih, dobijemo

$$y = \frac{\alpha c - \beta a}{bc - ad} = \frac{\beta a - \alpha c}{ad - bc}.$$

Koeficijente našeg sustava možemo zapisati u obliku tablice koju zovemo **matrica**.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sada za matricu A definirajmo funkciju **det** koja će matrici A pridruživati realan broj na sljedeći način:

$$\boxed{\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.}$$

Oznaka koju još koristimo je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Tada imamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Pri izvođenju ovih formula pretpostavljali smo da je $ad - bc \neq 0$, tj. da smijemo dijeliti s $\det A$. Ako to nije slučaj, to znači da je $ad = bc$, odnosno $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. To je uvjet kolinearnosti (pa onda i linearne zavisnosti) vektora $a\vec{i} + b\vec{j}$ i $c\vec{i} + d\vec{j}$, odnosno paralelnosti pravaca definiranih izrazima $ax + by = \alpha$, $cx + dy = \beta$. Vidimo da je u vrijednosti $\det A$ pohranjena informacija o linearnoj zavisnosti/nezavisnosti dvaju vektora.

Analogno, za sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice imamo:

$$a_1x + a_2y + a_3z = \alpha$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = \beta$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = \gamma.$$

Matrica tog sustava je matrica trećeg reda, i dana je s

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Determinantu matrice trećeg reda računamo rekurzivno razvojem po prvom retku. U tom se razvoju pojavljuju determinante drugog reda:

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.}$$

Determinante matrica drugog reda znamo računati, tj. sveli smo problem računanja determinante trećeg reda na problem računanja determinante drugog reda.
Drugi način na koji možemo računati determinante matrica trećeg reda je **Sarrusovo pravilo**: ispod determinante dopišemo njena prva dva retka, pa onda zbrojimo produkte elemenata na glavnoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima i od toga oduzmemo produkte elemenata na sporednoj dijagonali i njoj paralelnim pravcima. Po tom pravilu imamo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

Svojstva determinante:

1. Zamjena redaka stupcima i obratno ne mijenja vrijednost determinante, tj.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Ako dva susjedna retka (stupca) zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak, tj.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Ako su dva retka (stupca) u determinanti jednaka, determinanta je jednaka nuli.

4. Ako su svi elementi retka (stupca) pomnoženi istim skalarom, determinanta se množi tim skalarom,tj.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_2 & a_3 \\ b_1 & \lambda b_2 & b_3 \\ c_1 & \lambda c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. Vrijedi:

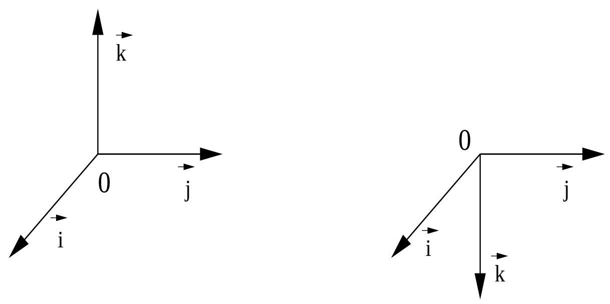
$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & a_2+d_2 & a_3+d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantama ćemo se više baviti u poglavlju o rješavanju linearnih sustava. Ovdje smo uveli samo ona njihova svojstva koja će nam trebati pri radu s vektorima.

1.7 Desni i lijevi koordinatni sustavi. Orijentacija

Znamo da je za proizvoljnu točku $O \in E$ skup $X_O(E)$ vektorski prostor. Neka je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ neka baza od $X_O(E)$. Tada uređenu trojku $(O; \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ zovemo **koordinatni sustav**. Neka su sada $O, O' \in E$ i neka su $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ i $(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ proizvoljne ortogonalne baze od $X_O(E)$ odnosno $X_{O'}(E)$. Tada imamo dva pravokutna koordinatna sustava $S = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ i $S' = (O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$. Postavlja se pitanje, je li moguće krutim gibanjem (rotacija, translacija ili oboje) prevesti S' u S tako da O' prijeđe u O, $\overrightarrow{i'}$ u $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j'}$ u $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k'}$ u $\overrightarrow{k}$?
Ako je to moguće, onda kažemo da su S i S' **ekvivalentni** ili **jednako orijentirani**. Kako to odrediti?
Prvo translatiramo O' u O, onda dovedemo $\overrightarrow{i'}$ u $\overrightarrow{i}$. Tada ravnina okomita na $\overrightarrow{i'}$ u kojoj su $\overrightarrow{j'}$ i $\overrightarrow{k'}$ prijeđe u ravninu okomitu na $\overrightarrow{i}$ u kojoj su $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$. Sada rotacijom oko osi koja sadrži $\overrightarrow{i}$ dovedemo $\overrightarrow{j'}$ na $\overrightarrow{j}$. Time vektor $\overrightarrow{k'}$ padne na pravac vektora $\overrightarrow{k}$: ili se preklopi s njim (tj. imaju istu orijentaciju), ili je suprotne orijentacije.
Jasno je da je svaki treći pravokutni koordinatni sustav jednako orijentiran s točno jednim od ova dva. Ili se poklopi sa S, ili sa S', ako S' nije ekvivalentan sa S. To znači da se skup svih pravokutnih koordinatnih sustava raspada na dva podskupa. Koordinatne sustave u jednom podskupu zovemo desnima a u drugom lijevima.

Postavlja se pitanje, kako odrediti jesu li dva pravokutna sustava jednako orijentirana ili nisu?



Slika 1.11: Desna i lijeva ortonormirana baza.

Neka su $S = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ i $S' = (O'; \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ dva pravokutna koordinatna sustava. Prikažimo $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}$ preko $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i'} &= a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{j'} &= b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{k'} &= c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Izračunajmo

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako je $D > 0$, onda su S i S' (odnosno njihove baze) jednako orijentirani, ako je $D < 0$, onda nisu.

Napomena 1.13. *Za svaka dva sustava S i S' (ne nužno pravokutna) je $D \neq 0$. Dakle, ako su S i S' dva proizvoljna sustava (ne nužno pravokutna), onda se orijentiranost od S i S' ispituje analogno, tj. pomoću determinante pripadajuće matrice.*

Definicija 1.10. ***Orijentirani prostor*** *je prostor u kojem se zna koji su koordinatni sustavi desni (pozitivno orijentirani) a koji lijevi (negativno orijentirani).*

1.8 Vektorski produkt

Vektorski produkt definira se samo za vektore trodimenzionalnog prostora (vidjeli smo u točki 1.4 da postoje n-dimenzionalni vektorski prostori za svako $n \in \mathbf{N}$

a u Napomeni 1.10 vidjeli smo da možemo definirati skalarni produkt na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$).

Neka je O čvrsta točka u prostoru E i $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutni normirani desni koordinatni sustav. **Vektorski produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k},}$$

odnosno

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Determinantu u ovoj formuli shvaćamo čisto formalno, kao sažeti zapis.

Teorem 1.7 (Svojstva vektorskog produkta). *Za sve vektore iz $X_0(E)$ i sve skalare iz $\mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{a}) \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *(homogenost),*
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
   $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ *(distributivnost prema zbrajanju),*
3. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ *(antikomutativnost).*♣

Primijetimo da tvrdnje Teorema 1.7 slijede izravno iz svojstava determinante koja smo vidjeli u točki 1.6.

Duljina vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je dana formulom

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.}$$

Napomena 1.14. *Vektorski produkt dvaju vektora jednak je nul vektoru ako i samo ako su ti vektori kolinearni. To uključuje i slučaj kad je jedan od njih (ili čak oba) nul vektor, jer je nul vektor kolinearan sa svakim vektorom.*

Dokaz:

Ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ nul vektor, tvrdnja slijedi lagano iz formule za duljinu vektora $\vec{a} \times \vec{b}$. Neka su sada oba vektora različita od nul vektora.
Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. Zbog $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, i $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$, imamo

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \cdot 1$, pa desna strana formule za duljinu vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ iščezava. Tada je $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, pa i $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Obratno, neka je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Tada je $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, pa iz formule za duljinu $|\vec{a} \times \vec{b}|$ imamo $0 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, imamo $0 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\varphi)$. Po pretpostavci je $|\vec{a}| \neq 0$ i $|\vec{b}| \neq 0$, pa je $\cos^2\varphi = 1$, tj. $\varphi = 0$ ili $\varphi = \pi$. Dakle $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni.♣

Ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, iz formule za duljinu $|\vec{a} \times \vec{b}|$ slijedi

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi.$$

Dakle imamo

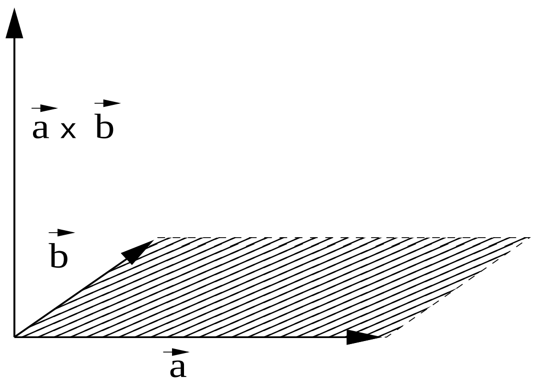
$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.}$$

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Tada iz svojstva skalarnog produkta i formule za vektorski produkt imamo:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

To znači da je $\vec{a} \times \vec{b}$ okomit na ravninu u kojoj su $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je jedna baza. Pitanje je sad je li $\vec{a} \times \vec{b}$ orijentiran, prema "gore" ili prema "dolje"?



Slika 1.12: Vektorski produkt.

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pravokutni normirani desni koordinatni sustav, i neka su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ zapisi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tada je $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$. Izračunajmo sada determinantu D (opisanu u točki 1.7). Imamo:

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \end{vmatrix} =$$

$$(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 > 0.$$

Kako je $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ desni koordinatni sustav (pravokutni i normirani), to je $(O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ desni (općenito nepravokutni) koordinatni sustav.

Pogledajmo sljedeće svojstvo ortonormirane baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ koje će nam biti korisno pri računanju.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Tablica 1.2: Vektorsko množenje vektora ortonormirane baze

Napomena 1.15. *Primijetimo jednu bitnu stvar: vektorsko množenje nije asocijativno. Uzmimo npr. vektore ortonormirane baze* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Tada je* $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$, *dok je s druge strane* $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = -\vec{j}$ *tj.*

$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} \neq \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}).$$

Vektorski produkt je koristan pri matematičkom opisivanju veličina kao što je kutna brzina. Sa Slike 1.13 vidimo da je $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$.

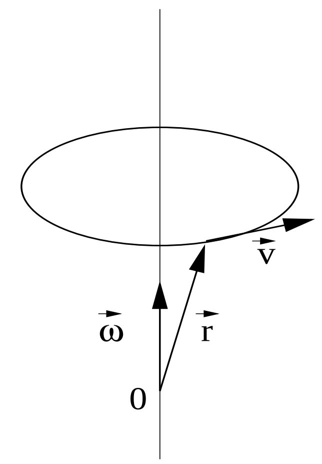
Lako se može dokazati (iskoristimo mogućnost prikaza vektora u ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pravila za skalarno množenje, pravila za vektorsko množenje te gornju tablicu) da vrijede sljedeće korisne formule:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

Primjenom gornjih formula lagano se dokazuje **Jacobijev identitet**:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$



Slika 1.13: Kutna brzina.

Ako u Jacobijev identitet uvrstimo $\vec{a} = \vec{c} \neq \vec{0}$, imamo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}, \quad \text{odnosno}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Kako je $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}$, imamo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{0}$$

tj. $(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$. Podijelimo li ovaj izraz sa $|\vec{a}|^2$ dobijemo:

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{1}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}).}$$

Dobili smo formulu za rastav vektora $\vec{b}$ na vektor kolinearan s $\vec{a}$ i vektor okomit na $\vec{a}$ za unaprijed zadani $\vec{a}$.

1.9 Mješoviti produkt

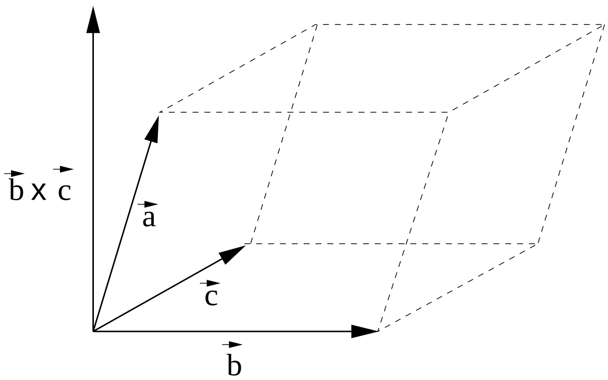
Neka su zadani vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ i $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$, gdje je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ neka desna ortonormirana baza. Tada njihov **mješoviti produkt** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ definiramo s

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

odnosno s

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.}$$

Definicija 1.11. *Za vektore $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in X_O(E)$ kažemo da su* ***komplanarni*** *ako leže u istoj ravnini.*



Slika 1.14: Mješoviti produkt triju vektora.

Napomena 1.16. *Vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in X_O(E)$ su komplanarni ako i samo ako su linearno zavisni.*

Napomena 1.17. *Za vektore $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in X_O(E)$ vrijedi $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$ ako i samo ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ komplanarni.*

Dokaz:

Ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ komplanarni po Napomeni 1.16 oni su linearno zavisni, pa tvrdnja slijedi iz svojstava determinante 3,4 i 5 iz točke 1.6.

Obratno, ako je $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$ i ako je barem jedan od njih jednak nul vektoru, onda tvrdnja lagano slijedi. Pretpostavimo zato da su $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$. Tada, kako je $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$, zaključujemo da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ okomiti. No znamo da je vektor $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ okomit na ravninu u kojoj leže $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$, pa kako je $\overrightarrow{a}$ okomit na $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, zaključujemo da on leži u ravnini u kojoj leže i $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.♣.

Do sada smo spomenuli skalarno množenje, vektorsko množenje i mješoviti produkt. Kako pamtiti ove operacije (geometrijska interpretacija)? Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in X_O(E)$. Tada je:

1. $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ je **duljina** projekcije od $\vec{a}$ na $\vec{b}$ za jedinični vektor $\vec{b}$, jer je $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\cos\varphi|$.

2. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je **površina** paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jer je $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, gdje je $|\vec{a}|$ baza, a $|\vec{b}|\sin\varphi$ visina paralelograma.

3. $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ je **volumen** paralelepipeda razapetog s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, jer je $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a}||\vec{b} \times \vec{c}||\cos\varphi|$ (φ je kut između $\vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$). Veličina $|\vec{b} \times \vec{c}|$ je površina baze, a $|\vec{a}||\cos\varphi|$ je duljina visine paralelepipeda.

Pomoću mješovitog produkta možemo proizvoljan vektor $\vec{d}$ prikazati u proizvoljnoj (ne nužnoj ortonormiranoj) bazi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Neka je dan $\vec{d} \in X_O(E)$ i neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ proizvoljna baza od $X_O(E)$. Tada vrijedi:

$$\boxed{\vec{d} = \frac{\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{a} - \frac{\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{b} + \frac{\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}\vec{c}.}$$

Napomena 1.18. *Neka su dane točke $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1,2,3,4$ (u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tada je volumen tetraedra čiji su vrhovi točke P_i $i = 1,2,3,4$ jednak apsolutnoj vrijednost broja*

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Dokaz:

Uzmimo vektore $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1, P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$. Tada je volumen paralelepipeda razapetog s $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1, P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ jednak apsolutnoj vrijednosti broja

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Kako je volumen tetraedra čiji su vrhovi P_i $i = 1,2,3,4$ jednak $\frac{1}{6}$ volumena paralelepipeda razapetog s $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1, P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$, imamo tvrdnju.♣

Poglavlje 2

Analitička geometrija

2.1 Pravac u ravnini

U ovom poglavlju bavimo se analitičkim opisom geometrijskih objekata. Ograničit ćemo se pri tome samo na pravce i ravnine u trodimenzionalnom prostoru, no važno je znati da se na sličan način mogu opisati i složeniji geometrijski objekti kao što su krivulje i plohe. Takav analitički opis ne ovisi o geometrijskom zoru, pa se pomoću tog aparata mogu prikazivati i proučavati objekti u više dimenzija.

2.1.1 Opći oblik jednadžbe pravca u ravnini

Neka je $(O; \vec{i}, \vec{j})$ fiksirani pravokutni koordinatni sustav u ravnini (baza $(\vec{i}, \vec{j})$ vektorskog prostora $X_O(M)$ je dobivena analogno kao i baza iz točke 1.3) kojeg još označavamo Oxy i kojeg ćemo nadalje bez napomene koristiti u ravnini.

Promotrimo jednadžbu prvog stupnja

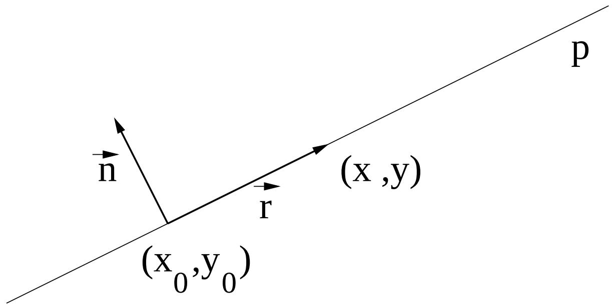
$$Ax + By + C = 0,$$

pri čemu su A, B i C realne konstante i barem jedan od A i B je različit od nule. Ta jednadžba opisuje neki skup točaka u ravnini, a zbog uvjeta da je barem jedan od A i B različit od nule, taj skup je neprazan. Ako je $B \neq 0$, onda za proizvoljni x_0 imamo

$$y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}.$$

Dakle postoji točka (x_0, y_0) iz ravnine koja zadovoljava jednadžbu $Ax+By+C = 0$, tj. vrijedi $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobijemo jednadžbu $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ koja je ekvivalentna jednadžbi $Ax + By + C = 0$.
Pokažimo sada da je jednadžbom $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ određen pravac p kroz točku

(x_0, y_0) okomit na vektor $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j}$.
Zaista, ako točka (x, y) leži na pravcu p, onda je taj pravac nositelj vektora $\overrightarrow{r} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j}$, pa zbog okomitosti imamo $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Kako je $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ imamo $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.
Ako točka (x, y) ne leži na pravcu p, onda $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{n}$ nisu okomiti, tj. $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, odnosno ne vrijedi $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Dakle sve točke na p zadovoljavaju $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, i niti jedna točka izvan p ne zadovoljava $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. To znači da $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ zadovoljavaju samo i jedino točke s pravca p.



Slika 2.1: Pravac u ravnini.

Definicija 2.1. *Jednadžba*

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

*s proizvoljnim koeficijentima A, B, C takvima da je barem jedan od A i B različit od nule (to se još formulira i kao $A^2 + B^2 > 0$) je **opća jednadžba pravca**. Još se naziva i **implicitna jednadžba pravca**.*

Napomena 2.1. *Ako imamo dvije jednadžbe, $Ax + By + C = 0$ i $A'x + B'y + C' = 0$, onda one određuju isti pravac ako i samo ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $A' = tA$, $B' = tB$ i $C' = tC$.*

Dokaz:

Ako jednadžbe $Ax + By + C = 0$ i $A'x + B'y + C' = 0$ određuju isti pravac, znači da prolaze kroz istu točku (x_0, y_0) i da je za svaku drugu točku (x, y) tog pravca vektor $\overrightarrow{r} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j}$ okomit na $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j}$ i na $\overrightarrow{n'} = A'\overrightarrow{i} + B'\overrightarrow{j}$. Dakle su vektori $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{n'}$ kolinearni, tj. postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{n'} = t\overrightarrow{n}$. Odatle je $A' = tA$ i $B' = tB$, no kako jednadžbe $Ax + By + C = 0$ i $A'x + B'y + C' = 0$ određuju isti pravac znači da je i $C' = tC$.

Obratno, ako postoji $t \in \mathbb{R}$ takav da je $A' = tA$, $B' = tB$ i $C' = tC$, onda su očito $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{n'} = A'\overrightarrow{i} + B'\overrightarrow{j}$ kolinearni, pa je dovoljno provjeriti da pravci p (pravac određen s $Ax + By + C = 0$) i p' (pravac određen s $A'x + B'y + C' = 0$) prolaze kroz istu točku. Očito je (x_0, y_0) rješenje jednadžbe $Ax + By + C = 0$ ako i samo ako je (x_0, y_0) rješenje jednadžbe $A'x + B'y + C' = 0$, pa imamo tvrdnju.♣

Pogledajmo sada neke posebne slučajeve jednadžbe pravca (tzv. nepotpune oblike):

1. Ako je $C = 0$, onda pravac prolazi kroz ishodište, jer je točka $(0, 0)$ rješenje jednadžbe $Ax + By = 0$.
2. Ako je $B = 0$, onda je pravac paralelan s osi y, jer je tada vektor $\overrightarrow{n}$ oblika $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i}$.
3. Ako je $A = 0$, onda je pravac paralelan s osi x, jer je tada vektor $\overrightarrow{n}$ oblika $\overrightarrow{n} = B\overrightarrow{j}$.
4. Ako je $B = C = 0$, onda je pravac os y, jer je $(0, 0)$ rješenje jednadžbe $Ax = 0$ i vektor $\overrightarrow{n}$ je oblika $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i}$.
5. Ako je $A = C = 0$, onda je pravac os x, jer je $(0, 0)$ rješenje jednadžbe $By = 0$ i vektor $\overrightarrow{n}$ je oblika $\overrightarrow{n} = B\overrightarrow{j}$.

2.1.2 Segmentni oblik

Polazimo od potpunog oblika jednadžbe pravca $Ax+By+C = 0$. Pretpostavimo da je $C \neq 0$ i podijelimo jednadžbu $Ax + By + C = 0$ s $-C$. Dobijemo $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$. Ako su A i B različiti od 0 to možemo pisati kao

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Uvedemo li oznake $a = -\frac{C}{A}$ i $b = -\frac{C}{B}$, imamo

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

Ovakav oblik jednadžbe pravca zovemo **segmentni oblik jednadžbe pravca**.

Uočimo sljedeće: ako je $x = 0$, onda je $y = b$, a ako je $y = 0$, onda je $x = a$, tj. pravac prolazi kroz točke $(0, b)$ i $(a, 0)$. Dakle je geometrijsko značenje veličina a i b dano točkama u kojima pravac siječe koordinatne osi.

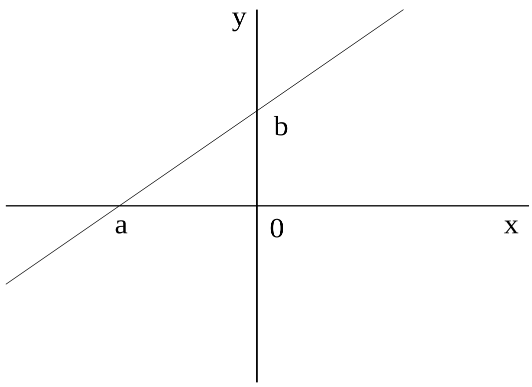
2.1.3 Kanonski oblik

Jasno je da je pravac jedinstveno određen točkom kojom prolazi i vektorom smjera (vektor na kojem leži).

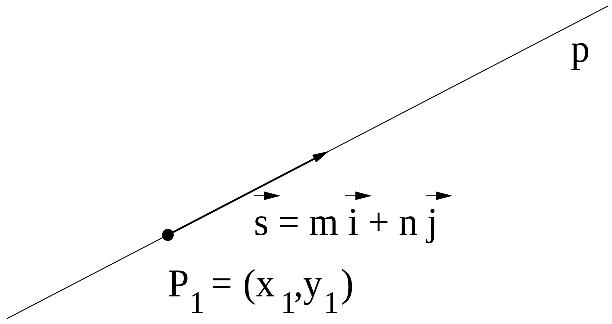
Sada želimo naći jednadžbu pravca p ako znamo točku $P_1 = (x_1, y_1)$ kroz koju prolazi pravac i vektor smjera pravca $\overrightarrow{s} = m\overrightarrow{i} + n\overrightarrow{j}$. Točka $P = (x, y)$ leži na p ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_1P} = (x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, tj. ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{r} = \lambda\overrightarrow{s}$. Iz uvjeta $x - x_1 = \lambda m$ i $y - y_1 = \lambda n$ eliminiranjem konstante proporcionalnosti λ dobijemo

$$\boxed{\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}.}$$

Ovaj oblik jednadžbe pravca zovemo **kanonski oblik jednadžbe pravca**.



Slika 2.2: Segmentni oblik jednadžbe pravca.



Slika 2.3: Kanonski oblik jednadžbe pravca.

Napomena 2.2. *Parametri m i n u nazivnicima kanonske jednadžbe su formalni, u smislu da jedan od njih može biti jednak nuli (ali ne oba), jer brojevi m i n nam samo daju informaciju o vektoru smjera i ne predstavljaju djelitelje u operaciji dijeljenja brojeva.*

Npr.

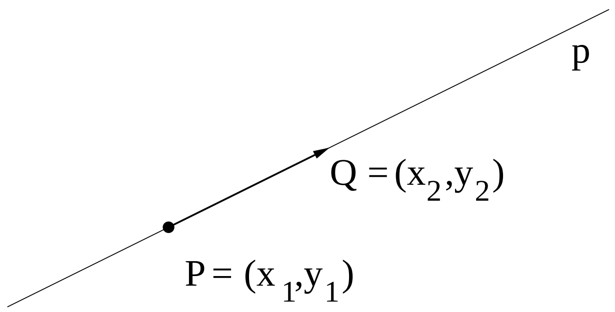
$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0}$$

znači da je $0(x - x_1) = m(y - y_1)$, tj. $y = y_1$. Dakle imamo pravac paralelan s osi x, bez komponente u smjeru $\vec{j}$, što se vidi i iz vektora smjera $\vec{s} = m\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$.

2.1.4 Pravac kroz dvije točke

Ako uzmemo dvije različite točke $P = (x_1, y_1)$ i $Q = (x_2, y_2)$ u ravnini M, onda je jasno da njima prolazi jedinstveni pravac p. Nađimo jednadžbu tog pravca.

Uočimo da je vektor $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$ u stvari vektor smjera pravca p, a kako p po pretpostavci prolazi točkom P, iz kanonske jednadžbe pravca imamo da je



Slika 2.4: Pravac kroz dvije točke.

jednadžba pravca kroz dvije točke

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

ili

$$\boxed{y = \tfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) + y_1.}$$

Pravac kroz jednu točku s koeficijentom smjera

Neka je zadan pravac p u ravnini svojom kanonskom jednadžbom (tj. znamo točku kroz koju prolazi) uz pretpostavku da je $m \neq 0$. Uvodeći oznaku $k = \frac{n}{m}$, dobivamo **jednadžbu pravca kroz jednu točku s koeficijentom smjera**:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1).}$$

Veličinu k zovemo **koeficijent smjera pravca** p.

2.1.5 Eksplicitni oblik

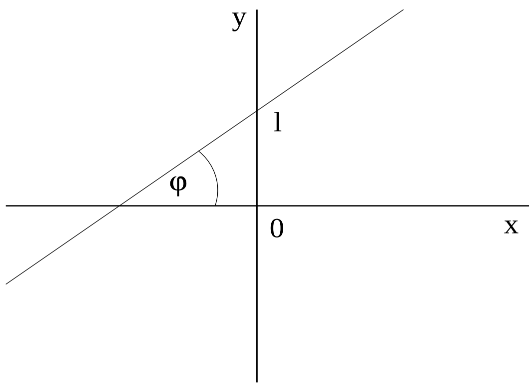
Neka je zadan pravac p u ravnini jednadžbom kroz jednu točku i koeficijentom smjera, $y-y_1 = k(x-x_1)$. Tada je $y = kx-kx_1+y_1$. Uvedemo li oznaku $l = -kx_1+y_1$, dobivamo **eksplicitni oblik jednadžbe pravca**:

$$\boxed{y = kx + l.}$$

Napomena 2.3. *Za $x = 0$ imamo $y = l$ tj. pravac prolazi točkom $(0, l)$.*

Uzeli smo da je $k = \frac{n}{m}$. Što to znači?
Znamo da su m i n komponente vektora smjera pravca p. Neka je φ kut koji vektor smjera pravca p zatvara s pozitivnim smjerom x osi (tj. s vektorom $\vec{i}$). Kako je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{n}{m}$, imamo

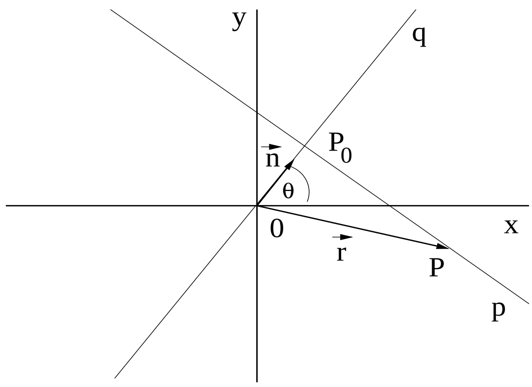
$$k = \operatorname{tg}\varphi.$$



Slika 2.5: Eksplicitni oblik jednadžbe pravca.

2.1.6 Normirani oblik (normalni oblik)

Neka je dan pravac p u ravnini (cijelo vrijeme radimo s pravokutnim desnim koordinatnim sustavom Oxy). Povucimo sada kroz O pravac q okomit na p. Označimo s P_0 točku presjeka i s d njenu udaljenost od ishodišta $|\overline{OP_0}|$, tj. $d = |\overline{OP_0}|$. Neka je $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ jedinični



Slika 2.6: Normirani oblik jednadžbe pravca.

vektor na pravcu q, tj. $a^2 + b^2 = 1$. Jasno je da su $a, b \in [-1, 1]$, pa tada postoje $\psi, \phi \in [0, \pi]$ takvi da je $a = \cos\psi$ i $b = \cos\phi$. Ovdje su $\cos\psi$ i $\cos\phi$ kosinusi smjera vektora $\vec{n}$ odnosno pravca p (točka 1.5). Zbog komplementarnosti kutova ψ i ϕ ($\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$) je $\cos\phi = \sin\psi$, pa imamo $\vec{n} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$.

Točka $P = (x, y)$ leži na pravcu p ako i samo ako projekcija vektora $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ na pravac q ima duljinu d, tj. $P = (x, y)$ leži na pravcu p ako i samo ako je $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$. Jednadžbu $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$, odnosno

$$\boxed{x\cos\psi + y\sin\psi = d}$$

zovemo **normirani oblik jednadžbe pravca**.

Ako je pravac u ravnini zadan svojom implicitnom (općom) jednadžbom

$$Ax + By + C = 0,$$

postavlja se pitanje kako pronaći njegov normirani oblik. Pretpostavimo da je

$$x \cos \psi + y \sin \psi - d = 0$$

njegov normirani oblik, po Napomeni 2.1 mora postojati $t \in \mathbb{R}$ takav da bude

$$tAx + tBy + tC = x \cos \psi + y \sin \psi - d$$

za sve x i y, dakle mora biti

$$tA = \cos \psi, \quad tB = \sin \psi, \quad tC = -d.$$

Iz prve dvije jednakosti kvadriranjem i zbrajanjem slijedi

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

a iz treće jednakosti zbog $d > 0$ nalazimo da je

$$\text{sign } t = -\text{sign } C$$

(tj. predznak od t je jednak suprotnom predznaku od C). Stoga je

$$t = \frac{1}{-\text{sign } C \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dakle normirani oblik jednadžbe pravca

$$Ax + By + C = 0$$

glasi

$$\boxed{\frac{Ax+By+C}{-\text{sign } C\sqrt{A^2+B^2}} = 0.}$$

2.2 Odnosi točaka i pravaca u ravnini

2.2.1 Kut dvaju pravaca. Paralelnost i okomitost

Odredimo kut dvaju pravaca u ovisnosti o obliku jednadžbe kojom su zadani.

a) **Opći oblik:**

Neka su p_1 i p_2 zadani s

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

odnosno

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Vektori koji su okomiti na p_1 odnosno p_2 su dani s

$$\overrightarrow{n_1} = A_1\overrightarrow{i} + B_1\overrightarrow{j}$$

odnosno s

$$\overrightarrow{n_2} = A_2\overrightarrow{i} + B_2\overrightarrow{j}.$$

Definicija 2.2. *Kut između pravaca p_1 i p_2 zadanih u općem obliku definiramo kao kut između $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$.*

Neka je φ kut između $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$. Tada imamo

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Dakle kosinus kuta između p_1 i p_2 je dan formulom:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.}$$

Napomena 2.4. *Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako su $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{n_1} = \lambda\overrightarrow{n_2}$, odnosno ako i samo ako je*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Napomena 2.5. *Pravci p_1 i p_2 su okomiti ako i samo ako je $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0$ tj. ako i samo ako je*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

b) **Kanonski oblik:**

Neka su p_1 i p_2 zadani s

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}$$

odnosno s

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

Tada su vektori smjera pravaca p_1 i p_2 dani s

$$\overrightarrow{s_1} = m_1\overrightarrow{i} + n_1\overrightarrow{j}$$

odnosno s

$$\overrightarrow{s_2} = m_2\overrightarrow{i} + n_2\overrightarrow{j}.$$

Definicija 2.3. *Kut između pravaca p_1 i p_2 zadanih u kanonskom obliku definiramo kao kut njihovih vektora smjera.*

Kako je kosinus kuta između $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ dan s

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}},$$

to je kosinus kuta između p_1 i p_2 dan s

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.}$$

Napomena 2.6. *Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako su $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $\lambda\in\mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{s_1}=\lambda\overrightarrow{s_2}$, odnosno ako i samo ako je*

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Napomena 2.7. *Pravci p_1 i p_2 su okomiti ako i samo ako je $\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0$, tj. ako i samo ako je*

$$m_1m_2+n_1n_2=0.$$

c) **Eksplicitni oblik:**

Neka su p_1 i p_2 zadani eksplicitnim jednadžbama

$$y=k_1x+l_1,$$

$$y=k_2x+l_2.$$

Tada su koeficijenti smjera pravaca p_1 i p_2 dani s

$$k_1=\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$k_2=\operatorname{tg}\varphi_2,$$

gdje su φ_1 odnosno φ_2 kutovi koje zatvaraju vektori smjera pravaca p_1 i p_2 s x osi.

Definicija 2.4. *Kut između p_1 i p_2 zadanih u eksplicitnom obliku definiramo kao razliku kutova φ_2 i φ_1.*

Neka je $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$. Tada imamo

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2},$$

odnosno tangens kuta između p_1 i p_2 je dan formulom

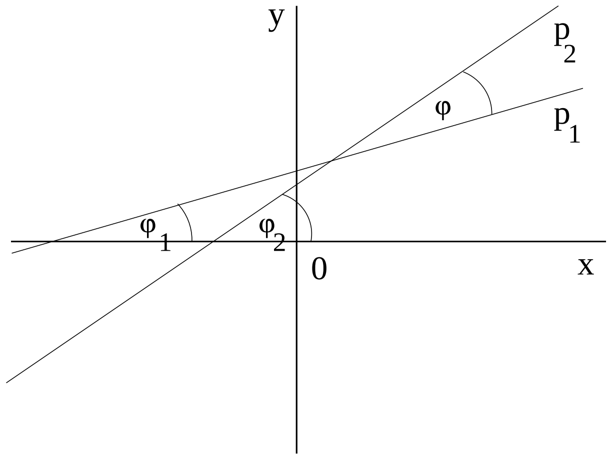
$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.}$$

Napomena 2.8. *Pravci p_1 i p_2 su paralelni ako i samo ako je $\varphi=0$, tj. ako i samo ako je $\varphi_1=\varphi_2$, odnosno ako i samo ako je*

$$k_1=k_2.$$

Napomena 2.9. *Pravci p_1 i p_2 su okomiti ako i samo ako je $\varphi=\frac{\pi}{2}$, tj. ako i samo ako je $\operatorname{tg}\varphi=\infty$, odnosno ako i samo ako je $1+k_1k_2=0$. To je ekvivalentno s*

$$k_1=-\frac{1}{k_2}.$$



Slika 2.7: Kut dvaju pravaca.

2.2.2 Udaljenost točke od pravca

Neka su dani točka $P_0 = (x_0, y_0)$ i pravac p u ravnini. Zanima nas udaljenost točke P_0 od pravca p.

Definicija 2.5. *Udaljenost točke P_0 od pravca p je udaljenost točke P_0 do presjecišta pravca p s pravcem kroz P_0 okomitim na p.*

Napomena 2.10. *Udaljenost točke P_0 od pravca p možemo definirati i na drugi način koji je ekvivalentan s Definicijom 2.5. Udaljenost točke P_0 od pravca p je udaljenost od P_0 do njene ortogonalne projekcije na p.*

Izračunajmo sada udaljenost točke P_0 od pravca p. Neka je pravac p dan u normiranom obliku, tj.

$$x \cos\psi + y \sin\psi = d,$$

i neka je $\vec{n} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$ (kao u točki 2.1.7). Definirajmo sada broj koji ćemo zvati **otklon** s

$$\delta(P_0, p) = x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi - d.$$

Uočimo da je broj

$$x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi$$

ustvari projekcija vektora $\overrightarrow{OP_0}$ na vektor $\vec{n} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$. Otklon je jednak udaljenosti točke P_0 od pravca p ako je točka P_0 s one strane pravca p na koju pokazuje vektor $\vec{n}$ (tj. sa suprotne strane od ishodišta) jer je tada $\delta(P_0, p) \geq 0$, a negativnoj udaljenosti ako je P_0 s iste strane pravca p na kojoj je i ishodište jer je tada $\delta(P_0, p) < 0$. Dakle je udaljenost točke P_0 od pravca p

$$\boxed{d(P_0, p) = |x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi - d|.}$$

Ako je pravac p u ravnini zadan svojom implicitnom (općom) jednadžbom

$$Ax + By + C = 0,$$

onda iz točke 2.1.6 znamo da njegova jednadžba u normiranom obliku glasi

$$\frac{Ax + By + C}{-\text{sign } C\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Dakle udaljenost točke $P_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p je

$$d(P_0, p) = \Big|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{-\text{sign } C\sqrt{A^2 + B^2}}\Big|,$$

odnosno

$$\boxed{d(P_0, p) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

Koristeći gornju formulu za udaljenost točke od pravca čija je jednadžba zadana u općem obliku, lagano možemo izvesti i formule za udaljenost točke od pravca čija je jednadžba zadana u bilo kojem obliku spomenutom u točki 2.1 (segmentni, kanonski, pravac kroz dvije točke, eksplicitni).

Ukoliko je jednadžba pravca p zadana:

a) u segmentnom obliku, tj.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

odnosno

$$bx + ay - ab = 0,$$

udaljenost točke $P_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p je

$$\boxed{d(P_0, p) = \frac{|bx_0+ay_0-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}};}$$

b) u kanonskom obliku kroz točku $P_1 = (x_1, y_1)$ s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = (m, n)$, tj.

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

odnosno

$$nx - my - nx_1 + my_1 = 0,$$

udaljenost točke $P_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p je

$$\boxed{d(P_0, p) = \frac{|nx_0-my_0-nx_1+my_1|}{\sqrt{m^2+n^2}};}$$

c) kroz dvije točke $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, tj.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

odnosno

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 = 0,$$

udaljenost točke $P_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p je

$$\boxed{d(P_0, p) = \frac{|(y_2-y_1)x_0-(x_2-x_1)y_0-(y_2-y_1)x_1+(x_2-x_1)y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}};}$$

d) u eksplicitnom obliku, tj.

$$y = kx + l,$$

odnosno

$$kx - y + l = 0,$$

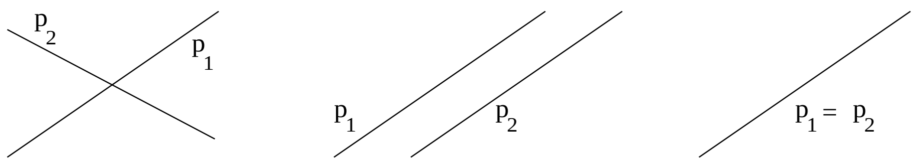
udaljenost točke $P_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p je

$$\boxed{d(P_0, p) = \frac{|kx_0-y_0+l|}{\sqrt{k^2+1}}.}$$

2.2.3 Presjecište dvaju pravaca

Neka su dana dva pravca u ravnini. Tada su njihovi mogući položaji u ravnini sljedeći:

1. sijeku se u jednoj točki,
2. paralelni su,
3. poklapaju se, tj. identični su.



Slika 2.8: Mogući položaji pravaca u ravnini.

U slučaju da se sijeku u jednoj točki, zovimo je $S = (x_s, y_s)$, koordinate točke S dobiju se kao rješenja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.
Npr. ako se pravci p_1 i p_2 sijeku u jednoj točki $S = (x_s, y_s)$ i dani su u općem obliku:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

i ako je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

onda je prema točki 1.6

$$x_s = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

i

$$y_s = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Uočimo sljedeću činjenicu koja lagano slijedi iz uvjeta paralelnosti pravaca (Napomena 2.4).

Napomena 2.11. *Ako je*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

onda su p_1 i p_2 paralelni.
Vrijedi i obrat, ako su p_1 i p_2 paralelni, onda je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.4 Uvjet presijecanja pravca i segmenta (dužine)

U točki 2.2.2 definirali smo otklon točke P_0 od pravca p koji je dan u normiranom obliku

$$x \cos\psi + y \sin\psi = d$$

formulom

$$\delta(P_0, p) = x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi - d.$$

Pokazali smo da je udaljenost točke P_0 od pravca p jednaka

$$|\delta(P_0, p)|.$$

Osim udaljenosti, otklon nam (kroz svoj predznak) daje i drugu informaciju: $\delta(P_0, p)$ je pozitivno ako je P_0 na onoj strani od p na koju pokazuje $\overrightarrow{n} = \cos\psi \overrightarrow{i} + \sin\psi \overrightarrow{j}$.
Odatle imamo sljedeći zaključak: pravac p presijeca dužinu $\overline{AB}$ ako su brojevi $\delta(A, p)$ i $\delta(B, p)$ suprotnog predznaka.

2.2.5 Uvjet presijecanja triju pravaca u istoj točki

Neka su dana tri pravca p_1, p_2, p_3 u ravnini u općem obliku, tj.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Tražimo uvjet za postojanje točno jednog presjecišta.
Da bi se p_1, p_2, p_3 sjekli u jednoj točki barem jedna od determinanata

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

mora biti različita od nule, jer ako su sve tri jednake nuli, onda prema Napomeni 2.11 presjecište ili ne postoji ili ih ima beskonačno mnogo.

Neka se sada, bez smanjenja općenitosti, p_1 i p_2 sijeku u jednoj točki. Označimo ju sa $S = (x_s, y_s)$. Tada p_3 mora prolaziti kroz S, tj. mora pripadati svežnju pravaca određenom s p_1 i p_2.
Što možemo iz ovoga zaključiti?
Kako se nalazimo u ravnini, po Teoremu 1.4 vektori

$$\overrightarrow{n_1} = A_1 \overrightarrow{i} + B_1 \overrightarrow{j},$$

$$\overrightarrow{n_2} = A_2 \overrightarrow{i} + B_2 \overrightarrow{j},$$

$$\overrightarrow{n_3} = A_3 \overrightarrow{i} + B_3 \overrightarrow{j}$$

su linearno zavisni, tj. postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{n_3} = \alpha \overrightarrow{n_1} + \beta \overrightarrow{n_2}.$$

Dakle imamo

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$$

$$B_3 = \alpha B_1 + \beta B_2.$$

Dokažimo da je i

$$C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Kako p_1, p_2, p_3 po pretpostavci prolaze istom točkom, S, imamo

$$A_1x_s + B_1y_s + C_1 = 0$$

$$A_2x_s + B_2y_s + C_2 = 0$$

$$A_3x_s + B_3y_s + C_3 = 0,$$

ali kako vrijedi

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2$$
$$B_3 = \alpha B_1 + \beta B_2$$

lagano dobijemo da je

$$C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Dakle dobili smo da pravac p_3 pripada svežnju određenom s p_1 i p_2 ako i samo ako vrijedi

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = \alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Drugim riječima, vektori $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3)$ su linearno zavisni, pa po svojstvima determinante 4. i 5. iz točke 1.6 imamo da je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Znači uvjet presijecanja triju pravaca u istoj točki je

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

i barem jedna od triju determinanta

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

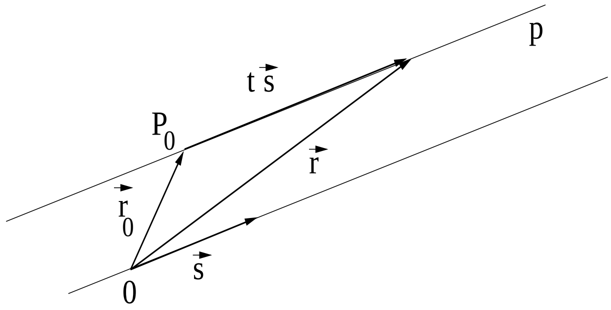
je različita od nule.

2.3 Pravac u prostoru

2.3.1 Pravac kroz jednu točku sa zadanim smjerom

Neka su dani vektor $\overrightarrow{s}$ i točka P_0 u prostoru i neka je $\overrightarrow{r_0}$ njezin radij-vektor (točka 1.2). Želimo naći jednadžbu pravca p kroz točku P_0 sa smjerom $\overrightarrow{s}$.
Točka $P \in E$ leži na pravcu p ako i samo ako je $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{s}$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Neka je $\overrightarrow{r}$ radij-vektor točke P. Tada imamo $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$, odnosno **jednadžba pravca kroz točku P_0 s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$** je dana s

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{s}.}$$



Slika 2.9: Pravac u prostoru.

2.3.2 Parametarske jednadžbe pravca

Neka je pravac p kroz točku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ zadan vektorom smjera $\vec{s} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$. Tada znamo da je jednadžba pravca dana s $\vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{s}$. Sada, kako je

$$\vec{r_0} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$

i za proizvoljnu točku $P = (x, y, z) \in E$ njezin radij-vektor $\vec{r}$ je

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

imamo: P leži na pravcu p ako i samo ako je

$$(x, y, z) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc).$$

Jednadžbe

$$\boxed{x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc}$$

zovemo **parametarske jednadžbe pravca kroz točku** P_0 **sa smjerom** $\vec{s}$.

2.3.3 Kanonske jednadžbe pravca

Neka je dan pravac p u prostoru s parametarskim jednadžbama kroz P_0 u smjeru $\vec{s}$. Eliminacijom parametra t iz parametarskih jednadžbi dobijemo

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.}$$

To su **kanonske jednadžbe pravca kroz** P_0 **u smjeru** $\vec{s}$.

Napomena 2.12. *Ako je pravac p u prostoru određen točkom P_0 i vektorom smjera $\overrightarrow{s}$, onda $P \in E$ leži na p ako i samo ako su $\overrightarrow{P_0P}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni. Prema Napomeni 1.14 to je ekvivalentno s*

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{s} = \overrightarrow{0}.$$

Raspisano po koordinatama to glasi

$$((y-y_0)c-(z-z_0)b)\overrightarrow{i}+((z-z_0)a-(x-x_0)c)\overrightarrow{j}+((x-x_0)b-(y-y_0)a)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

Kako su vektori baze linearno nezavisni, njihova linearna kombinacija je jednaka nuli samo ako su svi koeficijenti jednaki nuli. Izjednačavajući s nulom koeficijente uz $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ dobivamo kanonske jednadžbe pravca.

Napomena 2.13. *Ako je pravac u prostoru zadan kanonskim jednadžbama*

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

onda iz njih izravno čitamo sljedeće informacije:

1. *pravac p prolazi točkom (x_0, y_0, z_0) i*

2. *vektor smjera pravca p je dan s (a, b, c) odnosno a, b, c su* ***koeficijenti smjera*** *pravca p.*

Posebno, kanonska jednadžba pravca kroz ishodište s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ je dana s

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Ako je dan pravac u ravnini s točkom kroz koju prolazi i vektorom smjera i ako je taj vektor smjera jedinični, onda ima dva kosinusa smjera. Zbog komplementarnosti, jedan kosinus smjera prelazi u sinus, i njihov omjer daje koeficijent smjera (točka 2.1.5 i točka 2.1.6).
Ako je pravac u prostoru zadan točkom kroz koju prolazi i vektorom smjera $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$, onda znamo da je vektor

$$s_0 = \frac{1}{|\overrightarrow{s}|}\overrightarrow{s} = \left(\frac{a}{|\overrightarrow{s}|}, \frac{b}{|\overrightarrow{s}|}, \frac{c}{|\overrightarrow{s}|}\right)$$

jedinični, istog smjera i orijentacije kao i $\overrightarrow{s}$, pa određuje isti pravac.
Iz točke 1.5 znamo da postoje kosinusi smjera vektora $\overrightarrow{s_0}$, odnosno postoje $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ takvi da je

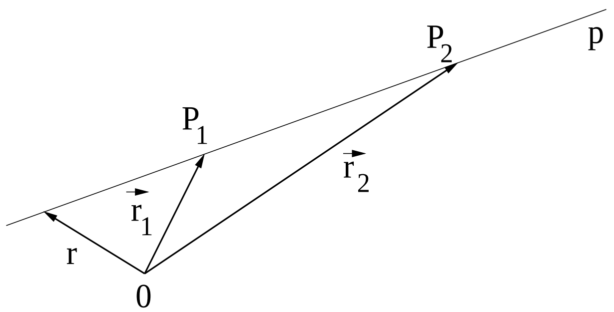
$$\cos\alpha = \frac{a}{|\overrightarrow{s}|}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{|\overrightarrow{s}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{|\overrightarrow{s}|}.$$

Dakle koeficijenti smjera a, b, c su razmjerni s kosinusima smjera i koeficijent razmjernosti je

$$|\overrightarrow{s}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2.3.4 Pravac kroz dvije točke

Neka su dane dvije različite točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ u prostoru. Tada kroz njih prolazi jedinstveni pravac p. Odredimo njegovu jednadžbu.



Slika 2.10: Pravac kroz dvije točke u prostoru.

Znamo iz točke 2.3.1 da je pravac jedinstveno određen točkom kojom prolazi i vektorom smjera. Uzmimo sada npr. točku P_1 kao točku kojom prolazi p i definirajmo $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{P_1P_2}$. Kako p prolazi i točkom P_2 jasno je da $\overrightarrow{s}$ leži na p, tj. $\overrightarrow{s}$ je vektor smjera pravca p.
Označimo s $\overrightarrow{r}$ radij-vektor proizvoljne točke $P \in E$, s $\overrightarrow{r_1}$ radij-vektor točke P_1 i s $\overrightarrow{r_2}$ radij-vektor točke P_2. Sada imamo da je $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, pa iz točke 2.3.1 imamo: točka P leži na pravcu p ako i samo ako P zadovoljava jednadžbu

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}).}$$

Taj izraz zovemo **jednadžba pravca kroz dvije točke**.
Ako sada $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + t(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})$ raspišemo koordinatno dobijemo jednadžbe

$$\boxed{x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)}$$

koje zovemo **parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke**.
Eliminacijom parametra t iz parametarskih jednadžbi dobijemo jednadžbu $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ koju zovemo **kanonska jednadžba pravca kroz dvije točke**.

2.3.5 Pravac zadan dvjema projekcijama

Neka je pravac p kroz točku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ zadan svojom kanonskom jednadžbom

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Iz jednakosti prvog i trećeg omjera dobivamo

$$x = x_0 + \frac{a}{c}(z - z_0) = \frac{a}{c}z + x_0 - \frac{a}{c}z_0,$$

odnosno, uz oznake $m = \frac{a}{c}$ i $m_1 = x_0 - \frac{a}{c}z_0$,

$$x = mz + m_1.$$

Analogno, iz jednakosti drugog i trećeg omjera imamo

$$y = y_0 + \frac{b}{c}(z - z_0) = \frac{b}{c}z + y_0 - \frac{b}{c}z_0,$$

odnosno, uz oznake $n = \frac{b}{c}$ i $n_1 = y_0 - \frac{b}{c}z_0$,

$$y = nz + n_1.$$

Dakle, vrijedi

$$\boxed{\frac{x-m_1}{m} = \frac{y-n_1}{n} = z.}$$

Napomena 2.14. *Iz točke 2.3.3 slijedi da su kosinusi smjera vektora smjera iz kanonske jednadžbe*

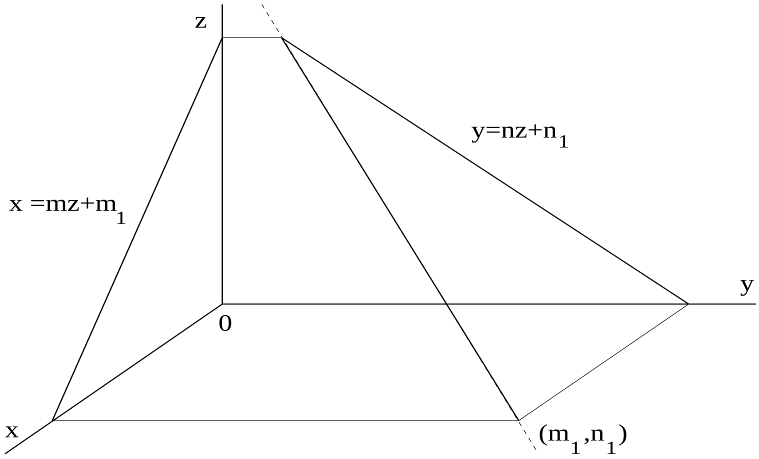
$$\frac{x - m_1}{m} = \frac{y - n_1}{n} = z$$

dani s

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \qquad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}.$$

2.3.6 Svežanj pravaca

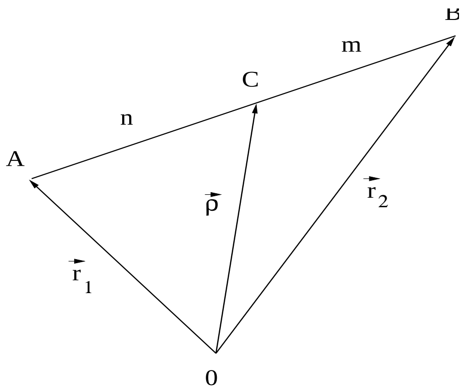
Svežanj pravaca sa središtem u točki $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je skup svih pravaca koji prolaze kroz tu točku. Tada za svaki izbor $a, b, c \in \mathbb{R}$ koji nisu svi jednaki nuli jednadžbe $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ opisuju neki pravac iz tog svežnja.



Slika 2.11: Pravac zadan dvjema projekcijama.

2.3.7 Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Neka su dane točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ u prostoru. Neka točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $\frac{n}{m}$ za $n, m \in \mathbf{N}$, tj. $\overline{AC} : \overline{CB} = m : n$.
Ako je $\overrightarrow{r_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$ radij-vektor točke A i $\overrightarrow{r_2} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}$



Slika 2.12: Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.

radij-vektor točke B, onda je radij-vektor $\overrightarrow{\rho}$ točke C dan s

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{AC}.$$

Kako je

$$\overrightarrow{AC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

i

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1},$$

imamo

$$\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{r_1} + \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{r_1} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{r_2}.$$

Dakle koordinate točke C su

$$\boxed{\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}, \frac{my_1+ny_2}{m+n}, \frac{mz_1+nz_2}{m+n}\right).}$$

Napomena 2.15. *Ako je $m = n$ dobivamo koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$. Imamo*

$$\overrightarrow{\rho} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}),$$

odnosno

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

2.4 Ravnina u prostoru

2.4.1 Opći oblik jednadžbe ravnine

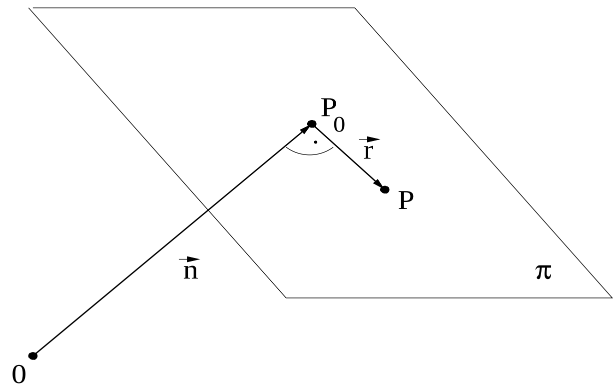
Promatramo izraz oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0 :$$

pri čemu je barem jedan od A, B, C različit od nule (ili ekvivalentno $A^2 + B^2 + C^2 > 0$). Bez smanjenja općenitosti, neka je $C \neq 0$, tj. $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$. Tada postoji točka (x_0, y_0, z_0) za koju je $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (jer za proizvoljne x_0 i y_0 je $z_0 = -\frac{A}{C}x_0 - \frac{B}{C}y_0 - \frac{D}{C}$). Oduzimanjem izraza $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ od $Ax + By + Cz + D = 0$ dobivamo jednadžbu ekvivalentnu jednadžbi $Ax + By + Cz + D = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Pokažimo sada da je jednadžbom $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ opisana ravnina u prostoru kroz točku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i okomita na vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.



Slika 2.13: Opći oblik jednadžbe ravnine.

Zaista, ako je točka $P = (x, y, z)$ točka u takvoj ravnini, onda je jasno da i vektor $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_0P}$ leži u toj ravnini. Onda je $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = 0$, odnosno, kako je $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$, imamo da izraz

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

vrijedi za sve točke na toj ravnini.
S druge strane, ako $P \in E$ ne leži u ravnini, onda očito $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_0P}$ i $\overrightarrow{n}$ nisu okomiti (jer $\overrightarrow{P_0P}$ ne leži u ravnini), tj. ne vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Dakle, jednadžba

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

je jednadžba ravnine kroz točku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ koja je okomita na vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Izraz

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

zovemo **opći oblik jednadžbe ravnine.**
Ako je ravnina Π dana u općem obliku $Ax + By + Cz + D = 0$ i ako je $C \neq 0$, onda je

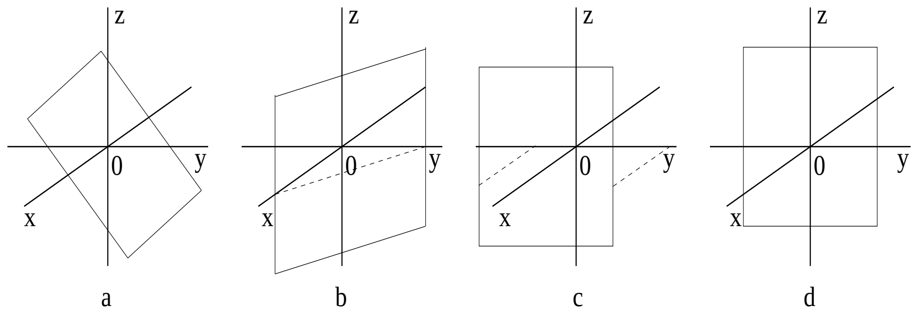
$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}.$$

Označimo $a_1 = -\frac{A}{C}$, $b_1 = -\frac{B}{C}$ i $c_1 = -\frac{D}{C}$. Dakle imamo jednadžbu

$$\boxed{z = a_1x + b_1y + c_1}$$

koju zovemo **eksplicitni oblik jednadžbe ravnine.**

Pogledajmo sada specijalne slučajeve jednadžbe ravnine (tzv. nepotpune oblike):



Slika 2.14: Ravnine u posebnim položajima.

1. Ako je $D = 0$, onda je očito da $O = (0, 0, 0)$ zadovoljava opću jednadžbu ravnine $Ax + By + Cz = 0$, tj. ravnina prolazi kroz ishodište.

2. Ako je $C = 0$, onda normala $\overrightarrow{n} = (A, B, 0)$ nema komponentu u smjeru osi z (tj. $\overrightarrow{k}$), pa imamo $\cos\gamma = 0$. Tada je jasno da je ravnina paralelna s osi z i da siječe koordinatnu ravninu Oxy u pravcu $Ax + By + D = 0$.

3. Ako je $B = C = 0$, onda normala $\overrightarrow{n} = (A, 0, 0)$ ima komponentu samo u smjeru osi x. Imamo $Ax + D = 0$, odnosno $x = -\frac{D}{A}$, ravnina je paralelna s koordinatnom ravninom Oyz.

4. Ako je $B = C = D = 0$, onda prema 1. ravnina prolazi kroz ishodište a prema 3. ravnina je paralelna s koordinatnom ravninom Oyz. Dakle zaključujemo da je ravnina $Ax = 0$ koordinatna ravnina Oyz.

Od četiri parametra, A, B, C i D, imamo samo tri nezavisna, jer jedan parametar možemo eliminirati dijeleći onim od A, B, C koji je različit od nule.

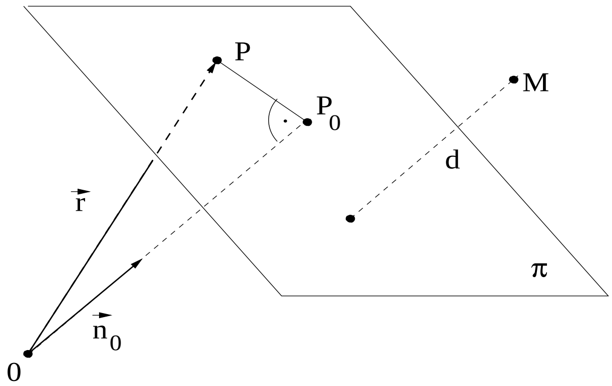
2.4.2 Normalni oblik jednadžbe ravnine

Neka je Π ravnina u prostoru E koja ne prolazi kroz ishodište (tj. točku O) i koja siječe sve tri koordinatne osi. Povucimo okomicu iz točke O na ravninu Π.

Neka ta okomica siječe Π u točki P_0 i neka je $|\overrightarrow{OP_0}| = p$. Neka je $\overrightarrow{n_0} = \frac{\overrightarrow{OP_0}}{p}$ (tj. jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao i $\overrightarrow{OP_0}$) i neka su α, β, γ kutovi što ih $\overrightarrow{n_0}$ zatvara s pozitivnim smjerovima osi x, y, z redom (tj. s vektorima baze $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ iz točke 1.3). To znači da je

$$\overrightarrow{n_0} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\beta\,\overrightarrow{j} + \cos\gamma\,\overrightarrow{k}.$$

Tada proizvoljna točka $P \in E$ leži u Π ako i samo ako je projekcija njenog radij-vektora $\overrightarrow{r}$ na pravac određen s $\overrightarrow{n_0}$ duljine točno p.



Slika 2.15: Normalni oblik jednadžbe ravnine.

Drugim riječima točka $P \in E$ s radij-vektorom $\overrightarrow{r}$ leži u Π ako i samo ako $\overrightarrow{r}$ zadovoljava jednadžbu

$$\boxed{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_0} = p.}$$

Taj izraz zovemo **normalni (ili Hesseov) oblik jednadžbe ravnine**, a vektor $\overrightarrow{n_0}$ zovemo **normala** ravnine Π.
Posebno, ako Π prolazi kroz ishodište (tj. točku O), onda je $p = 0$, pa je normalna jednadžba ravnine oblika

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_0} = 0.$$

Imamo okomitost radij-vektora $\overrightarrow{r}$ točke $P \in E$ na $\overrightarrow{n_0}$.

Napomena 2.16. *Ako točka $P \in E$ ima koordinate (x, y, z), onda je* ***skalarni oblik normalne jednadžbe ravnine*** *dan s*

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.}$$

Napomena 2.17. *Normalni oblik jednadžbe ravnine je zgodan za određivanje udaljenosti točke od ravnine.*
Neka je $M = (x_1, y_1, z_1) \in E$ *proizvoljna. Kao i kod pravca (točka 2.2.2) vektor* $\overrightarrow{n_0}$ *(normala) orijentira stvari: vanjska strana u odnosu na ravninu je ona na koju pokazuje normala.*
Ako sada kroz M *povučemo ravninu* Π' *koja je paralelna s* Π*, duljina okomice do* Π' *će biti* $p + d$ *(za neki* $d \in \mathbb{R}$*, jer je duljina okomice do* Π *jednaka* p*), a kako* M *leži u* Π'*, mora biti*

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma = p + d$$

(jer je, ravnina Π' *paralelna s* Π *pa ima istu normalu* $\overrightarrow{n_0} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\beta\,\overrightarrow{j} + \cos\gamma\,\overrightarrow{k}$ *kao i* Π*). Kako je* d*, u stvari, udaljenost ravnine* Π *od ravnine* Π'*, udaljenost točke* M *od ravnine* Π *je*

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p,$$

ako je M *s one strane* Π *na koju pokazuje* $\overrightarrow{n_0}$*. Za točke s druge strane bit će* $d < 0$*. Imamo nešto analogno otklonu iz točke 2.2.2. Stoga je udaljenost točke* M *od ravnine* Π *dana s*

$$\boxed{d(M, \Pi) = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p|.}$$

Napomena 2.18. *Iz opće jednadžbe ravnine lagano se prelazi na normalni dijeljenjem s* $R = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$*, pri čemu se uzima predznak suprotan od predznaka od* D*.*
Dakle imamo

$$\cos\alpha = \frac{A}{R}, \quad \cos\beta = \frac{B}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{R}.$$

Vektor normale $\overrightarrow{n_0}$ je normirani vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$, tj. istog su smjera i orijentacije, pa određuju istu ravninu. Stoga ćemo i vektor $\overrightarrow{n}$ zvati vektor normale.

Napomena 2.19. *Ako je ravnina* Π *dana u općem obliku* $Ax + By + Cz + D = 0$*, onda su koordinate* A, B, C *vektora normale* $\overrightarrow{n}$ *razmjerne s kosinusima smjera (Napomena 2.18) i koeficijent razmjernosti je* $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$*. Veličina* $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ *je udaljenost od ishodišta.*

Napomena 2.20. *Neka je dana točka* $M = (x_1, y_1, z_1) \in E$. *Tada je, po Napomeni 2.17, udaljenost točke* M *od ravnine* $Ax + By + Cz + D = 0$ *dana s*

$$\boxed{d(M, \Pi) = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.}$$

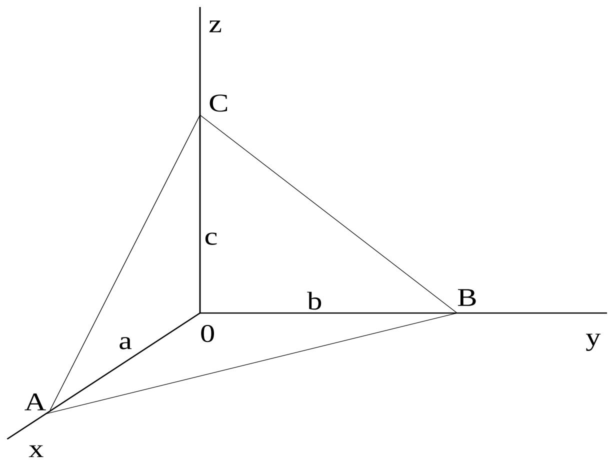
2.4.3 Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je Π ravnina u prostoru E takva da ne prolazi kroz ishodište i neka siječe sve tri koordinatne osi. Nadalje, neka su točke $A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0), C = (0, 0, c)$, redom, točke u kojima Π siječe koordinatne osi x, y, z.
Sada, kako su $A, B, C \in \Pi$, iz normalne jednadžbe ravnine imamo,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{n_0} = p, \qquad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{n_0} = p, \qquad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{n_0} = p.$$

Dakle,

$$a \cos\alpha = p, \qquad b \cos\beta = p, \qquad c\cos\gamma = p.$$



Slika 2.16: Segmentni oblik jednadžbe ravnine.

Odatle,

$$\cos\alpha = \frac{p}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{p}{b}, \qquad \cos\gamma = \frac{p}{c}.$$

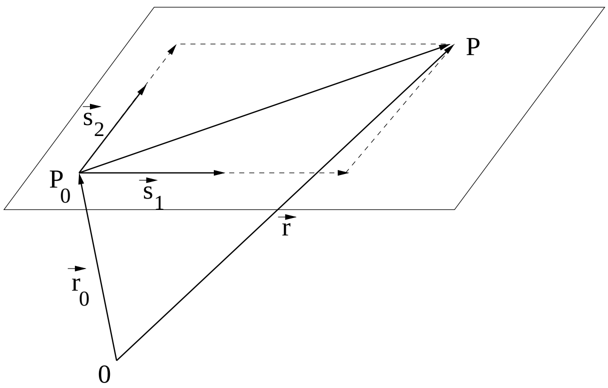
Uvrštavanjem u skalarni oblik normalne jednadžbe ravnine dobivamo jednadžbu

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

koju zovemo **segmentni oblik jednadžbe ravnine**.

2.4.4 Parametarski oblik jednadžbe ravnine

Neka je dana ravnina Π koja prolazi točkom $P_0 \in E$ i neka su $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ linearno nezavisni vektori takvi da je ravnina Π paralelna s njima.



Slika 2.17: Ravnina zadana parametarski.

Točka $P \in E$ leži u ravnini Π ako i samo ako vrijedi

$$\overrightarrow{P_0P} = u\overrightarrow{s_1} + v\overrightarrow{s_2}.$$

(Za $P \in E$ takvu da je $P \in \Pi$ vektori $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ su komplanarni).
Ako označimo s $\overrightarrow{r}$ radij-vektor točke $P \in E$ a s $\overrightarrow{r_0}$ radij-vektor točke P_0, zbog $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ gornja jednadžba prelazi u jednadžbu

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + u\overrightarrow{s_1} + v\overrightarrow{s_2},}$$

koju zovemo **parametarska jednadžba ravnine**. Varijable u i v zovemo **parametri**, a vektore $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ **vektori smjera**.

Neka je $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Tada $P = (x, y, z) \in E$ leži u ravnini ako i samo ako vrijedi $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + u\overrightarrow{s_1} + v\overrightarrow{s_2}$. Raspisujući po koordinatama dobijemo jednadžbe

$$\boxed{x = x_0 + ua_1 + va_2, \quad y = y_0 + ub_1 + vb_2, \quad z = z_0 + uc_1 + vc_2}$$

koje zovemo **skalarni oblik parametarske jednadžbe ravnine**.

Napomena 2.21. *Kad parametri u i v neovisno jedan o drugom prolaze sve vrijednosti između $-\infty$ i ∞ dobije se cijela ravnina. Kako imamo dva parametra (u i v), vidi se da je ravnina dvodimenzionalni objekt u prostoru.*

Napomena 2.22. *Eliminacijom parametara iz skalarnog oblika parametarske jednadžbe ravnine dobijemo jednadžbu ravnine kroz zadanu točku $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i dva vektora smjera $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dajmo sada geometrijsku interpretaciju gornje jednadžbe.
Točka $P \in E$ leži u ravnini Π ako i samo ako vrijedi

$$\overrightarrow{P_0P} = u\overrightarrow{s_1} + v\overrightarrow{s_2},$$

odnosno, ako i samo ako su $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ komplanarni. Po Napomeni 1.16, vektori $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ su komplanarni ako i samo ako je

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.4.5 Jednadžba ravnine kroz tri točke

Neka su dane tri točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ u prostoru takve da ne leže na istom pravcu. Zanima nas jednadžba ravnine koju određuju te tri točke. Kako točke P_1, P_2, P_3 ne leže na istom pravcu, onda su vektori $\overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{P_1P_3}$ nekolinearni. Dakle, možemo uzeti da su $\overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektori smjera ravnine kroz tri točke P_1, P_2, P_3 (uzmemo npr. točku P_1 kao fiksnu točku kroz koju ravnina prolazi). Kao i u točki 2.4.4, točka $P \in E$ leži u ravnini ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ komplanarni. Po Napomeni 1.16 to je ekvivalentno s

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0.$$

Kako je

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

to dobivamo **jednadžbu ravnine kroz tri točke** P_1, P_2, P_3 u obliku

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

2.5 Odnosi ravnina i pravaca u prostoru

2.5.1 Kut dviju ravnina

Neka su Π_1 i Π_2 dvije ravnine dane jednadžbama

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

i

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Definicija 2.6. *Kut između Π_1 i Π_2 je kut između njihovih normala $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$.*

Kako je kosinus kuta između $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ dan s

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

imamo da je kosinus kuta između Π_1 i Π_2 dan s

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.}$$

Napomena 2.23. *Ravnine Π_1 i Π_2 će biti paralelne ako i samo ako su $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{n_2} = \lambda\overrightarrow{n_1}$, odnosno ako i samo ako vrijedi*

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1.$$

Napomena 2.24. *Ravnine Π_1 i Π_2 će biti okomite ako i samo ako su $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ okomiti, tj. ako i samo ako je $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0$, odnosno ako i samo ako vrijedi*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Sada možemo sažeto iskazati tvrdnju o svim mogućim položajima dviju ravnina u prostoru.

Teorem 2.1. *Promatrajmo dvije ravnine zadane jednadžbama* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *i* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Tada vrijedi jedna (i samo jedna) od sljedećih triju tvrdnji:*

1. *Ravnine se ne sijeku.*
2. *Ravnine se sijeku u jednom i samo jednom pravcu.*
3. *Ravnine se podudaraju.* ♣

Prvi slučaj se dešava ako je $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$. Proporcionalnost prvih triju koeficijenata izražava paralelnost ravnina. Ako je još i $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, onda se ravnine podudaraju, imamo treći slučaj. Konačno, drugi slučaj imamo ako vrijedi barem jedna od nejednakosti $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2}$, tj. ako ravnine nisu paralelne. Ako ravnine nisu paralelne, onda se one moraju sjeći, i njihov presjek je pravac. Dakle pravac u prostoru možemo zadati i parom jednadžbi dviju neparalelnih ravnina. Korisno je znati kako iz tog oblika možemo doći do kanonskih jednadžbi. U tu svrhu treba naći bar jednu točku u presjeku ravnina. Kako ravnine nisu paralelne, narušava se barem jedan od omjera iz Napomene 2.23. To znači da je bar jedna od determinanata $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ različita od nule. Uzmimo, određenosti radi, da je $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Uvrštavajući $z = 0$ u jednadžbe ravnina dobivamo sustav čije rješenje nam daje točku T_0 na pravcu presjeka. Njene su koordinate

$$T_0 = \left(\frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, 0 \right).$$

Vektor smjera $\overrightarrow{p}$ pravca presjeka mora biti okomit na obje normale pa ga možemo uzeti kao njihov vektorski produkt, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (B_1C_2 - B_2C_1)\overrightarrow{i} + (C_1A_2 - C_2A_1)\overrightarrow{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\overrightarrow{k}$. Sada imamo sve elemente (koordinate točke T_0 i komponente vektora $\overrightarrow{p}$) za formiranje kanonskih jednadžbi pravca p.

2.5.2 Presjecište triju ravnina

Neka su dane tri ravnine Π_1, Π_2 i Π_3 s jednadžbama

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Znači, sve točke prostora koje se nalaze u presjecištu Π_1, Π_2 i Π_3 moraju zadovoljavati sustav

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Uvedimo sljedeće oznake za determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta \neq 0$ (sada su x, y, z nepoznanice), onda je presjecište jedinstveno (tj. jedna točka, točka 2.4.5) i koordinate su mu

$$\boxed{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right).}$$

Znači dobili smo uvjet da se tri ravnine sijeku u točki i koordinate te točke. Koji su slučajevi još mogući?

Moguće je da nema rješenja (bilo koje dvije ravnine se ne sijeku, tj. paralelne su), rješenje je neki pravac (sve tri se sijeku u jednom pravcu) i rješenje je ravnina (sve tri ravnine se podudaraju).

2.5.3 Kut pravca i ravnine

Neka je dan pravac p u prostoru kroz točku P_0 s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ i ravnina Π svojom jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$.

Definicija 2.7. *Kut između pravca p i ravnine Π je komplement kuta između $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ i $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.*

Znači, ako je $\frac{\pi}{2} - \varphi$ kut između $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ i $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ onda je kut između p i Π jednak φ.
Kako je kosinus kuta između $\overrightarrow{s} = (a, b, c)$ i $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ dan s

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|} = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

i kako je $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$, imamo da je sinus kuta između p i Π dan izrazom

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{aA+bB+cC}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.}$$

Napomena 2.25. *Pravac p i ravnina Π su okomiti ako i samo ako su $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{n}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{n} = \lambda\overrightarrow{s}$, odnosno ako i samo ako vrijedi*

$$A : a = B : b = C : c.$$

Napomena 2.26. *Pravac p i ravnina Π će biti paralelni ako i samo ako su $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{n}$ okomiti, tj. ako i samo ako je $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, odnosno ako i samo ako vrijedi*

$$aA + bB + cC = 0.$$

2.5.4 Presjecište pravca i ravnine

Ako je pravac p zadan parametarski jednadžbom

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt, \qquad z = z_1 + ct,$$

onda uvrštavanje u opću jednadžbu ravnine daje jednadžbu za vrijednost parametra t koja odgovara presjecištu

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Aa + Bb + Cc}.$$

Koordinate presjeka su

$$\boxed{\left(x_1 - a\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Aa+Bb+Cc}, y_1 - b\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Aa+Bb+Cc}, z_1 - c\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Aa+Bb+Cc}\right).}$$

Napomena 2.27. *Ako ne postoji takav t koji je konačan, tj. ako je nazivnik od*

$$\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Aa + Bb + Cc}$$

jednak nuli, imamo uvjet paralelnosti pravca i ravnine

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

2.5.5 Pripadnost pravca ravnini

Uvjet pripadnosti pravca $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ ravnini $Ax + By + Cz + D = 0$ dan je parom jednadžbi

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

Prva jednadžba izražava činjenicu da točka (x_0, y_0, z_0) (kojom prolazi pravac) leži u danoj ravnini, a druga je uvjet paralelnosti pravca i ravnine.
Sada možemo sažeto iskazati tvrdnju o međusobnom odnosu pravca i ravnine.

Teorem 2.2. *Neka su ravnina i pravac zadani jednadžbama* $Ax+By+Cz+D = 0$ *i* $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$. *Tada vrijedi jedna (i samo jedna) od sljedećih triju tvrdnji:*

1. *Pravac i ravnina se ne sijeku.*

2. *Pravac i ravnina se sijeku u samo jednoj točki.*

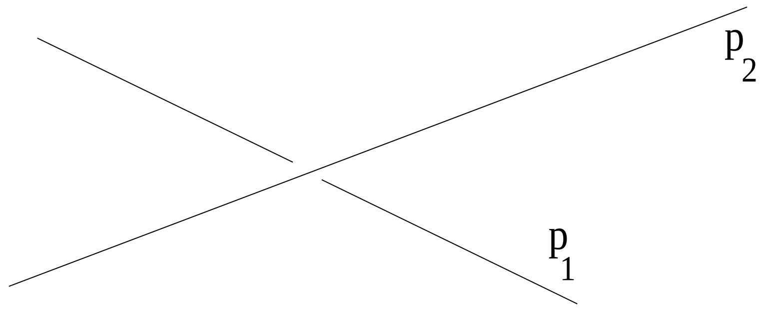
3. *Pravac je sadržan u ravnini.*♣

U prvom i trećem slučaju pravac je paralelan s ravninom $(Aa+Bb+Cc = 0)$. Ako još imaju i zajedničku točku $(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0)$, onda pravac leži u ravnini (treći slučaj). Drugi slučaj je karakteriziran s $Aa + Bb + Cc \neq 0$.

2.5.6 Kut dvaju pravaca

Neka su dani pravci u prostoru p_1 i p_2 kroz točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ odnosno $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ s vektorima smjera $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ odnosno $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$, redom.

Definicija 2.8. *Kut između pravaca p_1 i p_2 je kut između njihovih vektora smjera $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$.*



Slika 2.18: Mimosmjerni pravci.

Znamo da je kosinus kuta između $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ jednak

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

pa je kosinus kuta između p_1 i p_2 jednak

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.}$$

Što ako se pravci ne sijeku, tj. mimoilaze se?
Tada je ideja da ih usporednim (paralelnim) pomakom dovedemo do presijecanja.
To ćemo učiniti tako da projiciramo p_1 na ravninu paralelnu sa p_1 koja sadrži p_2.

Napomena 2.28. *Pravci p_1 i p_2 u prostoru su paralelni ako i samo ako su $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ kolinearni, tj. ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{s_1} = \lambda\overrightarrow{s_2}$, odnosno ako i samo ako je*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

To još označavamo s

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Napomena 2.29. *Pravci p_1 i p_2 u prostoru su okomiti ako i samo ako su $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ okomiti, tj. ako i samo ako je $\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0$, odnosno ako i samo ako je*

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

2.5.7 Presjecište dvaju pravaca

Neka su dani pravci p_1 i p_2 u prostoru koji prolaze kroz $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ odnosno $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ s pripadajućim vektorima smjera $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ odnosno $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Tada su njihove kanonske jednadžbe dane s

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

i

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}.$$

Jasno je da ako se p_1 i p_2 sijeku, onda moraju ležati u istoj ravnini. Neka je to ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$. Nađimo sada uvjet da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini.

To znači da i točke $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ i vektori $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$ leže u toj ravnini. Točnije, točke leže u toj ravnini, a vektori su paralelni s njom. Tada i vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ mora ležati u istoj ravnini sa $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$, tj. mora biti s njima komplanaran. Uvjet komplanarnosti je

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}) = 0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Time smo dobili uvjet da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini.

Može se desiti da su oni paralelni, pa nema presjecišta. Prema Napomeni 2.28, pravci p_1 i p_2 će se sjeći ako je

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

i ne vrijedi

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2.$$

Pomoću gornje determinante možemo karakterizirati sva četiri moguća položaja dvaju pravaca u prostoru.

Teorem 2.3. *Za dva pravca u prostoru vrijedi jedna (i samo jedna) od sljedećih tvrdnji:*

1. *Pravci su mimosmjerni, tj. ne leže u istoj ravnini.*
2. *Pravci leže u istoj ravnini i ne sijeku se.*
3. *Pravci leže u istoj ravnini i sijeku se u jednoj točki.*
4. *Pravci se podudaraju.*♣

Prvi slučaj odgovara situaciji u kojoj je determinanta različita od nule. U drugom slučaju su drugi i treći redak determinante proporcionalni (paralelnost pravaca) ali nisu proporcionalni prvom. Ako su sva tri retka proporcionalna, imamo isti pravac, četvrti slučaj. U trećem slučaju drugi i treći redak nisu proporcionalni (pravci nisu paralelni), no prvi se redak može izraziti kao njihova linearna kompozicija. Pozabavimo se slučajem mimosmjernih pravaca.

2.5.8 Udaljenost dvaju pravaca u prostoru

Neka su dani neparalelni pravci p_1 i p_2 u prostoru koji prolaze kroz $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ odnosno $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ s pripadajućim vektorima smjera $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ odnosno $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Onda su njihove kanonske jednadžbe dane s

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

i

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}.$$

Definicija 2.9. *Udaljenost pravca p_1 od pravca p_2 je duljina zajedničke okomice na ta dva pravca.*

Izračunajmo duljinu zajedničke okomice:
Položimo kroz p_1 ravninu Π paralelnu s p_2 (tj. p_1 leži u ravnini). Tada je duljina zajedničke okomice jednaka udaljenosti bilo koje točke na p_2 do Π (jer su p_2 i Π paralelni). Dakle, kako p_1 leži u Π i Π je paralelna sa p_2, imamo da Π prolazi kroz $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i paralelna je sa $\overrightarrow{s_1} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\overrightarrow{s_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Iz Napomene 2.22, jednadžba ravnine Π je dana s

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Razvojem po prvom retku dobivamo

$$(x - x_1)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_1)\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + (z - z_1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je normala od Π dana s

$$\overrightarrow{n} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Kako je duljina zajedničke okomice jednaka udaljenosti od bilo koje točke na p_2 do Π, uzmimo točku $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Tada je, prema Napomeni 2.20,

$$d(P_2, \Pi) = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}},$$

odnosno,

$$\boxed{d(p_1, p_2) = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.}$$

Napomena 2.30. *Kako znamo da postoji ravnina* Π *takva da* p_1 *leži u njoj i paralelna je sa* p_2*? Ekvivalentno je pitanje, kako konstruirati ravninu kroz točku* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *paralelnu s vektorima* $\overrightarrow{s_1}$ *i* $\overrightarrow{s_2}$*?*
Ako su $\overrightarrow{s_1}$ *i* $\overrightarrow{s_2}$ *nekolinearni, onda uzmemo da je normala ravnine* Π

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}.$$

Time smo dobili izraz kao i gore tj.

$$\overrightarrow{n} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

i imamo određenu ravninu kroz P_1*.*

Ako su $\overrightarrow{s_1}$ *i* $\overrightarrow{s_2}$ *kolinearni, onda su* p_1 *i* p_2 *paralelni, pa je udaljenost* p_1 *od* p_2 *jednaka udaljenosti bilo koje točke s* p_2 *do* p_1*, što znamo izračunati. (Uzmemo li ravninu okomitu na* p_1 *kroz* P_1*, jasno je da možemo uzeti da joj je normala* $\overrightarrow{s_1}$*. Tada pogledamo presjek te ravnine i pravca* p_2*, što je točka, zovimo je* M*. Udaljenost* p_1 *od* p_2 *je jednaka udaljenosti* P_1 *od* M*).*

Poglavlje 3

Matrice i linearni sustavi

3.1 Osnove matričnog računa

3.1.1 Motivacija

Promotrimo sustav linearnih jednadžbi

$$
\begin{aligned}
x \quad\quad & - z + 2u = -3 \\
2y & + z + u = 1 \\
x + y & - z \quad\quad = -1 \\
2x + y & + z + u = 3.
\end{aligned}
$$

To je sustav od četiri linearne algebarske jednadžbe s nepoznanicama x, y, z i u. U primjeru iz točke 1.6 smo vidjeli da je kod uvođenja pojma determinante dobra ideja tretirati sve koeficijente (brojeve uz x, y, z i u) kao jedinstveni objekt (matricu). Ako bismo uspjeli razviti račun takvih objekata, onda bismo mogli sustav linearnih jednadžbi gledati kao linearnu jednadžbu u jednoj nepoznanici. Npr. za gornji sustav bismo imali

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dakle naš sustav od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice bi se mogao napisati kao linearna jednadžba s jednom nepoznanicom

$$A \cdot X = B$$

gdje je operacija " $\cdot$ " množenje objekata koje ćemo proučavati i koju ćemo definirati.

Promotrimo problem jedne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom

$$ax = b.$$

Imamo dva slučaja:

1. Ako je $a \neq 0$, onda postoji jedinstveno rješenje x_0 od $ax = b$ i vrijedi

$$x_0 = \frac{b}{a} = a^{-1}b.$$

2. Ako je $a = 0$, onda:

   a) za $b \neq 0$ ne postoji x_0 koji zadovoljava jednadžbu $ax = b$,

   b) za $b = 0$ svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ zadovoljava jednadžbu $ax = b$.

Naš je cilj generalizirati "teoriju" jedne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom na slučaj više linearnih jednadžbi s više nepoznanica. Pri tome trebamo riješiti neke probleme, kao npr. definirati operacije ("zbrajanje", "množenje" takvih objekata), smisao jednakosti (definirati kada će dva takva objekta biti jednaka), inverzije (definirati inverz objekta, koji bi bio generalizacija recipročnosti brojeva), definirati analogone za "$a \neq 0$", "$a = 0$", "$b \neq 0$", "$b = 0$" itd.

3.1.2 Osnovni pojmovi

Definicija 3.1. *Neka su m i n prirodni brojevi. Pravokutna shema u kojoj je u m redaka i n stupaca složeno $m \cdot n$ realnih brojeva zove se* ***matrica*** *tipa $m \times n$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrica A ima m redaka i n stupaca. Realni brojevi složeni u matricu su njeni **elementi**. Svaki element je indeksiran s dva indeksa: prvi je redni broj retka, drugi je redni broj stupca na čijem se presjeku nalazi taj element. Npr. element a_{ij} se nalazi na presjeku i-tog retka i j-tog stupca.
Neka je A matrica kao gore. Zbog jednostavnosti zapisa nju još zapisujemo kao

$$A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,\ n}$$

ili samo

$$A = [a_{ij}].$$

Primjer 3.1.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrica M je realna matrica tipa (2×3).♠

Brojevi a_{ik}, $k = 1, ..., n$ matrice A čine i-**ti redak** matrice A (prvi indeks je fiksan, drugi se mijenja od 1 do n).
Brojevi a_{kj}, $k = 1, ..., m$ matrice A čine j-**ti stupac** matrice A (drugi indeks je fiksan, prvi se mijenja od 1 do m).
Ako je $m = n$, tj. ako je matrica A oblika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kažemo da je **kvadratna**, i to n-**tog reda**.
U kvadratnoj matrici elementi s jednakim indeksima, tj.

$$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$$

čine **glavnu dijagonalu**. Zbroj svih elemenata glavne dijagonale kvadratne matrice zovemo **tragom** te matrice i označavamo $\mathrm{tr\,A}$.

$$\boxed{\mathrm{tr\,A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}}$$

Kvadratna matrica A je **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ako su u dijagonalnoj matrici svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki, tj. $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = a$, matrica je **skalarna**. Skalarna matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali se zove **jedinična** i označava sa I_n. Takvu matricu

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

možemo sažeto pisati $I_n = [\delta_{ij}]$, pri čemu je

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Simbol δ_{ij} zovemo **Kroneckerova delta**. Matrica čiji su svi elementi jednaki nuli zove se **nul matrica**. Ako je kvadratna, onda je reda n, ako nije, onda je tipa $m \times n$. Označavamo ju s $\mathbf{0_{mn}}$.

Primjer 3.2. *Sljedeće matrice su nul matrice i to reda* 3*, tipa* 2×4 *i tipa* 2×1*, redom,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \spadesuit$$

Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica tipa $m \times n$. Matrica $B = [b_{ij}]$ tipa $n \times m$ za koju je $b_{ji} = a_{ij}$ za $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ je **transponirana matrica** matrice A. Označavamo ju s A^T.

Primjer 3.3. *Ako je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onda je

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \spadesuit$$

Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]$ za koju je $a_{ij} = 0$ za $i > j$ zove se **gornja trokutasta**. Slično se definira **donja trokutasta** matrica, tj. $A = [a_{ij}]$ je donja trokutasta ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$.

Primjer 3.4. *Matrica A je gornja trokutasta, dok je B donja trokutasta*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \spadesuit$$

Kvadratna matrica A je **simetrična** ako je $A^T = A$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ za $i, j = 1, ..., n$. Ako je $A^T = -A$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ za $i, j = 1, ..., n$, matrica A je **antisimetrična** (kososimetrična).

Primjer 3.5. *Matrica A je simetrična, dok je B antisimetrična*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}. \spadesuit$$

Napomena 3.1. *Elementi iznad i ispod glavne dijagonale simetrične matrice simetrični su u odnosu na glavnu dijagonalu, tj. zrcale se jedni u druge.*

Za elemente glavne dijagonale antisimetrične matrice vrijedi $a_{ii} = -a_{ii}$ za $i = 1, ..., n$, odnosno vrijedi $a_{ii} = 0$ za $i = 1, ..., n$. Dakle elementi glavne dijagonale antisimetrične matrice su nužno nule. Elementi iznad i ispod glavne dijagonale simetrični su u odnosu na glavnu dijagonalu, ali suprotnog predznaka.

3.1.3 Linearna kombinacija matrica

Označimo skup svih matrica tipa $m \times n$ s M_{mn}. Uvedimo sada pojam "biti jednak" u skup M_{mn} koji će biti generalizacija jednakosti realnih brojeva. Primjetimo da je za $m = n = 1$ skup M_{11} u stvari skup $\mathbb{R}$, a na $\mathbb{R}$ znamo što znači "biti jednak".

Definicija 3.2. *Matrice $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{mn}$ su* ***jednake*** *ako je $a_{ij} = b_{ij}$ za sve $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Pišemo $A = B$.*

Napomena 3.2. *Jednakost matrica se definira samo za matrice istog tipa.*

Definicija 3.3. ***Zbroj matrica*** *$A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ je matrica $C = [c_{ij}] \in M_{mn}$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$, tj.*

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Napomena 3.3. *Zbroj matrica se definira samo za matrice istog tipa.*

Definirajmo sada množenje matrice skalarom.

Definicija 3.4. *Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo matricu $\lambda A = [b_{ij}] \in M_{mn}$ s elementima $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ za sve $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$, tj.*

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pogledajmo sada neka svojstva zbrajanja i množenja matrica skalarom koja izravno slijede iz Definicije 3.3 odnosno Definicije 3.4.

Teorem 3.1 (Svojstva zbrajanja matrica i množenja skalarom). *Za sve matrice $A, B, C \in M_{mn}$ i sve skalare iz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asocijativnost),*
2. $A + B = B + A$ *(komutativnost),*
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivnost),*
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *(homogenost).*♣

Iz Teorema 3.1 slijedi da je skup M_{mn} uz operacije zbrajanja i množenja skalarom vektorski prostor. Njegovi su elementi ("vektori") matrice tipa $m \times n$. Unatoč tome što nije riječ o geometrijskim objektima za njih imaju smisla pojmovi kao što su linearna zavisnost i nezavisnost, linearna kombinacija i linearni rastav.

Definicija 3.5. *Neka su $A_1, A_2, ..., A_k \in M_{mn}$ matrice i $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalari. Matrica*

$$A = \lambda_1 A_1 + ... + \lambda_k A_k$$

je ***linearna kombinacija*** *matrica $A_1, A_2, ..., A_k$ s koeficijentima $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Kažemo da je A* ***rastavljena*** *(razložena, razvijena) u linearni spoj po matricama $A_1, A_2, ..., A_k$.*
Linearna kombinacija je ***netrivijalna*** *ako je barem jedan $\lambda_1, ..., \lambda_k$ različit od nule.*

Napomena 3.4. *Ako je matrica A rastavljena u linearni spoj po matricama $A_1, A_2, ..., A_k \in M_{mn}$, onda je i $A \in M_{mn}$, što slijedi izravno iz Definicije 3.3 odnosno Definicije 3.4.*

Može se pokazati da skup svih $m \times n$ matrica E_{ij} koje na mjestu (i, j) imaju jedinicu, a na svim ostalim mjestima nule čini bazu u M_{mn}. Dakle je dimenzija vektorskog prostora M_{mn} jednaka mn.

Operacije zbrajanja i množenja skalarom su dobro usklađene s operacijom transponiranja.

Teorem 3.2. *Funkcija koja matrici pridružuje njenu transponiranu matricu $A \longmapsto A^T$ sa M_{mn} u M_{nm} ima sljedeća svojstva:*

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$ *za sve $A, B \in M_{mn}$,*

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *za sve* $A \in M_{mn}$ *i sve* $\alpha \in \mathbb{R}$,

3. $(A^T)^T = A$ *za sve* $A \in M_{mn}$.♣

Dokaz:

Tvrdnja izravno slijedi iz definicije transponiranja, Definicije 3.3 i Definicije 3.4.

Napomena 3.5. *Svaka kvadratna matrica* A *se može napisati kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice istog reda:*

$$A = A_s + A_a,$$

gdje za A_s *vrijedi* $A_s^T = A_s$, *a za* A_a *vrijedi* $A_a^T = -A_a$.

Dokaz:
Stavimo

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

i

$$A_a = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

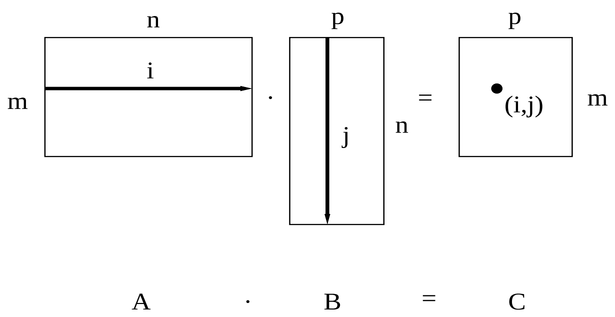
Očito je $A_s^T = A_s$, $A_a^T = -A_a$ *i* $A = A_s + A_a$. *Dakle imamo tvrdnju.* ♣

3.1.4 Množenje matrica

Množenje matrica može se definirati na razne načine. Najjednostavnije bi bilo definirati ga analogno zbrajanju matrica. Tako bismo za matrice $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{mn}$ mogli definirati matricu C kao produkt matrica A, B, gdje su elementi od C dani s $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ za $i = 1, ..., m$ i $j = 1, ..., n$. Očito je tako definirana matrica $C \in M_{mn}$. Iako jednostavna, takva definicija produkta matrica ne bi nam bila jako korisna niti pogodna za primjenu na linearne sustave. Također, nema podlogu u fizici, geometriji, itd. Množenje treba definirati tako da bude usklađeno s tim zahtjevima. To nam nameće sljedeću definiciju. Produkt matrica A i B definira se samo ako matrica A ima onoliko stupaca koliko matrica B ima redaka. Produkt $A \cdot B$ takvih matrica A i B je matrica čiji je broj redaka jednak broju redaka od A, a broj stupaca je jednak broju stupaca od B. Za takve matrice A i B kažemo da su **ulančane**, tj. broj stupaca od A je jednak broju redaka od B.

Definicija 3.6. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in M_{np}$.* ***Produkt matrica*** *A i B je matrica $C = A \cdot B = [c_{ij}] \in M_{mp}$ čiji su elementi zadani formulom*

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ..., a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., p.}$$



Slika 3.1: Produkt matrica.

Napomena 3.6. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in M_{np}$. Tada je i-ti redak matrice A jednak $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, za $i = 1, ..., m$, a j-ti stupac matrice B je $(b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj})$, za $j = 1, ..., p$. Dakle, na retke matrice A i stupce matrice B možemo gledati kao na vektore iz $\mathbb{R}^n$ (točka 1.4). Znamo da je skalarni produkt takva dva vektora (recimo i-tog retka od A i j-tog stupca od B) jednak*

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

Dakle zaključujemo da na mjestu (i, j) u matrici $C = A \cdot B$ stoji element koji je jednak skalarnom produktu i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice B.

Množenje matrica vodi računa o poretku operanada. Može se dogoditi da za matrice A i B produkt $A \cdot B$ postoji, a da $B \cdot A$ nije ni definiran. Npr. ako su $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{np}$ i $m \neq p$, onda je $A \cdot B \in M_{mp}$, a $B \cdot A$ nije definirano. Ako je $m = p \neq n$, imamo $A \cdot B \in M_{mp}$, a $B \cdot A \in M_{nn}$. Dakle opet je $A \cdot B \neq B \cdot A$. Na kraju, za $n = m = p$, tj. $A, B \in M_{nn}$ također općenito vrijedi $A \cdot B \neq B \cdot A$, jer npr. za $n = 2$ imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a s druge strane,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dakle množenje matrica je općenito nekomutativno.

Teorem 3.3 (Svojstva množenja matrica)**.** *Za sve matrice A, B, C takve da promatrani produkti postoje vrijedi:*

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *(asocijativnost),*

   gdje su $A \in M_{mn}$, $B \in M_{np}$ i $C \in M_{pq}$,

2. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ *(lijeva distributivnost)*
   $(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$ *(desna distributivnost),*

   gdje su $A, B \in M_{mn}$, $C \in M_{pm}$ i $D \in M_{nq}$,

3. $\alpha(A \cdot D) = (\alpha A) \cdot D = A \cdot (\alpha D)$, *gdje su $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_{mn}$ i $D \in M_{np}$,*

4. $A \cdot 0_{np} = 0_{mp}$, *gdje je $A \in M_{mn}$,*
   $0_{pm} \cdot A = 0_{pn}$, *gdje je $A \in M_{mn}$,*

5. $I_m \cdot A = A$, $A \cdot I_n = A$,

   gdje su $A \in M_{mn}, I_m \in M_{mm}$ i $I_n \in M_{nn}$ (I_n i I_m su jedinične matrice). Posebno vrijedi

   $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, *za $A \in M_{nn}$.*

Dokaz:

Tvrdnje izravno slijede iz Definicija 3.3, 3.4, 3.6. ♣

Uz ovakvu definiciju množenja matrica linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica možemo u kompaktnom vidu pisati kao

$$\boxed{Ax = b} \qquad (ili \quad A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}),$$

gdje je $A \in M_{mn}$ matrica koeficijenata (dobijemo je tako da redom koeficijente uz nepoznanice svake linearne jednadžbe upisujemo u retke od A, svaka linearna jednadžba ide u svoj redak), $b = [b_1, ..., b_m]^T$ poznata matrica desnih strana i $x = [x_1, ..., x_n]^T$ nepoznata matrica.

3.1.5 Podmatrice i blok matrice

Neka je $A \in M_{mn}$. Za svaki izbor r redaka i s stupaca na njihovim presjecima stoji $r \cdot s$ elemenata od A. Složimo li ih u $(r \times s)$ matricu, dobivamo **podmatricu** matrice A.

Primjer 3.6. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neka je $r = s = 2$. Izaberimo dva retka, npr. prvi i treći, i dva stupca npr. drugi i treći. Na presjecima ovih redaka i stupaca leže četiri elementa od A i to su $3, 4, 0, 3$. Složimo li ih u (2×2) matricu, dobijemo podmatricu

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice A.♠

Ako su izabrani redci i stupci uzastopni, takvu podmatricu zovemo **blok**. Matricu čiji su elementi blokovi (matrice) zovemo **blok matrica**.

Primjer 3.7. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

Izaberimo prva dva retka i prva dva stupca, zatim prva dva retka i zadnja tri stupca, druga dva retka i prva dva stupca, te druga dva retka i zadnja tri stupca. Tada redom dobijemo blokove matrice A

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

Sada matricu A možemo prikazati u obliku

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

dakle A postaje blok matrica.♠

Napomena 3.7. *Neka je $A \in M_{mn}$. Ako izaberemo svih m redaka i prvi stupac, svih m redaka i drugi stupac,..., svih m redaka i n-ti stupac, matrica A prelazi u blok matricu čiji su blokovi stupci od A. Ako stupce od A označimo sa $\overrightarrow{a_i}$ $i = 1, ..., n$, onda je blok matrica A oblika*

$$A = [\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a}_n]$$

i zovemo je blok matrica stupaca. Analogno se konstruira blok matrica redaka.

Naka je $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{np}$. Prema Napomeni 3.7 matricu B možemo zapisati kao blok matricu stupaca, tj.

$$B = [\overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b}_p].$$

Sada se lagano provjeri da vrijedi

$$A \cdot B = A \cdot [\overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b}_p] = [A \cdot \overrightarrow{b_1}, ..., A \cdot \overrightarrow{b}_p].$$

3.1.6 Regularne matrice. Inverzna matrica

Ograničimo se samo na kvadratne matrice n-tog reda, tj. na skup M_{nn} kojeg ćemo kraće označavati s M_n.
Iz svojstva 5. Teorema 3.3 znamo da za proizvoljnu $A \in M_n$ vrijedi

$$\boxed{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.}$$

U točki 3.1.4 smo vidjeli da je množenje kvadratnih matrica općenito nekomutativno. Postoje i druga svojstva kojima se množenje matrica razlikuje od množenja brojeva. Npr.

1. U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi: ako je $a \cdot b = 0$, onda je barem jedan od a ili b jednak nuli. U skupu M_n to ne vrijedi:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dakle postoje ne nul matrice čiji je produkt nul matrica.

2. U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi da svaki $a \neq 0$ ima multiplikativni inverz, tj. postoji broj koji pomnožen s a daje 1. U M_n to ne vrijedi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dakle ne postoji izbor brojeva a, b, c, d koji bi pomnožen s matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

davao jediničnu matricu.

Napomena 3.8. *Za neke kvadratne matrice postoji matrica koja pomnožena s njom daje jediničnu. Npr. neka je dana matrica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Konstruirajmo sada matricu takvu da ako ju pomnožimo s

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rezultat bude jedinična matrica.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Ako uzmemo $a = d = 0$ i $b = c = 1$ imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dakle multiplikativni inverz od

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je ona sama.

Definicija 3.7. *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je **regularna** (invertibilna) ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

*Za matricu A koja nije regularna kažemo da je **singularna.***

Napomena 3.9. *Neka je $A \in M_n$ regularna, tj. neka postoji matrica $B \in M_n$ takva da je $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Tada je B jednoznačno određena s A.*

Dokaz:

Neka je $C \in M_n$ neka matrica za koju vrijedi $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Sada imamo

$$C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B. \clubsuit$$

Znači, ako je $A \in M_n$ regularna onda postoji matrica $B \in M_n$ takva da je $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ i takva je matrica jedinstvena. Stoga B zovemo **inverznom matricom matrice** A i označavamo s $B = A^{-1}$. Dakle je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.
Skup svih regularnih matrica n-tog reda označavamo s G_n.

Teorem 3.4 (Svojstva regularnih matrica)**.** *Za sve regularne matrice vrijedi:*

1. *Ako je $A \in G_n$ onda je i $A^{-1} \in G_n$ i $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2. *Ako su $A, B \in G_n$ onda je $A \cdot B \in G_n$ i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

3. *$I_n \in G_n$ i $I_n^{-1} = I_n$.*

4. *$G_n \neq M_n$, preciznije $G_n \subset M_n$.*

5. *$0_n \notin G_n$.$\clubsuit$*

Definicija 3.8. *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je **ortogonalna** ako je*

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n.$$

Napomena 3.10. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ ortogonalna. U Napomeni 3.6 smo rekli da na retke i stupce od A možemo gledati kao na vektore iz $\mathbb{R}^n$. Tada je i-ti redak matrice A $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ za $i = 1, ..., n$, a j-ti stupac matrice A^T je $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ za $j = 1, ..., n$. (To je, u stvari, j-ti redak od A). Skalarni produkt takva dva vektora (recimo i-tog iz A i j-tog iz A^T) jednak je*

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}) = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn}.$$

Zaključujemo da na mjestu (i, j) u matrici $A \cdot A^T$ stoji element koji je jednak skalarnom produktu i-tog retka matrice A i j-tog stupca matrice A^T.
Kako je po pretpostavci A ortogonalna, vrijedi $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$. Dakle i matrica $A^T \cdot A$ ima iste elemente, štoviše vrijedi da je

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}) = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn} = \delta_{ij}$$

odnosno

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}) = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn} = 0$$

za $i \neq j$ i

$$(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \cdot (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}) = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2 = 1$$

za $i = j$. Dakle redci (odnosno stupci) ortogonalne matrice A čine ortonormirani podskup vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$. Štoviše, može se dokazati da čine ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^n$.

3.1.7 Rang matrice. Elementarne transformacije

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$. Iz Napomene 3.6 znamo da stupce, tj. matrice iz M_{m1}, možemo promatrati kao vektore u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^m$. Slično, njene retke, matrice iz M_{1n}, možemo promatrati kao vektore u $\mathbb{R}^n$. To nam omogućava proširivanje pojmova linearne kombinacije, linearne zavisnosti/nezavisnosti, skalarnog produkta na stupce i retke matrica (jer je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor).

Definicija 3.9. *Maksimalan broj linearno nezavisnih redaka matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ zove se* ***rang po redcima*** *matrice A. Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice A zove se* ***rang po stupcima*** *matrice A.*

Iskažimo sada jedan bitan rezultat.

Teorem 3.5 (O rangu matrice)**.** *Broj linearno nezavisnih redaka matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ jednak je broju linearno nezavisnih stupaca od A.*♣

Kako je po Teoremu 3.5 rang po redcima jednak rangu po stupcima proizvoljne matrice $A \in M_{mn}$, onda ćemo taj broj zvati **rang matrice** A i označavati s $r(A)$. Za proizvoljnu matricu $A \in M_{mn}$ iz Teorema 3.5 izravno slijedi da je $r(A) = r(A^T)$.

Definicija 3.10. *Neka je V vektorski prostor (Definicija 1.5) i neka je L neki podskup od V. Za L kažemo da je **vektorski podprostor** vektorskog prostora V ako je i sam vektorski prostor (tj. vrijede svojstva 1., 2. i 3. iz Definicije 1.5).*

Definicija 3.11. *Neka su $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}^m$. **Podprostor razapet vektorima** $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ je skup svih linearnih kombinacija vektora $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$. Označavamo ga s $L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})$.*

$$L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}) = \{\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + ... + \lambda_n \overrightarrow{a_n} : \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

Napomena 3.11. *Očito je da je*

$$L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

i izravno iz Definicije 3.10 slijedi da je $L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})$ podprostor od $\mathbb{R}^m$.

Definicija 3.12. *Neka su $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n} \in \mathbb{R}^m$. Neka je $L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})$ podprostor od $\mathbb{R}^m$ razapet sa $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$. **Dimenziju vektorskog prostora** $L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})$ definiramo kao maksimalni broj linearno nezavisnih vektora iz skupa $\{\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}\}$. Označavamo je s $dim(L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}))$.*

Napomena 3.12. *Prisjetimo se da je dimenzija vektorskog prostora broj vektora u bazi tog vektorskog prostora.*

Napomena 3.13. *Kako vektori $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ razapinju $L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})$, znamo da je u bazi najviše n vektora. Stoga vrijedi*

$$dim(L(\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n})) \leq n.$$

Vratimo se na konkretan vektorski prostor, M_{mn}. Neka je $A \in M_{mn}$. Neka je $R(A)$ podprostor od $\mathbb{R}^m$ razapet stupcima matrice A, i $R^\star(A)$ podprostor $\mathbb{R}^n$ razapet redcima od matrice A.

Napomena 3.14. *Uz gornje oznake iz Teorema 3.5 izravno slijedi*

$$r(A) = dim(R(A)) = dim(R^{\star}(A)).$$

Napomena 3.15. *Iz Napomene 3.13 imamo da je*

$$r(A) \leq min(m, n).$$

Iskažimo sada jedan koristan rezultat za ispitivanje regularnosti matrice iz M_n.

Teorem 3.6. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$.*♣

Primjer 3.8. *Vrijedi:*

1. *Neka je $0 \in M_{mn}$ nul matrica. Tada je $r(0) = 0$, jer je skup $\{\overrightarrow{0}\}$ uvijek linearno zavisan.*

2. *Neka je $I_n \in M_n$. Tada je očito $r(I_n) = n$.*

3. *Neka je dana $B \in M_{5,6}$ s*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jasno je da četvrti i peti redak matrice B ne mogu sudjelovati u skupu linearno nezavisnih redaka, jer svaki skup koji sadrži nul vektor je linearno zavisan. Nadalje, komponentu 1 na mjestu a_{11} u prvom retku ne možemo dobiti ni u kakvoj linearnoj kombinaciji drugog i trećeg retka. Slično vrijedi i za komponentu na mjestu a_{22} i a_{33}. Stoga imamo da je maksimalan broj linearno nezavisnih redaka 3. Dakle, iz Teorema 3.5 imamo da je $r(B) = 3$.♠

Iz Primjera 3.8 vidimo da je lagano izračunati rang jedinične matrice (za $I_n \in M_n$, $r(I_n) = n$) i matrice koja izgleda kao i matrica B, tj. na pozicijama $a_{11}, ..., a_{kk}$ za $k \leq min(m, n)$ ima jedinice, na a_{ij} za $j < i$ ima nule, na a_{ij} za

$i < j$, $j = 2, ..., k$, ima nule, na a_{ij} za $i = k+1, ..., m$ ima nule a ostale pozicije su proizvoljne (rang takve matrice iz M_{mn} je k).
Dakle, bilo bi dobro svesti opću matricu A na I_n (ako je kvadratna) ili na nešto tipa B. Pitanje je, kako to učiniti?

Sljedeće operacije s matricama zovemo **elementarnim transformacijama**:

1. Zamjena dvaju redaka (stupaca);
2. Množenje retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$;
3. Dodavanje retku (stupcu) matrice linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice.

Primjer 3.9. *Neka je matrica $M \in M_4$ dana s*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zamjenom prvog i drugog retka te trećeg i četvrtog, matrica M prelazi u jediničnu.♠

Definicija 3.13. *Matrice $A, B \in M_{mn}$ su **ekvivalentne** ako se jedna dobiva iz druge pomoću konačno mnogo elementarnih transformacija.*

Napomena 3.16. *Geometrijskim se zaključivanjem možemo uvjeriti da elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice.*

1. *Zamjenom dvaju redaka (stupaca) ne mijenja se rang po redcima (stupcima), jer to odgovara zamjeni mjesta dvaju vektora u nekom skupu.*
2. *Isto tako, ako pomnožimo redak (stupac) skalarom $\lambda \neq 0$ neće se promijeniti rang po redcima (stupcima), jer množenje skalarom ne mijenja položaj tog vektora u odnosu na ostale, već samo njegovu duljinu.*

3. *Također je jasno ako retku (stupcu) matrice dodamo linearne kombinacije ostalih redaka (stupaca) matrice rang po redcima (stupcima) ostaje isti.*

Dakle, ekvivalentne matrice imaju isti rang, tj. primjenom elementarnih transformacija nad proizvoljnom matricom ne mijenja se njen rang.

Neka je $A \in M_{mn}$, $A \neq 0$. Primjenom elementarnih transformacija u konačno mnogo koraka dolazimo do njoj ekvivalentne matrice $H \in M_{mn}$ koja je oblika

$$H = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

gdje je $r \leq min(m,n)$, $I_r \in M_r$, $0_1 \in M_{r,n-r}$, $0_2 \in M_{m-r,r}$ i $0_3 \in M_{m-r,n-r}$ ($0_1, 0_2, 0_3$ su nul matrice).
Kako je $r(A) = r(H) = r$, ovim smo dobili postupak (algoritam) za računanje ranga matrice A. Matrica H je **Hermiteova forma** matrice A. Primijenimo li na H elementarne transformacije obrnutim redom, prvih r redaka i prvih r stupaca matrice H prelaze u r linearno nezavisnih redaka i stupaca matrice A, tj. u bazu podprostora razapetog redcima odnosno stupcima od A.

Napomena 3.17. *Ako imamo n vektora $\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n$ iz $\mathbb{R}^m$ i ako treba odrediti bazu prostora $L(\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n)$, sastavi se matrica $A = [\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n]$ (vektori $\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n$ čine stupce matrice A) i traži se $r = r(A)$ linearno nezavisnih stupaca od A. Dakle dobijemo matricu H. Sada primjenom elementarnih transformacija obrnutim redom nad matricom H dolazimo do baze od $L(\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n)$.*

Sljedeći nam rezultat govori da se možemo ograničiti na elementarne transformacije samo nad redcima matrice.

Teorem 3.7. *Svaka matrica $A = [A_0, D] \in M_{rp}$, $p \geq r$, kod koje je $A_0 \in M_r$ regularna može se elementarnim transformacijama samo nad redcima svesti na matricu oblika $[I_r, R]$, gdje je $I_r \in M_r$ jedinična.*♣

Primjenom Teorema 3.7 dolazimo do pravila za računanje inverzne matrice: Ako je zadana matrica $A \in M_n$ i ako treba ispitati je li ona regularna, te ako je, naći njen inverz, formiramo matricu $[A, I_n]$ i elementarnim transformacijama nad redcima svodimo je na oblik $[I_n, R]$ (Teorem 3.7). Ako je to moguće, onda je $A^{-1} = R$, a ako nije, A je singularna.

Zašto to vrijedi? Elementarne transformacije nad redcima odgovaraju množenju matrice slijeva elementarnim matricama. Primjerice, zamjena i-tog i j-tog retka matrice A postiže se množenjem matrice A slijeva matricom Q_{ij} koja je dobivena zamjenom i-tog i j-tog retka u jediničnoj matrici I. Slično, množenje i-tog retka matrice A skalarom $\lambda \neq 0$ odgovara množenju matrice A slijeva matricom $Q_i(\lambda)$ koja se dobije iz jedinične matrice zamjenom jedinice u i-tom retku s λ. Konačno, množenje matrice A slijeva matricom $Q_i(\lambda; j)$ koja se dobije dodavanjem j-tog retka jedinične matrice pomnoženog s λ i-tom retku jedinične matrice, odgovara dodavanju i-tom retku matrice A njenog j-tog retka pomnoženog s λ. Jasno je da se svaki konačni niz elementarnih transformacija može opisati nizom množenja matrice A slijeva matricama tipa Q_{ij}, $Q_i(\lambda)$ i $Q_i(\lambda; j)$. Te matrice zovemo **elementarnim matricama.**
Ako smo primjenom q elementarnih transformacija nad redcima matrice $[A, I_n]$ dobili matricu $[I_n, R]$ (tj. ako je A regularna) mi smo zapravo matricu $[A, I_n]$ množili slijeva s q elementarnih matrica $Q_1, ..., Q_q$. Dakle imamo

$$[Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot A, Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot I_n] = [I_n, R].$$

Odatle je

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q = R$$
$$Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot A = I_n,$$

pa je $R \cdot A = I_n$, odnosno $R = A^{-1}$.

3.2 Linearni sustavi

3.2.1 Osnovni pojmovi

Promatramo **sustav** od m linearnih jednadžbi s n **nepoznanica** $x_1, ..., x_n$ s **koeficijentima** a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ i **slobodnim članovima** $b_1, ..., b_m$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Uređena n-torka $(c_1, c_2, ..., c_n)$ je **rješenje** gornjeg sustava ako pri uvrštavanju $x_1 = c_1$,...,$x_n = c_n$ gornji sustav postaje skup od m jednakosti među realnim brojevima. Npr., uređena četvorka $(1, 0, 2, -1)$ je rješenje sustava s početka ovog poglavlja.

Za sustav kažemo da je **homogen** ako je $b_1 = ... = b_m = 0$. Ako je barem jedan $b_i \neq 0$, $i = 1, ..., m$, sustav je **nehomogen.**

Ako sustav ima barem jedno rješenje kažemo da je sustav **konzistentan, suglasan ili moguć**. Ako sustav nema rješenja, kažemo da je **nekonzistentan, proturječan ili nemoguć**.

Napomena 3.18. *Primijetimo:*

1. *Ako za neki $i = 1, ..., m$ vrijedi $a_{i1} = ... = a_{in} = 0$, a $b_i \neq 0$, sustav je nemoguć.*

2. *Homogeni sustav je uvijek moguć, jer $x_1 = ... = x_n = 0$ daje rješenje svakog homogenog sustava. Takvo rješenje zovemo **trivijalno**.*

   *Ako je $(c_1, c_2, ..., c_n)$ rješenje homogenog sustava i barem jedan $c_i \neq 0$, $i = 1, ..., n$, imamo **netrivijalno** rješenje.*

3. *Trivijalno rješenje ne može biti rješenje nehomogenog sustava.*

Definicija 3.14. *Za dva sustava kažemo da su **ekvivalentna** ako je svako rješenje jednoga ujedno rješenje drugoga i obrnuto.*

Napomena 3.19. *Ekvivalentni sustavi ne moraju imati isti broj jednadžbi, no moraju imati isti broj nepoznanica (da bismo uopće mogli govoriti o jednakosti rješenja).*

Sustav

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

zapisujemo u matričnom obliku kao

$$\boxed{Ax = b}$$

ili

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Ovdje je A **matrica sustava** dana s

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Stupac x je **nepoznata matrica**, i dana je s

$$\overrightarrow{x} = [x_1, ..., x_n]^T.$$

Stupac b je **matrica slobodnih članova** dana s

$$\overrightarrow{b} = [b_1, ..., b_m]^T.$$

Jasno je da uz standardno množenje ulančanih matrica zapisi

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

i

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

predstavljaju isti sustav.

Matricu $A_b = [A, \overrightarrow{b}]$,

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

zovemo **proširena matrica sustava.**

3.2.2 Geometrijska interpretacija. Kronecker-Capellijev teorem

Pokušajmo sada geometrijski interpretirati rješenje sustava $A\vec{x} = \vec{b}$.
Označimo s $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ vektor stupce matrice sustava A

$$A = [\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n].$$

Proširena matrica sustava ima oblik

$$A_b = [\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n, \vec{b}].$$

Nadalje, vrijedi

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + ... + x_n\vec{a}_n,$$

tj. vektor $A\vec{x}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.
Dakle, zaključujemo da sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ima rješenje ako i samo ako se vektor $\vec{b}$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, tj. ako i samo ako je $\vec{b} \in L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ (jer $\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + ... + x_n\vec{a}_n$, tj. traže se $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{b}$ linearna kombinacija od $x_1\vec{a}_1 + ... + x_n\vec{a}_n$).
Riješiti sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ znači naći sve moguće prikaze vektora $\vec{b}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$.
Geometrijska nam interpretacija daje kriterij egzistencije i jedinstvenosti rješenja sustava $A\vec{x} = \vec{b}$.

Teorem 3.8. *Za sve matrice $A \in M_{mn}$ i $b \in M_{m1}$ vrijedi:*

I. ***(Kronecker-Capelli)***

   Sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ima barem jedno rješenje ako i samo ako matrica sustava A i proširena matrica sustava A_b imaju isti rang.

II. *Ako je $r = r(A) = r(A_b)$, onda je sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ekvivalentan sustavu koji se dobije uzimanjem bilo kojih r nezavisnih jednadžbi, tj. bilo kojih r linearno nezavisnih redaka u A.*

III. *Ako je $n = m$, sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je A regularna. To je rješenje dano s $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.*

Dokaz: *(Dokazujemo samo tvrdnju III.)*
Ako je $n = m$ i A regularna, onda rang proširene matrice ne može biti veći od n (jer iz Teorema 3.6 imamo da je $r(A) = n$), pa je sustav konzistentan, dakle ima bar jedno rješenje. Uvrštavajući vektor $A^{-1}\overrightarrow{b}$ u sustav vidimo da je taj vektor rješenje, jer je $A(A^{-1}\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b}$. Ako je $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, množeći slijeva s A^{-1} vidimo da je $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$, tj. da je $A^{-1}\overrightarrow{b}$ i jedino rješenje od $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Obrnuto, neka je $m = n$ i sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ima jedinstveno rješenje $\overrightarrow{x}$. To znači da je $\overrightarrow{b}$ linearna kombinacija stupaca od A. Neka su sada $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + ... + \lambda_n\overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{0}$ ($\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_n$ su vektor stupci od A). Hoćemo pokazati da je $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ (tj. da su stupci od A linearno nezavisni, odnosno da je $r(A) = n$ pa tvrdnju imamo iz Teorema 3.6). Iz

$$\overrightarrow{b} = (\lambda_1 + x_1)\overrightarrow{a}_1 + ... + (\lambda_n + x_n)\overrightarrow{a}_n$$

slijedi da je vektor $\overrightarrow{\lambda} + \overrightarrow{x}$ rješenje od $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Iz pretpostavke jedinstvenosti slijedi da je $\overrightarrow{\lambda} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ tj. $\overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{0}$, odnosno $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Dakle stupci od A su linearno nezavisni, tj. A je regularna. ♣

Napomena 3.20. *Primijetimo da ako imamo homogeni sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ onda očito vrijedi da je $r(A) = r(A_0)$, tj. po Teoremu 3.8 homogeni sustav je uvijek rješiv. Iz Napomene 3.18 znamo da je jedno rješenje homogenog sustava sigurno $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.*

Napomena 3.21. *Ako sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ima dva rješenja, onda ih ima beskonačno mnogo.*

Dokaz:
Neka su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ dva različita rješenja sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Tada je, $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$ i $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$. Stavimo $\overrightarrow{z} = \lambda\overrightarrow{u} + (1-\lambda)\overrightarrow{v}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada imamo

$$A\overrightarrow{z} = \lambda A\overrightarrow{u} + (1-\lambda)A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{b} + (1-\lambda)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b},$$

što znači da je i $\overrightarrow{z}$ rješenje od $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. ♣

Iz Teorema 3.8 i Napomene 3.20 izravno slijedi: skup svih rješenja sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ može biti prazan ($r(A) \neq r(A_b)$), jednočlan (A je kvadratna i regularna) ili beskonačan.

3.2.3 Homogeni sustavi

Iz Napomene 3.18 znamo da homogeni sustav uvijek ima trivijalno rješenje $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Označimo skup svih rješenja homogenog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ s $N(A)$, tj.

$$N(A) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}.$$

Očito je $\overrightarrow{0} \in N(A)$.

Napomena 3.22. *$N(A)$ je podprostor od $\mathbb{R}^n$, tj. skup svih rješenja homogenog sustava je vektorski podprostor od $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz:

Očito je $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$. Treba provjeriti da $N(A)$ ima svojstva iz Definicije 1.5. Svojstva iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2 su očito zadovoljena, dakle dokažimo da za proizvoljne $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in N(A)$ vrijedi i

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in N(A)$$

i također za proizvoljne $\overrightarrow{u} \in N(A)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi i

$$\lambda \overrightarrow{u} \in N(A).$$

Kako je $A\overrightarrow{u} = A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ imamo

$$A(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

dakle $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in N(A)$.
Kako je $A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ imamo

$$A\lambda\overrightarrow{u} = \lambda A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

Dakle je $N(A)$ vektorski podprostor od $\mathbb{R}^n$.♣

Iz Napomene 3.22 zaključujemo da ako su $u_1, ..., u_t$ rješenja homogenog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, onda je i njihova linearna kombinacija rješenje tog sustava. Dimenzija podprostora $N(A)$ zove se **defekt** matrice A.

Teorem 3.9. *Za sve matrice $A \in M_{mn}$ i $b \in M_{m1}$ vrijedi:*

I. Ako je $\overrightarrow{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ bilo koje rješenje (nehomogenog) sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, onda je skup svih rješenja tog (nehomogenog) sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ dan s

$$\overrightarrow{u}_0 + N(A) = \{\overrightarrow{u}_0 + \overrightarrow{y} : \overrightarrow{y} \in N(A)\}.$$

II. Neka (nehomogeni) sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ima isti broj jednadžbi i nepoznanica ($n = m$). Tada pripadni homogeni sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ima samo trivijalno rješenje ako i samo ako je matrica A tog sustava regularna.

Dokaz: *(Dokazujemo samo tvrdnju II.)*
Ako je matrica A sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ regularna, onda po Teoremu 3.8 sustav $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ima

jedinstveno rješenje $A^{-1}\overrightarrow{b}$. *Kako je iz Teorema 3.9 I. svako rješenje od* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ *dano s* $A^{-1}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{y}$ *za* $\overrightarrow{y}\in N(A)$, *iz jedinstvenosti zaključujemo da je* $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{0}$, *tj.* $N(A)=\{\overrightarrow{0}\}$. *Dakle rješenje od* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ *je samo* $\overrightarrow{0}$.

Obrnuto, ako $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ *ima samo trivijalno rješenje i ako je* $\overrightarrow{u}_0$ *neko rješenje sustava* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$. *Onda, prema Teoremu 3.9, svako rješenje je oblika* $\overrightarrow{u}_0+\overrightarrow{0}$, *tj. rješenje je jedinstveno. Po Teoremu 3.8 je matrica A regularna.*♣

U točki 3.1.7 odnosno točki 3.2.3 vidjeli smo da su za prozvoljnu matricu $A\in M_{mn}$ skupovi $R(A)$ odnosno $N(A)$ vektorski prostori. Broj $dimR(A)$ smo zvali rang od A, a broj $dimN(A)$ defekt od A.

Teorem 3.10 (O rangu i defektu)**.** *Za sve matrice* $A\in M_{mn}$ *i* $b\in M_{m1}$ *vrijedi:*

I. $dimR(A)+dimN(A)=n$.

II. Konzistentan sustav $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ *ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je rang matrice sustava jednak broju nepoznanica, tj.* $r(A)=dimR(A)=n$.♣

Iz Teorema 3.10 I. izravno slijedi da ako znamo rang od $A\in M_{mn}$ onda znamo i defekt koji je jednak $n-r(A)$, i obratno.

Napomena 3.23. *Primijetimo:*

1. *Tvrdnja Teorema 3.9 I. nam kaže da ako znamo jedno rješenje* $\overrightarrow{a}_0$ *(nehomogenog) sustava* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ *i sva rješenja pripadajućeg homogenog sustava* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ *(to je vektorski prostor* $N(A)$*), onda su sva rješenja od* $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ *dana s* $\overrightarrow{a}_0+\overrightarrow{y}$, *gdje je* $\overrightarrow{y}\in N(A)$.

2. *Tvrdnja Teorema 3.9 II. kaže: ili nehomogeni sustav s istim brojem jednadžbi i nepoznanica ima jedinstveno rješenje, ili pripadajući homogeni sustav s istim brojem jednadžbi i nepoznanica ima netrivijalno rješenje.*

3.2.4 Rješavanje linearnog sustava

Opišimo sada postupak rješavanja linearnog sustava $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ od m jednadžbi s n nepoznanica.
Prvo treba odrediti rangove matrica A i A_b. Ako oni nisu jednaki, $\overrightarrow{b}$ nije linearna

kombinacija stupaca od A i sustav je nekonzistentan (Teorem 3.8).
Ako su rangovi jednaki ($r(A) = r(A_b) = r$), uzmemo r nezavisnih redaka i r nezavisnih stupaca matrice sustava A (tj. elemente na njihovim presjecima) i prenumeriramo tako da to bude prvih r redaka i prvih r stupaca matrice A. Iz Teorema 3.8 II. slijedi da možemo ispustiti preostalih $m-r$ redaka matrice A (tj. $m-r$ jednadžbi) i dobiti sustav ekvivalentan polaznomu:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + ... + a_{rn}x_n = b_r. \end{gathered}$$

Nadalje, prebacimo članove s nepoznanicama $x_{r+1}, ..., x_n$ na desnu stranu i dobijemo:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{gathered}$$

Uvedimo novi vektor desnih strana $\overrightarrow{\beta}(c)$, kao

$$\beta_i(c) = b_i - a_{ir+1}c_{r+1} - ... - a_{in}c_n$$

za $i = 1, ..., r$, pri čemu su $c_{r+1}, ..., c_n$ proizvoljni realni parametri.
Dakle, imamo sustav

$$A_0 \overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{\beta}(c),$$

pri čemu je A_0 podmatrica od matrice A koja se sastoji od presjeka prvih r redaka i prvih r stupaca. Kako je $r(A_0) = r$, iz Teorema 3.6 imamo da je A_0 regularna, pa ovaj sustav ima jedinstveno rješenje

$$\overrightarrow{x}_0 = A_0^{-1}\overrightarrow{\beta}(c)$$

koje je oblika

$$\overrightarrow{x}_0 = [c_1, ..., c_r]^T.$$

Dakle, iz Teorema 3.8 II., $\overrightarrow{c} = [c_1, ..., c_r, c_{r+1}, ..., c_n]^T$ je rješenje sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
Brojevi $c_{r+1}, ..., c_n$ su slobodni prametri, dok brojevi $c_1, ..., c_r$ ovise o njima i o matricama A (kroz A_0) i $\overrightarrow{b}$ (kroz $\overrightarrow{\beta}(c)$) (jer za fiksne $c_{r+1}, ..., c_n$ postoje jedinstveni $c_1, ..., c_r$ koji su dani s $A_0^{-1}\overrightarrow{\beta}(c) = [c_1, ..., c_r]^T$).

Teorem 3.11. *Ako je* $(\overrightarrow{u}_{r+1}, ..., \overrightarrow{u}_n)$ *bilo koja baza prostora* $N(A)$ $(dim N(A) = n - r)$ *matrice* $A \in M_{mn}$ *i* $\overrightarrow{u}_0$ *bilo koje rješenje sustava* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, *onda je opće rješenje sustava* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *dano s*

$$\overrightarrow{u}_0 + \mu_{r+1}\overrightarrow{u}_{r+1} + ... + \mu_n\overrightarrow{u}_n,$$

pri čemu su $\mu_{r+1}, ..., \mu_n$ *proizvoljni parametri.*♣

Napomena 3.24. *Tvrdnja Teorema 3.11 izravno slijedi iz Teorema 3.9, jer je skup svih rješenja od* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *dan s* $\overrightarrow{u}_0 + N(A)$. *Kako je* $(\overrightarrow{u}_{r+1}, ..., \overrightarrow{u}_n)$ *baza od* $N(A)$, *onda je svako rješenje od* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *oblika*

$$\overrightarrow{u}_0 + \mu_{r+1}\overrightarrow{u}_{r+1} + ... + \mu_n\overrightarrow{u}_n,$$

pri čemu su $\mu_{r+1}, ..., \mu_n$ *proizvoljni parametri.*

Glavni dio postupka rješavanja linearnog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ sadržan je u određivanju rangova od A i A_b. Radimo li to elementarnim transformacijama samo nad redcima, imamo postupak **Gaussovih eliminacija**. Ovaj se postupak može primijeniti na sve matrice, uz male modifikacije je numerički stabilan, složenost mu je $\sim n^3$ (tj. za $A \in M_n$ broj elementarnih operacija zbrajanja i množenja je $\sim n^3$).
Za neke se posebne matrice druge, posebno dizajnirane, metode mogu pokazati bržima (manja im je složenost).

Opisani postupak za rješavanje linearnih sustava se uz male preinake može primijeniti i na istovremeno rješavanje više linearnih sustava s istom matricom sustava $A \in M_{mn}$ i različitim desnim stranama $\overrightarrow{b}_1, ..., \overrightarrow{b}_p$, tj. na rješavanje matrične jednadžbe

$$AX = B$$

(rješenje X je iz M_{np}).

Elementarne transformacije nad redcima proširene matrice sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ vode do rješenja na mjestu desne strane (tj. lagano možemo očitati rješenje).

Zašto? Argument je isti kao i kod pravila za računanje inverza matrice iz točke 3.1.6. Elementarne transformacije nad redcima proširene matrice sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ odgovaraju množenju proširene matrice slijeva elementarnim matricama. Ako smo primjenom q elementarnih transformacija nad redcima matrice $[A, \overrightarrow{b}]$ dobili matricu $[A', \overrightarrow{b'}]$ (gdje je matrica A'

takva da na pozicijama $a_{11}, ..., a_{kk}$ za $k \leq min(m, n)$ ima jedinice, na a_{ij} za $j < i$ ima nule, na a_{ij} za $i < j$, $j = 2, ..., k$, ima nule, na a_{ij} za $i = k+1, ..., m$ ima nule, a ostale pozicije su "nebitne"), mi smo zapravo matricu $[A, \overrightarrow{b}]$ množili slijeva elementarnim matricama $Q_1, ..., Q_q$. Dakle imamo

$$[Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot A, Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot \overrightarrow{b}] = [A', \overrightarrow{b'}].$$

Odatle je

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b'}$$
$$Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_q \cdot A = A'.$$

3.2.5 Determinanta. Cramerovo pravilo

Determinanta je funkcija koja matrici $A \in M_n$ pridružuje realan broj koji označujemo s $\det A$, tj.

$$A \longmapsto \det A.$$

U točki 1.6 smo vidjeli kako se definiraju determinante matrica drugog i trećeg reda. Ako je $A \in M_2$ oblika

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

onda znamo da je

$$\det A = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Ako je $A \in M_3$ zadana s

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

onda razvojem po prvom retku znamo da je

$$\det A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice reda $n > 3$ se definira induktivno. Za $A \in M_n$, $n > 3$, označimo s A_{1k}, $k = 1, ..., n$, matricu koja se iz A dobije ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca. Tada se $\det A$ definira sa

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + ... + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

odnosno

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}.}$$

Napomena 3.25. *Uvedimo oznaku M_1 za kvadratne matrice prvog reda (primijetimo da je M_1, u stvari skup $\mathbb{R}$). Tada za $A \in M_1$ oblika $A = [a]$ definiramo*

$$\det A = a.$$

Sada očito gornja formula za determinantu matrice reda $n > 3$ vrijedi i za matrice reda $n \geq 2$.

Formula

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}$$

za determinantu matrice $A \in M_n$, $n \geq 2$, je razvoj determinante po prvom retku.

Neka je $A \in M_n$ dijagonalna matrica. Tada lagano iz formule

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k}$$

zaključujemo da je $\det A$ jednaka produktu elemenata dijagonale. Posebno je $\det I_n = 1$.

Navedimo sada neka svojstva determinante koja se dokazuju matematičkom indukcijom i koja uvelike olakšavaju računanje determinante proizvoljne matrice $A \in M_n$, $n \geq 2$.

Svojstva determinante su:

1. Ako svi elementi nekog retka ili stupca matrice $A \in M_n$ iščezavaju, onda je
$$\det A = 0.$$
2. Ako je $A \in M_n$ trokutasta (gornja ili donja), onda je
$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

3. Ako dva stupca ili dva retka u matrici $A \in M_n$ zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak,

$$\det(Q_{ij}A) = -\det A.$$

   Matrica $Q_{ij} \in M_n$ je elementarna matrica koja odgovara elementarnoj transformaciji zamjene dvaju redaka ili stupaca (točka 3.1.7, pravilo za računanje inverza matrice).

4. Ako su dva retka ili dva stupca matrice $A \in M_n$ jednaka, onda je

$$\det A = 0.$$

5. Ako je i-ti stupac matrice $A \in M_n$ oblika

$$\overrightarrow{a}_i = \lambda \overrightarrow{b} + \mu \overrightarrow{c},$$

   gdje su $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ proizvoljne matrice iz M_{n1} i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, onda je

$$\det[\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{a}_i, ..., \overrightarrow{a}_n] =$$

$$\det[\overrightarrow{a}_1, ..., \lambda \overrightarrow{b} + \mu \overrightarrow{c}, ..., \overrightarrow{a}_n] =$$

$$\lambda \det[\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{b}, ..., \overrightarrow{a}_n] + \mu \det[\overrightarrow{a}_1, ..., \overrightarrow{c}, ..., \overrightarrow{a}_n].$$

   Analogno vrijedi i za retke.

6. Ako nekom stupcu matrice $A \in M_n$ dodamo linearnu kombinaciju ostalih stupaca, determinanta se ne mijenja. Analogno vrijedi i za retke.

7. Ako je neki stupac determinante linearni spoj ostalih stupaca, determinanta je jednaka nuli. Analogno vrijedi i za retke.

8. Ako je matrica $A \in M_n$ singularna, onda je

$$\det A = \det A^T = 0.$$

Determinanta dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata dijagonale. Štoviše, iz drugog svojstva determinante znamo da je determinanta trokutaste matrice također produkt elemenata dijagonale. Bilo bi dobro (ako je moguće)

proizvoljnu matricu $A \in M_n$ "transformirati" u trokutastu čiju determinantu znamo lagano izračunati. Ovih osam svojstava nam to omogućava, tj. možemo računati determinantu tzv. **metodom eliminacije**.
Metodom eliminacije računanje determinante proizvoljne matrice $A \in M_n$ svodimo na računanje determinante trokutaste matrice koja ima do na predznak istu determinantu.
To činimo tako da uzmemo prvi element na dijagonali matrice A i koristeći šesto pravilo poništavamo sve elemente u prvom stupcu ispod njega (ako radimo transformaciju u gornju trokutastu, ako želimo donju trokutastu onda krećemo od zadnjeg elementa na dijagonali). Nadalje, uzimamo drugi element na dijagonali i koristeći šesto pravilo činimo istu stvar tj. poništavamo sve elemente u stupcu ispod njega, itd. Radimo sve analogno sve do zadnjeg elementa na dijagonali.
Ako se desi da je neki element na dijagonali nakon i-tog koraka nula (tj. $a_{i+1,i+1} = 0$), onda pomoću trećeg pravila dovodimo iz preostalih $n-i$ redaka i $n-i$ stupaca element različit od nule na poziciju $a_{i+1,i+1}$ (naravno, vodeći računa o predznaku determinante) i nastavljamo postupak kao i prije. Ako to nije moguće, tj. u ostalih $n-i$ redaka i $n-i$ stupaca su sve nule onda smo gotovi.
Važno svojstvo determinante je njena usklađenost s množenjem matrica.

Teorem 3.12. *Za proizvoljne matrice $A, B \in M_n$ vrijedi*

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B.}\clubsuit$$

Napomena 3.26. *Ako je $A \in M_n$ regularna, onda je $\det A \neq 0$, $\det A^{-1} \neq 0$ i vrijedi $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.*

Dokaz:
Iz Teorema 3.12 imamo $\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) = 1$. Dakle očito je $\det A \neq 0$, $\det A^{-1} \neq 0$ i vrijedi $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.$\clubsuit$

Teorem 3.13 (Laplaceov razvoj po elementima i-tog retka)**.** *Za proizvoljnu matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.}\clubsuit$$

U Teoremu 3.13 je s A_{ik} označena matrica iz M_{n-1} dobivena iz A ispuštanjem i-tog retka i k-tog stupca. Teorem 3.13 tvrdi da determinantu možemo razviti po proizvoljnom retku.

Teorem 3.14. *Za proizvoljnu matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\boxed{\det A = \det A^T.} \clubsuit$$

Iz Teorema 3.14 izravno slijedi da determinantu možemo definirati i preko razvoja po elementima stupca.

Teorem 3.15 (Laplaceov razvoj po elementima i-tog stupca)**.** *Za proizvoljnu matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki} \det A_{ki}.} \clubsuit$$

Veličinu

$$(-1)^{i+k} \det A_{ik}$$

zovemo **kofaktor elementa** a_{ik}.

Definicija 3.15. ***Kofaktor*** *ili* ***adjunkta matrice*** *$A \in M_n$ je matrica iz M_n kojoj na mjestu (i,k) stoji kofaktor elementa a_{ki} matrice A, tj. $(-1)^{k+i} \det A_{ki}$. Kofaktor matrice A označavamo s $kof(A)$.*

Napomena 3.27. *Ako se elementi retka (stupca) matrice $A \in M_n$ pomnože kofaktorima drugog retka (stupca) i rezultati zbroje, dobiva se 0 ako je uzet redak (stupac) različit od polaznog. Inače je zbroj $\det A$.*

Dokaz:
Neka su uzeti i-ti i j-ti redak. Promatramo zbroj

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk}.$$

Očito, ako je $i = j$, onda je po Teoremu 3.13 prethodni zbroj jednak $\det A$, a ako je $i \neq j$ onda zbroj

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk}$$

predstavlja determinantu matrice kojoj su i-ti i j-ti redak jednaki. Po četvrtom svojstvu determinante znamo da je to jednako nula. Analogno ide dokaz za stupce.$\clubsuit$

Iz Napomene 3.27 izravno slijedi:

Teorem 3.16. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$\boxed{A \cdot kof(A) = kof(A) \cdot A = (\det A) \cdot I_n.} \clubsuit$$

Napomena 3.28. *U Napomeni 3.26 smo vidjeli da ako je $A \in M_n$ regularna, onda je $\det A \neq 0$. Vrijedi i obrat, tj. ako je $\det A \neq 0$ onda je A regularna i A^{-1} je dana formulom*

$$\boxed{A^{-1} = \tfrac{kof(A)}{\det A}.}$$

Dokaz:

Ako je $\det A \neq 0$, onda iz Teorema 3.16 imamo da je

$$\frac{1}{\det A} kof(A) \cdot A = I_n.$$

Dakle A je regularna i $A^{-1} = \frac{kof(A)}{\det A}$.$\clubsuit$

Iz Napomene 3.26 i Napomene 3.28 imamo dobru karakterizaciju regularnosti matrice $A \in M_n$. A je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Iz Teorema 3.8 znamo da je rješenje linearnog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ od n jednadžbi s n nepoznanica jedinstveno ako i samo ako je matrica koeficijenata A regularna. Rješenje je dano s $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.
Sljedeći teorem nam daje još jedan način računanja rješenja linearnog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ od n jednadžbi s n nepoznanica uz uvjet da je matrica koeficijenata A regularna.

Teorem 3.17 (Cramer)**.** *Neka je A matrica koeficijenata linearnog sustava $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ od n jednadžbi s n nepoznanica. Ako je matrica A regularna, onda je rješenje tog sustava dano s*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \ \ldots, \ x_n = \frac{D_n}{D},$$

pri čemu je $D = \det A$, a D_k, $k = 1, ..., n$, je determinanta matrice koja se dobiva iz A zamjenom k-tog stupca $\overrightarrow{a}_k$ stupcem desnih strana $\overrightarrow{b}$.$\clubsuit$

3.3 Problem svojstvenih vrijednosti

3.3.1 Matrice kao linearni operatori

Neka je $A \in M_{mn}$ proizvoljna matrica. Za svaki vektor $\overrightarrow{x}$ iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n = M_{n1}$ definiran je vektor $A\overrightarrow{x}$ (kao produkt matrica A i $\overrightarrow{x}$) iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^m = M_{m1}$. Štoviše, iz svojstava matričnog množenja slijedi da je $A(\lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{y}) = \lambda A\overrightarrow{x} + \mu A\overrightarrow{y}$, za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i sve $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Dakle funkcija $\overrightarrow{x} \longmapsto A\overrightarrow{x}$ prevodi linearnu kombinaciju u linearnu kombinaciju. Takvu funkciju zovemo linearni operator.

Definicija 3.16. *Funkcija $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zove se* ***linearni operator*** *ako vrijedi*

$$F(\lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{y}) = \lambda F(\overrightarrow{x}) + \mu F(\overrightarrow{y})$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ i sve $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbf{R}^n$. Ako je $m = 1$, $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$, onda takav linearni operator zovemo ***linearnim funkcionalom****.*

Napomena 3.29. *Funkcije među vektorskim prostorima uobičajeno je zvati* ***operatorima****. Funkcije s vektorskog prostora u vektorski prostor $\mathbb{R}$ zovemo* ***funkcionalima****.*

Iz Definicije 3.16 slijedi da svaka matrica $A \in M_{mn}$ definira jedan linearni operator $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ formulom

$$\overrightarrow{y} = A\overrightarrow{x}.$$

Neka su $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ operatori. Definiramo zbrajanje operatora na sljedeći način

$$(F + G)(\overrightarrow{x}) = F(\overrightarrow{x}) + G(\overrightarrow{x}).$$

Definirajmo još i množenje operatora $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ proizvoljnim skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$(\lambda F)(\overrightarrow{x}) = \lambda F(\overrightarrow{x}).$$

Napomena 3.30. *Skup svih linearnih operatora sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ je vektorski prostor.*

Dokaz:

Dokažimo da skup svih linearnih operatora zadovoljava svojstva Definicije 1.5. Očito je da prethodno definirano zbrajanje linearnih operatora i množenje linearnog operatora s skalarom zadovoljavaju svojstva iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2, dakle zadovoljavaju treće svojstvo Definicije 1.5. Dokažimo da vrijede i prva dva.
Neka su $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *i* $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *linearni operatori. Dokažimo da je i* $F + G$ *linearni operator, tj. da vrijedi*

$$(F+G)(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}) = \lambda(F+G)(\overrightarrow{x}) + \mu(F+G)(\overrightarrow{y})$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *i sve* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$*. Kako je*

$$(F+G)(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}) = F(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}) + G(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y})$$

i kako su F *i* G *linearni, tvrdnja slijedi.*

Dokažimo sada da za proizvoljni linearni operator $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *i proizvoljni* $\nu \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(\nu F)(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}) = \lambda(\nu F)\overrightarrow{x} + \mu(\nu F)\overrightarrow{y}$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *i sve* $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$*. Tvrdnja lagano slijedi iz linearnosti od* F *i činjenice da je*

$$(\nu F)(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}) = \nu F(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}).$$

Dakle skup svih linearnih operatora sa $\mathbb{R}^n$ *u* $\mathbb{R}^m$ *je vektorski prostor.*♣

Neka su $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $G : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ operatori. Ako je $p = m$ definiramo funkciju $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ formulom

$$H(\overrightarrow{x}) = G(F(\overrightarrow{x}))$$

i zovemo ju **kompozicija operatora** F i G i označavamo s $H = G \circ F$.
Analogno ako je $q = n$ definiramo kompoziciju operatora G i F formulom $F \circ G : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$(F \circ G)(\overrightarrow{x}) = F(G(\overrightarrow{x})).$$

Teorem 3.18. *Kompozicija linearnih operatora (ako postoji) je linearni operator.*♣

Rekli smo da je svaka matrica $A \in M_{mn}$ linearni operator sa $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$. Postavlja se pitanje vrijedi li obrat? Tj. je li svaki linearni operator $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ neka matrica iz M_{mn}?
Pogledajmo vektore $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n \in \mathbb{R}^n$ dane sa $\overrightarrow{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, $i = 1, ..., n$, gdje je jedinica na i-tom mjestu. Lagano se provjeri da vektori $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n$ čine

ortonormiran skup vektora, linearno su nezavisni i da vrijedi $L(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n) = \mathbb{R}^n$. Zaključujemo da je skup $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ koju zovemo **kanonskom bazom**.
Neka je $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ proizvoljan linearni operator. Nadalje, neka je $F' \in M_{mn}$ matrica takva da je njen i-ti stupac vektor $F(\overrightarrow{e}_i) \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, ..., n$, rastavljen u kanonskoj bazi $(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_m)$ od $\mathbb{R}^m$. Tada za proizvoljni $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n$ i

$$F'\overrightarrow{x} = x_1F(\overrightarrow{e}_1) + ... + x_nF(\overrightarrow{e}_n) = F(x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n) = F(\overrightarrow{x}),$$

tj. matrica F' i linearni operator F se podudaraju za proizvoljni $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Dakle, na svaki linearni operator $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ možemo gledati kao na matricu iz M_{mn} čiji je i-ti stupac $\overrightarrow{a}_i$, $i = 1, ..., n$, vektor $F(\overrightarrow{e}_i)$, $i = 1, ..., n$, koji je rastavljen u kanonskoj bazi $(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_m)$ od $\mathbb{R}^m$, $\overrightarrow{a}_i = F(\overrightarrow{e}_i)$, $i = 1, ..., n$. Tu matricu nazivamo **prikazom linearnog operatora** F **u paru baza** $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ i $(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_m)$.
Očito je da ako uzmemo neki drugi par baza (ne nužno ortonormiran) od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, linearni operator F će imati drugačiji prikaz. Dakle, linearni operator u različitim parovima baza ima različite prikaze. Stoga treba voditi računa s kojim parovima baza radimo.

Napomena 3.31. *Neka su $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ i $G : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linearni operatori. Tada je po Teoremu 3.18 njihova kompozicija $H = G \circ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linearni operator i matrica tog operatora se računa kao produkt matrica od G i F, tj. $H' = G'F'$.*

Napomena 3.32. *Neka je $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ proizvoljan linearni operator i $F' \in M_{mn}$ njegova matrica. Lako se može dokazati da je skup $F(\mathbb{R}^n)$ koji zovemo **slika od F** vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Štoviše vrijedi da je $r(F') = dim(F(\mathbb{R}^n))$. Dakle dimenziju slike linearnog operatora također zovemo **rang**.*
*Nadalje, iz točke 3.2.3 znamo da je $N(F') = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : F'\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ vektorski potprostor prostora $\mathbb{R}^n$ i $dimN(F')$ zovemo defekt matrice F'. Kako su F i F' ustvari isti linearni operatori, vrijedi $N(F') = N(F) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$, odnosno $dimN(F) = dimN(F')$. Dakle broj $dimN(F)$ zovemo **defekt** linearnog operatora F.*

Neka je $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ proizvoljan linearni operator. Iz Napomene 3.32 i Teorema 3.10 izravno slijedi **teorem o rangu i defektu** za linearni operator, tj. vrijedi

$$dimN(F) + dimR(F) = n.$$

Primjer 3.10. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Neka je dan operator projekcije $p_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ formulom $p_2(x, y, z) = (x, y)$. Operator p_2 svaki vektor iz prostora ortogonalno projicira na xy ravninu. Njegova je matrica dana s*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Očito je rang od p_2 jednak dva (jer je slika xy ravnina), a defekt jedan.

2. *Neka je dan operator projekcije $p_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ formulom $p_1(x, y, z) = x$. Operator p_1 svaki vektor iz prostora ortogonalno projicira na x-os. Njegova je matrica dana s*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Očito je rang od p_1 jednak jedan (jer je slika x-os), a defekt dva.♠

3.3.2 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Neke je $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linearni operator (tj. $F \in M_n$). Operator F vektoru iz $\mathbb{R}^n$ pridružuje vektor iz $\mathbb{R}^n$. Sada nas zanima kada su ti vektori kolinearni.

Definicija 3.17. *Neka je $A \in M_n$. Realni broj λ_0 zove se **svojstvena** (karakteristična) **vrijednost** matrice (linearnog operatora) A ako postoji takav ne-nul vektor $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ da vrijedi*

$$A\overrightarrow{x}_0 = \lambda_0 \overrightarrow{x}_0.$$

*Vektor $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x}_0 \neq 0$ je **svojstveni** (karakteristični) **vektor** matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_0.*

Napomena 3.33. *Primijetimo:*

1. *Ako je $\overrightarrow{x}_0 \neq 0$ svojstveni vektor matrice $A \in M_n$ onda on pripada samo jednoj svojstvenoj vrijednosti.*

2. *Ako je λ_0 svojstvena vrijednost od $A \in M_n$ onda njoj pripada beskonačno mnogo svojstvenih vektora.*

Dokaz:

1. *Izravno iz Definicije 3.17.*

2. *Neka je* $\overrightarrow{x}_0 \neq 0$ *svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti* λ_0, *tj.* $A\overrightarrow{x}_0 = \lambda_0\overrightarrow{x}_0$. *Nadalje, neka je* $\mu \in \mathbb{R}$ $\mu \neq 0$ *proizvoljan. Tada vrijedi*

$$A(\mu\overrightarrow{x}_0) = \mu A\overrightarrow{x}_0 = \mu\lambda_0\overrightarrow{x}_0 = \lambda_0(\mu\overrightarrow{x}_0).$$

   Dakle za svaki $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, *vektor* $\mu\overrightarrow{x}_0$ *je također svojstveni vektor od* A *koji pripada svojstvenoj vrijednosti* λ_0. ♣

Napomena 3.34. *Skup* $S(\lambda_0)$ *svih svojstvenih vektora koji pripadaju istoj svojstvenoj vrijednosti* λ_0 *od* $A \in M_n$ *dodavanjem nul vektora postaje vektorski podprostor od* $\mathbb{R}^n$.

Dokaz:

Očito je $S(\lambda_0)$ *podskup od* $\mathbb{R}^n$. *Dokažimo još da je* $S(\lambda_0)$ *vektorski prostor, tj. da zadovoljava uvjete Definicije 1.5.*

Svojstva iz Teorema 1.1 i Teorema 1.2 očito zadovoljava. Nadalje neka su $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in S(\lambda_0)$, *tj. vrijedi*

$$A\overrightarrow{x} = \lambda_0\overrightarrow{x} \qquad i \qquad A\overrightarrow{y} = \lambda_0\overrightarrow{y}.$$

Dokažimo da je $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in S(\lambda_0)$. *Imamo*

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda_0\overrightarrow{x} + \lambda_0\overrightarrow{y} = \lambda_0(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}),$$

pa je $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in S(\lambda_0)$.

Dokažimo još da je za proizvoljni $\overrightarrow{x} \in S(\lambda_0)$ *i proizvoljni* $\mu \in \mathbb{R}$ $\mu\overrightarrow{x} \in S(\lambda_0)$. *Imamo*

$$A(\mu\overrightarrow{x}) = \mu\lambda_0\overrightarrow{x} = \lambda_0(\mu\overrightarrow{x}),$$

pa je $\mu\overrightarrow{x} \in S(\lambda_0)$. *Dakle imamo tvrdnju.*♣

Neka je $A \in M_n$ i λ_0 svojstvena vrijednost od A. Tada skup $S(\lambda_0)$ zovemo **svojstveni podprostor** matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_0.

Sada se postavlja pitanje kako odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore proizvoljne matrice iz M_n?

Ako je λ_0 svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n$, onda je $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x}_0 \neq \overrightarrow{0}$, svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_0 ako i samo ako je

$$A\overrightarrow{x}_0 = \lambda_0\overrightarrow{x}_0,$$

tj. ako i samo ako vrijedi

$$(A - \lambda_0 I_n)\overrightarrow{x}_0 = \overrightarrow{0}.$$

Dakle, zaključujemo da je $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x}_0 \neq \overrightarrow{0}$, svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_0 ako i samo ako je $\overrightarrow{x}_0$ netrivijalno rješenje homogenog sustava

$$(A - \lambda_0 I_n)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.$$

Štoviše, iz gornje jednadžbe vidimo da će $\lambda \in \mathbb{R}$ biti svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n$ ako i samo ako homogeni sustav

$$(A - \lambda I_n)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

ima netrivijalno rješenje $\overrightarrow{x}_0$. Po Teoremu 3.8 homogeni sustav

$$(A - \lambda I_n)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

će imati netrivijalno rješenje ako i samo ako je matrica $A - \lambda I_n$ singularna, što je ekvivalentno s uvjetom $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Dakle će $\lambda \in \mathbb{R}$ biti svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n$ ako i samo ako je $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ i proizvoljnu matricu $A = [a_{ij}] \in M_n$ vrijedi $(A - \lambda I_n) = [b_{ij}]$, gdje su $b_{ij} = a_{ij}$ za $i \neq j$ i $b_{ij} = a_{ij} - \lambda$ za $i = j$.
Dakle, funkcija $\lambda \longmapsto \det(A - \lambda I_n)$ je polinom stupnja n u varijabli λ.
Taj polinom, u oznaci $K_A(\lambda)$, zovemo **svojstveni** ili **karakteristični polinom** matrice A.
Očito je $K_A(\lambda)$ oblika

$$\boxed{K_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n.}$$

Ako stavimo $\lambda = 0$ dobijemo

$$\boxed{K_A(0) = a_n = \det A.}$$

Nadalje, koeficijent a_1 iz $K_A(\lambda)$ je očito koeficijent uz λ^{n-1} u sumandu oblika $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ kojeg dobijemo u razvoju determinante. Odatle je

$$a_1 = (-1)^{n-1} a_{11} + ... + (-1)^{n-1} a_{nn},$$

tj.

$$\boxed{a_1 = (-1)^{n-1} trA.}$$

Skup nultočaka (korijena) svojstvenog polinoma $K_A(\lambda)$ zovemo **spektar** matrice A.
Dakle, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n$ ako i samo ako se λ_0 nalazi u spektru od A, tj. ako i samo ako je

$$K_A(\lambda_0) = 0.$$

Primjer 3.11. *Neka je dan linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ matricom*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gdje je $\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.
Linearni operator A ustvari predstavlja rotaciju u ravnini za kut φ oko ishodišta.
Izračunajmo svojstvene vrijednosti od A. Imamo

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1.$$

Očito je $\det(A - \lambda I_2) = 0$ ako i samo ako je $\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$. Rješavanjem te jednadžbe dobivamo da su svojstvene vrijednosti od A

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}.$$

Kako je $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, imamo

$$\cos^2\varphi - 1 < 0$$

tj. svojstvene vrijednosti od A nisu realni brojevi.♠

Dakle iz Primjera 3.11 zaključujemo da se može dogoditi da za proizvoljnu matricu $A \in M_n$ svojstveni polinom $K_A(\lambda)$ nema realnih nultočaka, tj. da A nema realnih svojstvenih vrijednosti.

Teorem 3.19. *Neka je $A \in M_n$ simetrična matrica. Tada su sve njene svojstvene vrijednosti realne.*♣

Pronalaženje svojstvenih vrijednosti matrice $A \in M_n$ je ekvivalentno rješavanju jednadžbe $\det(A - \lambda I_n) = 0$, tj. pronalaženju nultočki karakterističnog polinoma $K_A(\lambda)$. Međutim, jednadžba $\det(A - \lambda I_n) = 0$ nije uvijek trivijalna za rješavanje. Za velike matrice karakteristični polinom $K_A(\lambda)$ je polinom velikog stupnja čije je nultočke teško naći. Stoga se koriste razne približne metode, iterativne metode, itd.
Za neke specijalne oblike matrica možemo lagano izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore. Tako npr. za trokutaste, nul matrice, skalarne i dijagonalne matrice svojstvene vrijednosti su jednake elementima na dijagonali.
Nadalje, za nul matrice, jedinične i skalarne matrice svaki ne-nul vektor je svojstveni vektor. Za dijagonalne matrice, svaki vektor kanonske ortonormirane baze od $\mathbb{R}^n$ je svojstven.
Stoga bi bilo dobro kada bismo mogli proizvoljnu matricu $A \in M_n$ "transformirati" u dijagonalnu koja bi imala iste svojstvene vrijednosti kao i polazna.

Definicija 3.18. *Za matrice $A, B \in M_n$ kažemo da su* ***slične*** *ako postoji regularna matrica $P \in M_n$ takva da vrijedi*

$$B = P^{-1}AP.$$

Teorem 3.20. *Slične matrice imaju iste svojstvene vrijednosti.*♣

"Transformirati" matricu $A \in M_n$ u dijagonalnu, tj. dijagonalizirati matricu A, znači da treba pronaći regularnu matricu P takvu da je matrica $P^{-1}AP$ dijagonalna. To nije uvijek moguće.

Primjer 3.12. *Neka je matrica A dana s*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pokušajmo je dijagonalizirati, tj. pokušajmo pronaći regularnu matricu

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

takvu da vrijedi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je gornja jednakost ekvivalentna s

$$AP = P \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

dakle imamo

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}.$$

Odnosno, imamo sustav

$$2a = ax$$

$$2b = by$$

$$a + 2c = cx$$

$$b + 2d = dy.$$

Primijetimo da a, b, c, d ne mogu svi biti istodobno nula. Također nikoja tri od a, b, c, d ne mogu biti nula, jer u suprotnom matrica P nije regularna.
Matrica P također nije regularna ako su $a = b = 0$ ili $a = c = 0$ ili $b = d = 0$ ili $c = d = 0$.
Dakle, pretpostavimo prvo da je $b = c = 0$. Tada iz treće jednadžbe imamo da je $a = 0$ što ne može biti, analogno vrijedi za $a = d = 0$.
Uzmimo sada da je samo $a = 0$, onda iz druge jednadžbe imamo da je $y = 2$, a iz četvrte $b = 0$ što ne može biti. Analogno vrijedi ako je $b = 0$ ili $c = 0$ ili $d = 0$.
Dakle ostaje nam samo slučaj kada su a, b, c, d svi različiti od nule. Tada iz prve jednadžbe imamo $x = 2$ a iz treće $a = 0$, što ne može biti. Dakle matricu A ne možemo dijagonalizirati.♠

Iz Primjera 3.12 vidimo da ne možemo svaku matricu dijagonalizirati. Ipak, pokazuje se da je svaku simetričnu matricu moguće dijagonalizirati.

Teorem 3.21. *Neka je $A \in M_n$ simetrična. Tada postoji ortonormirana baza od $\mathbf{R}^n$ takva da je svaki vektor te baze svojstveni vektor matrice A.*♣

Napomena 3.35. *Matrica $A \in M_n$ je u stvari linearni operator $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ako je A još simetrična onda iz Teorema 3.21 znamo da postoji ortonormirana baza od $\mathbb{R}^n$ takva da je svaki vektor te baze svojstveni vektor matrice A. Ako pogledamo prikaz matrice A kao linearnog operatora u toj bazi (primijetimo da je ovdje par baza jedna te ista baza) vidimo da je dobivena matrica dijagonalna i da su joj na dijagonali svojstvene vrijednosti od A. Dakle smo za dani operator A našli bazu u kojoj je njegova matrica posebno jednostavna, dijagonalna.*

Teorem 3.22. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako nula nije svojstvena vrijednost od A.*

Dokaz:

Ako je A regularna onda znamo da je $\det(A-0\lambda) = \det A \neq 0$. Dakle 0 nije svojstvena vrijednost.

Obratno, ako 0 nije svojstvena vrijednost od A onda je $\det(A-0\lambda) = \det A \neq 0$, tj. A je regularna. ♣

Teorem 3.23. *Neka je $A \in M_n$ regularna matrica čije su svojstvene vrijednosti jednake $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Tada su svojstvene vrijednosti matrice A^{-1} dane s $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$, a odgovarajući se svojstveni vektori podudaraju.*♣

Neka je $A \in M_n$ i neka je λ_0 jedna njena svojstvena vrijednost. Tada iz Napomene 3.34 znamo da je skup $S(\lambda_0)$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Dimenziju $dim(S(\lambda_0))$ zovemo **geometrijska kratnost** od λ_0.

Napomena 3.36. *Uočimo da je $dim(S(\lambda_0))$ u stvari defekt matrice $A - \lambda_0 I_n$.*

Rekli smo da je λ_0 svojstvena vrijednost od $A \in M_n$ ako i samo ako je λ_0 nultočka od $K_A(\lambda)$. Kako je $K_A(\lambda)$ polinom n-tog stupnja, iz osnovnog teorema algebre (Teorem 5.5) znamo da $K_A(\lambda)$ ima n nultočaka $\lambda_1, ..., \lambda_n$, među kojima može biti istih i koje ne moraju sve (možda niti jedna) biti realni brojevi.
Sada, ako je λ_0 svojstvena vrijednost od $A \in M_n$, tj. nultočka od $K_A(\lambda)$, ona se u nizu nultočaka $\lambda_1, ..., \lambda_n$ od $K_A(\lambda)$ pojavljuje barem jednom. Broj pojavljivanja svojstvene vrijednosti λ_0 u nizu nultočaka $\lambda_1, ..., \lambda_n$ od $K_A(\lambda)$ zovemo **algebarska kratnost** od λ_0.

Teorem 3.24. *Neka je $A \in M_n$ i neka je λ_0 njena svojstvena vrijednost. Tada je algebarska kratnost od λ_0 uvijek veća ili jednaka od njene geometrijske kratnosti.*♣

Poglavlje 4

Nizovi i redovi

4.1 Nizovi realnih brojeva

4.1.1 Pojam niza

Niz je matematički koncept koji opisuje situaciju u kojoj su elementi nekog skupa poredani, tj. indeksirani prirodnim brojevima.

Definicija 4.1. ***Niz*** *(slijed) u nepraznom skupu A je funkcija $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Vrijednost funkcije a na elementu $n \in \mathbb{N}$ uobičajeno je označavati s a_n umjesto $a(n)$. Argument n zovemo **indeks.**
Nas zanimaju nizovi realnih brojeva, tj. funkcije $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Elemente niza, tj. brojeve $a_1, a_2, ...$ zovemo **članovi** niza. Umjesto zapisa $a_1, a_2, ...$ za niz još ćemo koristiti i zapis $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ili samo (a_n).
Niz možemo zadati na više načina:

- formulom (npr. $a_n = n^2 + 1$),
- rekurzijom (npr. $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 1$),
- svojstvom (npr. a_n je broj triangulacija mnogokuta dijagonalama).

Primjer 4.1. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Niz prirodnih brojeva počinje s $1, 2, 3, ...,$ a opći član mu je zadan formulom $a_n = n$.*

2. *Niz kvadrata prirodnih brojeva zadan je formulom* $a_n = n^2$*, a počinje članovima* $1, 4, 9, \ldots$.

3. *Niz prostih brojeva počinje brojevima* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$. *Za njegov opći član ne postoji formula.*

4. *Niz Fibonaccijevih brojeva zadan je pravilom* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *i početnim vrijednostima* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. *To je primjer niza zadanog rekurzijom.*♠

Niz (a_n) je **rastući** ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. Niz (a_n) je **padajući** ako je $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako su nejednakosti stroge, imamo **strogo rastući** odnosno **strogo padajući** niz. Ako je niz rastući ili padajući, kažemo da je **monoton**.

Niz (a_n) je **pozitivan (negativan)** ako je $a_n \geq 0$, $a_n \leq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako su nejednakosti stroge, imamo strogo pozitivan (strogo negativan) niz. Ponekad se nizovi za koje vrijedi $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ zovu i nenegativni, a pozitivnima se zovu nizovi s $a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo funkciju $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$\mathrm{sign}\, x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Funkcija sign realnom broju pridružuje njegov predznak.

Ako je $\mathrm{sign}\, a_n \neq 0$ i $\mathrm{sign}\, a_n \neq \mathrm{sign}\, a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda kažemo da je niz (a_n) **alternirajući**.

Primjer 4.2. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Niz* $a_n = n$ *je strogo rastući i pozitivan.*

2. *Niz* $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *je strogo padajući i pozitivan.*

3. *Niz* $a_n = \lfloor \log n \rfloor$ *je rastući i pozitivan jer je* $a_1 = \ldots = a_9 = 0$, $a_{10} = \ldots = a_{99} = 1$, $a_{100} = \ldots = a_{999} = 2, \ldots$

4. *Niz* $a_n = (-1)^n$ *nije monoton nego alternirajući.*♠

Podniz niza (a_n) je niz dobiven ispuštanjem nekih članova iz niza (a_n).

Definicija 4.2. *Za niz (b_n) kažemo da je* ***podniz*** *niza (a_n) ako postoji strogo rastući niz (p_n) u $\mathbb{N}$ tj. strogo rastuća funkcija $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da vrijedi $b_n = a_{p(n)}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 4.3. *Za niz (a_n) kažemo da je* ***ograničen*** *ili* ***omeđen*** *ako postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|a_n| < M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, ili, ekvivalentno, ako je $-M < a_n < M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Primjer 4.3. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Niz $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$ je omeđen niz jer je funkcija sinus omeđena, i možemo uzeti npr. $M = 2$.*

2. *Niz $a_n = \sqrt{n}$ nije omeđen jer za svaki $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sqrt{n} > M$. Dovoljno je uzeti $n > M^2$.*♠

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d,}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $d \in \mathbb{R}$ konstanta. Formula općeg člana aritmetičkog niza je

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

Ako je $d > 0$ onda je (a_n) strogo rastući, za $d < 0$ niz (a_n) je strogo padajući a za $d = 0$ imamo konstantni niz $a_n = a_1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da za aritmetički niz (a_n) vrijedi formula

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. svaki član niza (osim prvog) je aritmetička sredina svojih susjeda.

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q,}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, konstanta. Formula općeg člana geometrijskog niza je

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}.}$$

Ako je $q < 0$ onda je niz (a_n) alternirajući. Za $a_1 > 0$ i $q > 1$ niz raste, za $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ niz pada. Za $a_1 < 0$ i $q > 1$ niz pada, za $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$ niz raste. Uočimo da za geometrijski niz (a_n) takav da je $a_1 > 0$ i $q > 0$ vrijedi formula

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}},}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. svaki član niza osim prvog je geometrijska sredina svojih susjeda.

Primjer 4.4. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Za aritmetički niz* $1, 4, 7, 10, 13, ...$ *je* $a_1 = 1$, $d = 3$ *i* $a_n = 3n - 2$.
2. *Za aritmetički niz* $8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, ...$ *je* $a_1 = 8$, $d = -2$ *i* $a_n = -2n + 10$.
3. *Za geometrijski niz* $1, 2, 4, 8, 16, ...$ *je* $a_1 = 1$, $q = 2$ *i* $a_n = 2^{n-1}$.
4. *Za geometrijski niz* $1, -1, 1, -1, 1, ...$ *je* $a_1 = 1$, $q = -1$ *i* $a_n = (-1)^{n-1}$.♠

4.1.2 Granična vrijednost niza. Konvergencija niza

Pogledajmo niz (a_n) zadan formulom $a_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Njegove vrijednosti padaju i prilaze po volji blizu broju 0. Slično, vrijednosti niza (a_n) zadanog formulom $a_n = \frac{n-1}{n}$ se približavaju po volji blizu broju 1. S druge strane, vrijednosti nizova (a_n), (b_n) i (c_n) zadanih formulama $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n n$ i $c_n = n^2$, ne približavaju se za velike vrijednosti indeksa n niti jednom fiksnom realnom broju.
Dakle se ti nizovi kvalitativno drugačije ponašaju.

Definicija 4.4. *Realni broj L je* ***granična vrijednost*** *ili* ***limes*** *niza (a_n) ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (|a_n - L| < \varepsilon).$$

To pišemo $a_n \longrightarrow L$ *ili* $L = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$.

Uvjet $|a_n - L| < \varepsilon$ iz Definicije 4.4 ustvari znači $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$ odnosno $L - \varepsilon < a_n < \varepsilon + L$. Dakle, Definicija 4.4 ustvari govori da je realni broj L limes niza (a_n) ako izvan proizvoljno malog intervala oko limesa ostaje samo konačno mnogo članova niza.

Definicija 4.5. *Niz (a_n) je* ***konvergentan*** *ako postoji $L \in \mathbb{R}$ za koji je*

$$L = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n.$$

Inače kažemo da je (a_n) ***divergentan****.*

Napomena 4.1. *Ako je niz (a_n) konvergentan onda je njegov limes jedinstven.*

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, tj. da niz (a_n) ima bar dva limesa L i L'. Uzmimo sada da je ε jednak $|L - L'|$, pa kako su L i L' limesi niza (a_n) za $\varepsilon = |L - L'|$ postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve $n > n_1$ i $n > n_2$ vrijedi $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a_n - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle za $n > n_1$ i $n > n_2$ imamo

$$\varepsilon = |L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < \varepsilon.$$

Dobili smo da je $\varepsilon < \varepsilon$, što ne može biti. Dakle pretpostavka da postoje bar dva limesa je pogrešna. ♣

Primjer 4.5. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \frac{1}{n}$. Tada je*

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

   Zaista, uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Pitanje je: možemo li naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, za svaki $n > n_0$? Očito je dovoljno uzeti $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$. Za mali ε, npr. $\varepsilon = 10^{-100}$, $n_0 = 10^{100}$, što je vrlo velik, no još uvijek konačan broj.

2. *Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \frac{n^2}{n^2-1}$. Tada je*

   $$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} = 1.$$

   Zaista, uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tražimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\left|\frac{n^2}{n^2-1} - 1\right| < \varepsilon$, za svaki $n > n_0$. Izraz $\frac{n^2}{n^2-1} - 1$ je uvijek pozitivan pa imamo $\frac{n^2}{n^2-1} - 1 < \varepsilon$. Odatle slijedi $\frac{1}{n^2-1} < \varepsilon$, tj. $\varepsilon(n^2 - 1) > 1$, tj. $n^2 > \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$. Dakle za n_0 je dovoljno uzeti $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}} \right\rfloor$. ♠

Pogledajmo sada ponašanje nizova koji nisu konvergentni.

Definicija 4.6. *Kažemo da niz (a_n) teži u $+\infty$ ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (a_n > M).$$

To pišemo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Analogno, kažemo da niz (a_n) teži u $-\infty$ ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (a_n < -M),$$

i pišemo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Primjer 4.6. *Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = n^2$. Tada je*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Neka je $M > 0$ proizvoljan. Tada je za n_0 dovoljno uzeti $\lfloor \sqrt{M} \rfloor$, pa je $a_n > M$ za svaki $n > n_0$.♠

Napomena 4.2. *Treba imati u vidu da $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$, pa su nizovi koji teže u $+\infty$ ili $-\infty$ ustvari divergentni. Kaže se da su* ***divergentni u užem smislu****.*

Pogledajmo ponašanje niza (b_n) danog formulom $b_n = (-1)^n$. U blizini broja 1 i broja -1 ima beskonačno mnogo članova niza. Ipak, to nisu granične vrijednosti, jer izvan proizvoljno male okoline tih brojeva ostaje beskonačno mnogo članova niza (a ne konačno mnogo). Dakle niz $b_n = (-1)^n$ ne teži ni u beskonačnu ni u konačnu granicu. Kažemo da takav niz ***divergira u širem smislu****.*

Definicija 4.7. *Realni broj G je* ***gomilište*** *niza (a_n) ako se u proizvoljno maloj okolini broja G nalazi beskonačno mnogo članova niza.*

Primjer 4.7. *Niz (a_n) dan formulom $a_n = n$ nema gomilište.*♠

Napomena 4.3. *Granična vrijednost niza (ako postoji) je i gomilište tog niza. Obrat ne vrijedi. Npr. niz (a_n) zadan formulom $a_n = (-1)^n$ ima dva gomilišta -1 i 1, ali nema limesa.*

Iz Napomene 4.3 vidimo da niz može imati više gomilišta. Najveće gomilište niza (a_n) (ako postoji) zovemo **limes superior** od (a_n) i označavamo ga

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n,$$

dok najmanje gomilište (ako postoji) niza (a_n) zovemo **limes inferior** od (a_n) i označavamo ga

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} a_n.$$

Rekli smo da je realni broj G gomilište niza (a_n) ako se u proizvoljno maloj okolini broja G nalazi beskonačno mnogo članova niza. Ako uzmemo te članove niza dobivamo jedan podniz niza (a_n), tj. vrijedi:

Teorem 4.1. *Realni broj G je gomilište niza (a_n) ako i samo ako postoji podniz (b_n) niza (a_n) koji konvergira u G.*♣

Napomena 4.4. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom L onda je* $\limsup a_n = \liminf a_n = L$.

Teorem 4.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Svaki omeđen niz ima barem jedno gomilište, tj. barem jedan konvergentan podniz.*♣

Pogledajmo sada neka svojstva konvergentnih nizova:

1. Promjena konačno mnogo članova ne utječe na limes.

2. Svaki konvergentan niz je ograničen.

3. Svaki podniz konvergentnog niza teži prema istoj graničnoj vrijednosti kao i sam niz.

4. Limes može no i ne mora biti član niza (npr. $a_n = \frac{1}{n}$, 0 nije član niza, $b_n = 1$, 1 je član niza).

4.1.3 Računanje s graničnim vrijednostima

Računanje graničnih vrijednosti izravno iz definicije je nespretno, ako ne i nemoguće. Npr. konvergira li, i ako da, prema kojoj vrijednosti, niz (a_n) zadan formulom

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 7n - 1}{2n^4 - 7n^3 + 3n + 2}?$$

Prvo bi trebalo pogoditi limes L, pa dokazati da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (|a_n - L| < \varepsilon).$$

Mi ćemo pokušati izbjeći ovakav način računanja limesa direktno iz definicije, tj. izgradit ćemo repertoar osnovnih limesa i pravila pomoću kojih se složeniji slučajevi svode na jednostavnije.

Teorem 4.3. *Neka je (a_n) niz s pozitivnim članovima. Tada*

$$a_n \longrightarrow 0 \quad \textit{ako i samo ako} \quad \frac{1}{a_n} \longrightarrow \infty. \clubsuit$$

Teorem 4.4. *Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi, te $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada vrijedi:*

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (ca_n) = c \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$,
3. $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$,
4. *ako je* $b_n \neq 0$ *i* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n \neq 0$, *onda je* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n}{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n}. \clubsuit$

Napomena 4.5. *Neka je (a_n) konvergentan niz. Onda vrijedi*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n\right|.$$

Ako je $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, proizvoljan i $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda vrijedi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[r]{a_n} = \sqrt[r]{\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n}.$$

Teorem 4.5. *Beskonačni geometrijski niz (a_n) s kvocijentom q je konvergentan za $|q| < 1$ a divergentan za $|q| > 1$. Za $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$.*

Dokaz:

Iz točke 4.1.1 znamo da je opći član geometrijskog niza dan formulom $a_n = a_1 q^{n-1}$. Prema Teoremu 4.4 dovoljno je promatrati niz s $a_1 = 1$, tj. niz $1, q, q^2, q^3, \ldots$.
Pogledajmo prvo slučaj $|q| < 1$. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i pogledajmo nejednadžbu $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$. To je ekvivalentno s $|q|^n < \varepsilon$. Logaritmiranjem se dobije $n \log |q| < \log \varepsilon$, jer je $\log |q| < 0$. Imamo

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}.$$

Dakle svi članovi niza $1, q, q^2, q^3, \ldots$ za koje je $n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}$ padaju u interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, pa je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0.$$

Neka je sada $|q| > 1$. Tada je $\frac{1}{|q|} < 1$, pa prema prethodnom niz $\frac{1}{|q^n|} \longrightarrow 0$. Sada, po Teoremu 4.3 imamo $|q^n| \longrightarrow \infty$, dakle ili $q^n \longrightarrow \infty$, ili q^n alternira po predznaku (za $q < -1$) i raste u beskonačnost po apsolutnoj vrijednosti, dakle divergira ili u užem, ili u širem smislu.♣

Napomena 4.6. *Beskonačni geometrijski niz (a_n) s kvocijentom $q = 1$ je konvergentan niz za koji vrijedi $a_n = a_1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
Ako je pak $q = -1$ imamo alternirajući niz $a_n = a_1(-1)^{n-1}$, dakle divergentan.

Napomena 4.7. *Jasno je da beskonačni aritmetički niz (a_n) s razlikom d konvergira ako i samo ako je $d = 0$.*

Teorem 4.6. *Monoton, ograničen niz je konvergentan.*

Dokaz:

Neka je (a_n) monoton i ograničen. Tada po Teoremu 4.2 niz (a_n) ima barem jedno gomilište. Kako je (a_n) monoton, on može imati najviše jedno gomilište. U suprotnom, ako (a_n) ima barem dva gomilišta G i G', $G > G'$, i ako npr. (a_n) raste, izvan proizvoljno male okoline oko G imamo konačno mnogo članova. Tj. postoji okolina oko G' u kojoj je samo konačno mnogo članova, što ne može biti jer je G' gomilište. Dakle imamo samo jedno gomilište, tj. vrijedi $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Onda je po Napomeni 4.4, niz (a_n) konvergentan.♣

Teorem 4.6 je tipični teorem egzistencije, tj. znamo da nešto postoji, no ne znamo koliko je i kako to naći, odrediti, izračunati.

Teorem 4.7 (Nužan i dovoljan uvjet konvergencije niza). *Niz (a_n) konvergira ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a_{n+r}| < \varepsilon, \quad \forall r \in \mathbb{N}).\clubsuit$$

Teorem 4.7 je najopćenitiji. Daje nužne i dovoljne uvjete konvergencije niza i u njemu figuriraju samo članovi niza.
On u stvari kaže da niz (a_n) konvergira ako i samo ako razlike među po volji udaljenim članovima niza postaju po volji male, tj. teže k nuli.

4.1.4 Osnovni limesi

Pogledajmo sada neke osnovne limese:

1. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \lambda^n$, gdje je $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, proizvoljan. Tada vrijedi
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } \ \lambda > 1 \\ 0, & \text{ako je } \ 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

2. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \frac{|\lambda|^n}{n!}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada vrijedi
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0.$$

3. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \sqrt[n]{\lambda}$, gdje je $\lambda > 0$ proizvoljan. Tada vrijedi
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 1.$$

4. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = n^{\lambda}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada vrijedi
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty, & \text{ako je } \ \lambda > 0 \\ 1, & \text{ako je } \ \lambda = 0. \\ 0, & \text{ako je } \ \lambda < 0 \end{cases}$$

5. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \sqrt[n]{n}$. Tada vrijedi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 1.$$

6. Neka je niz (a_n) dan formulom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Tada vrijedi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = e.$$

4.2 Redovi realnih brojeva

4.2.1 Pojam reda. Konvergencija reda

Ako u beskonačnom nizu (a_n), tj. $a_1, a_2, a_3, ...$ zareze zamijenimo plusevima dobijemo beskonačni red. No, zašto bi to netko želio napraviti?
Ako članovi niza predstavljaju doprinose, što je kumulativni efekt prvih n članova niza?
To je

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n,$$

tj. n-ta **parcijalna suma**.
Dakle, nizu (a_n) smo pridružili niz parcijalnih suma (S_n). Za svaki konačan n veličina S_n je dobro definirana, konačna suma.
Što se zbiva ako zbrojimo "sve" članove niza (a_n)?
Izraz $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ prelazi u $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, a konačna suma postaje red.

Definicija 4.8. *Neka je (a_n) niz.* ***Red*** *koji dobijemo od niza (a_n) je uređeni par nizova $((a_n), (S_n))$, gdje je (S_n) niz parcijalnih suma niza (a_n). Red dobiven od niza (a_n) označavamo s $\sum a_n$.*

Definicija 4.9. *Red $\sum a_n$* ***konvergira*** *ako konvergira njegov niz parcijalnih suma (S_n). Ako je $S = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n < \infty$, kažemo da je* ***suma*** *reda jednaka S i pišemo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ako niz parcijalnih suma (S_n) divergira, kažemo da i red $\sum a_n$ ***divergira****.*

Napomena 4.8. *Oznaka* $\sum a_n$ *je oznaka za red, a oznaka* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je oznaka za sumu reda* $\sum a_n$.

Primjer 4.8. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Red* $\sum n$ *divergira jer za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *je*

$$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

odnosno

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \infty.$$

2. *Red* $\sum \frac{1}{n}$ *divergira jer se može pokazati da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$S_{2^n} > \frac{n}{2} + 1.$$

3. *Red* $\sum \frac{1}{n!}$ *konvergira i suma mu je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

4. *Red* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *konvergira jer za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Dakle imamo

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. *Kako je*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = 1,$$

imamo da red $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *konvergira i suma mu je jednaka*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

5. *Red* $\sum \frac{1}{2^n}$ *konvergira jer za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i svaki* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(1 + x + x^2 + ... + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}.$$

Dakle, za $x = \frac{1}{2}$ *imamo*

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} - 1 = 1 - \frac{1}{2^n},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. *Kako je*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = 1$$

imamo da red $\sum \frac{1}{2^n}$ *konvergira i suma mu je jednaka*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.\spadesuit$$

Napomena 4.9. *Ako red* $\sum a_n$ *konvergira onda je* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$.

Dokaz:

Neka je S *suma reda* $\sum a_n$, *tj.* $S = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Nadalje, očito vrijedi*

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Puštajući limes po n *u beskonačnost u gornjoj jednakosti dobivamo*

$$S = S + \lim_{n \longrightarrow \infty} a_{n+1},$$

odnosno

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_{n+1} = 0.\clubsuit$$

Napomena 4.10. *Iz Primjera 4.8 znamo da red* $\sum \frac{1}{n}$ *divergira i da je* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *Dakle zaključujemo da obrat tvrdnje iz Napomene 4.9 općenito ne vrijedi, tj. ako opći član niza* (a_n) *konvergira u nulu, onda općenito red* $\sum a_n$ *ne mora konvergirati.*

Definicija 4.10. *Red* $\sum a_n$ ***apsolutno konvergira*** *ako konvergira red* $\sum |a_n|$. *Ako red* $\sum a_n$ *konvergira, a red* $\sum |a_n|$ *ne konvergira, kažemo da red* $\sum a_n$ ***konvergira uvjetno***.

Primjer 4.9. *Red* $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *konvergira i suma mu je*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2,$$

dok red $\sum\frac{1}{n}$ *divergira (Primjer 4.8). Dakle je red* $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *uvjetno konvergentan.*♠

Teorem 4.8. *Ako red apsolutno konvergira, onda on konvergira i obično.*♣

Uočimo da iz Primjera 4.9 ne slijedi obrat Teorema 4.8.

4.2.2 Geometrijski red

Red oblika $a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... = \sum a_1q^{n-1}$, gdje su $a_1, q \in \mathbb{R}$ proizvoljni, zovemo **geometrijski red** s kvocijentom q.

Teorem 4.9. *Geometrijski red* $\sum a_1q^{n-1}$ *je konvergentan ako i samo ako je* $|q| < 1$. *Za* $|q| < 1$ *njegova je suma jednaka*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{1-q}.}$$

Dokaz:

Ako je $a_1 = 0$ *onda red* $\sum a_1q^{n-1}$ *očito konvergira i suma mu je nula. Pretpostavimo da je* $a_1 \neq 0$ *i* $|q| < 1$. *Pogledajmo n-tu parcijalnu sumu, tj.*

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}.$$

Ako S_n *pomnožimo s* q *dobivamo*

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n.$$

Nadalje, imamo

$$S_n - qS_n = a_1(1-q^n),$$

tj. vrijedi

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q},$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$. *Iz Teorema 4.5 imamo da je*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}S_n = a_1\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}.$$

Dakle limes niza parcijalnih suma je konačan, pa geometrijski red za $|q| < 1$ konvergira i suma mu je jednaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da geometrijski red $\sum a_1 q^{n-1}$ konvergira i dokažimo da je onda $|q| < 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da geometrijski red $\sum a_1 q^{n-1}$ konvergira i da je $|q| \geq 1$.
Ako je $q = 1$, onda je očito $a_n = a_1$, pa je $S_n = na_1$, a to divergira za svaki $a_1 \neq 0$.
Ako je $q = -1$, onda je očito $a_n = a_1(-1)^{n-1}$. Nadalje kako je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n \neq 0$$

za $a_1 \neq 0$, iz Napomene 4.9 zaključujemo da red $\sum a_1(-1)^{n-1}$ divergira.
Ako je $|q| > 1$ i $q > 0$, onda imamo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n \longrightarrow \infty} q^{n-1},$$

a po Teoremu 4.5 je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q^{n-1} = \infty.$$

Dakle je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \infty,$$

pa iz Napomene 4.9 zaključujemo da red $\sum a_1 q^{n-1}$ divergira i to u užem smislu.
I na kraju ako je $|q| > 1$ $q < 0$ imamo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n \longrightarrow \infty} q^{n-1},$$

a po Teoremu 4.5 je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q^{n-1} \neq 0.$$

Dakle iz Napomene 4.9 zaključujemo da red $\sum a_1 q^{n-1}$ divergira u širem smislu (jer niz $a_1 q^{n-1}$ alternira).
Dakle ako geometrijski red $\sum a_1 q^{n-1}$ konvergira mora biti $|q| < 1$.♣

Primjer 4.10. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Neka je dan geometrijski red $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$. Očito je $a_1 = 1$ i $q = \frac{1}{2}$. Tada iz Teorema 4.9 znamo da red $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ konvergira i suma mu je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

2. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ oblika $a = 0.333...$ Tada očito vrijedi*

$$0.333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n},$$

i očito je $a_1 = \frac{3}{10}$ i $q = \frac{1}{10}$. Tada iz Teorema 4.9 znamo da red $\sum \frac{3}{10^n}$ konvergira i suma mu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.\spadesuit$$

Napomena 4.11. *Uočimo da nam formula*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

govori da racionalan broj $\frac{1}{3}$ možemo s proizvoljnom točnošću aproksimirati decimalnim brojem.

4.2.3 Svojstva konvergentnih redova

Rekli smo da red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira njegov niz parcijalnih suma S_n. Dakle, iz Teorema 4.7 imamo nužan i dovoljan uvjet konvergencije reda $\sum a_n$:

Teorem 4.10 (Nužan i dovoljan uvjet konvergencije reda)**.** *Red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \textit{takav da} \quad (\forall n > n_0) \Rightarrow (|S_n - S_{n+r}| < \varepsilon, \quad \forall r \in \mathbb{N}).\clubsuit$$

Uočimo da je izraz

$$|S_n - S_{n+r}| < \varepsilon$$

iz Teorema 4.10 jednak izrazu

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+r}| < \varepsilon.$$

Dakle, Teorem 4.10 tvrdi da red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako se apsolutna vrijednost zbroja bilo kojeg konačnog broja uzastopnih članova niza (a_n) može

učiniti dovoljnom malom, počnemo li od dovoljno dalekog člana niza (tj. dovoljno velikog $n \in \mathbb{N}$).
Kriterij Teorema 4.10 nije jako koristan u praksi, jer je uvjet teško provjeriti. Dakle, bilo bi dobro pronaći kriterije konvergencije reda čije uvjete je lakše provjeriti. Cijena toga će biti slabljenje kriterija, tako da ćemo obično dobivati samo dovoljnost za konvergenciju.

Očito je da ako izostavimo prvih konačno mnogo članova reda $\sum a_n$ onda, se konvergentnost novog reda ne mijenja (tj. ako red $\sum a_n$ konvergira onda, konvergira i novi red, ako red $\sum a_n$ divergira onda divergira i novi red). Dakle, ako red $\sum a_n$ konvergira onda, konvergira i red

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ...,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Red $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ zovemo **ostatak reda** $\sum a_n$.

Ako red $\sum a_n$ konvergira i suma mu je S, vrijedi

$$S = S_n + R_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje je R_n suma reda $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ Nadalje, kako $S_n \longrightarrow S$, tako mora $R_n \longrightarrow 0$. Dakle, ostatak konvergentnog reda teži u 0 za $n \longrightarrow \infty$.

Napomena 4.12. *Rekli smo, ako je red $\sum a_n$ konvergentan sa sumom S, onda vrijedi $S = S_n + R_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle ostatak reda daje pogrešku aproksimacije pri zamjeni prave sume reda S n-tom parcijalnom sumom S_n, odnosno*

$$R_n = S - S_n.$$

Napomena 4.13. *Red $\sum a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira i red $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz:

Ako red $\sum a_n$ konvergira onda, očito konvergira i red $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Obrnuto, ako red $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ konvergira onda, očito konvergira i red $\sum a_n$, jer smo redu $a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ dodali samo konačno mnogo članova $a_1, ..., a_n$, čija je suma očito konačna.♣

Teorem 4.11. *Za sve redove $\sum a_n$ i $\sum b_n$ vrijedi:*

1. *Neka su* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *konvergentni redovi i neka je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. *Tada je konvergentan i red* $\sum(a_n \pm b_n)$ *i vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

2. *Neka je* $\sum a_n$ *konvergentan red sa sumom* A *i neka je* $c \in \mathbb{R}$. *Tada je konvergentan i red* $\sum ca_n$ *i vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$.

Dokaz:

1. *Neka su* $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ *i* $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ n*-te parcijalne sume redova* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$. *Nadalje, neka je niz* (c_n) *zadan formulom* $c_n = a_n \pm b_n$. *Tada je* n*-ta parcijalna suma reda* $\sum c_n = \sum(a_n \pm b_n)$ *dana s*
$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = A_n \pm B_n.$$
Kako limes desne strane u gornjoj formuli postoji, i jednak je $A \pm B$, *tako mora postojati i biti jednak tome limes lijeve strane, a to je upravo suma reda* $\sum(a_n \pm b_n)$.

2. *Neka je* $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ n*-ta parcijalna suma reda* $\sum a_n$. *Nadalje, neka je niz* (c_n) *zadan formulom* $c_n = ca_n$. *Tada je* n*-ta parcijalna suma reda* $\sum c_n = \sum ca_n$ *dana s*
$$C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} ca_i = cA_n.$$
Kako limes desne strane u gornjoj formuli postoji, i jednak je cA, *tako mora postojati i biti jednak tome limes lijeve strane, a to je upravo suma reda* $\sum ca_n$♣.

Primjer 4.11. *Neka je dan red* $\sum(-1)^n$, *tj.*
$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
Tada po Napomeni 4.9 taj red divergira. S druge strane pogledajmo red
$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$$
Ovaj red očito konvergira i suma mu je nula.
Dakle, zaključujemo da kod grupiranja članova (ispuštanje ili dodavanje zagrada) moramo biti pažljivi.♠

Teorem 4.12. *Ako članove konvergentnog reda grupiramo, po redu kojim dolaze, u konačne skupine, i od zbrojeva tih skupina napravimo novi red, taj red konvergira i suma mu je jednaka sumi polaznog reda.*♣

Dakle, Teorem 4.12 tvrdi da ako u konvergentnom redu $\sum a_n$ članove grupiramo po redu kojim dolaze u konačne skupine

$$(a_1 + ... + a_p) + (a_{p+1} + ... + a_r) + (a_{r+1} + ... + a_s) + ...,$$

i ako od zbrojeva tih skupina

$$u_1 = a_1 + ... + a_p,$$

$$u_2 = a_{p+1} + ... + a_r,$$

$$u_3 = a_{r+1} + ... + a_s, ...$$

formiramo novi red $\sum u_n$, on konvergira. Također vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Napomena 4.14. *Primijetimo da iz Primjera 4.11 slijedi da je u Teoremu 4.12 konvergencija reda bitan uvjet da bismo mogli grupirati članove u konačne skupine.*

Napomena 4.15. *Zašto je suma reda $\sum u_n$ iz Teorema 4.12 jednaka sumi konvergentnog reda $\sum a_n$?*

Dokaz:

Očito je niz parcijalnih suma niza (u_n), tj. reda $\sum u_n$, podniz niza parcijalnih suma reda $\sum a_n$, dakle podniz konvergentnog niza. Sada tvrdnja lagano slijedi iz trećeg svojstva konvergentnih nizova iz točke 4.1.2.♣

Teorem 4.12 je poopćenje svojstva asocijativnosti zbrajanja na beskonačne konvergentne sume (tj. možemo po volji ubacivati i izbacivati zagrade). Međutim za komutativnost se to ne može napraviti (ne smijemo permutirati članove).

Primjer 4.12. *U Primjeru 4.9 smo spomenuli da red*

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...$$

konvergira i suma mu je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Zapišimo isti red na drugi način, s ispremiješanim članovima

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - ... =$$

$$(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + (\frac{1}{7} - ... =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ... =$$

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ...).$$

Dobili smo

$$\ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2,$$

što ne može biti.♠

Dakle, iz Primjera 4.12 zaključujemo da općenito ne smijemo permutirati članove reda (niti konvergentnog), jer se u tom slučaju suma može promijeniti. Postoje redovi kod kojih se to smije učiniti.

Teorem 4.13. *Ako red apsolutno konvergira onda, njegova suma ne ovisi o poretku članova.*♣

Ako su svi članovi konvergentnog reda pozitivni onda, očito red i apsolutno konvergira pa po Teoremu 4.13 zaključujemo da suma takvog reda ne ovisi o poretku članova.

4.2.4 Redovi s pozitivnim članovima

Za red $\sum a_n$ kažemo da je red s pozitivnim članovima ako je $a_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.
Jasno je da je niz parcijalnih suma reda s pozitivnim članovima monotono rastući, dakle red s pozitivnim članovima ne može divergirati u širem smislu (suma je ili konačna ili $+\infty$).
Ako je S suma reda s pozitivnim članovima, pri čemu dopuštamo slučaj $S = +\infty$ (tj. ako red divergira), onda je jasno da je $S_n \leq S$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 4.14. *Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima i neka je (c_n) omeđen niz pozitivnih brojeva. Ako red $\sum a_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum c_n a_n$.*

Dokaz:

Kako je (c_n) omeđen niz, to postoji $M > 0$ takav da je $M > c_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka je A suma reda $\sum a_n$. Tada znamo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ n-ta parcijalna suma od $\sum a_n$ manja ili jednaka od sume A reda $\sum a_n$.
Neka je $S'_n = \sum_{i=1}^{n} c_n a_n$ n-ta parcijalna suma reda $\sum c_n a_n$. Očito je niz (S'_n) pozitivan i rastući niz, dakle monoton. Nadalje, vrijedi

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} c_n a_n \leq \sum_{i=1}^{n} M a_n = M \sum_{i=1}^{n} a_n \leq MA.$$

Monoton niz parcijalnih suma (S'_n) reda $\sum c_n a_n$ je ograničen, pa iz Teorema 4.6 slijedi da je red $\sum c_n a_n$ konvergentan.♣

Neka su dani redovi $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Za red

$$\sum c_n = a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)+...$$

kažemo da je **produkt** redova $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

Teorem 4.15. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergentni redovi s pozitivnim članovima čije su sume jednake A i B, redom. Tada je konvergentan i njihov produkt, tj. red*

$$\sum c_n = a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+(a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2+a_4b_1)+...$$

konvergira i njegova suma je jednaka AB.♣

4.3 Kriteriji konvergencije

4.3.1 Kriterij uspoređivanja

Teorem 4.16. *Neka je $\sum a_n$ red u $\mathbb{R}$ i neka je $\sum b_n$ red s pozitivnim članovima, ($b_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$), takav da*

1. *$\sum b_n$ majorira $\sum a_n$, tj. $|a_n| \leq b_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$,*

2. $\sum b_n$ *konvergira.*

Tada red $\sum a_n$ *apsolutno konvergira i vrijedi*

$$\boxed{\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.}\clubsuit$$

Napomena 4.16. *Neka su* $\sum a_n$ *i* $\sum b_n$ *redovi s pozitivnim članovima takvi da je* $a_n \leq b_n$*, za svaki* $n \in \mathbf{N}$*. Onda*

1. *ako red* $\sum b_n$ *konvergira onda, konvergira i red* $\sum a_n$ *i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

2. *ako red* $\sum a_n$ *divergira onda, divergira i red* $\sum b_n$*.*

Dokaz:

1. Slijedi izravno iz Teorema 4.16.

2. Red $\sum a_n$ *divergira ako i samo ako divergira niz parcijalnih suma* (A_n) *reda* $\sum a_n$*. Kako je po pretpostavci* $0 \leq a_n \leq b_n$*, onda je očito* $B_n \geq A_n$*, dakle i niz parcijalnih suma reda* $\sum b_n$ *divergira, pa i on sam.*$\clubsuit$

Neka je (a_n) proizvoljan niz. Red oblika

$$\sum a_n x^n,$$

gdje je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan, zovemo **red potencija**.
Očito je za $x = 0$ svaki red potencija konvergentan. Za $x \neq 0$ imamo sljedeći rezultat:

Teorem 4.17. *Ako red potencija* $\sum a_n x_0^n$ *konvergira za neki* $x_0 \in \mathbb{R}$*, onda konvergira apsolutno i red* $\sum a_n x^n$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x| < |x_0|$*. Ako red* $\sum a_n x_0^n$ *divergira, divergira i red* $\sum a_n x^n$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x| > |x_0|$*.*$\clubsuit$

Primjer 4.13.

1. *Neka je* $a_n = 1$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada iz Teorema 4.9 znamo da red potencija* $\sum x^{n-1}$ *konvergira za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $|x| < 1$*, i suma mu je* $\frac{1}{1-x}$*.*

2. *Neka je* $a_n = \frac{1}{n!}$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada red potencija* $\sum \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$ *konvergira za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *i suma mu je* e^x*.*$\spadesuit$

4.3.2 D'Alembertov kriterij

Teorem 4.18. *Neka je* $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda,$$

za svaki $n \geq n_0$, *onda red* $\sum a_n$ *konvergira.*

Dokaz:
Neka su $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takvi da vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda,$$

za svaki $n \geq n_0$. *Dakle imamo*

$$a_{n_0+1} \leq \lambda a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq \lambda a_{n_0+1} \leq \lambda^2 a_{n_0},$$

$$a_{n_0+3} \leq \lambda a_{n_0+2} \leq \lambda^3 a_{n_0}, \ \ldots, a_{n_0+m} \leq \lambda^m a_{n_0},$$

za svaki $m \in \mathbf{N}$. *Dakle, red*

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots$$

je majoriran geometrijskim redom $\sum a_{n_0}\lambda^{n-1}$ *s kvocijentom* $\lambda < 1$ *koji po Teoremu 4.9 konvergira. Sada iz Napomene 4.16 imamo da i red*

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots$$

konvergira. Kako se dodavanjem konačno mnogo članova konvergentnom redu konvergencija neće promijeniti, imamo da red $\sum a_n$ *konvergira.*♣

Napomena 4.17. *U primjenama se češće koristi slabiji oblik Teorema 4.18 u kojem se zahtijeva da niz kvocijenata susjednih članova reda konvergira (ima limes):*
Neka je $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes*

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,}$$

onda red $\sum a_n$ *konvergira za* $l < 1$, *divergira za* $l > 1$, *a ne možemo ništa zaključiti za* $l = 1$.

Primjer 4.14. 1. *Neka je dan red* $\sum \frac{1}{n}$. *Tada iz Primjera 4.8 znamo da on divergira, ali vrijedi*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

2. *Neka je dan red* $\sum \frac{1}{n^2}$. *Tada iz Primjera 4.8 znamo da on konvergira, ali vrijedi*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.\spadesuit$$

Iz ovog primjera vidimo zašto smo u Napomeni 4.17 rekli da ne možemo odlučiti o konvergenciji reda za $l = 1$.

4.3.3 Cauchyev kriterij

Teorem 4.19. *Neka je* $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji* $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda,$$

za svaki $n \geq n_0$, *onda red* $\sum a_n$ *konvergira.*$\clubsuit$

Napomena 4.18. *U primjenama se češće koristi slabiji oblik Teorema 4.19 u kojem se zahtijeva da niz* $\sqrt[n]{a_n}$ *konvergira (ima limes):*
Neka je $\sum a_n$ *red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes*

$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,}$$

onda red $\sum a_n$ *konvergira za* $l < 1$, *divergira za* $l > 1$, *a ne možemo ništa zaključiti za* $l = 1$.

Primjer 4.15. *Analogno kao i u Primjeru 4.14 za red* $\sum \frac{1}{n}$ *odnosno red* $\sum \frac{1}{n^2}$ *znamo da divergira odnosno konvergira, a iz točke 4.1.4 znamo da je*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Dakle slučaj $l = 1$ *nam ne govori ništa o konvergenciji reda.*$\spadesuit$

Cauchyev kriterij je jači, tj. postoje situacije u kojima on može, a D'Alembertov kriterij ne može odlučiti. Primjer je red $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$. Izravnim se računom lako provjeri da niz kvocijenata uzastopnih članova reda nema limes, dok niz $\sqrt[n]{a_n}$ teži prema $\frac{1}{2}$.

Nešto slično Cauchyevom kriteriju pojavljuje se kod određivanja radijusa konvergencije redova potencija (područja na kojem red potencija konvergira).

Teorem 4.20. *Neka je* $\sum a_n x^n$ *red potencija,* (a_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *i* $x \in \mathbb{R}$ *proizvoljan. Ako postoji* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *i* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$*, onda za*

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

vrijedi: red potencija $\sum a_n x^n$ *konvergira apsolutno za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *za koji je* $|x| < \rho$*, a divergira za sve* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x| > \rho$.♣

Broj (ako postoji)

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

iz Teorema 4.20 zovemo **radijus konvergencije** reda potencija $\sum a_n x^n$.

Primjer 4.16. *1. Neka je dan red potencija* $\sum \frac{1}{n} x^n$*. Tada je*

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

dakle je $\rho = 1$*. Po Teoremu 4.20 red potencija* $\sum \frac{1}{n} x^n$ *konvergira za* $|x| < 1$*, a divergira za* $|x| > 1$*.*

Pogledajmo sada ako je $|x| = 1$*. Ako je* $x = -1$*, onda iz Primjera 4.9 znamo da red* $\sum \frac{1}{n}(-1)^n$ *konvergira i suma mu je* $\ln 2$*, dok za* $x = 1$ *red* $\sum \frac{1}{n}$ *divergira.*

2. Neka je dan red potencija $\sum \frac{1}{n^2} x^n$*. Tada je*

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

dakle je $\rho = 1$*. Po Teoremu 4.20 red potencija* $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ *konvergira za* $|x| < 1$*, a divergira za* $|x| > 1$*.*

Pogledajmo sada ako je $|x| = 1$*. Ako je* $x = 1$ *onda, iz Primjera 4.8 znamo da red* $\sum \frac{1}{n^2}$ *konvergira, dakle i apsolutno konvergira red* $\sum \frac{1}{n^2}(-1)^n$*. Iz Teorema 4.8 imamo da konvergira i red* $\sum \frac{1}{n^2}(-1)^n$*. Dakle red potencija* $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ *konvergira za* $|x| \leq 1$*.*♠

Teoremu 4.20 smo vidjeli da red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira za $|x| < \rho$, a divergira za $|x| > \rho$ (ako $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ postoji). Teorem 4.20 ništa ne govori za $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x| = \rho$, ali smo u Primjeru 4.16 vidjeli da red potencija $\sum a_n x^n$ može konvergirati i divergirati za $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x| = \rho$. Dakle za $|x| = \rho$ moramo posebno provjeriti konvergenciju reda potencija.

4.3.4 Leibnizov kriterij

Ako red ima konačan broj članova s negativnim predznakom, to nije problem (jer konvergencija reda ovisi o ostatku reda); problem se pojavljuje ako ih je beskonačno mnogo (npr. $\sum \sin n$, $\sum \mathrm{tg}\ n$, $\sum(-1)^n$, itd.). Specijalni slučaj je kad članovi reda alterniraju po predznaku. Tada imamo sljedeći kriterij (Leibnizov):

Teorem 4.21. *Ako red $\sum a_n$ alternira, ako je $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ i ako je*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0,$$

onda taj red konvergira.

Dokaz:

Pogledajmo niz parcijalnih suma S_n reda $\sum a_n$. Ako red počinje pozitivnim članom, tj. ako je $a_1 \geq 0$, onda je podniz od S_n indeksiran parnim indeksima rastući, onaj indeksiran neparnim indeksima je padajući. Ako red počinje negativnim članom, onda imamo obratnu situaciju.
Zaista,

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2}.$$

Kako je po pretpostavci $a_{2n+1} \geq 0$, $a_{2n+2} \leq 0$ i $|a_{2n+1}| \geq |a_{2n+2}|$, imamo

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} \geq 0,$$

dakle je

$$S_{2n+2} \geq S_{2n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Analogno se dokaže da je

$$S_{2n-1} \geq S_{2n+1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Nadalje, vrijedi

$$S_{2n} = a_1 - (-a_2 - a_3) - \ldots - (-a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} =$$

$$a_1 - [(-a_2 - a_3) + ... + (-a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}].$$

Kako smo pretpostavili da je a_{2n-1} *pozitivan, a* a_{2n} *negativan za svaki* $n \in \mathbb{N}$*, te kako vrijedi* $|a_n| \geq |a_{n+1}|$*, imamo da je* S_{2n} *razlika od* a_1 *i strogo pozitivnog broja, tj.* S_{2n} *je omeđen s* a_1*. Analogno se dokaže da je* S_{2n-1} *također omeđen sa* a_1*. Kako je niz* S_{2n} *odnosno* S_{2n-1} *rastući odnosno padajući, iz Teorema 4.6 slijedi da su nizovi konvergentni. Nadalje, vrijedi*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |S_{2n+1} - S_{2n}| = \lim_{n \longrightarrow \infty} |a_{2n+1}| = 0,$$

dakle nizovi S_{2n} *i* S_{2n-1} *konvergiraju istom limesu* S*, koji je suma reda jer je*

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Kako je niz (a_n) *alternirajući i vrijedi* $|a_n| \geq |a_{n+1}|$*, imamo da je pogreška aproksimacije sume* S *reda* $\sum a_n$ *sa* S_n *manja od apsolutne vrijednosti prvog ispuštenog člana, tj.*

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |a_{n+1}|,$$

i istog je predznaka kao taj član.♣

Primjer 4.17. *Iz Teorema 4.21 izravno slijedi da red*

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$$

s kojim smo se sreli u prijašnjim primjerima konvergira.♠

Poglavlje 5

Funkcije

5.1 Osnovni pojmovi

5.1.1 Motivacija i definicija

Mnoge su veličine u prirodi i u životu ovisne o drugim veličinama: opseg kružnice o njenom polumjeru; cijena dijamanta o njegovoj težini, čistoći, manama, brušenju; uspjeh na ispitu o uloženom trudu, kvaliteti nastavnih materijala, sklonosti prema predmetu.
Matematički modeli takvih situacija temelje se na pojmu funkcije. Kad se veličine koje promatramo daju dobro kvantificirati, njihov odnos promatramo pomoću realnih funkcija realne varijable.

Definicija 5.1. *Neka su dani neprazni skupovi X i Y.* ***Funkcija*** *ili* ***preslikavanje*** *sa X u Y je pravilo f koje svakom elementu x iz X pridružuje jedan jedini element iz Y. Element y iz Y pridružen elementu x iz X se zove* ***vrijednost*** *funkcije f na elementu x; elementi iz X su* ***argumenti*** *funkcije f. To pridruživanje se označuje*

$$y = f(x),$$

ili

$$f : x \longmapsto y,$$

ili

$$x \longmapsto f(x).$$

Skup X se zove **područje definicije** ili **domena** funkcije f. Skup Y se zove **kodomena** funkcije f. Skup svih mogućih vrijednosti funkcije f (u oznaci $\mathcal{R}(f)$) zove se **područje vrijednosti** ili **slika** funkcije f.
Prirodna domena funkcije f (u oznaci $\mathcal{D}(f)$) je skup svih mogućih argumenata za koje se može odrediti vrijednost funkcije. Problem određivanja prirodne domene pojavljuje se kad domena nije specificirana.

Napomena 5.1. *Za proizvoljnu funkciju $f : X \longrightarrow Y$ očito vrijedi $\mathcal{R}(f) \subseteq Y$.*

Dakle za funkciju f koja elementima iz X pridružuje elemente iz Y imamo sljedeće oznake

$$f : X \longrightarrow Y$$

ili, ako želimo biti precizniji,

$$f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathcal{R}(f).$$

Neka je funkcija $f : X \longrightarrow Y$, te neka je $A \subseteq X$. Tada funkciju $g : A \longrightarrow Y$ definiranu sa $g(x) = f(x)$, za svaki $x \in A$, zovemo **restrikcija** funkcije f na skup A i označavamo sa $g = f|_A$.
Neka je funkcija $f : X \longrightarrow Y$, te neka je $A \supseteq X$. Tada funkciju $g : A \longrightarrow Y$ za koju vrijedi $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$, zovemo **proširenjem** funkcije f na skup A. Proširenje ne mora biti jedinstveno.

Ako su veličine, čiju ovisnost (odnos) promatramo, takve da se svaka može izraziti realnim brojem, možemo to modelirati funkcijom čiji su argumenti i čije su vrijednosti realni brojevi. Govorimo o r**ealnim funkcijama realne varijable**. Pišemo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

pri čemu i domena i slika mogu biti podskupovi skupa $\mathbb{R}$. Veličinu x je uobičajeno nazivati **argumentom** ili **nezavisnom varijablom**, a veličinu y **zavisnom varijablom**; veličinu x možemo mijenjati po volji, a vrijednost veličine y ovisi, na način propisan pravilom f, o vrijednosti veličine x.

5.1.2 Načini zadavanja funkcije

Imamo tri osnovna načina zadavanja funkcije tj. opisivanja funkcijske ovisnosti: tablično, grafički i formulom (analitičkim izrazom). Dakako, svaki od tih načina ima svoje prednosti i mane.

- Prednost tabličnog zadavanja ili opisivanja funkcije je da je ponekad to jedini način zadavanja, a mana je da ne znamo vrijednosti funkcije izvan područja podataka tablice i između vrijednosti u kojima je poznata funkcija.

- Ako imamo grafički opisanu funkciju, onda su prednosti zornost, kompaktnost, preglednost, dok su mane netočnost očitavanja i nemogućnost korištenja vrijednosti izvan crtanog područja.

- Za funkciju zadanu formulom prednost je da znamo sve o funkciji, dok je mana netrivijalnost dolaženja do tih informacija.

Dakako, prelaženje iz jednog oblika u drugi je moguće, ali u nekim slučajevima to je vrlo teško.

- Prelazak iz tabličnog oblika u grafički je lagan, naravno ako imamo dovoljan broj tabličnih vrijednosti.

- Problem da se na osnovi tabličnih vrijednosti funkcije dobije formula funkcije je vrlo netrivijalan. Koriste se metode interpolacije, aproksimacije, itd. Ključno je imati dobru ideju o mogućoj klasi funkcija kojoj naša funkcija pripada.

- Prijelaz iz grafičkog oblika u tablični je lagan, do na točnost očitavanja.

- Problem pronalaženja formule funkcije na osnovi poznavanja njenog grafa je sličan problemu pronalaženja formule funkcije pri poznavanju tabličnih vrijednosti, tj. vrlo je netrivijalan problem. Prvo treba iz oblika grafa pogoditi u koju skupinu spada ta funkcija, a nakon toga odrediti njene numeričke parametre.

- Naravno, ako znamo formulu funkcije, onda je načelno trivijalno dobivanje tablice vrijednosti iste funkcije.

- Na kraju, problem određivanja grafa funkcije na osnovi njene formule je netrivijalan postupak, no izvediv. U nastavku ćemo se baviti ovim problemom.

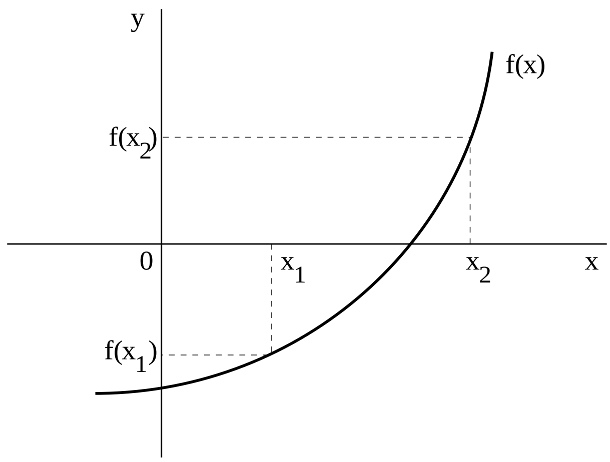
5.1.3 Graf funkcije

Funkcije se zorno prikazuju grafovima. Graf funkcije f je krivulja u ravnini koja sadrži točke čije su koordinate vezane funkcijom f, tj. graf funkcije f dobijemo kad sve parove oblika $(x, f(x))$, $x \in \mathcal{D}(f)$, prikažemo u koordinatnom sustavu.

Definicija 5.2. Graf *realne funkcije f realne varijable $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f)$ je skup*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Drugim riječima, graf funkcije f sadrži sve točke ravnine (x, y) za koje je $y = f(x)$, i grafički prikazuje ovisnost $y \in \mathcal{R}(f)$ o $x \in \mathcal{D}(f)$ zadanu funkcijom f.



Slika 5.1: Koordinate točaka na grafu funkcije.

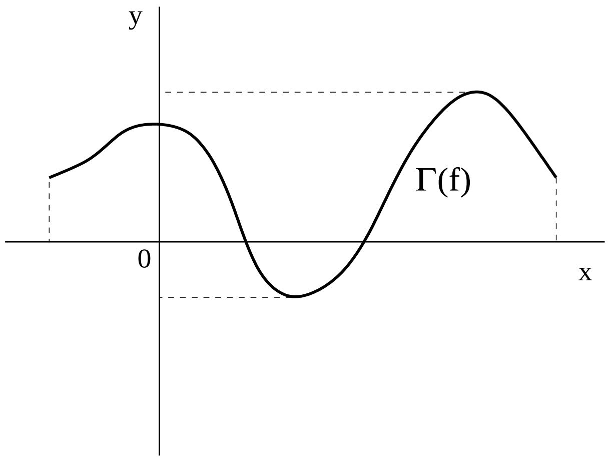
Napomena 5.2. *Uočimo da vrijedi:*

$$\mathcal{D}(f) = \Gamma_x(f)$$

(tj. projekcija grafa na x-os je prirodna domena od f) i

$$\mathcal{R}(f) = \Gamma_y(f)$$

(tj. projekcija grafa na y-os je slika od f).



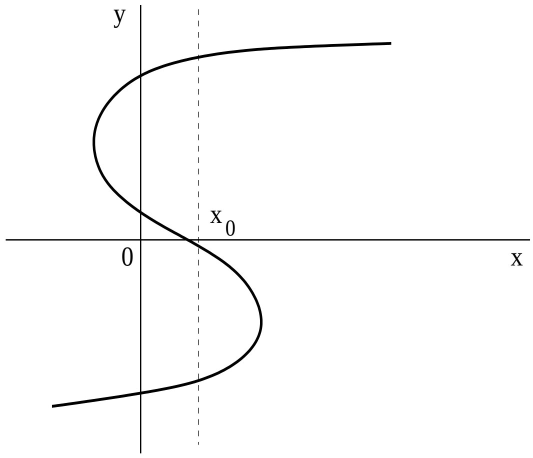
Slika 5.2: Graf funkcije f i njegove projekcije na koordinatne osi.

Napomena 5.3. *Uočimo da nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije. Npr. kružnica u ravnini nije graf niti jedne funkcije, jer postoji pravac paralelan s y osi koji siječe kružnicu u dvije točke, a to znači da se jednom realnom broju pridružuju dvije vrijednosti funkcije, što je suprotno s definicijom funkcije.*

Iz Napomene 5.3 zaključujemo: da bi krivulja u ravnini bila graf neke funkcije nužno i dovoljno je da svaki pravac paralelan s osi y siječe krivulju u **najviše jednoj** točki.

Nulište funkcije f je vrijednost argumenta za koju je vrijednost funkcije jednaka nuli, tj. $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ je nulište funkcije f ako je $f(x_0) = 0$.
Dakle, nulišta funkcije f se nalaze rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$ u skupu $\mathcal{D}(f)$. Gledamo li graf funkcije f, onda su nultočke od f presjecišta grafa funkcije i x osi, tj. točke oblika $(x_0, 0) \in \Gamma(f)$. Nulište je apscisa nultočke.

Napomena 5.4. *Presjek grafa funkcije f s osi y (ako postoji) je (najviše jedna) točka s apscisom 0 i ordinatom $f(0)$. To, dakako, ne mora biti nultočka funkcije (npr. $f(x) = \cos x$, za $x = 0$ je $f(0) = 1$), pa ovu točku ne smijemo pobrkati s nultočkama.*



Slika 5.3: Primjer krivulje koja nije graf funkcije.

Osim područja definicije, područja vrijednosti i nultočaka, kao što smo rekli, iz grafa funkcije još možemo vidjeti lokalne i globalne ekstreme (tj. točke u kojima funkcija postiže lokalni ili globalni maksimum ili minimum, ako postoje), intervale monotonosti (tj. područja gdje funkcija raste ili pada), točke prekida i asimptotsko ponašanje.

5.1.4 Pojmovi značajni za realne funkcije realne varijable

Pojam funkcije je vrlo općenit i obuhvaća sve moguće vrste ovisnosti jedne veličine o drugoj. Pokazuje se da najveći broj funkcija koje se pojavljuju u primjenama ima i neka dodatna svojstva. U ovoj točki bavit ćemo se pojmovima i svojstvima funkcija koja su karakteristična za funkcije koje opisuje ovisnost jedne kvantitativne veličine o drugoj (tj. realne funkcije realne varijable). Ti su pojmovi vezani uz usporedbe vrijednosti, ekstremne vrijednosti, bliskost argumenata i slično.

Neka je interval $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ sadržan u području definicije funkcije f, tj. $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada kažemo da funkcija f **raste** na intervalu I ako za svake dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ako za takve dvije vrijednosti $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$, kažemo da funkcija f **pada** na I. Ako su nejednakosti između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ stroge, kažemo da funkcija f **strogo raste**, odnosno **strogo pada** na I.

Ako funkcija f ne mijenja ponašanje na intervalu I (tj. f je (strogo) padajuća ili (strogo) rastuća na I), kažemo da je f (strogo) **monotona** na intervalu I. Funkcija raste (pada) u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ ako raste (pada) na nekom intervalu I koji sadrži točku x_0.

Primjer 5.1.

1. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(x) = x$ *je definirana na cijelom* $\mathbb{R}$, *tj.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, *i strogo je rastuća na svakom intervalu u* $\mathbb{R}$, *pa i na cijelom* $\mathbb{R}$. *Posebno, funkcija* $f(x) = x$ *je strogo rastuća u svakoj točki iz* $\mathbb{R}$, *i strogo je monotona na svakom intervalu u* $\mathbb{R}$.

2. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(x) = -x$ *je definirana na cijelom* $\mathbb{R}$, *tj.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, *i strogo je padajuća na svakom intervalu u* $\mathbb{R}$, *pa i na cijelom* $\mathbb{R}$. *Posebno, funkcija* $f(x) = -x$ *je strogo padajuća u svakoj točki iz* $\mathbb{R}$, *i strogo je monotona na svakom intervalu u* $\mathbb{R}$.

3. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(x) = 5$ *je definirana na cijelom* $\mathbb{R}$, *tj.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. *Uočimo da je funkcija* $f(x) = 5$ *i rastuća i padajuća (ali ne strogo) na svakom intervalu u* $\mathbb{R}$, *pa i na cijelom* $\mathbb{R}$. *Posebno, funkcija* $f(x) = 5$ *je monotona u svakoj točki iz* $\mathbb{R}$.

4. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(x) = x^2$ *je definirana na cijelom* $\mathbb{R}$, *tj.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, *i slika su joj svi nenegativni realni brojevi, tj.* $\mathcal{R}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. *Funkcija* $f(x) = x^2$ *je strogo rastuća na svakom intervalu u* $[0, +\infty\rangle$ *i strogo padajuća na svakom intervalu u* $\langle -\infty, 0]$. *Dakle, funkcija* $f(x) = x^2$ *je strogo rastuća u svakoj točki iz* $\langle 0, +\infty\rangle$, *strogo padajuća u svakoj točki iz* $\langle -\infty, 0\rangle$, *dok u* 0 *nije ni rastuća ni padajuća.*♠

Svaki interval oblika $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle$ gdje je točka $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, zovemo **okolina** točke x_0.
Ako za sve točke x iz neke okoline točke $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ vrijedi

$$f(x) \leq f(x_0),$$

kažemo da u točki x_0 funkcija f ima **lokalni maksimum**. Analogno, ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da za $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ vrijedi $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$ i ako je

$$f(x) \geq f(x_0),$$

za svaki $x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$, onda kažemo da funkcija f u točki x_0 ima **lokalni minimum**. Ako su nejednakosti stroge, govorimo o **strogom lokalnom maksimumu** odnosno **minimumu**. Lokalne maksimume i minimume jednim imenom zovemo **lokalni ekstremi**.
Ako vrijedi

$$f(x) \leq f(x_0)$$

za sve $x \in \mathcal{D}(f)$, onda kažemo da funkcija f ima u $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ **globalni maksimum**; ako je

$$f(x) \geq f(x_0)$$

za sve $x \in \mathcal{D}(f)$, onda kažemo da funkcija f ima u $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ **globalni minimum**. Analogno, ako su nejednakosti stroge, govorimo o **strogom globalnom maksimumu** odnosno **minimumu**. Globalne maksimume i minimume jednim imenom zovemo **globalni ekstremi**.

Primjer 5.2.

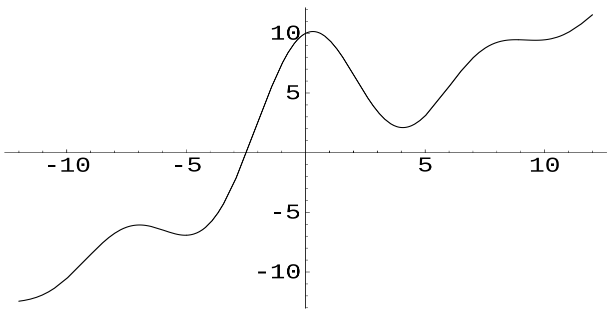
1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x^2$ je strogo rastuća na svakom intervalu u $[0, +\infty\rangle$ i strogo padajuća na svakom intervalu u $\langle -\infty, 0]$. Dakle, u točkama iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f nema lokalnih ekstrema. Nadalje, očito je da je 0 strogi lokalni minimum za svaku okolinu oko 0, dakle je i strogi globalni minimum.*

2. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = -x^2$ je strogo padajuća na svakom intervalu u $[0, +\infty\rangle$ a strogo rastuća na svakom intervalu u $\langle -\infty, 0]$. Dakle u točkama iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f nema lokalnih ekstrema. Nadalje, očito je da je 0 strogi lokalni maksimum za svaku okolinu oko 0, dakle je i strogi globalni maksimum.*

3. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = 5$ je i rastuća i padajuća na svakom intervalu u $\mathbb{R}$, dakle svaki $x \in \mathbb{R}$ je lokalni maksimum i minimum, pa i globalni maksimum i minimum.*

4. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x$ je strogo rastuća na svakom intervalu u $\mathbb{R}$, pa i na cijelom $\mathbb{R}$. Dakle f nema lokalnih pa ni globalnih ekstrema.*♠

Napomena 5.5. *Uočimo, ako je $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ lokalni ekstrem funkcije f, onda on ne mora biti i globalni, dok je svaki globalni ekstrem i lokalni.*



Slika 5.4: Primjer funkcije s lokalnim ekstremima.

Problem nalaženja ekstrema je vrlo bitan. Uglavnom zahtijeva primjenu diferencijalnog računa. Kod nalaženja globalnih ekstrema se pojavljuje problem ruba područja (jer ima funkcija kojima je prirodno područje vrijednosti segment ili poluotvoreni interval, tj. $\mathcal{D}(f) = [a, b]$, $\mathcal{D}(f) = [a, b\rangle$ ili $\mathcal{D}(f) = \langle a, b]$), gdje nam metode diferencijalnog računa ne pomažu (jer nisu primjenjive na rubovima segmenta).

Ako je područje definicije funkcije f simetrično s obzirom na ishodište, tj. $x \in \mathcal{D}(f)$ povlači $-x \in \mathcal{D}(f)$, onda ima smisla promatrati ponašanje vrijednosti funkcije kod promjene predznaka argumenta. Ako vrijedi

$$f(-x) = f(x),$$

za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, onda kažemo da je funkcija f **parna**.
Ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x),$$

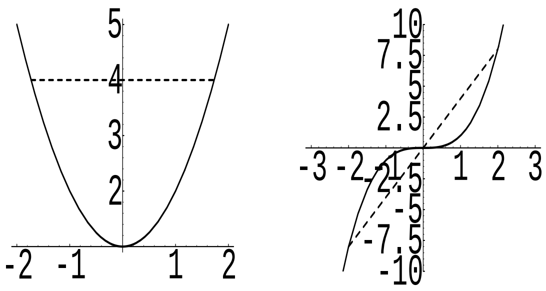
za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, onda kažemo da je funkcija f **neparna**.

Napomena 5.6. *Očito je graf parne funkcije krivulja zrcalno simetrična s obzirom na y os, dok je graf neparne funkcije krivulja centralno simetrična s obzirom na ishodište.*

Primjer 5.3.

1. *Funkcije $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \frac{1}{|x|}$, su parne funkcije.*

2. *Funkcije $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x|x|$ su neparne.*♠



Slika 5.5: Primjer parne (lijevo) i neparne (desno) funkcije.

Primjer 5.4. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da ima svojstvo da je i parna i neparna. Dakle imamo da vrijedi*

$$f(-x) = f(x) = -f(x),$$

tj.

$$f(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zaključujemo da je jedina funkcija s tim svojstvom-nul funkcija.♠

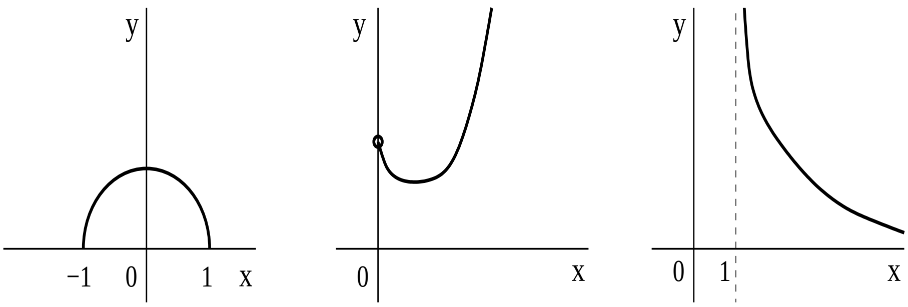
Ponašanje funkcije u blizini rubova prirodnog područja definicije zovemo njenim **asimptotskim ponašanjem**. Jasno je da rubovi prirodnog područja definicije mogu biti konačni i beskonačni (npr. za funkciju definiranu formulom $f(x) = \sqrt{x}$ je $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty\rangle$, tj. jedan rub je konačan a drugi beskonačan). Imamo sljedeće moguće slučajeve ponašanja funkcije u blizini rubova prirodnog područja definicije funkcije:

1. Rub prirodnog područja definicije funkcije je konačan:

   a) Funkcija je definirana u rubu prirodnog područja definicije. Npr. neka je funkcija $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Funkcija iz našeg primjera ima i u drugom rubu $x = 1$ regularnu točku. Tada je očito f definirana u konačnom rubu prirodnog područja definicije, tj. postoji i konačan je broj $f(-1)$. Takav je rub **regularna** točka.

b) Funkcija nije definirana u rubu prirodnog područja definicije ali ima svojstvo da kad se argumenti iz prirodnog područja definicije proizvoljno približavaju rubu vrijednosti funkcije ostaju konačne. (Npr. neka je funkcija $f : \langle 0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x^x$. Tada očito f nije definirana u konačnom rubu prirodnog područja definicije, ali ako se argumenti proizvoljno približavaju točki 0 vrijednost funkcije se približava (ali ne doseže) vrijednost 1.)

c) Funkcija nije definirana u rubu prirodnog područja definicije i ima svojstvo da kad se argumenti iz prirodnog područja definicije proizvoljno približavaju rubu vrijednost funkcije raste ili pada u $+\infty$ ili $-\infty$. Ako je $a \in \mathbb{R}$ taj rub, onda se graf funkcije proizvoljno blizu približava vertikalnom pravcu $x = a$, ali ga nikada neće sjeći ili dotaknuti (jer funkcija uopće nije definirana u tom rubu). (Npr. neka je funkcija $f : \langle 1, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Tada očito f nije definirana u konačnom rubu prirodnog područja definicije i ako se argumenti proizvoljno približavaju točki 1 vrijednost funkcije raste u $+\infty$. Graf funkcije f se po volji blizu približava pravcu $x = 1$.)



Slika 5.6: Ponašanje funkcije u konačnom rubu područja definicije.

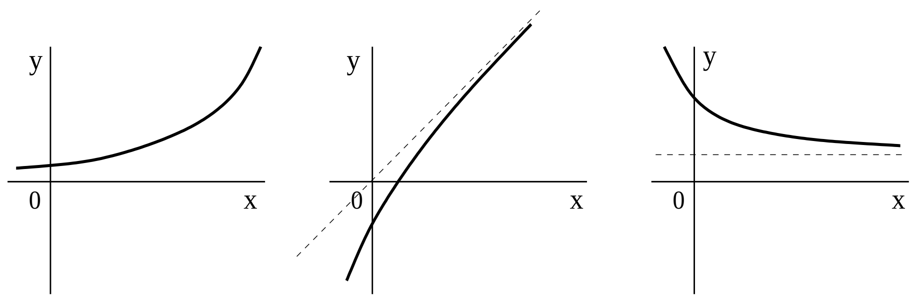
2. Rub prirodnog područja definicije funkcije je beskonačan;

a) Vrijednost funkcije raste ili pada u $+\infty$ ili $-\infty$ kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub, tj. $+\infty$ ili $-\infty$, ali taj rast ili pad je "brži" od rasta ili pada svakog pravca u ravnini. To znači da, ne postoji pravac kojem se graf funkcije po volji blizu približava kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub.

(Npr. neka je funkcija $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = 2^x$. Tada očito f strogo raste u $+\infty$, i to brže od svakog pravca.)

b) Vrijednost funkcije raste ili pada u $+\infty$ ili $-\infty$ kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub, tj. $+\infty$ ili $-\infty$, i taj rast ili pad je "jednak" rastu ili padu nekog kosog pravca u ravnini (tj. $y = ax+b$ i $a \neq 0$, jer kad bi a bio nula tada vrijednosti funkcije ne bi rasle ili padale u beskonačnost). Dakle, postoji pravac kojem se graf funkcije po volji blizu približava kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub. (Npr. neka je funkcija $f : \mathbb{R}\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x - e^{-x}$. Tada za velike vrijednosti od x izraz e^{-x} postaje vrlo mali, i cijeli izraz $x - e^{-x}$ je dobro aproksimiran izrazom x. Dakle, zaključujemo, kada argument funkcije f ide u $+\infty$, graf funkcije f se proizvoljno blizu približava pravcu $y = x$).

c) Vrijednost funkcije raste ili pada prema konačnom broju a, ali nikad ga ne dostiže, kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub. To znači da se graf funkcije po volji blizu približava pravcu $y = a$ kada argumenti prirodnog područja definicije idu u beskonačni rub. (Npr. neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = e^{-x}+1$. Očito, kada argument x ide u $+\infty$, tada se vrijednost izraza $e^{-x} + 1$ proizvoljno blizu približava broju jedan. Odnosno, kada argumenti funkcije f postaju dovoljno veliki, graf funkcije se proizvoljno blizu (odozgo) približava pravcu $y = 1$).



Slika 5.7: Ponašanje funkcije u beskonačnom rubu područja definicije.

Ako postoji pravac kojem se graf funkcije po volji blizu približava, kažemo da funkcija (odnosno njen graf) ima **asimptotu**. Postoje horizontalne, vertikalne i

kose asimptote.
Funkcija može imati vertikalnu asimptotu samo u konačnom rubu, a druge dvije samo u beskonačno dalekom rubu domene.

Napomena 5.7. *Ako funkcija ima asimptotu, onda ona može imati najviše jednu asimptotu u jednom rubu. Kad bi imala dvije asimptote u jednom rubu, zbog svojstva asimptote da se graf funkcije proizvoljno blizu približava svakoj od asimptota, slijedilo bi da se i asimptote (odnosno pravci) proizvoljno blizu približavaju jedna drugoj. Zbog linearnosti asimptota imamo da je to jedna te ista asimptota (tj. pravac).*

Definirajmo sada pojam neprekidnosti funkcije. Intuitivno, funkcija je neprekidna ako se njezin graf može nacrtati bez podizanja olovke s papira.

Definicija 5.3. *Realna funkcija realne varijable $f : I = \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, je* ***neprekidna*** *u točki $x_0 \in I$ ako*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \quad \textit{takav da} \quad (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Funkcija je neprekidna na intervalu I ako je neprekidna u svakoj točki intervala I.

Definicija 5.3 kaže da je funkcija $f : I = \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u $x_0 \in I$ ako za proizvoljnu okolinu oko vrijednosti $f(x_0)$ postoji okolina oko x_0 koja se cijela preslika u okolinu oko $f(x_0)$. Odnosno, ako $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ takav da je

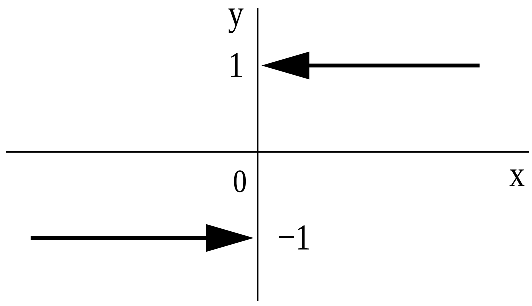
$$f(\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle) \subseteq \langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\rangle.$$

Funkcija je neprekidna ako male promjene u argumentu rezultiraju malim promjenama u vrijednosti funkcije.

Primjer 5.5. *Neka je dana funkcija $sign : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija f ima prekid u 0, dok je u svim drugim točkama neprekidna.



Slika 5.8: Funkcija $sign(x)$.

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *Tada za svaki* $\delta > 0$ *i sve* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x-0| = |x| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1 > \frac{1}{2}$. *Dakle nula je točka prekida od* f.
Ako je $x_0 > 0$, *onda za proizvoljni* $\varepsilon > 0$ *i za* $\delta = |x_0|$ *imamo da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x - x_0| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - f(x_0| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, *tj. funkcija je neprekidna u* x_0. *Analogno se dokaže za* $x_0 < 0$.♠

Definicija 5.4. *Realna funkcija realne varijable* $f : I = \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, *gdje je* $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, *je* ***ograničena*** *ili* ***omeđena*** *na* I *ako postoje realni brojevi* $m, M \in \mathbb{R}$ *takvi da je*

$$m \leq f(x) \leq M,$$

za svaki $x \in I$.

Napomena 5.8. *Ako u Definiciji 5.4 stavimo* $M' = \max\{|m|, |M|\}$ *dobijemo ekvivalentnu definiciju:*
Realna funkcija realne varijable $f : I = \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, *gdje je* $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, *je ograničena na* I *ako postoji realan broj* $M' \in \mathbb{R}$, $M' > 0$, *takav da je*

$$|f(x)| \leq M',$$

za svaki $x \in I$.

Napomena 5.9. *Iz Definicije 5.4, tj. iz uvjeta* $m \leq f(x) \leq M$, *za svaki* $x \in I$, *slijedi da je graf ograničene funkcije sadržan u horizontalnoj traci između pravaca* $y = m$ *i* $y = M$.

Napomena 5.10. *Ako je funkcija* $f : I = \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna u točki* $x_0 \in I$, *onda je funkcija* f *ograničena na nekoj okolini oko* x_0.

Napomena 5.11. *Ako funkcija ima prekid u točki, onda ona može ali i ne mora biti ograničena na nekoj okolini točke prekida. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ima prekid u nuli (jer kada se argument približava prema nuli vrijednost funkcije raste odnosno pada prema $+\infty$ odnosno $-\infty$, dok je sama vrijednost funkcije $f(0) = 0$). Očito je funkcija f neograničena na svakoj okolini oko nule.
S druge strane, funkcija $\mathrm{sign} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *iz Primjera 5.5 za koju znamo da ima prekid u nuli je očito ograničena na svakoj okolini oko nule.*

5.1.5 Osnovne računske operacije s funkcijama

Za dane dvije realne funkcije realne varijable postavlja se pitanje možemo li, i kako, vršiti računske operacije s njima?
Elementarne računske operacije s funkcijama definiraju se preko operacija nad njihovim vrijednostima, tj. realnim brojevima, tako da smo operacije s funkcijama definirali dosta prirodno (onako kako smo i očekivali).
Za zadane dvije funkcije $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiramo njihov

- zbroj ili razliku s
$$\boxed{(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),}$$
pri čemu je $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, tj.
$$\boxed{\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g);}$$

- produkt s
$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x),}$$
pri čemu je $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$, tj.
$$\boxed{\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g);}$$

- kvocijent s
$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},}$$

pri čemu je $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ ali takav da je $g(x) \neq 0$, tj.

$$\boxed{\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)) \setminus \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) = 0\}.}$$

Napomena 5.12. *Primijetimo da je za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcija $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $h(x) = \lambda f(x)$ u stvari produkt funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je g konstantna funkcija $g(x) = \lambda$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.*
Funkciju h označavamo sa λf i očito je $\mathcal{D}(\lambda f) = \mathcal{D}(f)$. Dakle imamo definirano množenje funkcije skalarom.

Napomena 5.13. *Uz već definirano zbrajanje funkcija i množenja funkcija skalarom (Napomena 5.12) očito je da je skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vektorski prostor (Definicija 1.5). Preciznije, skup svih realnih funkcija realne varijable je **beskonačno dimenzionalan** vektorski prostor. Beskonačno dimenzionalan je jer ne možemo naći niti jednu konačnu bazu za taj prostor. Npr. skup funkcija $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ je linearno nezavisan skup za svaki $n \in \mathbb{N}$ (linearna nezavisnost proizlazi iz Teorema 5.3), dakle beskonačni skup $\{x^n, n = 0, 1, ...\}$ je sadržan u nekoj bazi od vektorskog prostora realnih funkcija realne varijable.*

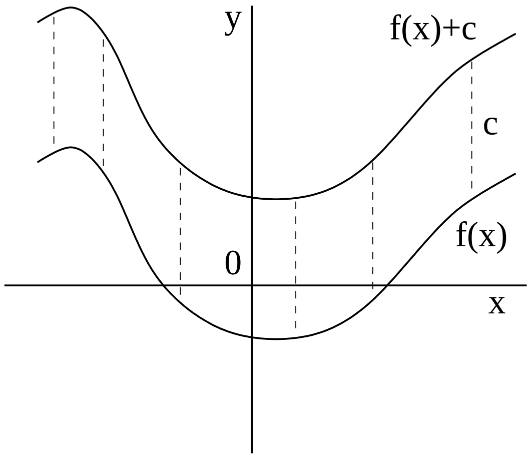
Pogledajmo sada neke specijalne slučajeve računskih operacija s funkcijama. Neka su $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pri čemu je f proizvoljna, a g dana formulom $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Uočimo da je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, pa je $\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)$ i $\mathcal{D}\left(\frac{g}{f}\right) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \neq 0\}$.

1. Pogledajmo funkciju $f + g$ u ovisnosti o $c \in \mathbb{R}$.

   a) Ako je $c = 0$, onda je $(f + g)(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Tj. graf funkcije $f + g$ je isti kao i graf funkcije f.

   b) Ako je $c > 0$, onda je $(f + g)(x) = f(x) + c$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf funkcije $f + g$ je ustvari graf funkcije f translatiran za c u smjeru y osi prema gore.

   c) Ako je $c < 0$, onda je $(f + g)(x) = f(x) - c$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf funkcije $f + g$ je ustvari graf funkcije f translatiran za $-c$ u smjeru y osi prema dolje.

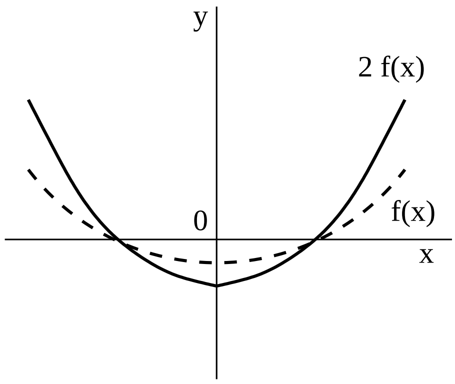


Slika 5.9: Graf funkcije $f(x) + c$ za $c > 0$.

2. Pogledajmo funkciju fg u ovisnosti o $c \in \mathbb{R}$.

   a) Ako je $c = 0$, onda je $(fg)(x) = 0$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf funkcije fg je pravac $y = 0$ ili x os.

   b) Ako je $0 < c < 1$, onda je $(fg)(x) = cf(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. vrijedi $|(fg)(x)| \leq |f(x)|$, pri čemu jednakost vrijedi samo u nultočkama od f. Dakle, funkcija fg ima iste nultočke kao i funkcija f, dok su druge vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti umanjene c puta. Graf funkcije fg je sličan grafu funkcije f, samo je usporen pad i rast funkcije f.

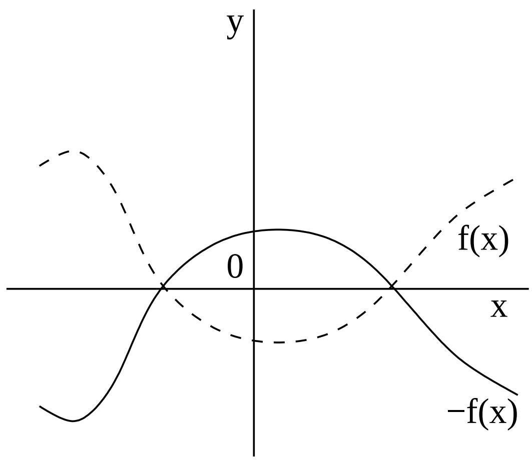


Slika 5.10: Graf funkcije $2f(x)$.

c) Ako je $c > 1$, onda je $(fg)(x) = cf(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. vrijedi $|(fg)(x)| \geq |f(x)|$, pri čemu jednakost vrijedi samo u nultočkama od f. Dakle, funkcija fg ima iste nultočke kao i funkcija f, dok su druge vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti uvećane c puta. Graf funkcije fg je sličan grafu funkcije f samo je ubrzan pad i rast funkcije f.

d) Ako je $c = 1$, onda je $(fg)(x) = f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf funkcije fg je isti kao i graf funkcije f.

e) Ako je $c = -1$, onda je $(fg)(x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$. Graf funkcije fg dobijemo tako da zrcalimo graf funkcije f s obzirom na x os.



Slika 5.11: Graf funkcije $-f(x)$.

f) Ako je $-1 < c < 0$, onda je $(fg)(x) = cf(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. vrijedi $|(fg)(x)| \leq |f(x)|$, pri čemu jednakost vrijedi samo u nultočkama od f. Dakle, funkcija fg ima iste nultočke kao i funkcija f, dok su druge vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti umanjene $|c|$ puta, ali su suprotnog predznaka. Graf funkcije fg dobijemo tako da zrcalimo graf funkcije $(f|g|)(x) = |c|f(x)$ s obzirom na x os.

g) Ako je $c < -1$, onda je $(fg)(x) = cf(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$, tj. vrijedi $|(fg)(x)| \geq |f(x)|$, pri čemu jednakost vrijedi samo u nultočkama od f. Dakle, funkcija fg ima iste nultočke kao i funkcija f, dok su druge vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti uvećane $|c|$ puta, ali su suprotnog predznaka. Graf funkcije fg dobijemo tako da zrcalimo graf funkcije $(f|g|)(x) = |c|f(x)$ s obzirom na x os.

3. Pogledajmo funkciju $\frac{g}{f}$ u ovisnosti o $c \in \mathbb{R}$. .

   a) Ako je $c = 0$, onda je $\frac{g}{f}(x) = 0$ za svaki $x \in \mathcal{D}\left(\frac{g}{f}\right)$, tj. funkcija $\frac{g}{f}$ je jednaka pravcu $y = 0$ na skupu $\mathcal{D}\left(\frac{g}{f}\right)$.

   b) Ako je $c = 1$, onda je $\frac{g}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ za svaki $x \in \mathcal{D}\left(\frac{g}{f}\right)$. Uočimo prvo da funkcija $\frac{g}{f}$ nema nultočke. Ako funkcija f ima nultočke, onda očito funkcija $\frac{g}{f}$ u njima nije definirana. Nultočke od f su rubovi prirodnog područja definicije od $\frac{g}{f}$ (točka 5.1.4), tj. funkcija $\frac{g}{f}$ u njima ima vertikalne asimptote. Dakle, kada se argument x približava nultočki od f funkcija $\frac{g}{f}$ će rasti odnosno padati u $+\infty$ odnosno $-\infty$. Na ostalim područjima funkcija $\frac{g}{f}$ će rasti s vrijednostima $\frac{1}{f(x)}$ tamo gdje funkcija f pada i obratno, gdje funkcija f raste, tamo funkcija $\frac{g}{f}$ pada.

   Ostale situacije u ovisnosti o $c \in \mathbb{R}$ svode se na slučajeve 2 b), c), f), g) i 3 b).

Napomena 5.14. *Očito je zbroj dviju rastućih funkcija rastuća funkcija (na području gdje je zbroj definiran). Zbroj dviju padajućih funkcija je padajuća funkcija.*
Za ostale operacije ova tvrdnja ne vrijedi, npr. za $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dane formulama

$$f(x) = -x^2$$

i

$$g(x) = x$$

znamo da su obje strogo rastuće na $\langle -\infty, 0\rangle$ ali funkcije

$$(fg)(x) = -x^3$$

i

$$\frac{f}{g}(x) = -x$$

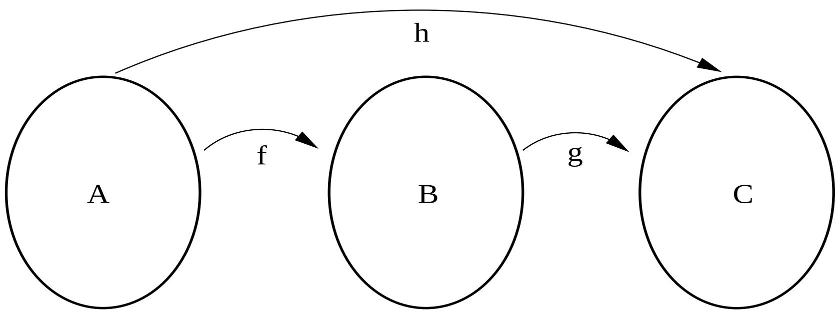
su strogo padajuće na $\langle -\infty, 0\rangle$.

Pogledajmo još kako se elementarne operacije slažu s parnošću odnosno neparnošću. Neka su $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcije. Tada izravno iz definicije parnosti i neparnosti imamo:

1. Ako su obje neparne, onda je funkcija $f \pm g$ neparna, te funkcije fg i $\frac{f}{g}$ obje parne.
2. Ako su obje parne, onda su funkcije $f \pm g$, fg i $\frac{f}{g}$ sve parne.
3. Ako je jedna funkcija, recimo g, neparna a f parna, onda funkcija $f \pm g$ nije ni parna ni neparna (osim ako jedna od f ili g nije nul funkcija, Primjer 5.4), dok su funkcije fg i $\frac{f}{g}$ obje neparne.

5.1.6 Kompozicija funkcija

Ponekad je o funkcijama korisno razmišljati kao o strojevima koji uzimaju određenu sirovinu (argument) na ulazu i daju gotovi proizvod (vrijednost) na izlazu. Kao što često izlaz jednog stroja služi kao ulaz drugome, tako često i vrijednost jedne funkcije služi kao argument druge. Tim se postupkom mogu stvarati nove funkcije. Matematički se to formalizira pojmom kompozicija funkcija.



Slika 5.12: Kompozicija funkcija.

Definicija 5.5. *Za dane funkcije $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ definiramo funkciju $h : A \longrightarrow C$ koju zovemo* ***kompozicija funkcija*** *f i g (u oznaci $g \circ f$) formulom*

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x)),}$$

za svaki $x \in \mathcal{D}(f)$ *takav da je* $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. *Dakle*

$$\boxed{\mathcal{D}(g \circ f) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in \mathcal{D}(g)\}.}$$

Primjer 5.6. *Odredimo kompozicije* $g \circ f$ *i* $f \circ g$ *funkcija* $f(x) = 3x$ *i* $g(x) = \frac{2x}{x+1}$.

$$(g \circ f)(x) = g(3x) = \frac{2 \cdot 3x}{3x+1} = \frac{6x}{3x+1}.$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2x}{x+1}\right) = 3 \cdot \frac{2x}{x+1} = \frac{6x}{x+1}. \spadesuit$$

Iz Primjera 5.6 vidimo da operacija kompozicije funkcija nije komutativna, tj. da je, općenito, $g \circ f \neq f \circ g$.

Napomena 5.15. *Ako vrijednosti funkcije* f *padaju u njenu domenu, onda funkciju* f *možemo komponirati samu sa sobom. U takvom slučaju pišemo* $f^2 = f \circ f$. *Ovdje treba biti oprezan i ne pobrkati ovo s operacijom kvadriranja vrijednosti funkcije* f.

Primjer 5.7. *Neka je dana funkcija* $f(x)$ *formulom* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Tada je očito* $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f)$, *tj. možemo gledati funkciju* $f \circ f$. *Tako imamo*

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,$$

što je očito različito od vrijednosti

$$(f(x))^2 = \frac{1}{x^2}. \spadesuit$$

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x$ ima s obzirom na operaciju kompozicije funkcija sličnu ulogu kao i broj 1 s obzirom na operaciju množenja realnih brojeva. Naime, za tu funkciju vrijedi $g \circ f = f \circ g = g$, za svaku funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkciju $f(x) = x$ zovemo **identiteta** i označavamo je s $i(x)$ ili $id(x)$. Dakle imamo

$$\boxed{f \circ id = id \circ f = f,}$$

za proizvoljnu funkciju f.

Napomena 5.16. *Primijetimo da kompozicija $f \circ id = id \circ f = f$ uvijek postoji za svaku funkciju f, jer je*

$$\mathcal{D}(id \circ f) = \mathcal{D}(f \circ id) = \mathcal{D}(f).$$

Pogledajmo još neka svojstva kompozicije funkcija.

1. Monotonost kompozicije u ovisnosti o monotonosti komponenata.

   a) Ako su funkcije f i g rastuće, onda za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(g \circ f)$ takve da vrijedi $x_1 \leq x_2$ imamo

   $$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \leq (\text{zbog rasta od } f \text{ i } g) \leq$$

   $$g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

   tj. njihova kompozicija je rastuća.

   b) Ako su funkcije f i g padajuće, onda za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(g \circ f)$ takve da vrijedi $x_1 \leq x_2$ imamo

   $$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \leq (\text{zbog pada od } f \text{ i } g) \leq$$

   $$g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

   tj. njihova kompozicija je rastuća.

   c) Ako je funkcija f rastuća a g padajuća, onda za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(g \circ f)$ takve da vrijedi $x_1 \leq x_2$ imamo

   $$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \geq (\text{zbog rasta od } f \text{ i pada od } g) \geq$$

   $$g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

   tj. njihova kompozicija je padajuća.

   d) Ako je funkcija f padajuća a g rastuća, onda za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(g \circ f)$ takve da vrijedi $x_1 \leq x_2$ imamo

   $$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) \geq (\text{zbog pada od } f \text{ i rasta od } g) \geq$$

   $$g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2),$$

   tj. njihova kompozicija je padajuća.

2. Parnost kompozicije u ovisnosti o parnosti komponenata.

   a) Ako su funkcije f i g parne, onda je i kompozicija $g \circ f$ parna jer vrijedi
   $$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

   b) Ako su funkcije f i g neparne, onda je kompozicija $g \circ f$ neparna jer vrijedi
   $$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x).$$

   c) Ako je funkcija f parna a g neparna, onda je kompozicija $g \circ f$ parna jer vrijedi
   $$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

   d) Ako je funkcija f neparna a g parna, onda je kompozicija $g \circ f$ parna jer vrijedi
   $$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

g \ f	N	P
N	N	P
P	P	P

g \ f	↗	↘
↗	↗	↘
↘	↘	↗

Slika 5.13: Kompozicija funkcija.

3. Važno je da se svojstvo neprekidnosti dobro nasljeđuje pri kompoziciji funkcija. Točnije, ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g definirana i neprekidna u $f(x_0)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u x_0, ali to ćemo detaljnije razraditi kasnije.

5.1.7 Inverzna funkcija

Često se javlja potreba da se iz poznate vrijednosti funkcije odredi vrijednost argumenta za koju se ta vrijednost postiže. To je za neke funkcije moguće, a za neke nije.

Primjer 5.8. *Troškovi rada stroja su* 200 kn/h*, i još* 500 kn *za dovoz i odvoz. Jasno je da će nas npr.* 10 *sati rada stroja koštati* 2500 kn*.*
Pogledajmo sada obratni problem. Koliko si dugo možemo priuštiti stroj ako na raspolaganju imamo 1300 kn*?*

Označimo s x *vrijeme rada stroja a s* y *iznos novaca. Tada je očito iznos novca u ovisnosti o vremenu rada stroja dan s* $y(x) = 200x + 500$*. Nas zanima* $x(y)$*. Dakle imamo,*

$$200x + 500 = 1300.$$

Rješavajući tu jednadžbu po x *dobijemo* $x = 4$ h*. Uspjeli smo riješiti problem, tj. za svako vrijeme rada (unajmljivanja) stroja postoji jedinstvena cijena, i obrnuto, za svaki iznos novaca postoji jedinstveno vrijeme rada (unajmljivanja) stroja.*♠

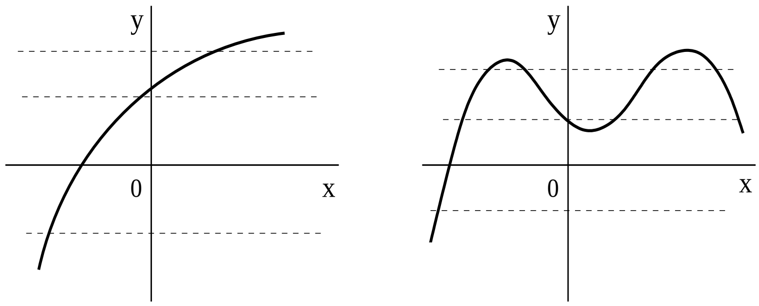
Primjer 5.9. *Neka je dana funkcija* b *koja svakom studentu pridružuje broj bodova na teorijskom dijelu kolokvija, tj.*

$$b : studenti \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., 30\}.$$

Sada se postavlja pitanje: koji je student imao nula bodova na teorijskom dijelu kolokvija?

Na žalost, može biti više studenata koji su imali nula bodova. Dakle, zaključujemo da ne postoji jedinstveni argument funkcije b *čija je vrijednost* 0*. Ne možemo riješiti problem.*♠

Definicija 5.6. *Funkcija* $f : A \longrightarrow B$ *je* **injekcija** *ako za svaki* $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ *uvjet* $x_1 \neq x_2$ *povlači* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Drugim riječima, injekcija različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite funkcijske vrijednosti. Kaže se i da* f *ne lijepi argumente.*



Slika 5.14: Graf injekcije (lijevo) i funkcije koja nije injekcija (desno).

Napomena 5.17. *Uočimo da je uvjet injektivnosti funkcije f iz Definicije 5.6 ekvivalentan sljedećem: za $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $f(x_1) = f(x_2)$ povlači $x_1 = x_2$.*

Definicija 5.7. *Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je* **surjekcija** *ako za svaki $y \in \mathcal{R}(f)$ postoji $x \in \mathcal{D}(f)$ takav da je $y = f(x)$.*

Napomena 5.18. *Primijetimo da je svaka funkcija $f : A \longrightarrow B$ uvijek surjekcija na svoju sliku, tj. $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f)$ je uvijek surjekcija.*

Definicija 5.8. *Funkcija f je* **bijekcija** *ako je i injekcija i surjekcija.*

Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost su važna svojstva realnih funkcija. S njima se najčešće susrećemo kod rješavanja jednadžbi. Surjektivnost osigurava postojanje rješenja, a injektivnost njegovu jedinstvenost.
Injektivnost se na grafu realne funkcije manifestira činjenicom da se presjek grafa i pravca $y = c$ sastoji od najviše jedne točke, za bilo koji $c \in \mathbb{R}$.

Primjer 5.10. *Funkcija $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, je injekcija za neparan n, ali ne i za paran n, jer pravac $y = 1$ siječe graf funkcije $f(x) = x^n$ za parno n u točkama $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.*♠

Primjer 5.11. *U Primjeru 5.8 izračunali smo da je $x(1300) = 4$. Ako sada umjesto $y = 1300$ uzmemo bilo koji $c \in \mathbb{R}$ i riješimo jednadžbu*

$$200x + 500 = c,$$

dobivamo formulu za x u terminima c,

$$x(c) = \frac{c - 500}{200}.$$

Komponiramo li (uvrstimo) formulu za $c(x)$ i $x(c)$, dobivamo

$$c(x(c)) = 200\frac{c-500}{200} + 500 = c,$$

$$x(c(x)) = \frac{(200x-500)+500}{200} = x.\spadesuit$$

Definicija 5.9. *Za zadanu funkciju $f : A \longrightarrow B$ kažemo da ima* ***inverznu*** *funkciju ako postoji funkcija $g : B \longrightarrow A$ takva da je*

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x.$$

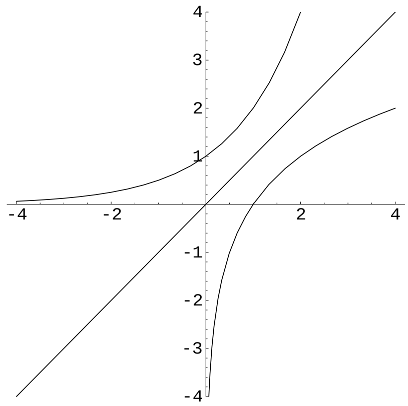
Funkciju g označavamo s $g = f^{-1}$ i pišemo $g(x) = f^{-1}(x)$.

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Dakle, funkcija $g : B \longrightarrow A$ je inverzna funkcija funkcije $f : A \longrightarrow B$ ako i samo ako vrijedi

$$\boxed{f \circ g = g \circ f = id.}$$



Slika 5.15: Graf funkcije i njoj inverzne funkcije.

Napomena 5.19. *Funkcija $f : A \longrightarrow B$ ima inverznu funkciju ako i samo ako je bijekcija. Tada je funkcija koja vrijednostima slike od f pridružuje argumente od f dobro definirana. Neka je $f : \mathcal{D}(f) \longrightarrow \mathcal{R}(f)$ i za $x \in \mathcal{D}(f)$*

neka je $y = f(x) \in \mathcal{R}(f)$. Tada je dobro definirana funkcija $g : \mathcal{R}(f) \longrightarrow \mathcal{D}(f)$ formulom $g(y) = g(f(x)) = x$. To je očito inverzna funkcija od f, jer je $f \circ g = g \circ f = id$.

Problem određivanja bijektivnosti možemo svesti na problem određivanja injektivnosti jer je svaka funkcija surjekcija na svoju sliku. Dakle, kad govorimo o inverzima funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uvijek mislimo na inverze njihovih restrikcija na intervale na kojima su injektivne.

Primjer 5.12. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{R}(f)$ dana formulom $f(x) = x^2$ nije injekcija (Primjer 5.10), no njezine restrikcije na $\langle -\infty, 0]$ i $[0, +\infty\rangle$ jesu. Dakle, $f|_{\langle -\infty,0]}$ i $f|_{[0,+\infty\rangle}$ su bijekcije s inverzima $g_1 : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \langle -\infty, 0]$, $g_1(x) = -\sqrt{x}$, i $g_2 : [0, +\infty\rangle \longrightarrow [0, +\infty\rangle$, $g_2(x) = \sqrt{x}$.*♠

Napomena 5.20. *Ako je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona, onda je ona očito i bijekcija na svoju sliku, pa ima i inverznu funkciju.*
Primijetimo da ako f nije strogo monotona nego samo monotona, onda ona ne mora imati inverznu funkciju jer ne mora biti injekcija.

Teorem 5.1. *Inverzna funkcija strogo rastuće funkcije je strogo rastuća, a strogo padajuće funkcije strogo padajuća.*

Dokaz:

Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo rastuća. Tada iz Napomene 5.20 znamo da f ima inverznu funkciju g. Dakle vrijedi $f \circ g = g \circ f = id$. Kad g ne bi bila strogo rastuća funkcija onda niti $f \circ g$ ne bi bila strogo rastuća. No $f \circ g = id$, a ona je strogo rastuća funkcija.
Analogno se dokaže tvrdnja ako je f strogo padajuća.♣

Teorem 5.2. *Inverzna funkcija neparne funkcije je neparna.*

Dokaz:

Neka je funkcija f neparna bijekcija i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija. Tada imamo

$$f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(f(x)).$$

Dakle, f^{-1} je neparna.♣

Iz Primjera 5.12 slijedi da tvrdnju Teorema 5.2 ne možemo izreći za parne funkcije.

Napomena 5.21. *Primijetimo da iz uvjeta $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ slijedi da su graf funkcije f i graf njoj inverzne f^{-1} zrcalno simetrični s obzirom na pravac $y = id(x) = x$.*

Pokušajmo sada, praktično izračunati, inverznu funkciju proizvoljne bijekcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Kako za inverznu funkciju vrijedi

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

zaključujemo da se određivanje funkcije f^{-1} svodi na rješavanje jednadžbe $f(f^{-1}(x)) = x$ po nepoznanici $f^{-1}(x)$.

Primjer 5.13. *Odredimo inverznu funkciju za funkciju $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathcal{R}(f)$ danu formulom $f(x) = x^2 - 4$.*

Rješavajući jednadžbu $f(f^{-1}(x)) = x$ po $f^{-1}(x)$ dobivamo

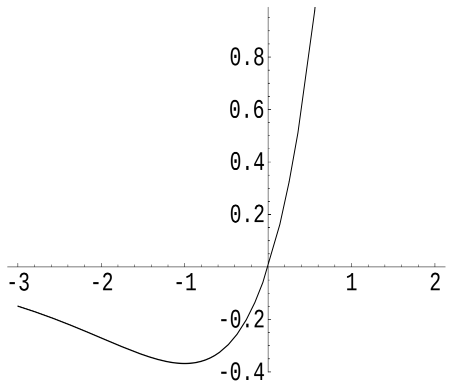
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}.$$

Predznak $+$ odabrali smo kako bi $f^{-1}(x)$ bila rastuća funkcija, jer je $f(x)$ rastuća.♠

Analogno kao u Primjeru 5.13 funkcija $f(x) = x^n$ za paran n je definirana na cijelom $\mathbb{R}$ i slika joj je $[0, +\infty\rangle$, ali nije bijekcija. Ako želimo pronaći inverznu funkciju od f moramo f restringirati na $\langle -\infty, 0]$ ili $[0, +\infty\rangle$ gdje je bijekcija. Tada je njena inverzna funkcija $g : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \langle -\infty, 0]$ odnosno

$g : [0, +\infty\rangle \longrightarrow [0, +\infty\rangle$ dana formulom $-\sqrt[n]{x}$ odnosno $\sqrt[n]{x}$.
Ako je n neparan, onda je f bijekcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ i inverzna funkcija joj je $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Čak i za funkcije koje imaju inverze, nije uvijek moguće te inverzne funkcije eksplicitno zapisati pomoću elementarnih funkcija. Primjer takve funkcije je $f(x) = xe^x$. Restrikcija te funkcije na interval $[-1, +\infty\rangle$ je bijekcija, tj. ima inverznu funkciju, no ona se ne može izraziti kao konačna kombinacija elementarnih funkcija.



Slika 5.16: Graf funkcije $f(x) = xe^x$.

5.2 Pregled elementarnih funkcija

Pojam funkcije je vrlo općenit i obuhvaća i tipove ovisnosti koji nemaju veliku praktičnu primjenu. Funkcije koje se u primjeni najčešće pojavljuju dobile su tijekom povijesti posebna imena i oznake. Najčešće i najjednostavnije zovemo elementarnim funkcijama. S mnogima od njih smo se već susreli tijekom dosadašnjeg obrazovanja pa u ovom odjeljku samo ukratko podsjećamo na njihova osnovna svojstva.
Osim elementarnih postoje i tzv. specijalne funkcije kojima se ovdje nećemo baviti.

5.2.1 Klasifikacija i podjela realnih funkcija

1. Elementarne

   a) Algebarske
      - Polinomi
      - Racionalne funkcije
      - Ostale algebarske funkcije

   b) Transcendentne
      - Eksponencijalne
      - Logaritamske
      - Trigonometrijske
      - Ciklometrijske
      - Hiperboličke
      - Area

2. Specijalne

   a) Gama

   b) Besselove

   c) erf

   d) Ortogonalni polinomi

   e) Hipergeometrijske

   f) Ostale

5.2.2 Polinomi

Za svaki realan broj x moguće je izračunati svaku njegovu potenciju s nenegativnim cjelobrojnim eksponentom $k \geq 0$,

$$x^k = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k} \ .$$

Po definiciji stavljamo $x^0 = 1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zbrajajući konačno mnogo takvih potencija istog broja $x \in \mathbb{R}$, množenih nekim koeficijentima, dolazimo do pojma

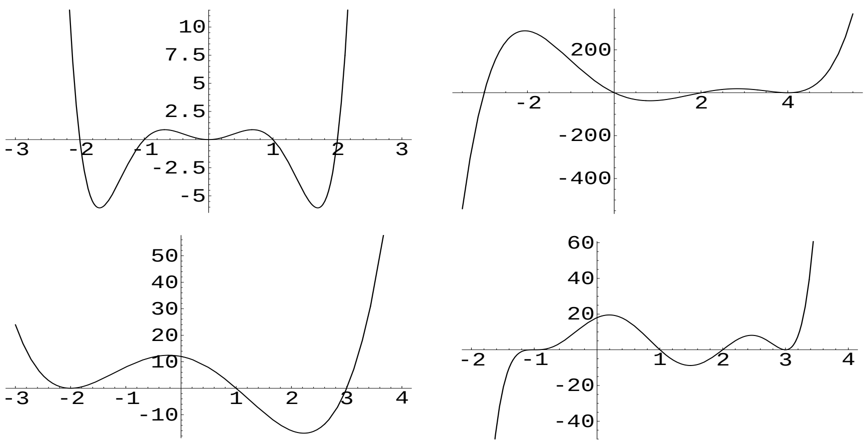
polinoma.
Polinomi su konceptualno najjednostavnije funkcije. Vrijednost polinoma $P(x)$ može se izračunati konačnim brojem operacija zbrajanja i množenja za svaki realan broj x. Dakle je svaki polinom definiran na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

Definicija 5.10. Polinom n-tog stupnja u varijabli *x je funkcija zadana formulom*

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.}$$

Ovdje podrazumijevamo da je $a_n \neq 0$.

Stupanj polinoma je najviša potencija nezavisne varijable x u formuli za $P_n(x)$. Realne konstante a_n, $\ldots$,a_1, a_0 su **koeficijenti** polinoma $P_n(x)$. Koeficijent a_n je **vodeći**, a a_0 je **slobodni koeficijent**.



Slika 5.17: Na slici su prikazani redom grafovi (funkcija) polinoma $P_6(x) = x^2(x^2-1)(x^2-4) = x^6-5x^4+4x^2$, $P_5(x) = x(x-2)(x-4)^2(x+3) = x^5-7x^4+2x^3+64x^2-96x$, $P_4 = (x-1)(x-3)(x+2)^2$ i $P_7 = (x+1)(x-1)^3(x-2)(x-3)^2$.

Definicija 5.11. *Dva polinoma P i Q su jednaka, ako su jednaki kao funkcije, tj. $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ su jednaki ako je $P(x) = Q(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Polinom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takav da vrijedi $P(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ zovemo **nulpolinom**.

Teorem 5.3 (Teorem o nulpolinomu)**.** *Polinom* $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *jest nulpolinom ako i samo ako je* $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.♣

Kao posljedicu Teorema 5.3 možemo sada dati drugu karakterizaciju jednakosti polinoma iz Definicije 5.11, tj.:

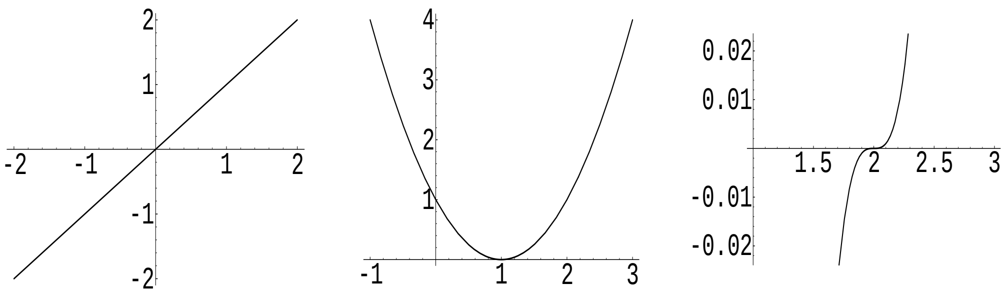
Teorem 5.4. *Polinomi* $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *i* $Q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *su jednaki ako i samo ako je* $m = n$ *i* $a_i = b_i$*, za sve* $i = 0, 1, ..., n$.♣

Broj $x_0 \in \mathbb{R}$ za koji je $P_n(x_0) = 0$ je **realna nultočka** polinoma P_n. Pravilnije bi bilo reći da je takav broj **nulište** polinoma, a točka u kojoj graf polinoma siječe os x da je nultočka. Apscisa nultočke je nulište, a ordinata je, naravno, 0. Kažemo da je x_0 nultočka k-tog reda polinoma P_n ako je

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),$$

pri čemu je $Q_{n-k}(x)$ polinom stupnja $n - k$ u varijabli x i $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$. Broj k zove se **red** ili **kratnost** nultočke x_0.

Primjer 5.14. *Polinom* $f(x) = x$ *ima u* $x = 0$ *nultočku prvog reda. Polinom* $f(x) = (x - 1)^2$ *ima u točki* $x = 1$ *nultočku drugog reda. Polinom* $f(x) = (x - 2)^3$ *ima u* $x = 2$ *nultočku trećeg reda.*♠



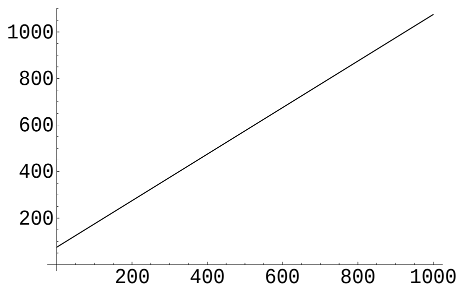
Slika 5.18: Primjeri nultočaka različite kratnosti iz Primjera 5.14.

Napomena 5.22. *U nultočkama neparnog reda polinom mijenja predznak, dok u nultočkama parnog reda nema promjene predznaka.*

Dokaz:

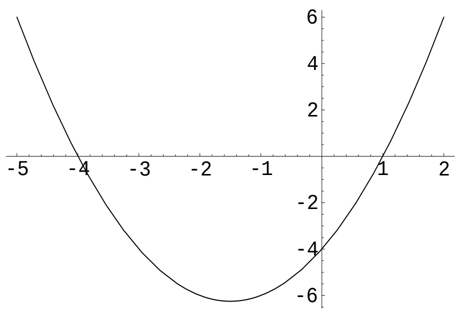
Svaki polinom je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ *(Teorem 6.8). Ako je* $x_0 \in \mathbb{R}$ *nultočka reda* k *od* $P_n(x)$*, onda znamo da* $P_n(x)$ *možemo zapisati kao* $P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x)$*, gdje je* k *red nultočke* x_0 *i* $Q_{n-k}(x)$ *polinom stupnja* $n - k$ *takav da je* $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$*, tj. po Teoremu 6.3* $Q_{n-k}(x) \neq 0$ *na nekoj okolini oko* x_0*.*
Ako je k *neparan, onda iz Teorema 6.3 imamo da na nekoj okolini oko* x_0 *za* $x < x_0$ *vrijedi* $(x - x_0)^k < 0$*, dok za* $x > x_0$ *vrijedi* $(x - x_0)^k > 0$*. Dakle* $P_n(x)$ *mijenja predznak u nultočki* x_0 *neparnog reda.*
Ako je k *paran, onda iz Teorema 6.3 imamo da na nekoj okolini oko* x_0 *za* $x < x_0$ *i za* $x > x_0$ *vrijedi* $(x - x_0)^k > 0$*. Dakle* $P_n(x)$ *ne mijenja predznak u nultočki* x_0 *parnog reda.*
♣

Polinom prvog stupnja $p(x) = ax + b$ zovemo **linearna funkcija**. Graf linearne funkcije je pravac s koeficijentom smjera a i odsječkom na osi y jednakim b. Za $a = 0$ imamo **konstantnu funkciju** $p(x) = b$. Linearna funkcija $p(x) = ax + b$ je rastuća ako je $a \geq 0$, a padajuća ako je $a \leq 0$. Ako su ove nejednakosti stroge, kažemo da je linearna funkcija strogo rastuća, odnosno strogo padajuća. Ponašanje linearne funkcije je isto na cijelom području definicije - ako raste u nekoj točki, raste na cijelom $\mathbb{R}$.
Očito za $a \neq 0$ linearna funkcija ima točno jednu nultočku $-\frac{b}{a}$.



Slika 5.19: Graf linearne funkcije $f(x) = x + 75$, za $x \geq 0$.

Funkcija $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, je polinom drugog stupnja ili **kvadratna funkcija**.



Slika 5.20: Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

Graf kvadratne funkcije je **parabola** koja ima os simetrije paralelnu s osi y. Otvor joj je okrenut prema gore ako je $a > 0$, a prema dolje ako je $a < 0$. Tjeme parabole ima koordinate $(-b/2a, -D/4a)$, gdje je D diskriminanta kvadratne funkcije $D = b^2 - 4ac$. Nultočke kvadratne funkcije dane su formulom

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},}$$

i realne su ako je $D \geq 0$.
Vidimo da je pronalaženje nultočaka polinoma prvog i drugog stupnja relativno lagano. Za polinome trećeg i četvrtog stupnja također postoje formule za računanje njihovih nultočaka, dok za polinome stupnja višeg od četiri takve formule ne postoje. Traženje nultočaka polinoma stupnja višeg od četiri (ako polinom nema neki posebni oblik, npr. $P_7(x) = (x-4)^7$) svodi se na numeričke metode.

Teorem 5.5 (Osnovni teorem algebre). *Svaki polinom n-tog stupnja ima točno n kompleksnih nultočaka.*♣

Iz Teorema 5.5 direktno slijedi da svaki polinom n-tog stupnja može imati najviše n realnih nultočaka.

Napomena 5.23. *Polinom neparnog stupnja mora imati barem jednu nultočku.*

Dokaz:

Za dovoljno velike pozitivne $x \in \mathbb{R}$ očito $P_n(x)$ poprima velike pozitivne vrijednosti (ako je $a_n > 0$, inače velike negativne vrijednosti), dok za velike negativne $x \in \mathbb{R}$ očito $P_n(x)$ poprima velike negativne vrijednosti (ako je $a_n > 0$, inače velike pozitivne). Zbog neprekidnosti polinoma na $\mathbb{R}$ (Teorem 6.8) graf polinoma mora negdje sjeći x os, tj. mora postojati broj $x_0 \in \mathbb{R}$ koji će biti nultočka od $P_n(x)$.♣

Primjer 5.15. *Kvadratna funkcija* $p(x) = x^2 + 1$ *nema realne nultočke jer je* $D < 0$.♠

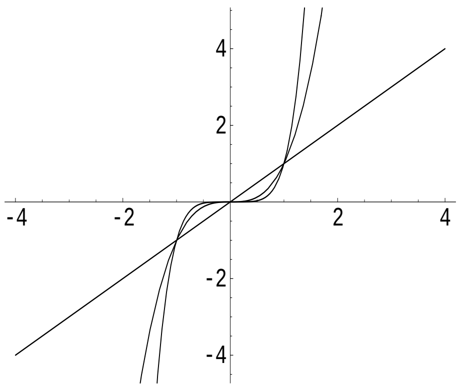
Dakle, iz Primjera 5.15 zaključujemo da polinom parnog stupnja može i ne mora imati realne nultočke.

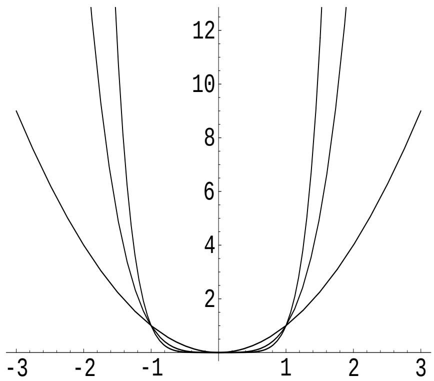
Za velike apsolutne vrijednosti argumenta polinom $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ se ponaša kao njegov vodeći član, tj. kao funkcija $a_n x^n$, jer za velike apsolutne vrijednosti argumenta x broj x^n je po apsolutnoj vrijednosti puno veći od broja x^i, $i = 1, ..., n-1$.

Primjer 5.16. *Pogledajmo funkciju (polinom)* $P_n(x) = x^n$.

1. *Ako je* $n = 1$, *onda je* $P_1(x) = x$ *linearna funkcija, tj. pravac* $y = x$. *Očito je* $\mathcal{D}(P_1) = \mathcal{R}(P_1) = \mathbb{R}$, $P_1(x)$ *strogo raste na* $\mathbb{R}$, *dakle je bijekcija, neparna je i ima nultočku u* $(0, 0)$.

2. *Ako je* n *paran broj, onda je očito funkcija* $P_n(x) = x^n$ *parna, tj. graf joj je zrcalno simetričan s obzirom na* y *os, dakle nije injekcija. Nadalje, vrijedi* $\mathcal{D}(P_n) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(P_n) = [0, +\infty\rangle$. *Strogo pada na* $\langle -\infty, 0]$, *strogo raste na* $[0, +\infty\rangle$ *i ima nultočku u* $(0, 0)$.





Slika 5.21: Grafovi funkcije $f(x) = x^n$ za neparne (lijevo) i parne (desno) n.

3. *Ako je* n *neparan broj, onda je očito funkcija* $P_n(x) = x^n$ *neparna, tj. graf joj je centralno simetričan s obzirom na ishodište. Nadalje vrijedi* $\mathcal{D}(P_n) = \mathcal{R}(P_n) = \mathbb{R}$, $P_n(x)$ *strogo raste na* $\mathbb{R}$, *dakle je bijekcija i ima nultočku u* $(0, 0)$.♠

Napomena 5.24. *Uočimo da za polinom prvog stupnja (linearnu funkciju) nema smisla govoriti o asimptotama.*
Vertikalnu ne može imati jer je svaki polinom neprekidna funkcija, dok za kosu ili horizontalnu nema smisla govoriti jer je polinom prvog stupnja ustvari pravac, tj. sam sebi je asimptota.

Napomena 5.25. *Polinom proizvoljnog stupnja $n > 1$ nema asimptotu.*

Dokaz:

Zbog neprekidnosti svakog polinoma na $\mathbb{R}$ (Teorem 6.8) zaključujemo da polinom stupnja $n > 1$ ne može imati vertikalnu asimptotu.
Nadalje, kako se polinom $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $n > 1$, za velike apsuolutne vrijednosti argumenta ponaša kao $a_n x^n$ i jer je $n > 1$ zaključujemo da polinom $P_n(x)$ ne može imati niti horizontalnu niti kosu asimptotu jer funkcija $a_n x^n$ puno brže raste ili pada od svakog pravca.♣

Osim promatranih polinoma jedne varijable možemo promatrati i polinome više varijabli. Naravno, u tom slučaju se situacija komplicira. Npr. ne možemo govoriti o monotonosti takvih funkcija jer ne znamo uspoređivati uređene p-torke (ako polinom ima p varijabli), problem poništavanja je vrlo kompliciran, problem asimptotike je složeniji, itd.

Definicija 5.12. Polinom $(n + m)$-tog stupnja u dvije varijable x i y *je funkcija zadana formulom*

$$\boxed{P_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j.}$$

Realne konstante a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, su **koeficijenti** *polinoma $P_{nm}(x)$.*

5.2.3 Racionalne funkcije

Očito je zbroj, razlika, umnožak i kompozicija polinoma ponovo polinom, ali kvocijent dvaju polinoma općenito nije polinom. Dakle, dijeljenjem polinoma izlazimo iz te klase funkcija, slično kao što dijeljenjem prirodnih (ili cijelih) brojeva dobivamo brojeve koji (općenito) nisu prirodni. Po analogiji s racionalnim brojevima, kvocijente dvaju polinoma nazivamo **racionalnim funkcijama**. Za razliku od polinoma, racionalne funkcije općenito nisu definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$ jer se njihove vrijednosti ne mogu izračunati u točkama u kojima im se nazivnik poništava. Naravno, postoje i racionalne funkcije kojima se nazivnik nigdje ne poništava; takve su definirane na cijelom $\mathbb{R}$. Polinomi su specijalni slučaj racionalnih funkcija kojima je polinom u nazivniku jednak 1.

Definicija 5.13. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* **racionalna** *ako je oblika*

$$\boxed{f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},}$$

pri čemu su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi u x.

Primjer 5.17. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

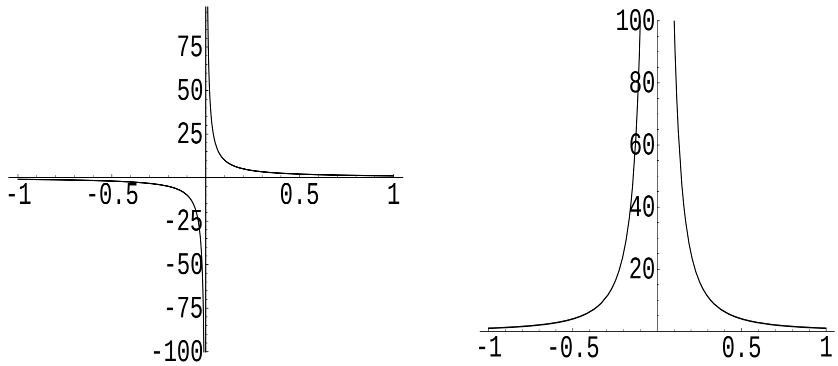
1. *Funkcija f dana formulom $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$ je racionalna funkcija.*
2. *Funkcija g dana formulom $g(x) = \frac{x \sin x}{x-1}$ nije racionalna funkcija.*
3. *Funkcija hR dana formulom $h(x) = \frac{x^7-5}{2-3x-x^3}$ je racionalna funkcija.*
4. *Funkcija i dana formulom $i(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$ nije racionalna funkcija.*
5. *Funkcija j dana formulom $j(x) = x - 13$ je polinom, ali i racionalna funkcija kod koje je nazivnik polinom $Q_1(x) = 1$.*
6. *Funkcija k dana formulom $k(x) = \frac{2}{2-3x}$ je racionalna funkcija.*♠

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je definirana u svim realnim brojevima osim u onima za koje se nazivnik poništava, tj. nultočkama nazivnika. Dakle,

$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) \neq 0\}.}$$

(Smatramo da je racionalna funkcija već skraćena, tj. da ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ koji je nultočka i brojnika i nazivnika.) Dakle, racionalna funkcija nije definirana u najviše konačno mnogo točaka iz $\mathbb{R}$.

Nultočke racionalne funkcije su nultočke njenog brojnika. Dakle, $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ ako i samo ako je $P_n(x) = 0$.
Nultočke nazivnika se zovu **polovi** racionalne funkcije. U polu racionalna funkcija nije definirana. Red pola je red odgovarajuće nultočke nazivnika.



Slika 5.22: Primjer pola neparnog reda funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ (lijevo) i pola parnog reda funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (desno).

Napomena 5.26. *Ako je pol parnog reda, onda vrijednosti racionalne funkcije s njegove lijeve i desne strane teže u istu beskonačnost, dok za polove neparnog reda, vrijednosti funkcije s lijeve i desne strane pola teže u suprotne beskonačnosti.*

Dokaz:

Red pola je red nultočke nazivnika. Sada tvrdnja izravno slijedi iz Napomene 5.22.♣

Za određenu kombinaciju stupnjeva brojnika i nazivnika, kao i u točkama u kojima se nazivnik poništava, racionalna funkcija pokazuje ponašanje koje nismo nalazili kod polinoma - graf racionalne funkcije može imati asimptote:

1. Racionalna funkcija u polu ima vertikalnu asimptotu (jer je pol rub prirodnog područja definicije racionalne funkcije). U okolini polova vrijednosti racionalne funkcije postaju po volji velike (idu u $+\infty$) ili po volji male (idu u $-\infty$) s jedne i s druge strane (Napomena 5.26).

2. Osim vertikalnih, racionalne funkcije mogu imati još i horizontalne i kose asimptote, i to na vanjskim rubovima prirodnog područja definicije, tj. kad

argument ide u $+\infty$ i $-\infty$. Dakle, imamo

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i}{\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i}=\frac{x^n\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{i-n}}{x^m\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^{i-m}}.$$

Sada kada argument ide u beskonačnost izraz $\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{i-n}$ odnosno $\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^{i-m}$ ide u a_n odnosno u b_m. Dakle za velike x racionalna funkcija f se ponaša kao

$$\boxed{\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}.}$$

a) Ako je $n<m$, onda izraz $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ postaje po volji blizu nuli kada argument ide u beskonačnost. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=0$.

b) Ako je $n=m$, onda racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=c$, gdje je c jednak kvocijentu vodećih koeficijenata polinoma u brojniku i nazivniku, $\frac{a_n}{b_n}$.

c) Ako je $n>m+1$, onda je $n-m>1$, tj. izraz $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ raste ili pada brže od pravca $\frac{a_n}{b_m}x$, odnosno racionalna funkcija (koja se za velike vrijednosti argumenta ponaša kao $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$) raste ili pada brže od pravca. Dakle, racionalna funkcija nema ni horizontalne ni kose asimptote.

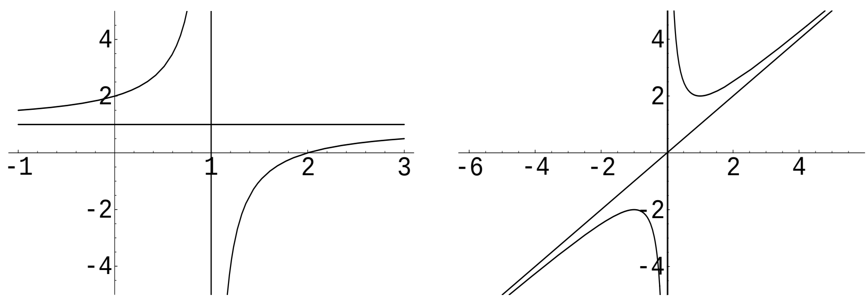
d) Ako je $n=m+1$, onda je $n-m=1$, odnosno racionalna funkcija se u beskonačnosti ponaša kao $\frac{a_n}{b_m}x$. Preciznije, imamo

$$f(x)=\frac{P_{m+1}(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m+1}a_ix^i}{\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i}=\frac{a_{m+1}x^{m+1}}{\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i}+\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i}{\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^i}=$$

$$\frac{x^m(a_{m+1}x)}{x^m\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^{i-m}}+\frac{x^m\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^{i-m}}{x^m\sum\limits_{i=0}^{m}b_ix^{i-m}}.$$

Sada kad pustimo da argument ide u beskonačnost drugi pribrojnik, tj. $\dfrac{x^m \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i x^{i-m}}{x^m \displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^{i-m}}$, se približava broju $\frac{a_m}{b_m}$, dok prvi pribrojnik, tj. $\dfrac{x^m(a_{m+1}x)}{x^m \displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^{i-m}}$, ide u $\frac{a_{m+1}}{b_m}x$, jer $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^{i-m}$ ide u b_m. Dakle, kada argument ide u beskonačnost, racionalna funkcija se približava pravcu (kosoj asimptoti)

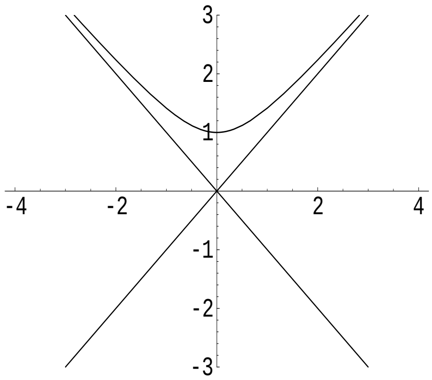
$$\boxed{\frac{a_{m+1}}{b_m}x + \frac{a_m}{b_m}.}$$



Slika 5.23: Primjer racionalnih funkcija $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ (lijevo), $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (desno) i njihovih asimptota.

Napomena 5.27. *Analogno kao i kod vertikalnih asimptota, racionalne funkcije imaju svojstvo da im je isti pravac horizontalna (ili kosa) asimptota na obje strane. Dakle, ako racionalna funkcija ima asimptotu $y = c$ kad x teži u $+\infty$, onda je isti pravac horizontalna asimptota i kad x teži u $-\infty$.*

Primjer 5.18. *Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.*
Očito je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(f) = [1, +\infty\rangle$, f je parna, tj. zrcalno simetrična obzirom na y os, dakle nije injekcija. Nadalje, f strogo pada na $\langle -\infty, 0]$ i za svaki $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ vrijedi $f(x) > -x$, f strogo raste na $[0, +\infty\rangle$ i za svaki $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ vrijedi $f(x) > x$.



Slika 5.24: Primjer iracionalne funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ i njenih asimptota iz Primjera 5.18.

Za dovoljno velike po apsolutnoj vrijednosti argumente funkcija f se proizvoljno blizu približava pravcu $y = -x$ (za $x < 0$) odnosno pravcu $y = x$ (za $x > 0$). Dakle pravci $y = x$ i $y = -x$ su kose asimptote funkcije f.
Primjetimo da pravci $y = x$ i $y = -x$ nisu kose asimptote funkcije f na obje strane jer slika funkcije f je $[1, +\infty\rangle$.♠

Iz Primjera 5.18 zaključujemo da za funkcije koje nisu racionalne (još kažemo da su **iracionalne**) svojstvo iz Napomene 5.27 ne mora vrijediti.

Napomena 5.28. *Funkcija ne može na istu stranu imati i horizontalnu i kosu asimptotu, jer u suprotnom ne bi bila funkcija.*

5.2.4 Algebarske funkcije

Funkcija je algebarska ako se u formuli kojom je zadana pojavljuju samo cjelobrojne potencije i korijeni.

Definicija 5.14. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je algebarska ako postoji polinom od dvije varijable $P(x, y)$ takav da vrijedi*

$$P(x, f(x)) = 0.$$

Napomena 5.29. *Svaki polinom i racionalna funkcija su algebarske funkcije.*

Dokaz:

Neka je dan proizvoljni polinom $P_n(x)$. Definirajmo polinom u dvije varijable s $P(x,y) = P_n(x) - y$. Tada je očito $P(x, P_n(x)) = 0$, dakle je svaki polinom algebarska funkcija.

Neka je sada $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ proizvoljna racionalna funkcija. Definirajmo polinom u dvije varijable s $P(x,y) = Q_m(x)y - P_n(x)$. Tada je očito $P(x, f(x)) = 0$, dakle je svaka racionalna funkcija i algebarska. ♣

Primjer 5.19. *1. Funkcija f dana formulom $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je algebarska za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer za polinom $P(x,y) = x - y^n$ očito je $P(x, f(x)) = 0$.*

2. Funkcija f dana formulom $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ je algebarska za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer za polinom $P(x,y) = xy^n - 1$ očito je $P(x, f(x)) = 0$.♠

Kako se u algebarskoj funkciji pojavljuju samo cjelobrojne potencije i korijeni zaključujemo da je prirodno područje definicije algebarske funkcije cijeli $\mathbb{R}$ bez nultočaka nazivnika i bez područja gdje nisu definirani parni korijeni (Primjer 5.13).

Primjer 5.20. *1. Neka je dana algebarska funkcija f formulom $f(x) = \sqrt{x}$. Funkcija f je inverzna funkcija restrikcije funkcije $g(x) = x^2$ na $[0, +\infty\rangle$. Dakle, je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = [0, +\infty\rangle$ (Primjer 5.13), f strogo raste na domeni i f je definirana u konačnom rubu prirodnog područja definicije, tj. 0 je regularna točka (točka 5.1.4), dakle nema vertikalnu asimptotu. Nadalje, kako za velike argumente vrijednost $\sqrt{x}$ puno sporije raste od bilo kojeg pravca zaključujemo da f nema kosu asimptotu. Horizontalnu ne može imati zbog strogog rasta i neomeđenosti.*

2. Neka je dana algebarska funkcija f formulom $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Funkcija f je inverzna funkcija funkcije $g(x) = x^3$, koja je bijekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Dakle, je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ (Primjer 5.13), f strogo raste na $\mathbb{R}$ i neomeđena je, dakle nema niti vertikalnu niti horizontalnu asimptotu. Nadalje, kako za velike argumente vrijednost $\sqrt[3]{x}$ puno sporije raste od bilo kojeg pravca zaključujemo da f nema kosu asimptotu.

3. Neka je dana algebarska funkcija f formulom $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Funkcija f je definirana svugdje osim u točkama u kojima je $\sqrt{x-1} = 0$ i $x-1 < 0$ (Primjer 5.13). Dakle, je $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty\rangle$ i $\mathcal{R}(f) = \langle 0, +\infty\rangle$, f strogo pada na domeni i f nije definirana u konačnom rubu prirodnog područja *definicije, tj. u* 1 *(točka 5.1.4). Kada se argument sve više približava broju* 1*, vrijednost funkcije raste u* $+\infty$ *i njen se graf proizvoljno blizu približava pravcu* $x = 1$*, tj. ima vertikalnu asimptotu* $x = 1$*. Nadalje, za velike argumente vrijednosti funkcije se proizvoljno blizu približavaju nuli, tj. pravac* $y = 0$ *je horizontalna asimptota funkcije* f*, dok kosu asimptotu ne može imati zbog Napomene 5.28.*

4. *Neka je dana algebarska funkcija* f *formulom* $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$*. Funkcija* f *je definirana svugdje osim u točkama u kojima je* $\sqrt[4]{x} = 0$ *i* $x < 0$ *(Primjer 5.13). Dakle, je* $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty\rangle$ *i* $\mathcal{R}(f) = \langle 1, +\infty\rangle$*,* f *strogo pada na domeni i* f *nije definirana u konačnom rubu prirodnog područja definicije, tj. u* 0 *(točka 5.1.4). Kada se argument sve više približava broju* 0*, vrijednost funkcije raste u* $+\infty$ *i proizvoljno se blizu približava pravcu* $x = 0$*, tj. ima vertikalnu asimptotu* $x = 0$*. Nadalje, za velike argumente vrijednost funkcije se proizvoljno blizu približava broju* 1*, tj. pravac* $y = 1$ *je horizontalna asimptota funkcije* f*, dok kosu asimptotu ne može imati zbog Napomene 5.28.*

5. *Neka je dana algebarska funkcija* f *formulom* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$*. Funkcija* f *je definirana svugdje osim u točkama u kojima je* $x^2 - 1 < 0$ *(Primjer 5.13). Dakle, je* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$ *i* $\mathcal{R}(f) = [0, +\infty\rangle$*,* f *je parna i strogo pada na* $\langle -\infty, -1]$ *a strogo raste na* $[1, +\infty\rangle$*. Definirana je u konačnim rubovima prirodnog područja definicije, tj.* -1 *i* 1 *su regularne točke (točka 5.1.4), dakle nema vertikalnu asimptotu. Horizontalnu ne može imati zbog strogog rasta i neomeđenosti. Za dovoljno velike po apsolutnoj vrijednosti argumente vrijednost funkcije se približava pravcu* $y = -x$ *(za* $x < -1$*) odnosno pravcu* $y = x$ *(za* $x > 1$*). Dakle* f *ima kose asimptote.*♠

Iz Primjera 5.20 vidimo da algebarskoj funkciji konačni rubovi mogu biti regularni, a može u njima imati i vertikalnu asimptotu. U beskonačnim rubovima imamo sva tri ponašanja, kao i kod racionalne funkcije, tj. može se dogoditi da nema asimptote ali i da imamo kosu ili horizontalnu (ali ne obje na istoj strani, Napomena 5.28).

Potencije

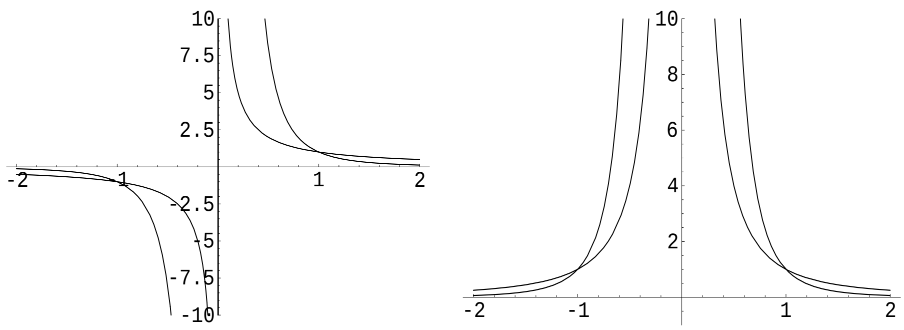
Izraz oblika a^b zovemo **potencijom** s bazom a i eksponentom b. Za cjelobrojni pozitivni eksponent b potenciju s eksponentom b definiramo kao

$$a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$

pri čemu se baza a pojavljuje b puta kao faktor u umnošku na desnoj strani gornje jednakosti.
Primjer funkcije u kojoj jedna veličina ovisi o potenciji druge veličine je ovisnost površine kruga o njegovom polumjeru:

$$P(r) = \pi \cdot r^2.$$

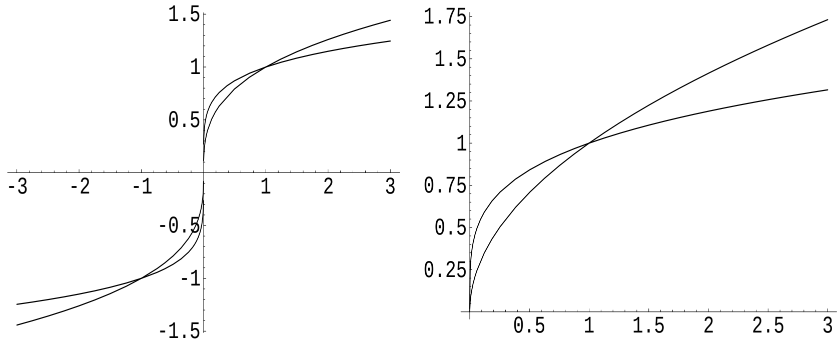
Ovako definirane potencije su specijalni slučaj polinoma s kojima smo se već susreli. Pokazuje se da se potencije mogu definirati i za eksponente koji nisu prirodni brojevi.
Ako je eksponent potencije negativan cijeli broj $-n$ za $n \in \mathbb{N}$, definiramo x^{-n} formulom $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Takve potencije ne možemo izračunati kad je $x = 0$. Dakle je područje definicije funkcije $f(x) = x^{-n}$ cijeli skup $\mathbb{R}$ bez točke 0. Ponovo, područje vrijednosti i oblik grafa ovise o parnosti eksponenta n. Funkcija $f(x) = x^{-n}$ za parno n je parna funkcija, dakle nije injekcija, strogo pada na $\langle 0, +\infty\rangle$ dok na $\langle -\infty, 0\rangle$ strogo raste. Funkcija $f(x) = x^{-n}$ za neparno n je neparna funkcija, i strogo pada na $\langle -\infty, 0\rangle$ i na $\langle 0, +\infty\rangle$, dakle je injekcija.



Slika 5.25: Grafovi funkcije $f(x) = x^{-n}$ za neparne (lijevo) i parne (desno) n.

I s ovakvim smo se potencijama već susretali kad smo govorili o racionalnim funkcijama.

Za razlomljene eksponente oblika $b = \frac{m}{n}$ pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, definiramo $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. Za parne n takve su funkcije definirane samo za nenegativne vrijednosti nezavisne varijable x (jer je funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ za parno n inverzna funkcija funkcije $g|_{[0,+\infty\rangle}(x) = x^n$); za neparne n, definirane su na cijelom $\mathbb{R}$ (jer je funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ za neparno n inverzna funkcija funkcije $g(x) = x^n$ koja je bijekcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$).



Slika 5.26: Grafovi funkcije $f(x) = x^{1/n}$ za neparne (lijevo) i parne (desno) n.

Dakle, u ovoj točki definirali smo potencije kojima smo eksponent proširili prvo sa skupa $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{Z}$, a nakon toga i na skup $\mathbb{Q}$. Sada je pitanje možemo li, i kako, definirati potenciju s proizvoljnim realnim brojem kao eksponentom? To je moguće, ali ne za sve baze (za negativne baze ne možemo). Dolazimo do pojma eksponencijalne funkcije.

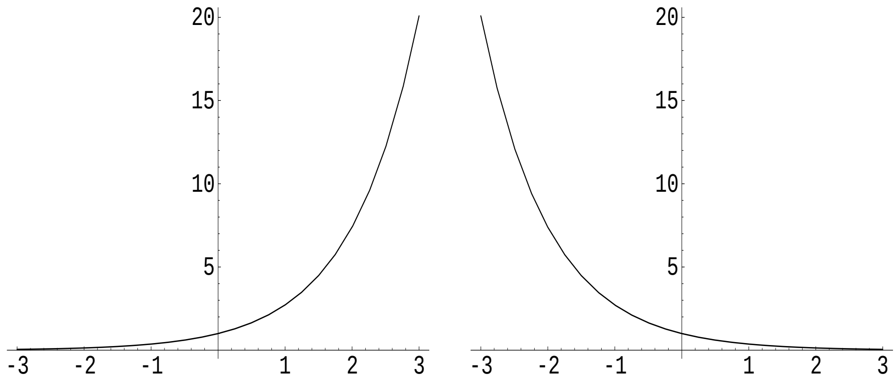
5.2.5 Eksponencijalne funkcije

Eksponencijalne se funkcije prirodno javljaju kao matematički modeli situacija u kojima je promjena neke veličine proporcionalna toj veličini. Primjeri su rast populacije, prirast biomase, razmnožavanje bakterija, raspadanje radioaktivnih tvari, računanje kamate itd.

Definicija 5.15. *Eksponencijalna funkcija s bazom a ($a > 0, \quad a \neq 1$) je definirana formulom $f(x) = a^x$.*

Osnovica ili baza eksponencijalne funkcije je faktor za koji se promijeni vrijednost funkcije kada se vrijednost argumenta promijeni za 1. Ako je $a > 1$, imamo

eksponencijalni rast, ako je $a < 1$, imamo eksponencijalni (ras)pad.
Nezavisna varijabla se nalazi u eksponentu, odatle i ime. To je i temeljna razlika od polinoma u kojima se nezavisna varijabla nalazi u bazi potencije, a eksponenti su konstantni.
Vrijednosti eksponencijalne funkcije mogu se izračunati za sve realne brojeve. Dakle je $\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R}$, za svaku bazu a. Vrijednosti eksponencijalne funkcije su strogo pozitivne; nije moguće potenciranjem pozitivne baze dobiti kao rezultat negativan broj ili nulu. To znači da je $\mathcal{R}(a^x) = \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty \rangle$.



Slika 5.27: Grafovi funkcija $f(x) = e^x$ (lijevo) i $f(x) = (1/e)^x = e^{-x}$ (desno).

Za $a > 1$ funkcija $f(x) = a^x$ strogo raste na $\mathbb{R}$. Za dovoljno velike argumente ta funkcija raste brže od bilo koje potencije. To znači da veličina $\frac{x^n}{a^x}$ postaje po volji mala za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za dovoljno veliki x. Kako je $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, slijedi da a^x teži k nuli kada argument x teži u $-\infty$. Dakle je os x jednostrana (lijeva) horizontalna asimptota grafa funkcije $f(x) = a^x$.

Za baze $0 < a < 1$, graf funkcije $f(x) = a^x$ dobivamo iz grafa funkcije $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ zrcaljenjem preko y-osi. (Za $0 < a < 1$ je $\frac{1}{a} > 1$). Dakle funkcija $f(x) = a^x$ je strogo padajuća, $\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}(a^x) = \langle 0, +\infty \rangle$, za $0 < a < 1$ funkcija a^x raste neograničeno kada argument x teži u $-\infty$ i x os joj je jednostrana (desna) horizontalna asimptota.

Temeljno svojstvo eksponencijalnih funkcija izdvaja od svih mogućih baza jednu kao najprirodniju. Naime, označimo li promjenu veličine a^x s $\Delta(a^x)$, uvjet proporcionalnosti se iskazuje kao

$$\Delta(a^x) = k \cdot a^x,$$

pri čemu je k konstanta proporcionalnosti koja ovisi o bazi a. Najjednostavnija konstanta proporcionalnosti je $k = 1$. Može se pokazati da se ta konstanta postiže za točno jednu bazu. Tu bazu označavamo slovom e. Približna vrijednost broja e je

$$e = 2.718281828...$$

Broj e je jedna od fundamentalnih konstanta prirode, slično kao konstanta π. Kasnije ćemo pokazati da se svaka eksponencijalna funkcija može prikazati kao eksponencijalna funkcija s bazom e, tj. $a^x = e^{px}$, za neki $p \in \mathbb{R}$.

Teorem 5.6 (Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije)**.** *Za svaki $a > 0$ vrijedi:*

1. $a^x = a^y \Longrightarrow x = y$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
4. $(a^x)^y = a^{xy}$;
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
7. $a^0 = 1$.♣

Posljedica sedmog svojstva iz Teorema 5.6 je da grafovi svih eksponencijalnih funkcija prolaze kroz točku $(0, 1)$.

Napomena 5.30. *Ponekad se eksponencijalna funkcija zapisuje u bazi oblika $1 + r > 0$, tj. $f(x) = (1 + r)^x$. Za $r > 0$ imamo interpretaciju r kao brzine rasta. Za $r < 0$ imamo brzinu (ras)pada.*

Funkcija a^x za $a > 0$ je bijekcija sa $\mathbb{R}$ u $\langle 0, +\infty\rangle$, dakle ima inverznu funkciju koju zovemo logaritamska funkcija.

5.2.6 Logaritamske funkcije

Primjer 5.21. *Izotop ugljika C^{14} je zastupljen u određenoj količini u svim živim bićima. Nakon prestanka izmjene tvari s okolinom, tj. nakon smrti organizma, radioaktivni C^{14} se više ne obnavlja i zatečena količina se počinje raspadati. Od ukupne količine C^{14} u organizmu pola se raspadne za 5730 godina. Dakle je x godina nakon smrti organizma početna količina C^{14} svedena na*

$$C(x) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}.$$

Ovdje je C_0 količina izotopa C^{14} u živoj tvari.
Koliko je davno živio organizam ako je početna količina C^{14} svedena na jednu šesnaestinu?

Treba rješiti jednadžbu $C(x) = \frac{C_0}{16}$. Koristeći činjenicu da je $16 = 2^4$ i iz Teorema 5.6, dobivamo

$$\frac{C_0}{16} = \frac{C_0}{2^4} = \frac{C_0}{2^{\frac{x}{5730}}},$$

i odatle je $x = 4 \cdot 5730 = 22920$ godina.♠

Što bismo učinili da se nije radilo o cjelobrojnoj potenciji broja 2 (npr. da je početna količina C^{14} svedena na jednu sedamnaestinu), tj. da ne možemo iskoristiti Teorem 5.6?

Definicija 5.16. *Neka je $a > 0$, $a \neq 1$.* **Logaritam** *pozitivnog realnog broja x po bazi a je broj c kojim treba potencirati bazu a da bi se dobio broj x.*

$$c = \log_a x \quad \text{ako i samo ako} \quad a^c = x.$$

Iz Definicije 5.16 imamo

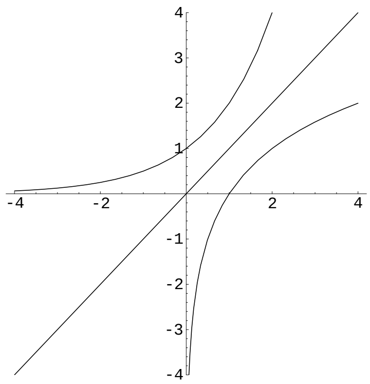
$$a^{\log_a x} = x$$

i

$$\log_a a^c = c,$$

tj. logaritamska funkcija s bazom a je inverzna eksponencijalnoj funkciji s istom bazom.

Logaritam s bazom 10 zovemo **dekadski** ili **Briggsov** i označavamo s $\log x$, tj. ne pišemo bazu 10. Logaritam po bazi e zovemo **prirodni** ili **Napierov**



Slika 5.28: Graf funkcije $f(x) = 2^x$ (lijevo) i njoj inverzne funkcije $f^{-1}(x) = \log_2 x$ (desno).

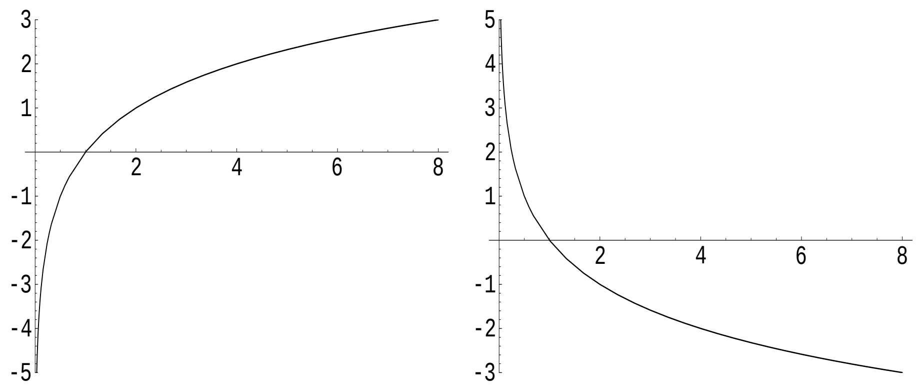
i označavamo s $\ln x$. U primjenama se još pojavljuju i logaritmi s bazom 2, $\operatorname{ld} x$. Iz Definicije 5.16 vidimo da logaritme možemo računati samo za pozitivne realne brojeve. Dakle je $\mathcal{D}(\log_a) = \langle 0, +\infty\rangle$, za svaki $a > 0$. Iz Teorema 5.1 zaključujemo da $\log_a(x)$ strogo raste za $a > 1$, dok za $0 < a < 1$ $\log_a(x)$ strogo pada. $\mathcal{R}(\log_a) = \mathbb{R}$, za svaki $a > 0$. Kako je a^x u 0 jednako 1, imamo da je $\log_a(1) = 0$, tj. graf od $\log_a(x)$ prolazi kroz točku $(1, 0)$. Kako je x os lijeva ($a > 1$) odnosno desna ($0 < a < 1$) horizontalna asimptota od a^x, zaključujemo da vrijednosti funkcije $\log_a(x)$ teže u $-\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u nulu za $a > 1$, odnosno vrijednosti funkcije $\log_a(x)$ teže u $+\infty$ kada vrijednosti argumenta teže u nulu za $0 < a < 1$. Os y je vertikalna asimptota.

Teorem 5.7 (Osnovna svojstva logaritamske funkcije). *Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Tada za svaki $a > 0$ vrijedi:*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
3. $\log_a x^r = r \log_a x$;
4. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$;
5. $\log_a a^y = y; \quad a^{\log_a x} = x$;
6. $\log_{1/a} x = -\log_a x$;

7. $\log_a x = \log_a y \Longrightarrow x = y.$♣

Iz Teorema 5.7, svojstvo 6, vidimo da graf logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ dobivamo zrcaljenjem preko osi x grafa logaritamske funkcije s bazom $1/a$ i obrnuto.



Slika 5.29: Grafovi logaritamskih funkcija s bazom 2 (lijevo) i bazom $\frac{1}{2}$ (desno).

Vrijednosti logaritma istog broja x po dvjema različitim bazama povezane su sljedećom formulom:

$$x = b^{\log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{\log_a b \log_b x}$$

tj. imamo

$$\log_a x = \log_a b \log_b x.$$

Vidimo da su vrijednosti logaritma proporcionalne. Konstantu proporcionalnosti $M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ zovemo **transformacijskim modulom**, ili **modulom prijelaza**. Zahvaljujući gornjoj relaciji, dovoljno je poznavati vrijednosti logaritamske funkcije za jednu bazu; za sve ostale baze koristimo se odgovarajućim modulima prijelaza.

Moduli prijelaza su korisni i pri svođenju funkcije $f(x) = a^x$ na funkciju e^x. Iz svojstava operacije potenciranja slijedi

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{Mx},$$

gdje je $M = \ln a$.

Vrijednosti dekadskih logaritama su tabelirane u logaritamskim tablicama, koje su nekad bile nezaobilazno pomagalo svakog inženjera. S porastom dostupnosti elektroničkih računala važnost logaritama kao računalnih pomagala počela se smanjivati, no logaritamska funkcija je i dalje bitna za opis i razumijevanje mnogih prirodnih pojava.

5.2.7 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su **sinus** ili $\sin x$, **kosinus** ili $\cos x$, **tangens** ili $\mathrm{tg}\,\mathrm{x}$ i **kotangens** ili $\mathrm{ctg}\,\mathrm{x}$.
Povijesno se pojavljuju u metričkim problemima vezanim za pravokutni trokut. Odatle im i ime.
Ako je dan pravokutni trokut sa vrhovima A, B, C, katetama a, b i hipotenuzom c (stranica a je nasuprot vrha A, itd.) i kutovima α, β, γ (kut α je uz vrh A, itd.), onda vrijedi:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}.$$

Vrijednosti ovih funkcija nisu nezavisne. Svaka od njih se može izraziti preko bilo koje od preostalih. Primjerice, iz Pitagorinog poučka slijedi

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Odatle je

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Nadalje,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}}{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

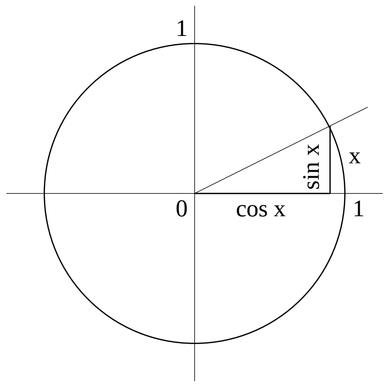
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Napomena 5.31. *Predmetak **ko** u kosinus i kotangens dolazi zbog **komplementarnosti** kuta, tj.*

$$\cos\alpha = \sin(90^o - \alpha), \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90^\mathrm{o} - \alpha).$$

Trigonometrijske funkcije prvotno su bile definirane za šiljaste kutove. Odgovarajućom konstrukcijom mogu se poopćiti i na realne brojeve. Prvo nam treba veza između kuta i broja.
Neka je K kružnica polumjera r u ravnini sa središtem u ishodištu. Neka je dan proizvoljni kut α. Ako sada povučemo polupravac (zraku) s početkom u ishodištu koji zatvara s pozitivnim djelom x osi kut α, onda on siječe kružnicu u jednoj točki T. Pogledajmo dio kružnice (luk) između točaka $(r, 0)$ (presjek kružnice i pozitivnog dijela x osi) i T (gledan u smjeru suprotnom od kazaljke na satu). Očito je kut α vezan s duljinom luka, tj. imamo preslikavanje koje svakom kutu pridružuje jedinstvenu duljinu luka s početkom u točki $(r, 0)$. Ovo preslikavanje je očito bijekcija. Dakle, umjesto kuta možemo gledati odgovarajuću duljinu luka.
Za $r = 1$, opseg kružnice je 2π, a duljina luka koji odgovara kutu α može se uzeti kao mjera tog kuta. Tako punom kutu odgovara mjera 2π, ispruženom π, a pravom $\frac{\pi}{2}$.
"Jedinica" u kojoj je ta mjera izražena zovemo **radijan**. Tako npr. pravi kut ima $\frac{\pi}{2}$ radijana. Dakle, 1 radijan je kut za koji je duljina luka jednaka polumjeru.

Neka je sada dana jedinična kružnica u ravnini sa središtem u ishodištu i pravac koji prolazi točkom $(1, 0)$ paralelan s osi y. Uzmimo koordinatni sustav na pravcu (tj. identificirajmo ga sa skupom $\mathbb{R}$) tako da mu ishodište padne u točku $(1, 0)$. Definirajmo sada preslikavanje koje će namatati pravac na kružnicu. Pri



Slika 5.30: Trigonometrijska kružnica i vrijednosti sinusa i kosinusa kuta x.

tome polupravac na kojem su smješteni pozitivni brojevi namatamo na kružnicu suprotno gibanju kazaljke na satu, a polupravac na kojem su smješteni negativni brojevi namatamo na kružnicu u skladu s gibanjem kazaljke na satu. Time svakom realnom broju t s pravca pridružili smo jedinstvenu točku $T = (x_t, y_t)$ na kružnici. Jasno je da za $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (tj. t je šiljasti kut) pravokutnosti trokuta sa katetama x_t, y_t i hipotenuzom 1 slijedi da je $x_t = \cos t$ i $y_t = \sin t$. Ako je $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, onda t nije šiljast, ali očito vrijedi $x_t = -x_{\pi-t}$ i $y_t = y_{\pi-t}$. Dakle za $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ možemo definirati $\cos t = -\cos(\pi - t)$ i $\sin t = \sin(\pi - t)$. Slično, ako je $t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, onda je očito $x_t = -x_{\frac{3\pi}{2}-t}$ i $y_t = -y_{\frac{3\pi}{2}-t}$. Dakle za $t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ možemo definirati $\cos t = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$ i $\sin t = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$. Ako je $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, onda vrijedi $x_t = x_{2\pi-t}$ i $y_t = -y_{2\pi-t}$. Dakle za $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ možemo definirati $\cos t = \cos(2\pi - t)$ i $\sin t = -\sin(2\pi - t)$. Proširili smo funkcije sinus i kosinus sa šiljastih kutova, tj. s $[0, \frac{\pi}{2}]$, na kutove iz $[0, 2\pi]$. Analogno se sinus i kosinus prošire s $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ odnosno na $[-2\pi, 0]$ (pri čemu je namatanje u smjeru kazaljke na satu).

Naravno, sada možemo sinus i kosinus analogno proširivati na $\mathbb{R}$. Nakon što namotamo komad duljine 2π, situacija se počinje ponavljati. Kažemo da su $\sin$ i $\cos$ **periodičke funkcije**. Dakle vrijedi

$$\sin(t + 2k\pi) = \sin t,$$

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$$

za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Svaki $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je **period** funkcija $\sin$ i $\cos$. Najmanji pozitivni period je 2π i zovemo ga **temeljni period**.

Dakle zbog periodičnosti namatanjem pravca na kružnicu možemo vrijednosti trigonometrijskih funkcija pridružiti i argumentima izvan intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$, odnosno vrijednosti sinusa i kosinusa možemo definirati za sve realne brojeve. Dakle je $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$.

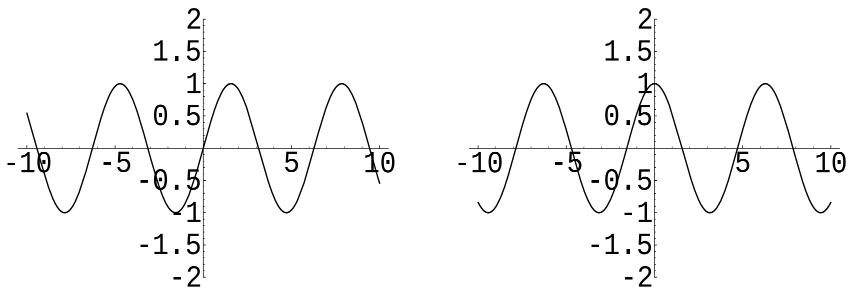
Nadalje, vidimo da je

$$-1 \leq \cos t \leq 1,$$

$$-1 \leq \sin t \leq 1,$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. To znači $\mathcal{R}(\sin) = \mathcal{R}(\cos) = [-1, 1]$.

Napomena 5.32. *Lako je vidjeti da je kosinus parna funkcija, dok je sinus neparna. Nadalje, zbog periodičnosti, parnosti i neparnosti jasno je da je dovoljno znati vrijednosti jedne od tih funkcija na* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Slika 5.31: Grafovi funkcija $f(x) = \sin x$ (lijevo) i $f(x) = \cos x$ (desno).

Sinus i kosinus u primjenama služe za opis periodičkih pojava, npr. za opis oscilacija, krvnoga tlaka, napona, temperatura kroz godinu, plime i oseke, itd. U mehanici i elektrotehnici se često govori o oscilacijama u terminima **perioda**, **amplitude** i **faze**. Vidjeli smo da sinus i kosinus poprimaju vrijednosti između $[-1, 1]$, tj. amplituda (polovica razlike između minimuma i maksimuma vrijednosti) im je 1. Nadalje, vidjeli smo da im je temeljni period 2π i da imaju takvo ponašanje da je vrijednost sinusa u nuli nula i u $\frac{\pi}{2}$ jedan, a kosinusa obrnuto, tj. 1 u nuli i 0 u $\frac{\pi}{2}$. Kažemo da im je faza nula. Međutim, u prirodi ima pojava koje se ne ponašaju tako, tj. imaju amplitudu različitu od 1, period različit od 2π i ne nul fazu. Malom modifikacijom sinusa i kosinusa mogu se opisati i takve pojave, formulom

$$A \sin(Bx - x_0).$$

Amplituda ove funkcije je A (jer je amplituda sinusa 1), period je $\frac{2\pi}{B}$ za $B \neq 0$ (jer je period sinusa 2π) i pomak u fazi, tj. pomak funkcije na x osi je x_0.

Napomena 5.33. *Zbog periodičnosti, funkcije sinus i kosinus nisu injekcije, dakle niti bijekcije, na svoju sliku. Iz konstrukcije proširenja lagano se vidi da je sinus strogo rastuća na* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *a kosinus strogo padajuća na* $[0, \pi]$. *Dakle,*

$$\mathrm{Sin}\ x = \sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} x$$

i

$$\mathrm{Cos}\ x = \cos|_{[0,\pi]} x$$

su bijekcije na $[-1, 1]$.

Osim kao kvocijent sinusa i kosinusa tangens i kotangens imaju i izravnu interpretaciju na trigonometrijskoj kružnici.
Ako imamo jediničnu kružnicu u ravnini s središtem u ishodištu i pravac paralelan s osi y koji prolazi točkom $(1,0)$ (još ga zovemo tangensna os), onda je interpretacija vrijednosti $\mathrm{tg}\ t$ za $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ udaljenost točaka $(1,0)$ i P na tangensnoj osi, gdje je točka P presjek polupravca iz ishodišta kroz točku T (točka u koju se preslika t namatanjem na kružnicu). Slično kao i sinus i kosinus, i funkciju tangens proširujemo izvan intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dakle formula

$$\mathrm{tg}\ t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

vrijedi na cijelom $\mathbb{R}$ osim za vrijednosti t gdje je $\cos t = 0$, tj. imamo

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\},$$

što se vidi i s trigonometrijske kružnice. Jasno je kada se t približava točkama oblika $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ tada vrijednost tangensa teži s jedne strane u $+\infty$ a s druge u $-\infty$. U tim točkama tangens ima vertikalnu asimptotu.
Zbog neparnosti sinusa i parnosti kosinusa imamo da je tangens neparna funkcija.
Iz interpretacije tangensa s trigonometrijske kružnice jasno je da je

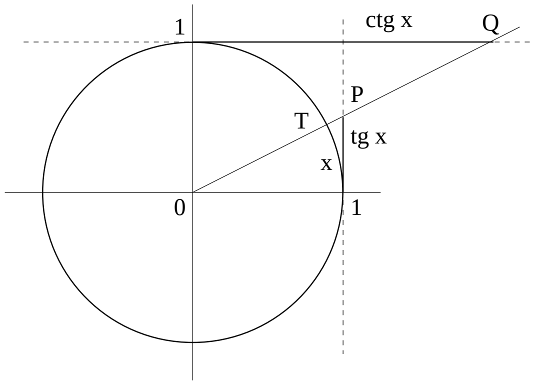
$$\mathrm{tg}\ (t + k\pi) = \mathrm{tg}\ t,$$

za svaki $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. Dakle je funkcija tangens periodična s temeljnim periodom π i vrijedi

$$\mathcal{R}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R}.$$

Slično se interpretira i kotangens. Ako imamo jediničnu kružnicu u ravnini s centrom u ishodištu i pravac paralelan s osi x koji prolazi točkom $(0,1)$ (još ga zovemo kotangensna os), onda je interpretacija vrijednosti $\mathrm{ctg}\ t$ za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ udaljenost točaka $(0,1)$ i Q na kotangesnoj osi, gdje je točka Q presjek polupravca iz ishodište kroz točku T i kotangensne osi. Slično kao i sinus i kosinus, i funkciju kotangens proširujemo na gotovo cijeli $\mathbb{R}$.
Dakle vrijedi formula

$$\mathrm{ctg}\ t = \frac{\cos t}{\sin t}$$



Slika 5.32: Trigonometrijska kružnica i vrijednosti tangensa i kotangensa kuta x.

na cijelom $\mathbb{R}$ osim za vrijednosti t gdje je $\sin t = 0$. Imamo

$$\mathcal{D}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{\mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\},$$

što se vidi i s trigonometrijske kružnice. Kada se t približava točkama oblika $k\pi$ tada vrijednost kotangensa teži s jedne strane u $+\infty$ a s druge u $-\infty$, pa u tim točkama kotangens ima vertikalnu asimptotu.
Zbog neparnosti sinusa i parnosti kosinusa imamo da je kotangens neparna funkcija. Iz interpretacije kotangensa s trigonometrijske kružnice jasno je da je

$$\mathrm{ctg}\ (t + k\pi) = \mathrm{ctg}\ t,$$

za svaki $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Funkcija kotangens je periodična s temeljnim periodom π i vrijedi

$$\mathcal{R}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R}.$$

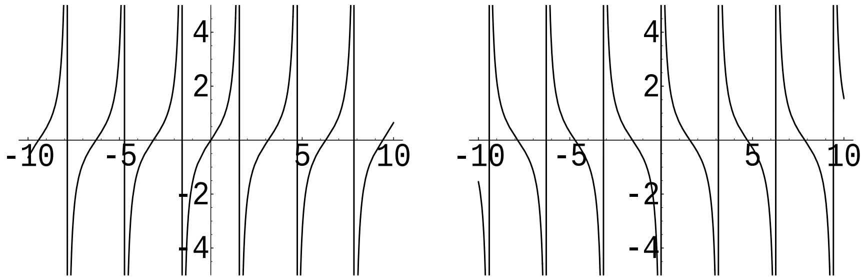
Napomena 5.34. *Zbog periodičnosti, ni tangens ni kotangens nisu injekcije, dakle niti bijekcije, na svoju sliku. Iz konstrukcije proširenja lagano se vidi da je tangens strogo rastuća na* $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$*, a kotangens strogo padajuća na* $\langle 0, \pi \rangle$*. Dakle, njihove restrikcije*

$$\mathrm{Tg}\ x = \mathrm{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle}\ x$$

i

$$\mathrm{Ctg}\ x = \mathrm{ctg}|_{\langle 0, \pi \rangle}\ x$$

su bijekcije s tih intervala na $\mathbb{R}$.



Slika 5.33: Grafovi funkcija $f(x) = \text{tg } x$ (lijevo) i $f(x) = \text{ctg } x$ (desno).

5.2.8 Ciklometrijske (arkus) funkcije

Trigonometrijske funkcije su periodične, dakle nisu bijekcije. Npr. jednadžba

$$\sin x = c$$

zbog periodičnosti sinusa ima beskonačno mnogo rješenja za $-1 \leq c \leq 1$, a nema rješenja za $c \notin [-1, 1]$. Dakle sinus nema inverznu funkciju, a isto vrijedi i za ostale trigonometrijske funkcije.

Zato se kod trigonometrijskih funkcija ograničimo na maksimalne intervale na kojima su one bijekcije. Dakle, restringirajmo sinus na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, kosinus na $[0, \pi]$, tangens na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ i kotangens na $\langle 0, \pi\rangle$. Tada prema Napomeni 5.33 i Napomeni 5.34 znamo da su funkcije $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ i $\text{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle}$ strogo rastuće, a $\cos|_{[0,\pi]}$ i $\text{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$ strogo padajuće, dakle su i bijekcije.

Tako restringirane trigonometrijske funkcije imaju inverzne funkcije, koje zovemo **arkus funkcije**. One zadanoj vrijednosti trigonometrijske funkcije pridružuju vrijednost kuta (duljine luka) za koju se ta vrijednost funkcije postiže.

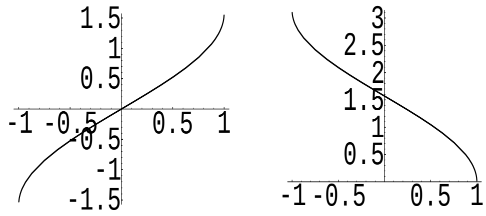
Za $x \in [-1, 1]$ definiramo $\arcsin x$ kao rješenje $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jednadžbe $\sin t = x$. Kako je $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ bijekcija, rješenje jednadžbe postoji i jedinstveno je. Dakle, dobro je definirana funkcija **arkus sinus**

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

koja je inverzna funkciji $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$.

Analogno definiramo funkciju **arkus kosinus**

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$



Slika 5.34: Grafovi funkcija $f(x) = \arcsin x$ (lijevo) i $f(x) = \arccos x$ (desno).

inverznu funkciji $\cos|_{[0,\pi]}$.
Iz Teorema 5.1 i Napomene 5.33 slijedi da je $\arcsin$ strogo rastuća, a $\arccos$ strogo padajuća na $[-1, 1]$. Nadalje, očito je

$$\mathcal{D}(\arcsin) = \mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1], \quad \mathcal{R}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi],$$

i rubne točke -1 i 1 prirodnog područja definicije su regularne za $\arcsin$ i za $\arccos$.

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo $\operatorname{arctg} x$ kao rješenje $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ jednadžbe $\operatorname{tg} t = x$. Kako je $\operatorname{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle}$ bijekcija, rješenje jednadžbe postoji i jedinstveno je. Dakle, dobro je definirana funkcija **arkus tangens**

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

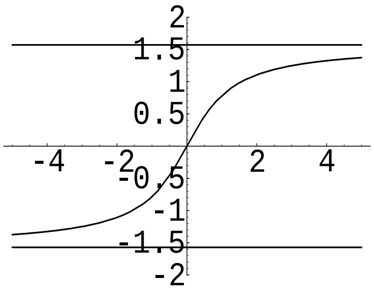
koja je inverzna funkciji $\operatorname{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle}$.
Analogno definiramo funkciju **arkus kotangens**

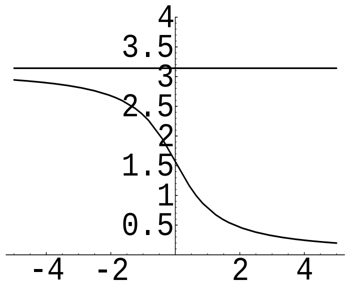
$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \langle 0, \pi \rangle,$$

inverznu funkciji $\operatorname{ctg}|_{\langle 0,\pi \rangle}$.
Iz Teorema 5.1 i Napomene 5.34 slijedi da je arctg strogo rastuća a arcctg strogo padajuća na $\mathbb{R}$. Nadalje, očito je

$$\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathcal{D}(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(\operatorname{arctg}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad \mathcal{R}(\operatorname{arcctg}) = \langle 0, \pi \rangle.$$

Kako su pravci $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$ odnosno pravci $x = 0$ i $x = \pi$ vertikalne asimptote od $\operatorname{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle}$ odnosno $\operatorname{ctg}|_{\langle 0,\pi \rangle}$ imamo da su pravci $y = -\frac{\pi}{2}$ i $y = \frac{\pi}{2}$ odnosno pravci $y = 0$ i $y = \pi$ horizontalne asimptote od arctg odnosno arcctg.





Slika 5.35: Grafovi funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (lijevo) i $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ (desno).

Napomena 5.35. *Pri konstrukciji arkus funkcija restringirali smo trigonometrijske funkcije na odgovarajuće intervale. Zbog periodičnosti smo mogli odabrati i neke druge intervale restrikcije, tako da bi smo dobili arkus funkcije definirane na tim intervalima. Dakle, pri traženju rješenja t jednadžbe, npr.*

$$\sin x = t,$$

treba voditi računa u kojem se intervalu periodičnosti trigonometrijske funkcije nalazi broj x.
Sljedeća stvar na koju treba također paziti je područje definicije trigonometrijske i arkus funkcije. Npr. funkcija $\sin \circ \arcsin$ *je definirana i jednaka je funkciji id na intervalu* $[-1, 1]$, *dok funkcija* $\arcsin \circ \sin$ *je definirana i jednaka je funkciji id na intervalu* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Dakle ne možemo reći da je* $\sin \circ \arcsin = \arcsin \circ \sin$ *jer nemaju isto područje definicije.*

5.2.9 Hiperboličke i area funkcije

Hiperboličke funkcije definiramo sljedećim formulama:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x},$$

i zovemo ih redom **kosinus hiperbolički**, **sinus hiperbolički**, **tangens hiperbolički** i **kotangens hiperbolički**. Hiperboličke (ili hiperbolne) funkcije su po nekim svojstvima slične trigonometrijskim funkcijama, iako se definiraju u terminima eksponencijalne funkcije. Primjerice, vrijedi

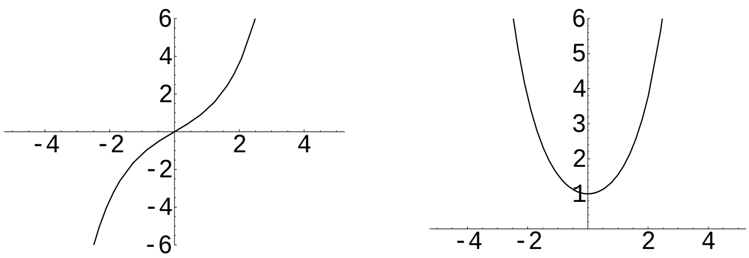
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena 5.36. *Iz jednakosti* $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ *dolazi ime hiperboličke, jer je jednadžba* $x^2 - y^2 = 1$ *jednadžba hiperbole u ravnini.*

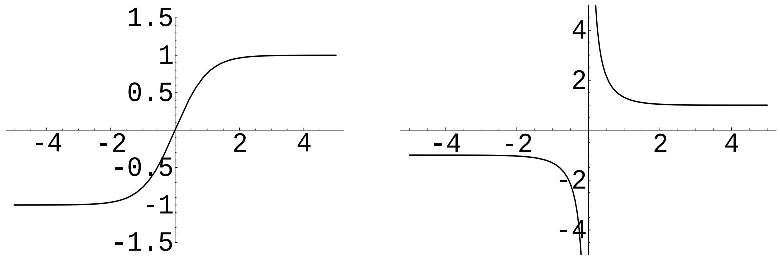
Pogledajmo sada neka svojstva hiperbolnih funkcija:

1. Kako je ch zadan u terminima eksponencijalne funkcije zaključujemo da je $\mathcal{D}(\operatorname{ch}) = \mathbb{R}$. Lagano se vidi da je $\operatorname{ch} x > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, parna je, dakle nije injekcija, neograničena je, strogo pada na $\langle -\infty, 0]$ i strogo raste na $[0, +\infty\rangle$. Dakle je $\mathcal{R}(\operatorname{ch}) = [1, +\infty\rangle$ i nema asimptote.
2. Kako je sh također zadan u terminima eksponencijalne funkcije imamo $\mathcal{D}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$. Lako se vidi da je neparna, strogo raste na $\mathbb{R}$, neograničena je pa je $\mathcal{R}(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$ i nema asimptote.



Slika 5.36: Grafovi funkcija $f(x) = \operatorname{sh}\, x$ (lijevo) i $f(x) = \operatorname{ch}\, x$ (desno).

3. Kako ch nema nultočke zaključujemo da je $\mathcal{D}(\operatorname{th}) = \mathbb{R}$. Zbog neparnosti od sh i parnosti od ch, th je neparna. Strogo raste na $\mathbb{R}$. Iz formule lagano slijedi da je $|\operatorname{th} x| < 1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Štoviše, kada argument teži u $+\infty$ $\operatorname{th}\, x$ se sve više približava pravcu $y = 1$, a kad argument teži u $-\infty$ $\operatorname{th} x$ se sve više približava pravcu $y = -1$. Dakle th ima dvije horizontalne asimptote, $y = -1$ i $y = 1$, i $\mathcal{R}(\operatorname{th}) = \langle -1, 1\rangle$.
4. Kako je jedina nultočka od th točka 0 zaključujemo da je $\mathcal{D}(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i cth u 0 ima vertikalnu asimptotu. Zbog neparnosti od th i cth je neparna. Kako th strogo raste na $\mathbb{R}$, cth strogo pada na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nadalje, kako je $|\operatorname{th} x| < 1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, imamo da je $|\operatorname{cth} x| > 1$, za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Kako se $\operatorname{th}\, x$ približava pravcu $y = 1$ kada x teži u $+\infty$ i $y = -1$ kada x teži u $-\infty$, to mora i $\operatorname{cth}\, x$. Dakle cth ima i dvije horizontalne asimptote, $y = -1$ i $y = 1$, i $\mathcal{R}(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.



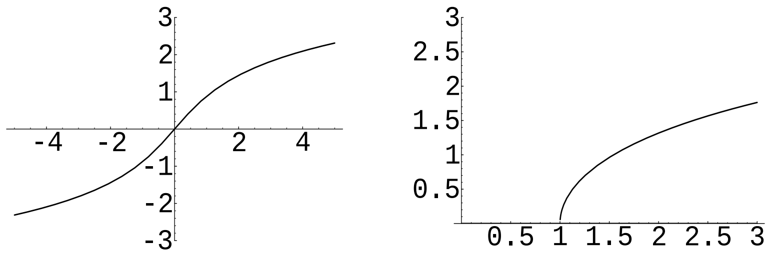
Slika 5.37: Grafovi funkcija $f(x) = \mathrm{th}\ x$ (lijevo) i $f(x) = \mathrm{cth}\ x$ (desno).

Sve hiperboličke funkcije su bijekcije sa svoje prirodne domene na svoju sliku, osim funkcije ch. Ako ch, zbog parnosti, restringiramo na $\langle -\infty, 0]$ ili $[0, +\infty\rangle$, ch postaje bijekcija na svoju sliku.

Funkcije inverzne hiperboličkima zovu se **area funkcije**, preciznije **areakosinus hiperbolički** ili Arch, **areasinus hiperbolički** ili Arsh, **areatangens hiperbolički** ili Arth i **areakotangens hiperbolički** ili Arcth.
Kako su formule za hiperboličke funkcije dane u terminima eksponencijalne, formule za area funkcije mogu se izraziti u terminima logaritamske funkcije. Svojstva area funkcija lagano slijede iz svojstava hiperbolnih, tj. imamo:

1. Ako smo ch restringirali na $[0, +\infty)$, onda je $\mathcal{D}(\mathrm{Arch}) = [1, +\infty\rangle$ i $\mathcal{R}(\mathrm{Arch}) = [0, +\infty\rangle$. Iz Teorema 5.1 zaključujemo da Arch strogo raste, 1 joj je regularna točka i nema asimptote jer ih nema niti ch.

2. Očito je $\mathcal{D}(\mathrm{Arsh}) = \mathcal{R}(\mathrm{Arsh}) = \mathbb{R}$, iz Teorema 5.1 slijedi da Arsh strogo raste i nema asimptote jer ih nema niti sh.

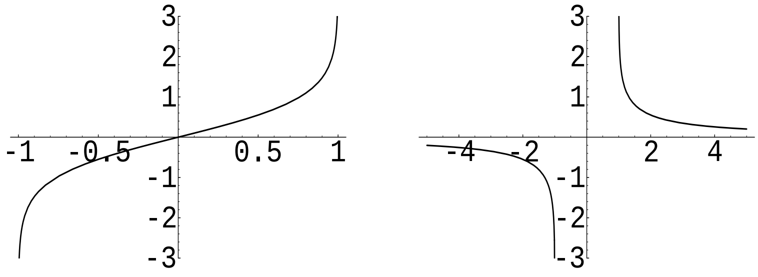


Slika 5.38: Grafovi funkcija $f(x) = \mathrm{Arsh}\ x$ (lijevo) i $f(x) = \mathrm{Arch}\ x$ (desno).

3. Očito je $\mathcal{D}(\mathrm{Arth}) = \langle -1, 1\rangle$, $\mathcal{R}(\mathrm{Arth}) = \mathbb{R}$ i iz Teorema 5.1 slijedi da Arth strogo raste. Kako su $y = -1$ i $y = 1$ horizontalne asimptote od th, onda su rubovi -1 i 1, tj. pravci $x = -1$ i $x = 1$, vertikalne asimptote od Arth.

4. Očito je $\mathcal{D}(\mathrm{Arcth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, $\mathcal{R}(\mathrm{Arth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i iz Teorema 5.1 slijedi da Arcth strogo pada. Kako su $y = -1$, $y = 1$ horizontalne, a $x = 0$ vertikalna asimptota od

cth, onda su rubovi -1 i 1, tj. pravci $x = -1$ i $x = 1$, vertikalne asimptote od Arth, a pravac $y = 0$ horizontalna asimptota.



Slika 5.39: Grafovi funkcija $f(x) = \mathrm{Arth}\ x$ (lijevo) i $f(x) = \mathrm{Arcth}\ x$ (desno).

Poglavlje 6

Uvod u diferencijalni račun

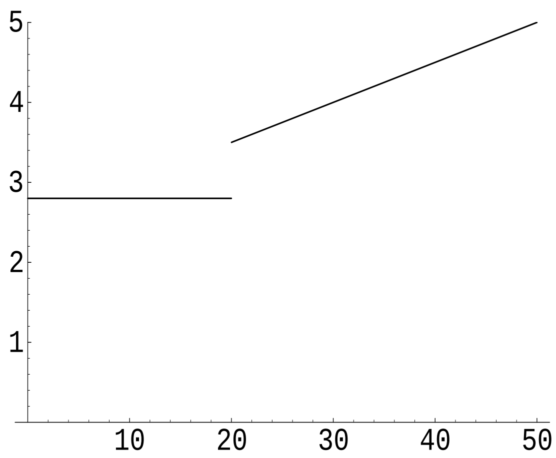
6.1 Neprekidnost i granične vrijednosti

6.1.1 Neprekidnost funkcije

Primjer 6.1. *Promatrajmo funkciju koja opisuje visinu poštarine u ovisnosti o masi pošiljke. Neka je visina poštarine za pisma mase do (uključivo)* 20 *g jednaka* 2.8 *kn, a za pisma mase preko* 20 *g neka je poštarina dana formulom* $c(m) = 3.5 + 0.05(m - 20)$ *kn. (Masa* m *je izražena u gramima, a visina poštarine* c *u kunama). Dakle imamo*

$$c(m) = \begin{cases} 2.8, & 0 \leq m \leq 20 \\ 3.5 + 0.05(m-20), & m > 20. \end{cases}$$

Graf te funkcije prikazan je na slici 6.1. Promatrajmo ponašanje vrijednosti funkcije $c(m)$ *u okolini točaka* $m = 10$, $m = 20$ *i* $m = 30$*. Vidimo da je ponašanje u okolini točke* $m = 20$ *kvalitativno drugačije od ponašanja u okolini drugih dviju točaka. Naime, u točkama* $m = 10$ *i* $m = 30$ *(i u svim drugim točkama osim u* $m = 20$*) mala promjena vrijednosti argumenta rezultira malom promjenom vrijednosti funkcije. Za točke* $m < 20$ *nema nikakve promjene u vrijednosti funkcije, a za točke* $m > 20$ *promjena argumenta za neku malu vrijednost* $h = \Delta m$ *rezultira promjenom funkcije za vrijednost* $0.05h$ *(*$\Delta c = 0.05h = 0.05\Delta m$*). Želimo li promjenu vrijednosti funkcije održati manjom od nekog unaprijed zadanog broja* M*, moramo se pobrinuti da promjena argumenta bude manja od* $20M$ *(ako je* $M \geq c(m_2) - c(m_1) = 0.05(m_2 - m_1)$*,*



Slika 6.1: Graf visine poštarine u ovisnosti o masi pošiljke.

onda je $20M \geq (m_2 - m_1)$*). S druge strane, proizvoljno mala promjena argumenta od vrijednosti* 20 *na* $20 + \Delta m$ *će rezultirati skokom vrijednosti funkcije* c *za barem* 0.7 *kn, i ne postoji dovoljno mali* Δm *koji bi rezultirao manjom promjenom vrijednosti funkcije* c*. Vizualnom inspekcijom grafa vidimo da u točki* $m = 20$ *funkcija* $c(m)$ *ima skok, odnosno da graf funkcije ima prekid u toj točki.*♠

Definicija 6.1. *Funkcija* f *je* **neprekidna** *(ili neprekinuta) u točki* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Funkcija je neprekidna na skupu $I \subseteq \mathbb{R}$ *ako je neprekidna u svakoj točki skupa* I*.*

Definicija 6.1 je samo tehnička formalizacija zahtjeva da mali pomaci u argumentu rezultiraju malim pomacima u vrijednosti funkcije. Funkcija je neprekidna ako se promjene vrijednosti funkcije mogu kontrolirati promjenama vrijednosti argumenata.
Neformalna geometrijska interpretacija neprekidnosti funkcije u točki je da pri crtanju grafa funkcije u toj točki ne moramo podići olovku s papira.

Napomena 6.1. *Ako za dano* $\varepsilon > 0$ *i neko* $\delta > 0$ *vrijedi Definicija 6.1 onda za svako* $\varepsilon' > \varepsilon$ *pogotovo vrijedi*

$$(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon').$$

Zato je za neprekidnost funkcije f u točki x_0 dovoljno da za svaki $\varepsilon > 0$, koji je manji od nekog fiksnog strogo pozitivnog broja, postoji $\delta > 0$ za koji vrijedi Definicija 6.1. Drugim riječima treba pažnju obratiti na malene $\varepsilon > 0$.
Ako za dani $\varepsilon > 0$ i neki $\delta > 0$ vrijedi Definicija 6.1 onda za svaki $0 < \delta' < \delta$ pogotovo vrijedi

$$(|x - x_0| < \delta') \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Prema tome za svaki $\varepsilon > 0$ ako postoji jedan $\delta > 0$, onda postoji i beskonačno mnogo takvih $\delta > 0$ da vrijedi Definicija 6.1. No, nama je dovoljno samo jedan takav $\delta > 0$ što je i naznačeno u Definiciji 6.1.

Napomena 6.2. *Iz Definicije 6.1 slijedi da funkcija f ima prekid u točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in \mathcal{D}(f)$ takav da $(|x_\delta - x_0| < \delta)$ i $(|f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon)$.*

Primjer 6.2. *Funkcija $c(m)$ iz Primjera 6.1 ima prekid u točki $c = 20$, ali je ona neprekidna slijeva u toj točki. Odnosno $c(m)$ aproksimira $c(20)$ s točnošću do ε, ako je m lijevo od 20 i dovoljno blizu 20. S druge strane, ako je $m > 20$ i m blizu 20, ipak $m(c)$ nije blizu $m(20)$.*♠

Primjer 6.2 nam daje ideju za sljedeću definiciju:

Definicija 6.2. *Funkcija f je* **neprekidna slijeva** *u točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$(x \leq x_0; |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Analogno, kažemo da je funkcija f **neprekidna zdesna** *u točki $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da*

$$(x \geq x_0; |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

6.1.2 Svojstva neprekidnih funkcija

Teorem 6.1. *Neka su funkcije $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirane i neprekidne u točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada su u točki x_0 neprekidne i funkcije:*

1. $f + g$,

2. $f - g$,

3. $f \cdot g$,

4. $\frac{f}{g}$, *ako je* $g(x_0) \neq 0$.♣

Teorem 6.2. *Neka su funkcije* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *takve da je definirano* $(g \circ f)(x_0)$, *i* $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ *i* $f(x_0) \in \mathcal{D}(g)$. *Ako je funkcija* f *neprekidna u* x_0, *i funkcija* g *neprekidna u* $f(x_0)$, *onda je funkcija* $g \circ f$ *neprekidna u* x_0.♣

Teorem 6.3. *Neka je* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna u točki* $c \in I$, *i neka je* $f(c) > 0$ *(*$f(c) < 0$*). Tada postoji* $\delta > 0$ *takav da je* $f(x) > 0$ *(*$f(x) < 0$*) za sve* $x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f(c) > 0$ *i za svaki* $\delta > 0$ *postoji* $x_\delta \in (c - \delta, c + \delta)$ *takav da je* $f(x_\delta) \leq 0$.
Uzmimo $\varepsilon = f(c)$. *Tada za svaki* $\delta > 0$, *po pretpostavci, postoji* $x_\delta \in (c - \delta, c + \delta)$, *tj.* $|x_\delta - c| < \delta$, *za koji je* $f(x_\delta) \leq 0$. *Tada je* $|f(x_\delta) - f(c)| > f(c) = \varepsilon$. *Dakle,* f *ima prekid u točki* c, *što je suprotno pretpostavci.*

Analogno se dokaže slučaj $f(c) < 0$.♣

Teorem 6.4. *Neka je funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a, b]$, *i neka je* $f(a)f(b) < 0$. *Tada postoji* $x_0 \in \langle a, b \rangle$ *takav da je* $f(x_0) = 0$.♣

Teorem 6.4 kaže da ako imamo neprekidnu funkciju na segmentu takvu da su njene vrijednosti u rubovima suprotnog predznaka, onda njezin graf mora negdje sječi x os, tj. mora imati nultočku.

Primjer 6.3. *Iz Napomene 5.11 znamo da je funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

svugdje neprekidna osim u nuli.
Ako pogledamo funkciju f *restringiranu na segment* $[-1, 1]$, *tj.* $f|_{[-1,1]} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *onda je očito* $f(-1)f(1) = -1 < 0$, *ali očito* f *nema nultočku na segmentu* $[-1, 1]$ *(jer je nema na cijelom* $\mathbb{R}$*).*♠

Iz Primjera 6.3 slijedi da je uvjet neprekidnosti iz Teorema 6.4 nužan.

Prisjetimo se da je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **ograničena** ili **omeđena** na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M,$$

za svaki $x \in I$ (Definicija 5.4)

Teorem 6.5. *Funkcija neprekidna na segmentu je i ograničena na segmentu.*♣

Tvrdnja Teorema 6.5 ne vrijedi za otvorene intervale. Npr. funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je neprekidna na $\langle 0, 1\rangle$, ali očito je neomeđena.

Teorem 6.6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$. Tada ona na tom segmentu poprima svoj minimum i maksimum i sve vrijednosti između te dvije.*♣

Teorem 6.6 kaže da je slika segmenta neprekidnom funkcijom segment. Tvrdnja Teorema 6.6 ne vrijedi za otvorene intervale. Npr. slika otvorenog intervala $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ funkcijom tg je $\mathbb{R}$, i funkcija $\operatorname{tg} x$ ne poprima ni minimalnu ni maksimalnu vrijednost na otvorenom intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.
Dakle neprekidna funkcija na segmentu preslikava taj segment u segment. Pitanje je sad, možemo li nešto reći o funkciji koja preslikava otvoreni interval u otvoreni interval?
Ako je funkcija strogo monotona na otvorenom intervalu i ako je slika tog intervala interval, onda je ta funkcija i neprekidna.

Teorem 6.7. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, i neka je slika intervala I funkcijom f otvoreni interval $I' \subseteq \mathbb{R}$. Tada je funkcija f neprekidna na intervalu I. Nadalje, postoji inverzna funkcija f^{-1} i ona je neprekidna na intervalu I'.*♣

6.1.3 Neprekidnost elementarnih funkcija

Primjer 6.4. *Funkcije $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dane formulama $f(x) = c$ i $g(x) = x$ su neprekidne na $\mathbb{R}$.*

1. *Dokažimo da je funkcija* $f(x) = c$ *neprekidna u proizvoljnoj točki* $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Uzmimo proizvoljni $\varepsilon > 0$, *i nađimo* $\delta > 0$ *takvo da* $(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. *Budući da je* $f(x) - f(x_0) = c - c = 0$, *slijedi da za* δ *možemo uzeti bilo koji pozitivan broj.*

2. *Dokažimo da je funkcija* $f(x) = x$ *neprekidna u proizvoljnoj točki* $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Uzmimo proizvoljni $\varepsilon > 0$, *i nađimo* $\delta > 0$ *takvo da* $(|x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. *Budući da je* $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$, *slijedi da možemo uzeti* $\delta = \varepsilon$.♠

Iz Primjera 6.4 i Teorema 6.1 izravno imamo:

Teorem 6.8. *Svaki polinom* $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *je neprekidan na* $\mathbb{R}$. *Svaka racionalna funkcija je neprekidna na cijelom svom prirodnom području definicije.*

Dokaz:

U Primjeru 6.4 dokazali smo da je funkcija $f(x) = x$ *neprekidna na* $\mathbb{R}$. *Iz Teorema 6.1 sada slijedi da je na* $\mathbb{R}$ *neprekidna i funkcija* x^2. *Na isti način se zaključi da su* x^i, $i = 0, 1, ..., n$, *neprekidne na* $\mathbb{R}$. *Zbog neprekidnosti konstantne funkcije na* $\mathbb{R}$ *(Primjer 6.4) i Teorema 6.1, na* $\mathbb{R}$ *su neprekidne i funkcije* $a_i x^i$, $i = 0, 1, ..., n$. *Na kraju, također iz Teorema 7.1, zaključujemo da je i suma od* $a_i x^i$, $i = 0, 1, ..., n$, *tj. polinom* $P_n(x)$ *neprekidan na* $\mathbb{R}$.

Neprekidnost racionalne funkcije na cijelom svom prirodnom području definicije slijedi izravno iz Teorema 6.1, jer je svaka racionalna funkcija kvocijent dvaju polinoma.♣

Napomena 6.3. *Može se pokazati i da su sve algebarske funkcije neprekidne tamo gdje su definirane.*

Teorem 6.9. *Eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske, arkus, hiperboličke i area funkcije su neprekidne na svojim domenama.*

Dokaz:

Neprekidnost eksponencijalnih, logaritamskih, hiperboličkih (osim kosinusa hiperbolnog), area (osim area kosinusa hiperbolnog) funkcija slijedi izravno iz Teorema 6.7.

Neprekidnost funkcije ch *slijedi iz neprekidnosti eksponencijalne funkcije i Teorema 6.1.*

Neprekidnost funkcija tg *i* ctg *na cijelom području definicije lagano slijedi iz Teorema 6.7 i periodičnosti, jer su njihove restrikcije npr. na intervale* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ *odnosno* $\langle 0, \pi\rangle$ *monotone bijekcije na* $\mathbb{R}$*, dakle iz Teorema 6.7 su neprekidne. Nadalje, također iz Teorema 6.7 imamo da su neprekidne i funkcije* arctg *i* arcctg.

Restrikcije funkcija $\sin x$ *i* $\cos x$ *na intervale* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ *i* $\langle 0, \pi\rangle$ *su monotone bijekcije na* $\langle -1, 1\rangle$*, dakle su po Teoremu 6.7 i neprekidne. Sada lagano zaključujemo da su funkcije* sin *i* cos *zbog periodičnosti neprekidne na* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *odnosno na* $\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$*. Dokažimo još da je* sin *neprekidna u* $\frac{\pi}{2}$ *i* $-\frac{\pi}{2}$*, analogno se dokazuje za ostale točke oblika* $\frac{\pi}{2} + k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. Znamo da za funkciju* $\sin x$ *i proizvoljni* $a \in \mathbb{R}$ *vrijedi da je*

$$\sin x - \sin a = 2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}.$$

Ako sada stavimo da je $a = \frac{\pi}{2}$*, imamo*

$$\sin x = 1 + 2\sin\frac{2x-\pi}{4}\cos\frac{2x+\pi}{4}.$$

Ako pustimo da x *varira po intervalu* $\langle 0, \frac{3\pi}{2}\rangle$*, onda* $\frac{2x-\pi}{4}$ *varira po intervalu* $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle$*, dakle je funkcija* $f(x) = \sin\frac{2x-\pi}{4}$ *neprekidna na* $\langle 0, \frac{3\pi}{2}\rangle$*. Isto tako* $\frac{2x+\pi}{4}$ *varira po intervalu* $\langle \frac{\pi}{4}, \pi\rangle$ *kada* x *varira po intervalu* $\langle 0, \frac{3\pi}{2}\rangle$*. Sada imamo da je* $\sin x$ *neprekidna na* $\langle 0, \frac{3\pi}{2}\rangle$*, posebno je neprekidna u* $\frac{\pi}{2}$*. Zbog neparnosti imamo da je* $\sin x$ *neprekidna i u* $-\frac{\pi}{2}$*. Analogno se dokazuje neprekidnost u svim točkama oblika* $\frac{\pi}{2} + k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Neprekidnost funkcije $\cos x$ *na* $\mathbb{R}$ *lagano slijedi iz formule*

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Zbog stroge monotonosti funkcija $\sin x$*,* $\cos x$ *i* $\mathrm{ch}\,x$ *redom na intervalima* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$*,* $\langle 0, \pi\rangle$ *i* $\langle 0, +\infty\rangle$ *iz Teorema 6.7 imamo da su neprekidne funkcije* $\arcsin x$*,* $\arccos x$ *i* $\mathrm{Arch}\,x$ *redom na intervalima* $\langle -1, 1\rangle$*,* $\langle -1, 1\rangle$ *i* $\langle 1, +\infty\rangle$*. Kako su one definirane i u rubovima intervala želimo da su neprekidne i tamo. Dakle treba dokazati da su* $\arcsin x$ *i* $\arccos x$ *neprekidne zdesna u* -1 *i neprekidne slijeva u* 1*, te da je* $\mathrm{Arch}\,x$ *neprekidna zdesna u* 1*.*

Dokažimo da je $\arccos x$ *neprekidna slijeva u* 1*. Uzmimo proizvoljan* $\varepsilon > 0$ *i pronađimo* $\delta > 0$ *takav da vrijedi*

$$(x \leq 1; |x - 1| < \delta) \Longrightarrow (|\arccos x - \arccos 1| < \varepsilon).$$

Kako je $\arccos 1 = 0$ *i* $\arccos x \geq 0$ *za* $x \leq 1$*, imamo da je* arccos *neprekidna slijeva u* 1 *ako za proizvoljan* $\varepsilon > 0$ *pronađemo* $\delta > 0$ *takav da vrijedi*

$$(1 - x < \delta) \Longrightarrow (\arccos x < \varepsilon).$$

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ *uzmimo* $\delta = 1 - \cos\varepsilon$*. Očito je* $\delta > 0$*. Naravno za tako definirani* δ *i proizvoljni* ε *ne mora vrijediti* $\delta > 0$*, tj. možemo dobiti i* $\delta = 0$*, ali u Napomeni 6.1 smo* *rekli da kada govorimo o proizvoljnosti broja* ε *promatramo male* ε. *Tada za* $x \leq 1$ *za koje je* $1 - x < \delta$ *imamo* $1 - x < 1 - \cos\varepsilon$, *što je ekvivalentno s*

$$\arccos x < \varepsilon.$$

Dakle je $\arccos\, x$ *neprekidna slijeva u točki* 1.

Analogno se dokazuju i druge jednostrane neprekidnosti. Dakle su funkcije $\arccos\, x$, $\arcsin\, x$ *i* $\mathrm{Arch}\, x$ *redom neprekidne na* $[-1, 1]$, $[-1, 1]$ *i* $[1, +\infty\rangle$. ♣

Time smo pokazali da su sve elementarne funkcije neprekidne gdje god su definirane.

6.1.4 Granična vrijednost (limes) funkcije

Primjer 6.5.

1. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dana formulom*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

nije definirana u točki $x = 1$. *Pogledajmo kako se ponašaju njene vrijednosti u okolini točke* $x = 1$. *Računajući te vrijednosti, vidimo da su one blizu vrijednosti* -1; *za vrijednosti od* x *koje su malo veće od* 1, *vrijednosti funkcije su malo veće od* -1, *za* x *malo manji od* 1, *vrijednosti funkcije su malo manje od* -1. *Dakle, zaključujemo, dođemo li s* x *dovoljno blizu točki* 1, *dovest ćemo vrijednosti funkcije proizvoljno blizu vrijednosti* -1.

2. *Za funkciju* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *danu formulom*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

imamo problem u nuli, tj. funkcija nije definirana u točki 0. *Pogledajmo kako se ponašaju vrijednosti funkcije* f *u okolini točke* 0. *Jasno je da ako uzmemo točku* x *po apsolutnoj vrijednosti dovoljno malu, tj. dovoljno blizu nule, vrijednost funkcije postaje veće od po volji velikog realnog broja.*

3. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dana formulom*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

također ima problem u nuli, tj. funkcija nije definirana u točki 0. *Pogledajmo kako se ponašaju vrijednosti funkcije* f *u okolini točke* 0. *Ako uzmemo točku* x *dovoljno malu, ali pozitivnu, vrijednost funkcije postaje veće od po volji velikog pozitivnog realnog broja. S druge strane, ako uzmemo točku* x *dovoljno malu, ali negativnu, vrijednost funkcije postaje manja od po volji malog negativnog realnog broja.*

4. *Za funkciju* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *danu formulom*

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

znamo iz točke 5.2.8 da za velike vrijednost argumenta vrijednosti funkcije postaju po volji bliske broju $\frac{\pi}{2}$, *tj. pravac* $y = \frac{\pi}{2}$ *je horizontalna asimptota.*

5. *Neka je dana funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *formulom*

$$f(x) = x^x.$$

Primijetimo prvo da ona nije definirana za vrijednosti manje od nule (točka 5.2.5), a ne znamo izračunati ni njenu vrijednost za $x = 0$. *Dakle, ako želimo promatrati ponašanje oko nule, moramo se ograničiti samo na pozitivne vrijednosti. Za vrijednosti po volji blizu nule funkcija poprima vrijednosti bliske broju* 1.

6. *Za funkciju* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *danu formulom*

$$f(x) = \sin x$$

znamo da se vrijednosti funkcije ne približavaju niti jednoj određenoj realnoj vrijednosti za velike vrijednosti argumenta.♠

Situacije iz Primjera 6.5 matematički opisujemo pojmom limesa ili granične vrijednosti funkcije.

Definicija 6.3. *Neka je funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definirana na nekoj okolini točke* c, *osim, možda u samoj točki* c. *Realni broj* L *je* ***limes*** *ili* ***granična vrijednost*** *funkcije* f *u točki* c *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da*

$$(0 < |x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Ako funkcija ima limes L u točki c, onda pišemo

$$L = \lim_{x \longrightarrow c} f(x).$$

Ako limes postoji on je i jedinstven:

Teorem 6.10. *Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ koja je definirana na nekoj okolini točke c, osim, možda u samoj točki c. Neka postoje realni brojevi L i M takvi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da*

$$(0 < |x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon;\ |f(x) - M| < \varepsilon).$$

Tada je $L = M$.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $M \neq L$. Uzmimo sada $\varepsilon = \frac{1}{2}|M - L|$. Tada za taj ε, po pretpostavci, postoji $\delta > 0$, takav da

$$(|x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon;\ |f(x) - M| < \varepsilon).$$

Ali,

$$|M - L| = |M - f(x) + f(x) - L| \leq |f(x) - M| + |f(x) - L| < 2\varepsilon$$

vrijedi za argumente iz domene od f za koje je $|x - c| < \delta$. Dakle imamo

$$|M - L| < |M - L|,$$

što ne može biti. Dakle je $M = L$.$\clubsuit$

Napomena 6.4. *Uočimo da je definicija limesa (Definicija 6.2) jako slična definiciji neprekidnosti (Definicija 6.1) (vidjet ćemo kasnije da su to ustvari blisko povezani pojmovi), ali postoji bitna razlika. U definiciji limesa ne zahtijevamo da funkcija bude definirana u točki u kojoj gledamo limes, dok je za neprekidnost to nužno da bi se uopće moglo govoriti o neprekidnosti u točki.*

Uz malu zloporabu notacije možemo Definiciju 6.3 proširiti tako da uključuje i $c = +\infty$ odnosno $c = -\infty$. Pri tome uzimamo da je svaki otvoreni interval oblika $(M, +\infty)$ okolina od $+\infty$, i svaki interval oblika $(-\infty, M)$ je okolina od $-\infty$.

Tada kažemo da je $L = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da

$$(x > M) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Analogno, $L = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da

$$(x < -M) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Po analogiji s divergencijom niza u užem smislu (Definicija 4.6 i Napomena 4.2) možemo proširiti definiciju limesa tako da uključuje i slučaj $L = +\infty$ odnosno $L = -\infty$, pri čemu, naravno ne zaboravljamo, $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.
Kažemo da je $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = +\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(0 < |x - c| < \delta) \Longrightarrow (f(x) > M).$$

Analogno, $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = -\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(0 < |x - c| < \delta) \Longrightarrow (f(x) < -M).$$

Definiciju 6.3 možemo proširiti i na slučaj $c = +\infty$ odnosno $c = -\infty$ i $L = +\infty$ odnosno $-\infty$.
Kažemo da je $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $N > 0$ takav da za sve

$$(x > N) \Longrightarrow (f(x) > M);$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $N > 0$ takav da za sve

$$(x > N) \Longrightarrow (f(x) < -M);$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $N > 0$ takav da za sve

$$(x < -N) \Longrightarrow (f(x) > M);$$

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $N > 0$ takav da za sve

$$(x < -N) \Longrightarrow (f(x) < -M).$$

Želimo li naglasiti da se argument x približava vrijednosti c samo s jedne strane, recimo odozgo, tj. zdesna, pišemo

$$\lim_{x \longrightarrow c+} f(x).$$

Dakle, za funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu na nekoj okolini točke c, osim, možda, u samoj točki c kažemo da ima **limes** $L \in \mathbb{R}$ **zdesna** u točki c i pišemo

$$L = \lim_{x \longrightarrow c+} f(x)$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x > c; |x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Za funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu na nekoj okolini točke c, osim, možda u samoj točki c kažemo da ima **limes** $L \in \mathbb{R}$ **slijeva** u točki c i pišemo

$$L = \lim_{x \longrightarrow c-} f(x)$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$(x < c; |x - c| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$$

Teorem 6.11. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definirana na nekoj okolini točke c, osim, možda u samoj točki c. Funkcija f ima limes L (L može biti i $+\infty$ i $-\infty$) u c ako i samo ako ima limes slijeva i limes zdesna i oni su jednaki L.*

Dokaz:

Ako funkcija f ima limes L u točki c, onda je jasno iz Definicije 6.3 i definicija limesa zdesna i limesa slijeva da oni postoje i da su jednaki L.

Obrnuto, ako postoje limesi slijeva i zdesna i oni su jednaki L, onda iz Definicije 6.3 direktno slijedi da postoji i limes u točki c i jednak je L. ♣

Primjer 6.6. *Opišimo sada pomoću limesa Primjer 6.5.*

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1,$

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$

3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ *i* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, *tj. limesi slijeva i zdesna su različiti dakle ne postoji* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x}$,

4. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$

5. $\lim_{x \longrightarrow 0+} x^x = 1,$

6. *ne postoji* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sin x$.♠

6.1.5 Neprekidnost i limes

Primjer 6.7. *Iz Primjera 5.5 znamo da funkcija*

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ima prekid u nuli. Nadalje je očito da je

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \text{sign } x = 1, \quad \lim_{x \longrightarrow 0-} \text{sign } x = -1.$$

Dakle je

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \text{sign } x \neq \text{sign } 0$$

i

$$\lim_{x \longrightarrow 0-} \text{sign } x \neq \text{sign } 0.♠$$

Primjer 6.8. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dana formulom* $f(x) = x^2$ *je neprekidna na* $\mathbb{R}$ *(Teorem 6.1 i Primjer 6.4). Nadalje, očito vrijedi*

$$f(2) = \lim_{x \longrightarrow 2} f(x).♠$$

Primjeri 6.7 i 6.8 nam daju naslutiti da postoji neka uska veza između neprekidnosti funkcije i limesa u točki. Zaista imamo:

Teorem 6.12. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *je neprekidna u točki* c *ako i samo ako je*

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = f(c).$$

Dokaz:

Izravno iz Definicije 6.1 i 6.3.♣

Teorem 6.12 kaže da ako je funkcija neprekidna u točki c, onda limes i funkcija "komutiraju" tj. imamo

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x) = f(c) = f\left(\lim_{x \longrightarrow c} x\right).$$

Napomena 6.5. *U Teoremu 6.12 se podrazumijeva da je funkcija f definirana u točki c (Napomena 6.4) i da limes mora postojati, tj. konačan je broj.*

Sada direktno iz Napomene 6.5 imamo sljedeći rezultat za kompoziciju funkcija:

Teorem 6.13. *Neka je funkcija $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, i neka postoji limes funkcije f u točki c. Tada je*

$$\lim_{x \longrightarrow c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \longrightarrow c} f(x)\right). \clubsuit$$

Analogno kao Teorem 6.12 imamo:

Teorem 6.14. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna slijeva (zdesna) u točki c ako i samo ako je*

$$\lim_{x \longrightarrow c-} f(x) = f(c)$$

$$\left(\lim_{x \longrightarrow c+} f(x) = f(c)\right).$$

Dokaz:

Izravno iz Definicije 6.2 i definicije jednostranog limesa.$\clubsuit$

Teorem 6.15. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna u točki c ako i samo ako postoje limesi slijeva i zdesna u točki c i ako vrijedi*

$$\lim_{x \longrightarrow c-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow c+} f(x) = f(c).$$

Dokaz:

Izravno iz Teorema 6.11, 6.12 i 6.14.$\clubsuit$

Ako limes funkcije $f(x)$ u točki c nije jednak $f(c)$, onda funkcija $f(x)$ u točki c ima prekid (po Teoremu 6.15). Moguća su tri različita slučaja. Ako u točki c funkcija ima isti limes i slijeva i zdesna (različit od $f(c)$), onda takav prekid zovemo **uklonjivim**. Redefiniranjem vrijednosti funkcije $f(x)$ u točki c kao $f(c) = \lim_{x \longrightarrow c} f(x)$ dobijemo neprekidnu funkciju. Ako funkcija $f(x)$ ima u točki c različite i konačne limese slijeva i zdesna, onda ona, po Teoremu 6.15, mora u točki c imati prekid. Takav prekid zove se **prekid 1. vrste**. Funkcije koje imaju samo ukonjive prekide i prekide 1. vrste zadržavaju neka važna svojstva neprekidnih funkcija (vidjeti Napomenu 7.10). Funkcija $f(x)$ ima u točki c **prekid 2. vrste** ako je barem jedan od limesa slijeva ili zdesna beskonačan ili ne postoji. Primjer je $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ za $x = 0$.

6.1.6 Neodređeni oblici

Zašto moramo računati limese? Zašto ne možemo naprosto "uvrstiti" vrijednost argumenta u formulu?
Odgovor je da možemo uvrstiti, no može se desiti da dobijemo izraz koji nije definiran, jer operacije nisu definirane i operandi nisu realni brojevi. To se posebno odnosi na veličine $+\infty$ i $-\infty$. Kako one nisu realni brojevi, neka od pravila za računanje s realnim brojevima ne vrijede za računanje s $+\infty$ i $-\infty$.
Pravila za računanje s beskonačnim veličinama:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
2. $+\infty \pm a = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan;
3. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
4. $-\infty \pm a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan;
5. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;
6. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$;
7. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;
8. $(+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0; \end{cases}$
9. $(-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0; \end{cases}$
10. $\frac{a}{+\infty} = 0$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan;
11. $\frac{a}{-\infty} = 0$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan.

Sljedeće operacije s beskonačnim veličinama nisu definirane:

1. $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$;
2. $(+\infty)+(-\infty)$;
3. $+\infty\cdot 0$, $-\infty\cdot 0$;
4. $(+\infty)^0$, $(-\infty)^0$;
5. $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$.

Osim s beskonačnim veličinama, mogu se desiti i situacije u kojima se javljaju nedefinirane operacije s nulom:

1. $\frac{0}{0}$;
2. 0^0.

Tih sedam (do na predznak) situacija zovemo **neodređenim oblicima**.
"Sedam veličanstvenih":

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad \infty\cdot 0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty,\quad 0^\infty.$$

Što znači da je izraz neodređen?
Ako se uvrštavanjem vrijednosti $x=c$ u funkciju $f(x)$ dobije realan broj, onda je to i limes od $f(x)$ kad $x\longrightarrow c$. Ako se dobije jedan od neodređenih oblika, onda taj izraz treba transformirati u nešto što će se dati izračunati.

Iz Primjera 6.6 znamo da "vrijednost" izraza $\frac{0}{0}$ koji se dobije "uvrštavanjem" vrijednosti $x=1$ u funkciju $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ je -1. Analogno se dokaže da je "vrijednost" izraza za koji se dobije uvrštavanjem vrijednosti $x=2$ u funkciju $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ je 1. Dakle, s jedne strane smo dobili da je "vrijednost" izraza $\frac{0}{0}$ jednaka -1 a s druge strane 1, pa je $\frac{0}{0}$ neodređen oblik.

6.1.7 Računanje limesa

Neki temeljni limesi

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^n=+\infty$, $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan;

2. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty, & n \in \mathbb{N} \quad \text{neparan} \\ +\infty, & n \in \mathbb{N} \quad \text{paran}; \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan;

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0; \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} x^{-n} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0-} x^{-n} = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ paran;

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} x^{-n} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow 0-} x^{-n} = -\infty$, $n \in \mathbb{N}$ neparan;

7. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ +\infty, & \alpha < 0; \end{cases}$

8. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1; \end{cases}$

9. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} a^{x} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$

10. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$

11. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$

U gornjim pravilima svuda imamo $\alpha \in \mathbb{R}$. Sva se ova pravila mogu strogo izvesti iz svojstava limesa i elementarnih funkcija.

Primjer 6.9. *Dokažimo da je*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \log_a x = +\infty,$$

za $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Treba dokazati da za svaki $M > 0$ *postoji* $N > 0$ *takav da za sve*

$$(x > N) \Longrightarrow (\log_a x > M).$$

Iz točke 5.2.6 znamo da je za $a > 1$ logaritamska funkcija strogo rastuća na $(0, +\infty)$ i da joj je slika cijeli $\mathbb{R}$. Dakle, za svaki $M > 0$ sigurno postoji $N > 0$ takav da

$$(x > N) \Longrightarrow (\log_a x > M).$$

To znači da je

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \log_a x = +\infty. \spadesuit$$

Vrijednosti ostalih deset limesa dokazuju se analogno kao u Primjeru 6.9, koristeći definicije limesa i jednostranih limesa (točka 6.1.4), svojstva potencija, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija, tj. njihov rast, pad, parnost, neparnost i slično.

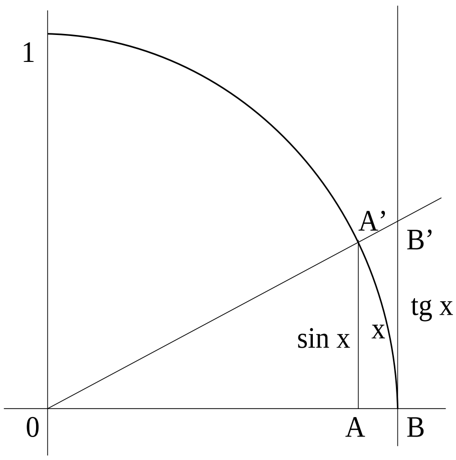
Osim ovih limesa, važnu ulogu igraju i

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{i} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Teorem 6.16.

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Dokaz:



Slika 6.2: Uz izvod osnovnog trigonometrijskog limesa.

Uzmimo trigonometrijsku (jediničnu) kružnicu sa središtem u ishodištu O i pravac paralelan s osi y koji prolazi točkom $B = (1, 0)$ u ravnini. Kako gledamo limes funkcije $\frac{\sin x}{x}$ kada $x \longrightarrow 0$, i zbog parnosti od $\frac{\sin x}{x}$, jasno je *da je dovoljno promatrati* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Kada s pravca uzmemo* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *i namotamo ga na kružnicu on se preslikava u točku* $A' = (\cos x, \sin x)$. *Označimo s* $A = (\cos x, 0)$, *ortogonalnu projekciju točke* A' *na* x *os, i s* $B' = (1, \text{tg } x)$, *presjek polupravca kroz ishodište i točku* A' *s tangensnom osi (interpretacija tangensa preko trigonometrijske kružnice). Jasno je da se trokut* OAA' *nalazi unutar kružnog isječka* OBA', *koji se nalazi unutar trokuta* OBB'. *Dakle imamo*

$$P(OAA') \leq P(OBA') \leq P(OBB').$$

Površina kružnog isječka s duljinom luka x *dana je formulom*

$$P(OBA') = \frac{xr}{2},$$

odnosno

$$P(OBA') = \frac{x}{2}$$

jer je kružnica jedinična. Dakle imamo

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg } x.$$

Podijelimo li ovaj izraz sa $\sin x$ *dobijemo*

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x},$$

odnosno

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Pustimo li sada $x \longrightarrow 0$ *u gornjoj nejednakosti, i iz činjenice da je* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ *(Teorem 6.12) dobijemo*

$$1 \leq \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

odnosno

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \clubsuit$$

Teorem 6.17.

$$\boxed{\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.} \clubsuit$$

Primjer 6.10.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

i

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$a>0,\ a\in\mathbb{R}$.

Promatramo prvo

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Iz Teorema 6.12 i Teorema 6.17 slijedi

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1.$$

Dakle je

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Označimo sada e^x-1 sa t. Tada je jasno da $t\longrightarrow 0$ kada $x\longrightarrow 0$, i da je $x=\ln(t+1)$. Zbog toga je

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=1.$$

Iz točke 5.2.6 znamo da za proizvoljni $a>0$ vrijedi

$$a^x=e^{x\ln a}.$$

Dakle imamo

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}.$$

Sada uz zamjenu varijable $t=e^{x\ln a}-1$ imamo da $t\longrightarrow 0$ kad $x\longrightarrow 0$ i $x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}$. Dakle imamo

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{a\ln x}-1}{x}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\ln a.\spadesuit$$

Svojstva limesa i pravila za njihovo računanje

Teorem 6.18. *Neka postoje*

$$\lim_{x\longrightarrow c}f(x)$$

i

$$\lim_{x\longrightarrow c}g(x)$$

funkcija $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Tada

1. *funkcija $f \pm g$ ima limes u točki c i vrijedi*

$$\lim_{x \longrightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \longrightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \longrightarrow c} g(x);$$

2. *funkcija λf ima limes u točki c za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{R}$ i vrijedi*

$$\lim_{x \longrightarrow c} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \longrightarrow c} f(x);$$

3. *funkcija $f \cdot g$ ima limes u točki c i vrijedi*

$$\lim_{x \longrightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \longrightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \longrightarrow c} g(x);$$

4. *funkcija $\frac{f}{g}$ ima limes u točki c i vrijedi*

$$\lim_{x \longrightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \longrightarrow c} f(x)}{\lim_{x \longrightarrow c} g(x)}$$

ako je $g(c) \neq 0$ i $\lim_{x \longrightarrow c} g(x) \neq 0$. ♣

Teoremi 6.13, 6.16, 6.17, 6.18 i temeljni limesi iz točke 6.1.7 su nam dovoljni za računanje gotovo svih limesa.

6.2 Derivacija funkcije

6.2.1 Motivacija

Osim ponašanja vrijednosti neke veličine i načina na koji ona ovisi o nekoj drugoj veličini, važno je znati i kako se brzo ona mijenja kada se mijenja veličina o kojoj ona ovisi.

Primjer 6.11. *Automobil je put od Zagreba do Karlovca (50 km) prešao za pola sata. Kojom se prosječnom brzinom kretao?*

Prema formuli

$$v = \frac{s}{t},$$

gdje je s prijeđeni put, a t vrijeme za koje smo prešli taj put, dobivamo

$$v = \frac{50}{0.5} = 100 \frac{km}{h}.$$

Gornja nam formula ne daje nikakvu informaciju o tome kojom se brzinom automobil kretao npr. 15 *minuta nakon polaska.*
Kretanje je promjena položaja u vremenu. Trenutna brzina, za razliku od prosječne, zahtijeva podrobnije razmatranje.
Ideja je koristiti ono što znamo, tj. promatrati prosječnu brzinu na sve kraćim i kraćim intervalima oko trenutka koji nas zanima.
Promatramo prosječnu brzinu na vremenskom intervalu (a, b). *Dana je formulom*

$$\overline{v} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a},$$

gdje je $s(b)$ *odnosno* $s(a)$ *prijeđeni put do trenutka* b *odnosno trenutka* a.
Uzmimo $a = t_0$, $b = t_0 + \Delta t$, *za neki mali* Δt *i pogledajmo prosječnu brzinu na* $[t_0, t_0 + \Delta t]$, *tj.*

$$\overline{v} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Što je Δt *manji, to bolje ovaj izraz aproksimira "pravu" brzinu u* $t = t_0$. *No uvrstimo li* $\Delta t = 0$ *u gornju formulu, dobivamo neodređeni izraz tipa* $\frac{0}{0}$. *Dakle, moramo promatrati limes. Definiramo brzinu u točki* t_0 *s*

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Ova formula predstavlja osnovnu ideju i temelj diferencijalnog računa.♠

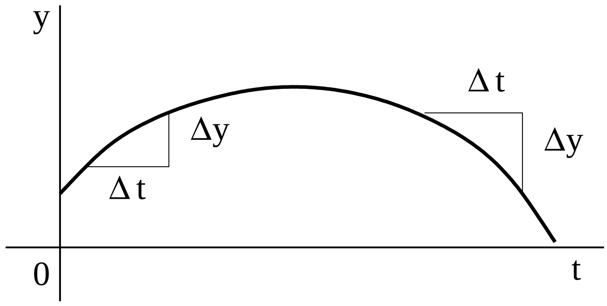
Dok je Newton došao do otkrića diferencijalnog računa preko problema brzine, Leibniz je diferencijalni račun otkrio preko problema tangente.

Primjer 6.12. *Projektil je bačen vertikalno uvis u trenutku* $t = 0$ *nekom početnom brzinom* v_0 *s visine* y_0. *Iz fizike znamo da je visina projektila u trenutku* t *dana formulom*

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Prosječna brzina projektila u drugoj sekundi njegovog leta je

$$\frac{y(2) - y(1)}{2 - 1}.$$



Slika 6.3: Ovisnost visine projektila o vremenu.

Prosječna brzina u 1001*-oj milisekundi je*

$$\frac{y(1.001) - y(1)}{1.001 - 1}.$$

Ova druga je bolja aproksimacija prave brzine projektila u $t_0 = 1$ *nego ona prva.*

Općenito, prosječna brzina projektila u vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ *je dana izrazom*

$$\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

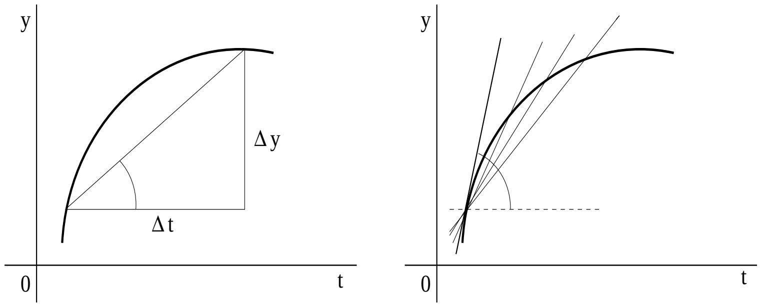
No izraz $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ *je tangens kuta koji sekanta krivulje* $y = y(t)$ *kroz točke* $(t_0, y(t_0))$ *i* $(t_0 + \Delta t, y(t_0 + \Delta t))$ *zatvara s osi* x*, a to je jednako koeficijent smjera te sekante. Dakle, prosječna brzina odgovara koeficijentu smjera sekante,*

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Prava brzina u trenutku t_0 *bi onda odgovarala koeficijentu smjera tangente na krivulju* $y = y(t)$ *u točki s apscisom* t_0*. Time smo mehanički problem određivanja trenutne brzine sveli na geometrijski problem određivanja koeficijenta smjera tangente na graf funkcije koja opisuje ovisnost visine o vremenu.*♠

6.2.2 Derivacija funkcije u točki

U Primjeru 6.11 smo vidjeli da limes kvocijenta $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ mjeri brzinu promjene veličine f u ovisnosti o veličini x.



Slika 6.4: Sekante i tangenta.

Definicija 6.4. *Neka je funkcija f definirana na nekom otvorenom intervalu I koji sadrži točku x_0, tj. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Ako postoji*

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

onda kažemo da je funkcija f ***diferencijabilna ili derivabilna u točki*** *x_0 i broj*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

zovemo ***derivacija funkcije*** *f* ***u točki*** *x_0.*

Primjer 6.13. *Izračunajmo derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 3$.*

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} (6 + \Delta x) = 6. \spadesuit$$

Primjer 6.14. *Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sin x$ u točki $x_0 = \pi$.*

$$\begin{aligned} f'(\pi) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(\pi + \Delta x) - f(\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \Delta x) - \sin \pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \pi \cos \Delta x + \cos \pi \sin \Delta x - \sin \pi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\cos \pi \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \cos \pi \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos \pi = -1. \spadesuit \end{aligned}$$

6.2.3 Derivacija funkcije

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki nekog otvorenog intervala I, onda je pravilom

$$x \longmapsto f'(x)$$

dobro definirana jedna funkcija na I. Tu funkciju zovemo **derivacija funkcije** f i označavamo s $f'(x)$. Dakle je

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.}$$

Napomena 6.6. *Uočimo bitnu razliku. Derivacija funkcije f u točki x_0 je* ***broj****, koji se označava sa $f'(x_0)$. Derivacija funkcije f (na nekom intervalu I na kojem je definirana i na kojem je u svakoj točki diferencijabilna) je* ***funkcija****, koja se označava s $f'(x)$ i koja svakoj vrijednosti $x \in I$ pridružuje broj $f'(x)$.*

Primjer 6.15. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Derivacija funkcije $f(x) = kx + l$ je $f'(x) = k$, za proizvoljne $k, l \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} & \frac{kx + k\Delta x + l - kx - l}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} k = k. \end{aligned}$$

   Dakle brzina promjene linearne funkcije je konstanta.

   U specijalnom slučaju kada je $k = 0$, tj. funkcija $f(x) = l$ je konstanta, a iz gornjeg računa imamo da je

$$f'(x) = 0.$$

   Dakle je promjena brzine konstantne funkcije nula, što smo i očekivali.

2. *Derivacija funkcije $f(x) = x^2$ je $f'(x) = 2x$.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \spadesuit \end{aligned}$$

Primjer 6.16. *Derivacija funkcije* $f(x) = \sin x$ *je* $f'(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \\
&= \sin x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$$

imamo

$$\begin{aligned}
&\sin x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x + \sin x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{-2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= \cos x - \sin x \left(\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x - \sin x \cdot 1 \cdot 0 = \cos x. \spadesuit
\end{aligned}$$

Grafička interpretacija

Ako je u nekoj točki derivacija funkcije pozitivna, to znači da je koeficijent smjera tangente u toj točki pozitivan, odnosno da je tangenta pravac koji raste. Ako je funkcija definirana na nekom intervalu i ako je $f'(x) > 0$ za sve x iz tog intervala, onda je funkcija f rastuća na tom intervalu (jer je tangenta u svakoj točki tog intervala rastuća). Slično, ako je $f'(x) < 0$ na nekom intervalu, funkcija pada na tom intervalu.

U točkama gdje je $f'(x) = 0$, tangenta je paralelna s osi x. Tu funkcija niti raste niti pada. Takve točke zovemo **stacionarne točke**.

6.2.4 Računanje derivacija

Kako je definicija derivacije (Definicija 6.4) ustvari limes funkcije

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

mogu se javiti neki problemi pri računanju derivacije. To su npr., problem postojanja limesa, problem različitih vrijednosti slijeva i zdesna, problem konačnosti limesa, problem rubova domene.

Primjer 6.17. *1. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = |x|$ nije derivabilna u $x_0 = 0$.*

Pogledajmo sljedeće limese:

$$L = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

i

$$M = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Lagano se vidi da je $M = 1$ i $L = -1$. Dakle iz Teorema 6.11 zaključujemo da

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ne postoji, tj. ne postoji $f'(0)$.

2. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nije derivabilna u $x_0 = 0$.

Pogledajmo sljedeći limes:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

Iz točke 6.1.7 imamo da je

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty,$$

dakle ne postoji $f'(0)$.

3. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ nije derivabilna u $x_0 = 0$.

Pogledajmo sljedeći limes:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} - \sqrt[3]{x_0^2}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}.$$

Iz točke 6.1.7 imamo da je

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = +\infty,$$

dakle ne postoji $f'(0)$.♠

Teorem 6.19. *Neka je funkcija f derivabilna u točki x_0 otvorenog intervala I, $x_0 \in I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada je f i neprekidna u x_0.*

Dokaz:

Funkcija f je derivabilna u $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, dakle postoji limes

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definirajmo sada funkciju $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$g(x_0 + \Delta x) = \begin{cases} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, & \Delta x \neq 0 \\ f'(x_0), & \Delta x = 0 \end{cases}.$$

Kako je

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) = f'(x_0)$$

iz Teorema 6.12 zaključujemo da je funkcija g neprekidna u x_0. Nadalje, za $\Delta x \neq 0$ vrijedi

$$f(x_0 + \Delta x) = g(x_0 + \Delta x)\Delta x + f(x_0).$$

Sada imamo

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} (g(x_0 + \Delta x)\Delta x + f(x_0))$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} f(x_0) = g(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

Iz Teorema 6.12 imamo da je f neprekidna u x_0.♣

Obrat Teorema 6.19 općenito ne vrijedi. Sve tri funkcije iz Primjera 6.17 su neprekidne u nuli, ali vidjeli smo da nisu derivabilne.

Derivacija zbroja, razlike, produkta i kvocijenta funkcija

Teorem 6.20. *Neka su funkcije $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilne na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, $I \subseteq \mathcal{D}(g)$. Tada su na I derivabilne i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (tamo gdje je definirana, tj. za one $x \in I$ za koje je $g(x) \neq 0$), i vrijedi*

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dokaz:

1. $$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x).$$

2. $$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} g(x+\Delta x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x) \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} g(x+\Delta x) + f(x)g'(x).$$
Sada iz Teorema 6.19 imamo $\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} g(x+\Delta x) = g(x)$, *odnosno*
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

3. *Izračunajmo prvo* $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$. *Kako je* $g(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1$, *imamo* $\left(g(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = 0$, *tj. po pravilu derivacije produkta* $g'(x)\frac{1}{g(x)} + g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = 0$. *Dakle*
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$
Kako je $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'$, *po pravilu deriviranja produkta imamo* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *tj.*
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \clubsuit$$

Napomena 6.7. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Tada je funkcija λf, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljan, derivabilna na I i vrijedi*

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),$$

za svaki $x \in I$.

Dokaz:

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom $g(x) = \lambda$. Očito je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, dakle je po Teoremu 6.20 funkcija $g \cdot f = \lambda f$ derivabilna na I i vrijedi

$$(\lambda f)'(x) = 0 \cdot f(x) + \lambda f'(x) = \lambda f'(x),$$

za svaki $x \in I$.♣

Derivacija kompozicije funkcija

Teorem 6.21. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u točki x otvorenog intervala I, $x \in I \subseteq \mathcal{D}(f)$, i funkcija $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u točki $f(x)$ otvorenog intervala J, $f(x) \in J \subseteq \mathcal{D}(g)$. Tada je funkcija $g \circ f$ derivabilna u x i vrijedi*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).}\clubsuit$$

Gornju formulu za derivaciju kompozicije funkcija zovemo **lančano pravilo**.

Primjer 6.18. *Koja je derivacija funkcije $h(x) = (\sin x)^2$?*

Funkcija h je kompozicija $g \circ f$, gdje je $g(x) = x^2$, $f(x) = \sin x$. Dakle, iz Teorema 6.21, Primjera 6.15 i Primjera 6.16 imamo

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2f(x)f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Izračunajmo još i $(f \circ g)'$. Dakle imamo

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2)(2x) = 2x \cos x^2.\spadesuit$$

Derivacija inverzne funkcije

Specijalan slučaj kompozicije funkcija je kada je funkcija g inverzna funkciji f, tj. $g = f^{-1}$. Dakle imamo

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Sada primjenom Teorema 6.21 imamo

$$(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1,$$

odnosno

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ovo se, naravno, može provesti samo ako je $f'(x) \neq 0$.

Teorem 6.22. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu I, $f'(x) \neq 0$ na I i neka postoji f^{-1}. Tada je f^{-1} derivabilna i vrijedi*

$$\boxed{(f^{-1})'(f(x)) = \tfrac{1}{f'(x)}.} \clubsuit$$

Primjer 6.19. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Derivacija funkcije $g(x) = \ln x$ je $g'(x) = \frac{1}{x}$.*

   Pogledajmo prvo derivaciju funkcije $f(x) = e^x$. Dakle imamo

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

   Iz Primjera 6.10 imamo da je

   $$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1,$$

   dakle je

   $$f'(x) = e^x.$$

   Kako je $(f \circ g)(x) = x$ iz Teorema 6.22 imamo da je

   $$f'(g(x))g'(x) = e^{\ln x} g'(x) = xg'(x) = 1,$$

   odnosno

   $$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. *Derivacija funkcije* $g(x) = \sqrt{x}$ *je* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Iz Primjera 6.15 znamo da je derivacija funkcije $f(x) = x^2$ *funkcija* $f'(x) = 2x$, *i vrijedi*

$$(f \circ g)(x) = x.$$

   Iz Teorema 6.22 imamo da je

$$f'(g(x))g'(x) = 2\sqrt{x}g'(x) = 1,$$

   odnosno

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\spadesuit$$

Derivacije elementarnih funkcija

Na osnovi Teorema 6.20, 6.21 i 6.22 mogu se izračunati derivacije svih elementarnih funkcija. Osnovne derivacije dajemo u sljedećoj tablici. Derivacije svih drugih elementarnih funkcija mogu se dobiti primjenom pravila iz Teorema 6.20, 6.21 i 6.22 i derivacijama iz donje tablice.

Napomena 6.8. *Studentima se preporučuje da provjere donje formule samostalno.*

6.2.5 Diferencijal funkcije i lokalna linearizacija

Pretpostavimo da nas za danu funkciju $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ zanima kako se promijeni vrijednost funkcije u točki $x_0 \in I$ kada se argument promijeni za Δx. Točan iznos promjene vrijednosti funkcije je

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

no to je ponekad teško izračunati. Umjesto te vrijednosti lakše je izračunati razliku Δf između $f(x_0)$ i točke na tangenti funkcije f kroz točku $(x_0, f(x_0))$ s apscisom $x_0 + \Delta x$. Jasno je da je $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\ \alpha$, odnosno

$$\Delta f = \mathrm{tg}\ \alpha \Delta x,$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathrm{arctg}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\mathrm{arcctg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathrm{th}\ x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2\ x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{cth}\ x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2\ x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{Arsh}\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{tg}\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{Arch}\ x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{ctg}\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{Arth}\ x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcth}\ x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Tablica 6.1: Derivacije elementarnih funkcija

gdje je α kut između tangente funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ i osi x. Iz formule $\Delta f = \mathrm{tg}\ \alpha \Delta x$ vidimo da će za male vrijednosti od Δx i pogreška

$$\Delta f - (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$$

učinjena zamjenom krivulje $y = f(x)$ tangentom kroz $(x_0, f(x_0))$ biti dosta mala, tj. vrijednost Δf će biti to bliža vrijednosti $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ što je manji Δx. Prijeđemo li sada s konačnog prirasta Δx funkcije f na beskonačno mali prirast dx, veličinu

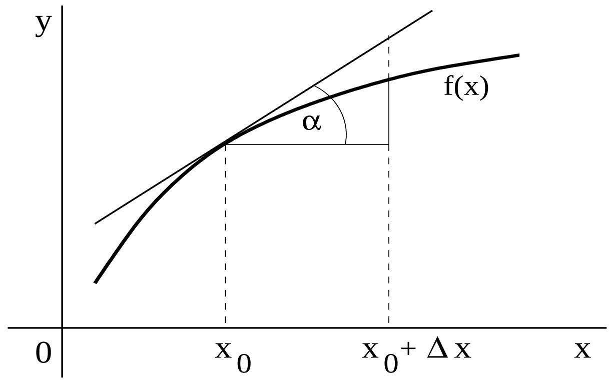
$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

zovemo diferencijal funkcije f **u točki** x_0. Ako f ima derivaciju u svakoj točki nekog otvorenog intervala I, onda je s

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

definiran **diferencijal funkcije** f **na intervalu** I.

Rekli smo da je derivacija funkcije f u točki $x_0 \in I$ ustvari koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. Dakle, jednadžba tangente u



Slika 6.5: Diferencijal funkcije.

točki $(x_0, f(x_0))$ na graf funkcije f je dana s

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

odnosno s

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(točka 2.1.5).

Teorem 6.23. *Neka je $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in I$ i*

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

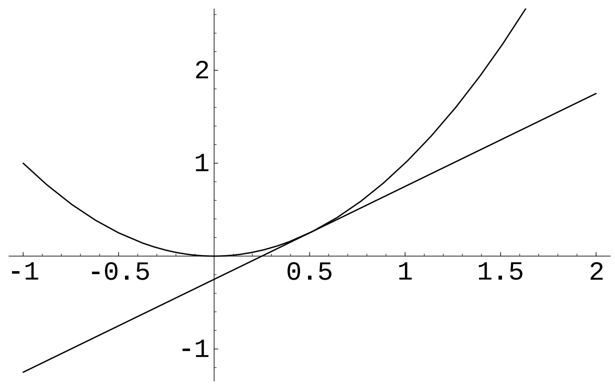
Tada od svih polinoma stupnja najviše jedan, polinom g najbolje aproksimira funkciju f u neposrednoj okolini točke x_0.♣

Kako se u okolini točke x_0 tangenta dobro priljubljuje uz graf funkcije f (Teorem 6.23), to su razlike ordinata na grafu i na tangenti male za istu apscisu. Dakle, dovoljno blizu točki x_0 možemo graf funkcije f zamijeniti komadom tangente:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Gornja formula predstavlja **lokalnu linearizaciju** funkcije f u točki $x = x_0$.

Primjer 6.20. *Pronađimo lokalnu linearizaciju funkcije $f(x) = \sin x$ u točki $x_0 = 0$.*



Slika 6.6: Tangenta je graf najbolje linearne aproksimacije funkcije u okolini neke točke.

Iz Primjera 6.16 znamo da je $f'(x) = \cos x$, *dakle je* $f'(0) = \cos 0 = 1$. *Imamo*

$$f(x) \approx \sin 0 + \cos 0(x - 0) = x,$$

odnosno

$$\sin x \approx x$$

na dovoljno maloj okolini oko $x_0 = 0$.
Zamjena funkcije $f(x) = \sin x$ *funkcijom* $g(x) = x$ *"za male* x*" omogućava jednostavno rješavanje diferencijalne jednadžbe koja opisuje gibanje njihala "za male otklone".*
Za velike otklone to ne možemo učiniti jer nemamo više dobru aproksimaciju funkcijom $g(x) = x$ *i njihalo se više ne ponaša kao harmonički oscilator.*♠

Primjer 6.21. *"Pravilo* 70*" za udvostručenje iznosa novca uloženog uz* $i\%$ *kamata godišnje. Koliko godina treba da se novac uložen uz* $i\%$ *kamata godišnje udvostruči?*

Stavimo $r = \frac{i}{100}$. *Tada je suma novca nakon* t *godina dana formulom*

$$S(t) = G(1 + r)^t,$$

gdje je G *glavnica.*
Nas zanima vrijeme koje mora proći da se uloženi novac udvostruči. Rješavamo jednadžbu

$$S(t) = 2G.$$

Imamo

$$2G = G(1+r)^t,$$

odnosno

$$2 = (1+r)^t.$$

Logaritmiranjem gornjeg izraza dobivamo formulu

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}.$$

Linearizirajmo lokalno funkciju $f(r) = \ln(1+r)$ *oko* $r = 0$.
Kako je $f(0) = 0$, $f'(r) = \frac{1}{1+r}$, *odnosno* $f'(0) = 1$, *imamo*

$$f(r) \approx f(0) + f'(0)(r-0) = r.$$

Dakle imamo

$$\ln(1+r) \approx r$$

na dovoljno maloj okolini oko točke $r = 0$.
Sada imamo

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \approx \frac{\ln 2}{r} = \frac{100 \ln 2}{i} \approx \frac{70}{i}.$$

Dakle dobili smo formulu za približno vrijeme udvostručenja uloženog novca. Uočimo da je iz te formule puno lakše izračunati vrijeme nego iz točne formule

$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}.$$

Za male r *je učinjena pogreška također mala.*♠

Primjer 6.22. *Pronađimo lokalnu linearizaciju funkcije* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *u točki* $x_0 = 0$.

Kako je $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ *odnosno* $f'(0) = \frac{1}{2}$ *imamo*

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Dakle je

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

na dovoljno maloj okolini oko točke $x_0 = 0$.♠

6.2.6 Derivacije višeg reda

Ponekad je bitno znati i brzinu promjene brzine promjene. Npr., ubrzanje ili akceleracija je brzina promjene brzine, dakle derivacija brzine. Kako je sama brzina derivacija puta po vremenu imamo da je ubrzanje derivacija (po vremenu) derivacije puta po vremenu. To je druga derivacija puta po vremenu. To nas vodi do opće definicije.

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki otvorenog intervala $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, onda iz točke 6.2.3 znamo da je dobro definirana funkcija

$$x \longmapsto f'(x),$$

za svaki $x \in I$. Sada ako u točki $x_0 \in I$ postoji limes

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x},$$

kažemo da funkcija f ima **drugu derivaciju u točki** x_0 i pišemo

$$\boxed{f''(x_0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.}$$

Gornjim je izrazom definirano preslikavanje

$$x_0 \longmapsto f''(x_0).$$

Dakle, ako je to pridruživanje definirano u svakoj točki nekog intervala $J \subseteq \mathcal{D}(f') = I$, onda se funkcija

$$x \longmapsto f''(x)$$

označava s f'' i zove druga derivacija funkcije f (na J). Dakle, vrijedi

$$\boxed{f''(x) = [f'(x)]',}$$

za svaki $x \in J$.

Analogno se definiraju i derivacije višeg reda:

$$f'''(x), \quad f^{IV}(x), \quad . \quad . \quad . \quad , \quad f^{(n)}(x),$$

i vrijedi

$$\boxed{f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]',}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Geometrijska interpretacija predznaka i iznosa prve derivacije je nagib i strmina tangente. Geometrijska interpretacija predznaka druge derivacije vezana je uz konveksnost i konkavnost grafa funkcije, a njezinog iznosa uz zakrivljenost grafa. (Graf linearne funkcije je pravac. Druga derivacija linearne funkcije je identički jednaka nuli, tj. pravac se ne zakrivljuje. Odatle ideja da se druga derivacija veže uz zakrivljenost. Odnos nije jednostavan, zakrivljenost funkcije f u točki x je dana s

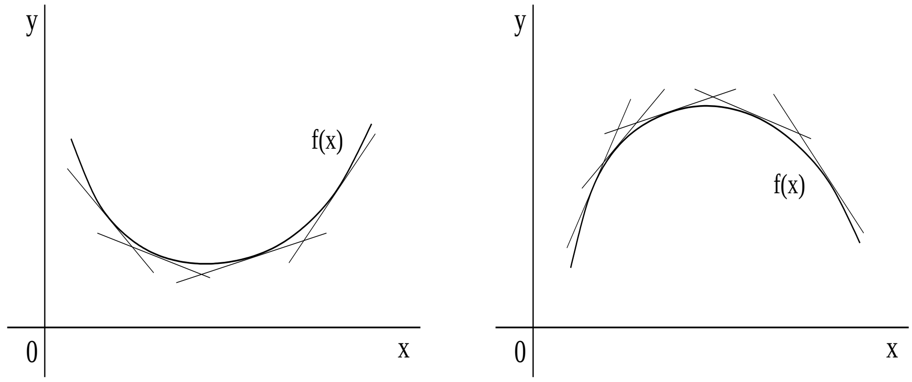
$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{(1+[f'(x)]^2)^3}},$$

gdje je

$$\rho(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$$

polumjer kružnice koja se od svih mogućih kružnica najbolje priljubljuje uz graf funkcije f u točki $(x, f(x))$. O tome će biti više riječi u Matematici II.)

Pozitivnost druge derivacije znači rast prve derivacije; negativnost druge derivacije znači pad prve derivacije. Dakle, ako je (u nekoj točki) (na nekom intervalu) $f''(x) > 0$ to znači da koeficijent smjera tangente na graf funkcije f raste kad idemo tim intervalom s lijeva na desno. Kažemo da je funkcija f **konveksna** na tom intervalu. Ako je $f''(x) < 0$ na intervalu, koeficijent smjera tangente pada s lijeva na desno. Takve funkcije zovemo **konkavnima** (na promatranom intervalu).



Slika 6.7: Konveksna (lijevo) i konkavna (desno) glatka funkcija.

Pojmovi konveksnosti i konkavnosti imaju smisla i u točki, tj. funkcija f je konveksna u x_0 ako je $f''(x_0) > 0$, a konkavna u x_0 ako je $f''(x_0) < 0$.

Točke u kojima se $f''(x)$ poništava i mijenja predznak su zanimljive jer se u njima graf funkcije ponaša vrlo slično tangenti, tj. ravan je (lokalno) i prelazi s jedne strane tangente na drugu. Takve točke se zovu t**očke prijevoja** ili **točke infleksije**. To su točke prijelaza iz konveksnosti u konkavnost i obratno. U tim točkama funkcija najbrže odnosno najsporije raste odnosno pada.

Primjer 6.23. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x^3$ ima točku infleksije u $x_0 = 0$.*

Očito je $f'(x) = 3x^2$, odnosno $f''(x) = 6x$. Dakle je $f''(x) = 0$ ako i samo ako je $x = x_0 = 0$. Nadalje je $f''(x) > 0$ za $x > 0$ i $f''(x) < 0$ za $x < 0$, tj. f je konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$ i konkavna na $\langle -\infty, 0\rangle$. Dakle $x_0 = 0$ je točka infleksije.♠

6.2.7 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Vidjeli smo da je neprekidnost funkcije u točki i na intervalu svojstvo koje je nužno za postojanje derivacije u točki (na intervalu) (Teorem 6.19). Želimo li raditi s derivacijama višeg reda, ne samo funkcija, nego i njene derivacije moraju biti neprekidne.
Funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je **klase** $C^1(I)$ ako ima prvu derivaciju na I i ako je ta prva derivacija neprekidna na I. Slično, funkcija f je klase $C^k(I)$ ako ima sve derivacije do uključivo reda k na I i ako je $f^{(k)}$ neprekidna na I.
Za funkcije neprekidne na I kažemo da su klase $C^0(I)$ ili samo $C(I)$. Ako funkcija ima neprekidne derivacije bilo kojeg reda, kao npr. $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$, kažemo da su klase $C^\infty(I)$.
Za funkcije iz $C^1(I)$, $C^2(I)$,...,$C^\infty(I)$ kažemo još da su **glatke**.

Napomena 6.9. *Iz Teorema 6.1, Teorema 6.20 i Napomene 6.7 direktno slijedi da su skupovi $C^0(I)$, $C^1(I)$, ... i $C^\infty(I)$ realni vektorski prostori. Štoviše, to su podprostori realnog vektorskog prostora svih funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (Napomena 5.13). Beskonačnodimenzionalni su, jer npr. skup $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ je linearno nezavisan za svaki $n \in \mathbb{N}$ (Teorem 5.3), i svaka funkcija iz tog skupa ima derivaciju svakog reda na I. Dakle beskonačni skup $\{x^n : n = 0, 1, ...\}$ se nalazi u nekoj bazi svakog od tih vektorskih prostora.*

Napomena 6.10. *Vrijedi*

$$C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset ... \supset C^\infty(I).$$

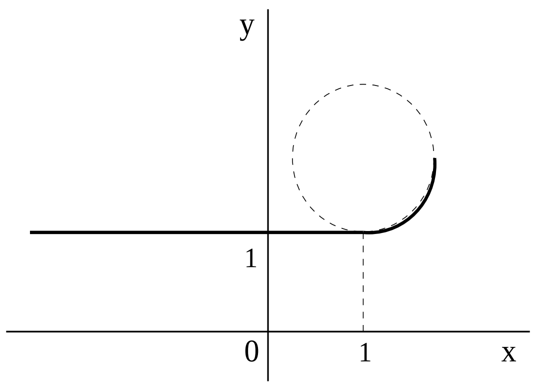
Dokaz:

Očito vrijedi

$$C^0(I) \supseteq C^1(I) \supseteq C^2(I) \supseteq ... \supseteq C^\infty(I),$$

jer ako je npr. funkcija klase $n+1$, onda ona mora biti i klase n, $n = 0, 1, ...$
Iz Primjera 6.17 znamo da za funkciju danu formulom $f(x) = |x|$ vrijedi $f \notin C^1(I)$ na intervalu I oko nule, ali očito je da je $f \in C^0(I)$, dakle je $C^0(I) \supset C^1(I)$.
Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$f = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ -\sqrt{1-(x-1)^2}+2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$



Slika 6.8: Funkcija čija druga derivacija nije neprekidna.

Kako je

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

iz Teorema 6.12 zaključujemo da je f neprekidna na $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 2\rangle$. Kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

i

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f'(x) = 0 = f'(1)$$

imamo da je f' neprekidna na $\langle -\infty, 2\rangle$, dakle je $f \in C^1\langle -\infty, 2\rangle$. Pogledajmo drugu derivaciju od f. Imamo

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{(x(2-x))^3}}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Kako je

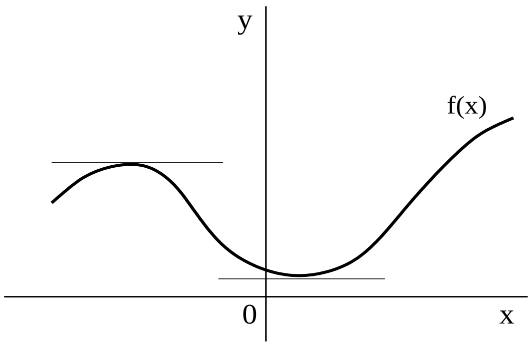
$$\lim_{x \longrightarrow 1-} f''(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x \longrightarrow 1+} f''(x) = 1$$

zaključujemo da f'' nije neprekidna u $x = 1$, ima skok s 0 na 1. Dakle $f'' \notin C^2\langle -\infty, 2\rangle$, odnosno je $C^1\langle -\infty, 2\rangle \supset C^2\langle -\infty, 2\rangle$.♣

Ovaj je primjer zanimljiv jer pokazuje da pri prijelazu s ravnog komada na kružni luk dolazi do skoka druge derivacije. Kako je fizikalna interpretacija druge derivacije ubrzanje to znači da tu dolazi do skoka sile. To je razlog zašto se kod cesta i pruga takvi prijelazi ne rade.

Općenito se stroga inkluzija dokazuje promatranjem funkcije $f(x) = x^n\sqrt{x}$ na $[0, +\infty\rangle$.

Teorem 6.24 (Fermatova lema-nužan uvjet ekstrema). *Neka je $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^1(I)$ i neka f ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in I$. Tada je $f'(x_0) = 0$.*♣



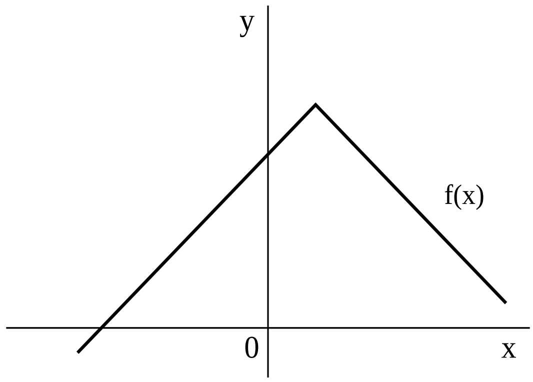
Slika 6.9: Fermatova lema.

Geometrijska interpretacija Teorema 6.24 je da u točki lokalnog ekstrema glatke funkcije tangenta mora biti paralelna s x osi. To vrijedi i za lokalne minimume i maksimume.

Napomena 6.11. *Primijetimo:*

1. *Uvjet $f \in C^1(I)$ iz Teorema 6.24 je bitan. Jasno je da funkcija $f(x) = |x-1|$ ima lokalni (čak i globalni) ekstrem u $x = 1$, no iz Primjera 6.16 znamo da $f'(1)$ ne postoji, pa se ne može niti poništavati.*

2. *Uvjet $f'(x_0) = 0$ nije i dovoljan da bi funkcija $f \in C^1(I)$ imala u $x_0 \in I$ lokalni ekstrem. Za funkciju $f(x) = x^3$ vrijedi $f'(0) = 0$, ali znamo da ona strogo raste na $\mathbb{R}$, dakle ne može imati ekstreme.*



Slika 6.10: Glatkost funkcije je nužna u Fermatovoj lemi.

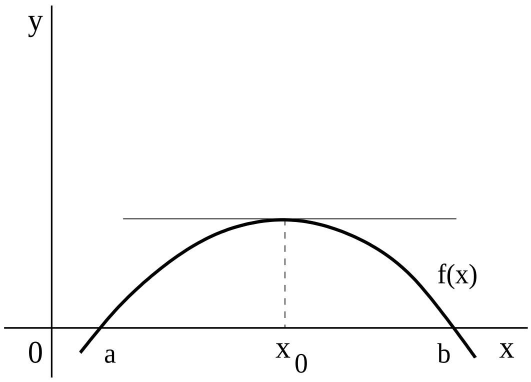
Teorem 6.25 (Rolleov teorem). *Neka je* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *klase* $C^1(I)$ *i neka je* $f(a) = f(b) = 0$ *za neke* $a, b \in I$, $a < b$. *Tada postoji* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *takav da je* $f'(x_0) = 0$.

Dokaz:

Kako je funkcija f *neprekidna na segmentu* $[a, b]$ *prema Teoremu 6.6 funkcija* f *poprima svoj minimum* m *i maksimum* M *na* $[a, b]$, *tj. postoje točke* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *za koje je* $f(x_1) = m$ *i* $f(x_2) = M$. *Ako je* $m = M$ *onda je* f *konstantna na* $[a, b]$, *tj. je* $f'(x) = 0$, *za svaki* $x \in (a, b)$. *Dakle u tom slučaju svaki* $x_0 \in (a, b)$ *zadovoljava tvrdnju teorema.*
Ako je $m < M$, *onda je barem jedan od brojeva* m *i* M *različit od nule. Pretpostavimo da je* $M \neq 0$. *Kako je* $f(a) = f(b) = 0$ *i* $f(x_2) = M$ *to je* $x_2 \neq a$ *i* $x_2 \neq b$. *Dakle je točka* x_2 *unutarnja točka segmenta* $[a, b]$.
Kako je f *diferencijabilna u točki* x_2 *i ima maksimum u* x_2 *iz Teorema 6.24 imamo da je* $f'(x_2) = 0$. *Analogno se dokaže kada je* $m \neq 0$.♣

Teorem 6.25 kaže da ako imamo neprekidno diferencijabilnu funkciju na I koja se poništava u dvjema točkama iz I, onda u barem jednoj točki između tih dviju točaka funkcija ima lokalni ekstrem.

Napomena 6.12. *Primijetimo da je Teorem 6.25 u stvari Teorem 6.4 primijenjen na funkciju* f'. *Kako je prva derivacija funkcije u točki koeficijent smjera tangente, odnosno, daje nam informaciju o rastu i padu funkcije u točki, jasno je da kada funkcija* f *ide iz nultočke* $(a, 0)$ *prema sljedećoj nultočki tada ako raste (pada) zbog neprekidnosti mora padati (rasti) pri dolasku u tu sljedeću nultočku. Dakle postoje točke* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *za koje je*



Slika 6.11: Geometrijska ilustracija Rolleova teorema.

$f'(x_1) > 0$ ($f'(x_1) < 0$) i $f'(x_2) < 0$ ($f'(x_2) > 0$), odnosno je $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, pa po Teoremu 6.4 postoji $x_0 \in [x_1, x_2]$ za koju je $f'(x_0) = 0$.
Na slici 6.11 je prikazana najjednostavnija situacija kad između a i b nema drugih nultočaka.

Teorem 6.26 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)**.** *Neka je $f \in C^1(I)$. Tada za sve $a < b$, $a, b \in I$, postoji $x' \in \langle a, b\rangle$ takav da je*

$$f(b) - f(a) = f'(x')(b - a).$$

Dokaz:

Neka su $a, b \in I$, $a < b$, proizvoljne. Neka je L pravac kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, tj.

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tada očito funkcija

$$F(x) = f(x) - L(x)$$

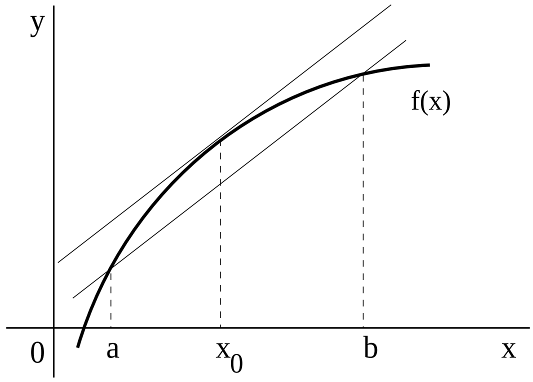
zadovoljava Teorem 6.25, tj. postoji $x' \in \langle a, b\rangle$ za koju je $F'(x') = 0$. Kako je

$$F'(x) = f'(x) - L'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

imamo

$$f(b) - f(a) = f'(x')(b - a).\clubsuit$$

Napomena 6.13. *Primijetimo:*



Slika 6.12: Geometrijska ilustracija Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti.

1. *Ako jednadžbu* $f(b) - f(a) = f'(x')(b-a)$ *zapišemo u obliku*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x'),$$

onda Teorem 6.26 kaže da za svaku sekantu kroz točke $(a, f(a))$ *i* $(b, f(b))$ *postoji točka* $x' \in \langle a, b\rangle$ *u kojoj je tangenta paralelna s tom sekantom.*

2. *Uvjet* $f \in C^1(I)$ *iz Teorema 6.26 je bitan. Ako je dana funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *formulom*

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1 \\ 3 & x > 1, \end{cases}$$

očito je

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 3 = f(1),$$

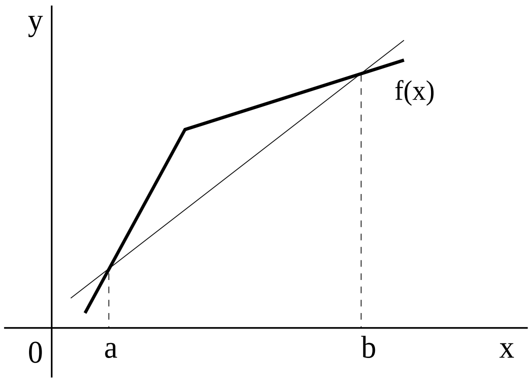
pa je, po Teoremu 6.12, f neprekidna na $\mathbb{R}$. *Kako je*

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases},$$

očito f' *ima prekid u* $x = 1$. *Dakle je* $f \in C^0(\mathbb{R})$ *i* $f \notin C^1(\mathbb{R})$. *Sada za* $a = 0$ *i* $b = 2$ *imamo*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 1,$$

ali ne postoji $x' \in \langle 0, 2\rangle$ *za koji je* $f'(x') = 1$.



Slika 6.13: Glatkost je nužna u Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti.

Iz Teorema 6.26 imamo da za svaki x iz neke okoline od a imamo $x' \in \langle a, x\rangle$ za koji je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x').$$

To možemo pisati kao

$$f(x) = f(a) + f'(x')(x - a).$$

Broj x' ovisi o x, i ne znamo ga točno, ne znamo u kojoj točki je tangenta paralelna sa sekantom kroz $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$, no u nekoj točki sigurno je.
Usporedimo to s lokalnom linearizacijom (točka 6.2.5). Lokalna linearizacija funkcije f oko točke x_0 je dana s $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. imamo približni izraz. S druge strane, iz Teorema 6.26 imamo da je $f(x) = f(x_0)+f'(x')(x-x_0)$, tj. imamo točan izraz, ali ne znamo za koji x'.
Zamjenom točne vrijednosti $f'(x')$ približnom vrijednošću $f'(x_0)$ dobijemo lokalnu linearizaciju, tj. poznavajući prvu derivaciju $f'(x_0)$ možemo aproksimirati funkciju u okolini točke x_0. Koliko je ta aproksimacija dobra? Odnosno, poznavajući vrijednosti viših derivacija u x_0, možemo li dobiti bolju aproksimaciju funkcije f u okolini točke x_0?

Teorem 6.27 (Taylorov teorem srednje vrijednosti). *Neka je $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^{n+1}(I)$ i neka je $x_0 \in I$. Tada za svaki $x \in I$ postoji c_x između x_0 i x takav da vrijedi*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} =$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.\clubsuit$$

Izraz

$$\boxed{f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

se zove **Taylorova formula**. Sastoji se od **Taylorovog polinoma** n-tog stupnja

$$\boxed{T_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}$$

i **ostatka**

$$\boxed{R_n(x)=\tfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.}$$

Napomena 6.14. *Za $n=0$ Teorem 6.27 je baš Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, tj. Teorem 6.26.*

Za slučaj $n=1$ dobivamo

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c_x)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Ostatak

$$R_2(x)=\frac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)^2$$

predstavlja grešku lokalne linearizacije

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

funkcije f u okolini točke x_0. Dakle, ocjenjivanje pogreške učinjene pri linearizaciji svodi se na ocjenjivanje veličine

$$|f''(c_x)|.$$

Slično kao i Teorem 6.23, Taylorovi polinomi se najbolje priljubljuju (dakle najbolje aproksimiraju) uz graf funkcije f u okolini točke $(x_0, f(x_0))$ od svih polinoma danog stupnja. Daleko od x_0 aproksimacija može biti (i obično je) vrlo loša. Aproksimacija je dobra lokalno.

Primjer 6.24. *Neka je dana funkcija $f(x) = \sin x$. Tada su Taylorovi polinomi u okolini točke $x_0 = 0$ dani sa*

$$T_0(x) = f(0) = 0, \quad T_1(x) = f(0) + f'(0)x = x,$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = x,$$

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}, \dots$$

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}. \spadesuit$$

Ako je $f \in C^\infty(I)$ onda Taylorov polinom postoji za svaki stupanj $n \in \mathbb{N}$. Dakle, dobro je definiran red

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Međutim taj red može divergirati za svako $x \neq x_0$, odnosno konvergirati nekoj drugoj funkciji. Red $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$ će konvergirati funkciji f u okolini točke x_0 ako je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty}(f(x) - T_n(x)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

gdje je

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

i

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Tada red

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

zovemo **Taylorov red funkcije** f.

Primijetimo da je Taylorov red red potencija u varijabli $(x - x_0)$ (točka 4.3.1). U posebnom slučaju za $x_0 = 0$ red

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

zovemo **McLaurinov red funkcije** f.

Može se pokazati da su funkcije e^x, $\sin x$, $\cos x$ prikazive pomoću svojih McLaurinovih redova na cijelom $\mathbb{R}$, tj. da je radijus konvergencije odgovarajućih McLaurinovih redova beskonačan:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Napomena 6.15. *Taylorovi redovi obično sporo konvergiraju, dakle nisu jako dobri za numeriku.*

6.2.8 Primjene derivacija

Monotonost i lokalni ekstremi

Teorem 6.28. *Neka je $f \in C^1(I)$ za neki interval I.*

1. *Funkcija f raste na I ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in I$.*
2. *Funkcija f pada na I ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in I$.*

Dokaz:

1. *Neka je $f \in C^1(I)$ rastuća funkcija na I. Tada za $\Delta x > 0$ vrijedi $f(x+\Delta x) \geq f(x)$, pa je*
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$
za svaki $x \in I$. Limes nenegativne funkcije mora i sam biti nenegativan, pa je
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$
za svaki $x \in I$.
Obratno, neka je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$ i neka je $\Delta x > 0$. Tada, po Teoremu 6.26 postoji $x' \in (x, x+\Delta x)$ takav da je
$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x')\Delta x.$$
Kako je desna strana gornje jednadžbe nenegativna, to je i lijeva strana takva, dakle funkcija f raste na I.
2. *Dokaz ide na sličan način.*♣

Primjer 6.25. *Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x^3$ je strogo rastuća na $\mathbb{R}$ i vrijedi $f'(0) = 0$. Dakle ne vrijedi $f'(x) > 0$ na $\mathbb{R}$.*♠

Iz Primjera 6.25 zaključujemo da u Teoremu 6.28 ne možemo nejednakosti tipa $\geq$ ($\leq$) zamijeniti strogim nejednakostima i dobiti analogne tvrdnje teorema za strogi rast i pad.
Jedan smjer bismo mogli dokazati; ako za funkciju $f \in C^1(I)$ vrijedi $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) na I, onda funkcija strogo raste (pada) na I. Ovaj smjer se dokazuje analogno kao u Teoremu 6.28 primjenom Teorema 6.26.
Međutim, obratna tvrdnja ne mora vrijediti, zbog činjenice da limes strogo pozitivne (negativne) veličine ne mora biti strogo pozitivan (negativan) već može biti jednak nuli (npr. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 = 0$).

U Teoremu 6.24 smo vidjeli da, ako je $x_0 \in I$ točka lokalnog ekstrema funkcije $f \in C^1(I)$, onda je $f'(x_0) = 0$. Iz Napomene 6.11 imamo da obrat ne vrijedi. Točke u kojima se prva derivacija poništava će nam ipak biti zanimljive, jer se među njima nalaze potencijalni ekstremi.

Definicija 6.5. *Točke u kojima se prva derivacija funkcije iz $C^1(I)$ poništava zovu se* ***stacionarne točke****.*

Dakle, u stacionarnim točkama je tangenta na graf funkcije paralelna s osi x.

Kao što smo rekli, u stacionarnoj točki funkcija može, ali i ne mora, imati lokalni ekstrem. To ovisi o promjeni ponašanja funkcije u toj točki, a ta se promjena ponašanja očituje kroz promjenu predznaka derivacije. Ako derivacija ne mijenja predznak, u stacionarnoj točki nema lokalnog ekstrema (imamo rast ili pad na nekoj okolini te točke); inače ima lokalni ekstrem (s jedne strane točke funkcija raste (pada), a s druge pada (raste)).

Teorem 6.29. *Neka je $f \in C^1(I)$ i $f'(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in I$. Funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0 ako i samo ako $f'(x)$ mijenja predznak u točki x_0. Ako je $f'(x) < 0$ lijevo od x_0 i $f'(x) > 0$ desno od x_0, onda u x_0 funkcija f ima lokalni minimum, ako je $f'(x) > 0$ lijevo od x_0 i $f'(x) < 0$ desno od x_0, onda u x_0 funkcija f ima lokalni maksimum.*

Dokaz:
Izravno iz točke 5.1.4, Teorema 6.24, Teorema 6.28.♣

Konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Alternativni pristup problemu određivanja lokalnih ekstrema je preko konveksnosti i konkavnosti funkcije. U formulaciji ćemo zahtijevati nešto veću glatkoću funkcije (tj. da je barem $f \in C^2(I)$), jer konveksnost i konkavnost ovise o predznaku druge derivacije.

Definicija 6.6. *Neprekidna funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je **konveksna** na I ako je*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

za sve $x_1, x_2 \in I$. Ako je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

*za sve $x_1, x_2 \in I$, kažemo da je f **konkavna** na I.*
*Ako su nejednakosti stroge govorimo o **strogo konveksnoj** i **strogo konkavnoj** funkciji na I.*

Definicija 6.6 kaže da je funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna ako je za sve $x_1, x_2 \in I$ slika aritmetičke sredine od x_1 i x_2 manja ili jednaka od aritmetičke sredine slika x_1 i x_2, a konkavna ako je za sve $x_1, x_2 \in I$ slika aritmetičke sredine od x_1 i x_2 veća ili jednaka od aritmetičke sredine slika x_1 i x_2.
Dakle, između $x_1, x_2 \in I$ graf konveksne funkcije je ispod, a graf konkavne funkcije iznad sekante kroz točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$.

Ako je funkcija f dovoljno glatka (barem klase $C^2(I)$), konveksnost i konkavnost su određene predznakom druge derivacije.

Teorem 6.30. *Neka je $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ klase $C^2(I)$.*

1. *Funkcija f je konveksna na I ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, za svaki $x \in I$.*

2. *Funkcija f je konkavna na I ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$, za svaki $x \in I$.*♣

Teorem 6.31. *Neka je x_0 stacionarna točka funkcije $f \in C^2(I)$.*

1. *Ako je $f''(x_0) > 0$, funkcija f ima u $x_0 \in I$ lokalni minimum.*

2. *Ako je* $f''(x_0) < 0$, *funkcija* f *ima u* $x_0 \in I$ *lokalni maksimum.*

Dokaz:

1. *Uzmimo stacionarnu točku* x_0 *za koju je* $f''(x) > 0$. *Zbog neprekidnosti druge derivacije, druga derivacija je pozitivna i na nekoj okolini od* x_0 *(Teorem 6.3). Uzmimo* x *proizvoljan iz te okoline. Onda će i točka* c_x *iz Teorema 6.27 biti iz te okoline, jer se nalazi između* x_0 *i* x. *Dakle je* $f''(c_x) > 0$. *Primijenimo li Teorem 6.27 za slučaj* $n = 1$, *imamo*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)^2 = f(x_0)+\frac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)^2 \geq f(x_0).$$

   Dakle u točki x_0 *funkcija* f *ima lokalni minimum.*

2. *Dokaz ide na sličan način.*♣

Uvjet $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), iz Teorema 6.31, da funkcija $f \in C^2(I)$ ima lokani maksimum (minimum) nije nužan. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dana formulom $f(x) = x^4$ očito ima u $x = 0$ (globalni) minimum, ali je $f''(0) = 0$.

Definicija 6.7. *Neka je* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *i* $c \in I$. *Neka postoji* $\delta > 0$ *takav da je funkcija* f *na* $\langle c - \delta, c\rangle$ *strogo konveksna i na* $\langle c, c + \delta\rangle$ *strogo konkavna ili je na* $\langle c - \delta, c\rangle$ *strogo konkavna i na* $\langle c, c + \delta\rangle$ *strogo konveksna. Tada kažemo da je točka* c ***točka infleksije*** *funkcije* f.
Kaže se još da je točka $(c, f(c))$ *točka infleksije grafa funkcije* f.

Teorem 6.32. *Neka je* $f \in C^2(I)$. *Ako je* $c \in I$ *točka infleksije od* f, *onda je* $f''(c) = 0$.

Dokaz:
Bez smanjenja općenitosti, neka je f *na* $\langle c-\delta, c\rangle$ *strogo konveksna i na* $\langle c, c+\delta\rangle$ *strogo konkavna za neki* $\delta > 0$. *Tada iz Teorema 6.30 imamo da funkcija* f' *raste na* $(c - \delta, c)$ *i pada na* $(c, c+\delta)$. *Dakle,* f' *ima lokalni maksimum u* c, *pa je po Teoremu 6.24* $f''(c) = 0$.♣

Uvjet $f''(c) = 0$ iz Teorema 6.32 nije i dovoljan da bi funkcija $f \in C^2(I)$ imala u točki $c \in I$ točku infleksije. Npr. za funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ danu formulom $f(x) = x^4$ vrijedi $f''(0) = 0$, ali je $f''(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ i $f''(x) > 0$ za $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Dakle je konveksna na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$, pa $x = 0$ ne može biti točka infleksije.

Teorem 6.33. *Neka funkcija $f \in C^2(I)$ zadovoljava uvjet $f''(c) = 0$ za neki $c \in I$ i neka $f''(x)$ mijenja predznak u c. Onda je c točka infleksije od f.*

Dokaz:

Izravno iz Definicije 6.7.♣

Računanje limesa - L'Hospitalovo pravilo

Teorem 6.34. *Neka su f i g derivabilne funkcije na I osim, možda, u $x_0 \in I$. Neka je $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$. Ako je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \neq x_0$, $x \in I$, i ako postoji*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad \text{onda je i} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dokaz:

Promatrajmo slučaj kad su f i g dovoljno glatke (bar klase $C^2(I)$) i $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \neq x_0$, $x \in I$. Zbog neprekidnosti od f i g na I imamo $f(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$ i $g(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0$. Iz Teorema 6.27 imamo

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x - x_0)(x - x_0)$$

i

$$g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + r_2(x - x_0)(x - x_0),$$

gdje su r_1 i r_2 neprekidne u 0 i $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Za $x \neq x_0$ vrijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0) + r_1(x - x_0)}{g'(x_0) + r_2(x - x_0)}.$$

Puštajući $x \longrightarrow x_0$ iz gornje jednadžbe i jer je $r_1(0) = r_2(0) = 0$ dobivamo

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Sada zbog neprekidnosti od f' i g' u x_0 (Teorem 6.12) i iz Teorema 6.18 imamo

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \longrightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \longrightarrow x_0} g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.♣$$

Na Teorem 6.34 možemo gledati i kao na teorem o proširenju funkcije $\frac{f}{g}$ po neprekidnosti u točki x_0 (Teorem 6.12).

Napomena 6.16. *Neka su funkcije* $f, g \in C^{n+1}(I)$ *i neka vrijedi*

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \; . \; . \; . \; f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = 0, \; . \; . \; . \; g^{(n)}(x_0) = 0, \quad g^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Tada, analogno kao u dokazu Teorema 6.34, iz Teorema 6.27 imamo

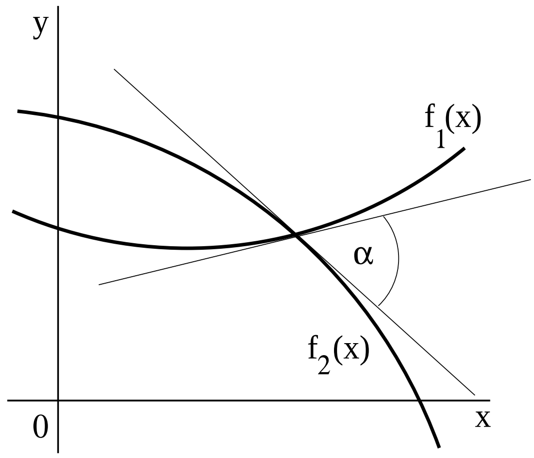
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

Kut između krivulja

Kut između dviju krivulja odnosno grafova funkcija f_1 i f_2 u točki njihovog presjeka definira se kao kut između njihovih tangenti u toj točki. Znamo da je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f_1'(x_0), \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = f_2'(x_0),$$

gdje je x_0 apscisa točke presjeka grafova funkcija f_1 i f_2, α_1 odnosno α_2 kutovi koje tangente na f_1 odnosno f_2 u točki x_0 zatvaraju s pozitivnim smjerom x osi.



Slika 6.14: Kut između dviju krivulja.

Dakle, kut između f_1 i f_2 u točki x_0 je

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Iz točke 2.2.1 imamo da je

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

Odatle je

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

Napomena 6.17. *Krivulje (odnosno grafovi funkcija) f_1 i f_2 su okomite u točki x_0 ako i samo ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, odnosno ako i samo ako je $\operatorname{tg}\ \alpha = \infty$, tj. ako i samo ako je*

$$f_1'(x_0)f_2'(x_0) = -1.$$

Ako je $\alpha = 0$, onda je i $\operatorname{tg}\ \alpha = 0$, dakle je $f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$. To znači da u točki $(x_0, f(x_0))$ krivulje (odnosno funkcije) f_1 i f_2 imaju zajedničku tangentu, pa možemo reći da se diraju u toj točki.

Primjer 6.26. *Odredimo kut između krivulja $xy = a$ i $y^2 - x^2 = a$, $a > 0$.*

Zapišemo li krivulje u eksplicitnom obliku imamo

$$y = \frac{a}{x} = f_1(x),$$

$$y = \sqrt{a + x^2} = f_2(x).$$

Nađimo presjecište krivulja f_1 i f_2, tj. nađimo rješenje jednadžbe $f_1(x) = f_2(x)$. Iz

$$\frac{a}{x} = \sqrt{a + x^2}$$

kvadriranjem dolazimo do bikvadratne jednadžbe po x, tj.

$$x^4 + ax^2 - a^2 = 0.$$

Supstitucijom $x^2 = u$ dobivamo

$$u^2 + au - a^2 = 0,$$

a odatle je

$$u = a\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(drugo rješenje je negativno). Uzimajući pozitivno rješenje jednadžbe

$$x^2 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

imamo za apscisu točke presjeka

$$x_0 = \sqrt{a\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Derivirajući f_1 i f_2 po x dobivamo

$$f_1'(x) = -\frac{a}{x^2}, \quad f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}.$$

Nadalje je

$$f_1'(x_0)f_2'(x_0) = \frac{-a}{x_0\sqrt{a+x_0^2}} = ... = -1.$$

Dakle, f_1 i f_2 su okomite u točki x_0, odnosno sve krivulje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ su međusobno okomite (tj. okomite su za svaki $a > 0$).♠

Skiciranje grafa i ispitivanje toka funkcije

Metode diferencijalnog računa su ključne pri skiciranju grafa funkcije zadane formulom.

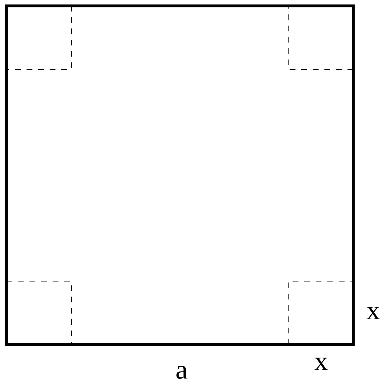
Postupak:

1. Odrediti domenu funkcije (prirodno područje definicije);
2. Ispitati parnost, neparnost, periodičnost;
3. Pronaći točke presjeka grafa funkcije s koordinatnim osima;
4. Ispitati ponašanje na rubovima domene (asimptote);
5. Pronaći stacionarne točke;
6. Odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme;
7. Pronaći intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije;
8. Složiti sve dobivene podatke u graf funkcije.

Postupak je, u izvjesnom smislu, samokorigirajući. Ako se rezultat nekog koraka ne slaže s rezultatima prijašnjih koraka, to upućuje na pogrešku u računu.

Praktični ekstremalni problemi

Diferencijalni nam račun daje efikasan i gotovo mehanički način određivanja ekstrema u raznim praktičnim problemima.



Slika 6.15: Kako napraviti kutiju najvećeg volumena?.

Primjer 6.27. *Karton oblika kvadrata duljine stranice a treba izrezati na vrhovima tako da se dobije kutija najvećeg volumena.*
Iz geometrijskih i praktičnih razloga je jasno da uz svaki vrh treba izrezat kvadratni komad i da duljina stranice tog komada treba biti ista za sve vrhove. Označimo li tu duljinu s x, volumen kutije bit će dan formulom

$$V(x) = (a-2x)^2 x.$$

Nadalje je

$$V'(x) = (a-2x)(a-6x).$$

Iz uvjeta

$$V'(x) = 0$$

nalazimo stacionarne točke

$$x_1 = \frac{a}{6}, \quad x_2 = \frac{a}{2}.$$

Jasno je točka $x_1 = \frac{a}{6}$ odgovara lokalnom maksimumu, jer tu funkcija $V'(x)$ prelazi iz pozitivnih u negativne vrijednosti, dakle funkcija $V(x)$ prelazi iz rasta u pad. Istim zaključivanjem se vidi da $x_2 = \frac{a}{2}$ daje lokalni minimum. Maksimalni volumen je

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3. \spadesuit$$

Primjer 6.28. *Odredite dimenzije pravokutnog gradilišta površine* 1 *ha takvog da su troškovi njegovog ograđivanja minimalni.*

Označimo dimenzije gradilišta s x *i* y*. Iz* $P = xy = 1$ *slijedi da je* $y = \frac{1}{x}$*. (Ovdje su* x *i* y *u jedinicama čiji produkt daje* 1 *ha, dakle u stotinama metara.) Troškovi ograđivanja su proporcionalni opsegu pravokutnika sa stranicama* x *i* $\frac{1}{x}$*, i oni će biti minimalni za onu vrijednost* x *za koju se minimizira funkcija* $f(x) = x + \frac{1}{x}$*. Derivirajući* $f(x)$ *i izjednačavajući* $f'(x)$ *s nulom nalazimo stacionarne točke* $x_1 = 1$ *i* $x_2 = -1$*. Druga očito nema smisla u danom kontekstu, a za prvu se lako provjeri da je u njoj lokalni minimum. Dakle je od svih pravokutnika zadane površine najjeftinije ograditi kvadrat. Za površinu od* 1 *ha to daje kvadrat stranice* 100 *m.*

Do istog smo rješenja mogli doći i na drugi način. Izraz $x+\frac{1}{x}$ *je dvostruka aritmetička sredina veličina* x *i* $\frac{1}{x}$*. Poznato je da je aritmetička sredina dviju pozitivnih veličina uvijek veća ili jednaka od njihove geometrijske sredine (AG - nejednakost), a da se jednakost postiže samo za slučaj da su te veličine jednake. Kako je geometrijska sredina od* x *i* $\frac{1}{x}$ *jednaka* $\sqrt{x\frac{1}{x}} = 1$*, slijedi da je* $x + \frac{1}{x} \geq 1$*. Nadalje, minimalna vrijednost* 1 *se postiže za slučaj kad je* $x = \frac{1}{x}$*, tj. za* $x = 1$*.*

Usporedimo sada ova dva pristupa. U prvom smo slučaju slijedili poznatu proceduru i nismo ovisili o nadahnuću niti o vezama s drugim područjima matematike. U drugom pristupu, koji je elegantniji, pozvali smo se na rezultat koji, doduše, je dio matematičke opće kulture, no kojeg se ipak treba sjetiti i dovesti u vezu s danim problemom. Snaga pristupa preko diferencijalnog računa je upravo u tome što daje postupak koji se može provesti rutinski i gotovo mehanički.♠

Poglavlje 7

Uvod u integralni račun

7.1 Neodređeni integral

7.1.1 Primitivna funkcija

U praksi se često javlja potreba određivanja nepoznate funkcije čija nam je derivacija poznata. Npr., iz poznate brzine kojom se tijelo giba želimo odrediti njegov položaj u budućnosti; iz poznate brzine rasta populacije želimo predvidjeti njeno kretanje u idućih nekoliko godina; iz poznate stope inflacije želimo procijeniti buduće troškove života.

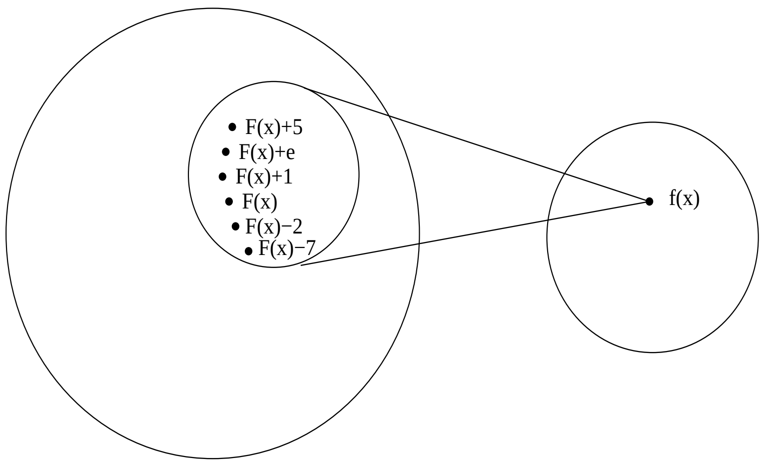
Ako su te veličine konstantne, odgovor je jednostavan - treba ih samo množiti vremenom. Tijelo koje se giba konstantnom brzinom v bit će za t sekundi točno $v \cdot t$ metara udaljeno od svog sadašnjeg položaja. Ako se populacija povećava za 100 članova godišnje, za n godina bit će ih za $n \cdot 100$ više nego danas. No što ako se tijelo giba brzinom koja se i sama mijenja u ovisnosti o vremenu, $v = v(t)$? Ili prirast populacije nije konstantan, već raste s vremenom? Nije uvijek u pitanju ovisnost o vremenu. Kako odrediti funkciju (nepoznatu) za koju nam je u svakoj točki poznat koeficijent smjera tangente na njen graf?

Iz gornjih primjera vidimo da postoji potreba za operacijom ili postupkom koji će "poništavati" učinak deriviranja. Derivaciju možemo promatrati kao funkciju koja funkciji $f \in C^{n+1}(I)$ pridružuje funkciju $f' \in C^n(I)$, $n = 0, 1, 2, ..., \infty$. Iz Napomene 6.9 znamo da su skupovi $C^n(I)$, $n = 0, 1, 2, ..., \infty$, vektorski prostori s obzirom na zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom. Dakle je funkcija

deriviranja operator. Iz Teorema 6.20 i Napomene 6.7 izravno slijedi da je operator deriviranja linearan. Zanima nas, ako postoji, linearan operator koji mu je inverzan.
Čitajući tablicu derivacija elementarnih funkcija iz točke 6.2.5 zdesna nalijevo vidimo da za neke elementarne funkcije postoje funkcije čije su one derivacije. Primjerice, iz $(\sin x)' = \cos x$ slijedi da je za $f(x) = \cos x$ funkcija $\sin x$ ona koju treba derivirati da bi se dobilo $f(x)$. Uvedimo prvo ime za takve funkcije, a onda pogledajmo kada postoje i koja su im svojstva.

Definicija 7.1. *Neka je f neprekidna funkcija na $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ zove se* ***primitivna funkcija*** *funkcije f na I.*

Iz tablice derivacija elementarnih funkcija vidimo da je $\sin x$ primitivna funkcija funkcije $\cos x$, da je $\frac{x^2}{2}$ primitivna funkcija funkcije x, itd. Štoviše, vidimo da je svaka konstanta $C \in \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = 0$, jer je derivacija svake konstante jednaka nuli. Odatle slijedi važno svojstvo primitivnih funkcija.



Slika 7.1: Neodređeni integral funkcije $f(x)$ kao skup svih primitivnih funkcija od $f(x)$.

Teorem 7.1. *Neka je F primitivna funkcija funkcije f na $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada je i $F + C$ primitivna funkcija funkcije f na I za svaki $C \in \mathbb{R}$ i sve primitivne funkcije od f na I su oblika $F + C$, $C \in \mathbb{R}$.*

Dokaz:
Neka je $C \in \mathbb{R}$ *proizvoljan. Tada je*

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Dakle imamo prvu tvrdnju.

Uzmimo sada dvije različite primitivne funkcije od f *na* I *i označimo ih s* F *i* G. *Za njihovu razliku*

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

i proizvoljni $x_0 \in I$ *iz Teorema 6.26 imamo*

$$H(x) - H(x_0) = H'(c)(x - x_0),$$

gdje je c *neka točka između* x *i* x_0. *Zbog*

$$H'(c) = F'(c) - G'(c) = f(c) - f(c) = 0,$$

slijedi

$$H(x) = H(x_0)$$

za svaki $x \in I$, *tj.* H *je konstantna funkcija. Dakle se svake dvije primitivne funkcije od* f *razlikuju za konstantu, a to je upravo druga tvrdnja teorema.*$\clubsuit$

7.1.2 Neodređeni integral

U literaturi se primitivna funkcija funkcije f naziva još i njenom **antiderivacijom**. To nije točno inverz od derivacije, jer linearni operator deriviranja nije injektivan: on skup svih primitivnih funkcija od f, koji je po Teoremu 7.1 beskonačan, šalje u f.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije f zove se **neodređeni integral** funkcije f. Pišemo

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

Interpretirajmo elemente ove formule:

- $\int$ je znak integrala, dolazi od S kao suma;
- $f(x)$ je integrand;
- dx pokazuje po čemu se integrira;
- $F(x)$ je primitivna funkcija funkcije $f(x)$;
- $C \in \mathbb{R}$ je konstanta integracije.

Neodređene integrale nekih elementarnih funkcija možemo očitati iz tablice derivacija elementarnih funkcija (točka 6.2.4). Ostale računamo koristeći svojstva neodređenog integrala. Osnovna svojstva slijede iz svojstva linearnosti deriviranja (Teorem 6.20 i Napomena 6.7). Odnose se na operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom. Za ostale operacije nema jednostavnih pravila.

Teorem 7.2. *Vrijedi:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Dokaz:

Neka je F primitivna funkcija funkcije f. Kako je $\int f(x)dx = F(x) + C$, imamo

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).\clubsuit$$

Napomena 7.1. *Iz Teorema 7.1 slijedi da je za $f \in C^1(I)$*

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

Teorem 7.3. *Vrijedi:*

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$
2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

Dokaz:

1. *Neka je F primitivna funkcija funkcije f i G primitivna funkcija funkcije g. Očito je, zbog linearnosti derivacije, $F \pm G$ primitivna funkcija funkcije $f \pm g$. Dakle je*
$$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$
2. *Neka je F primitivna funkcija funkcije f. Očito je, zbog linearnosti derivacije, cF primitivna funkcija funkcije cf. Dakle je*
$$\int cf(x)dx = cF(x) + C = c\int f(x)dx.\clubsuit$$

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1)$	$\sin x$	$-\cos x + C$
e^x	$e^x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert\frac{x+1}{x-1}\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert + C$

Tablica 7.1: Tablični integrali

Koristeći svojstva Teorema 7.3 i gornju tablicu možemo računati jednostavnije integrale.
Tako možemo integrirati polinome i jednostavnije racionalne, eksponencijalne i trigonometrijske funkcije. Za ostale funkcije moramo razviti metode kojima ćemo njihovu integraciju svesti na gornje, tzv. tablične integrale.

7.1.3 Metode integriranja

Deriviranje je mehanička procedura: uz dovoljno vremena i strpljivosti moguće je, koristeći pravila i tablicu derivacija (točka 6.2.4), izračunati derivaciju bilo koje elementarne funkcije. S druge strane, postoje dosta jednostavne elementarne funkcije čiji integrali nisu elementarne funkcije. Najpoznatiji primjer je $\int e^{-x^2}dx$, koji se ne može izraziti kao konačna kombinacija elementarnih funkcija. Nije lako unaprijed reći koja se funkcija uopće može integrirati. Ako se i može integrirati, to obično nije lako.

Izravna integracija

U izravnoj integraciji se koriste tablični integrali (točka 7.1.2) i svojstva iz Teorema 7.3.

Primjer 7.1. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = x^2 + \sin x$.

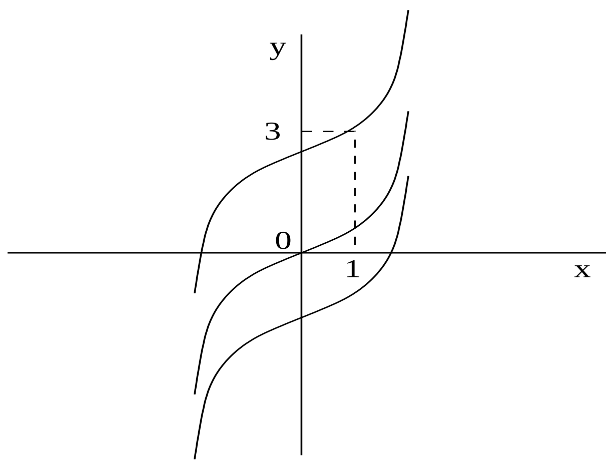
   Koristeći Teorem 7.3 i tablične integrale imamo:

$$\int (x^2 + \sin x)dx = \int x^2 dx + \int \sin x\, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C.$$

2. *Odredimo funkciju čija tangenta u točki s apscisom* x *ima koeficijent smjera* $3x^2 + 1$, *i čiji graf prolazi kroz točku* $(1, 3)$. *Drugim riječima, odredimo primitivnu funkciju* $F(x)$ *funkcije* $f(x) = 3x^2 + 1$ *koja prolazi točkom* $(1, 3)$.

   Koristeći Teorem 7.3 i tablične integrale imamo:

$$\int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + C = F(x).$$



Slika 7.2: Primitivne funkcije funkcije $3x^2 + 1$.

Konstantu integracije $C \in \mathbb{R}$ *određujemo iz uvjeta* $F(1) = 3$. *Dakle je*

$$3 = F(1) = 1 + 1 + C,$$

pa je $C = 1$. *Tražena funkcija je* $F(x) = x^3 + x + 1$.

Dakle funkcija $3x^2 + 1$ *ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija, i one su oblika* $x^3 + x + C$. *Samo jedna prolazi točkom* $(1, 3)$, *i to je* $x^3 + x + 1$.♠

Integriranje zamjenom varijabli ili supstitucijom

Izravnom integracijom se, općenito, ne mogu integrirati produkti funkcija (osim za polinome, ili u posebnim slučajevima kad se oni mogu pretvoriti u zbroj ili razliku kao kod nekih trigonometrijskih izraza). Ipak, ima jedan slučaj kad se produkt funkcija lako integrira. To je slučaj kad je jedan od faktora u produktu jednak derivaciji drugoga. Razlog je tomu činjenica da se takvi produkti dobivaju deriviranjem kompozicije funkcija, tj. deriviranjem složenih funkcija.

Primjer 7.2. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \sin x \cos x$.

Integral

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

ne možemo izravno riješiti koristeći Teorem 7.3 i tablične integrale. No uočimo da se izraz

$$\sin x \cos x \, dx$$

može pisati kao

$$\sin x (\sin x)' dx.$$

Koristeći izraz za diferencijal (točka 6.2.5), ovo možemo pisati kao

$$\sin x \, d(\sin x).$$

Dakle je

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x).$$

Uvodeći oznaku

$$u = \sin x,$$

gornji se integral svodi na

$$\int u \, du,$$

a to znamo da je $\frac{u^2}{2} + C$. *Dakle je*

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \spadesuit$$

U Primjeru 7.2 smo vidjeli način računanja integrala zamjenom varijable ili supstitucijom. Ista se ideja može primijeniti i ako jedan faktor nije čista derivacija drugoga.

Primjer 7.3. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \sin^5 x \cos x$.

Zamjenom varijabli kao u Primjeru 7.2 vidimo da se izraz

$$\sin^5 x \cos x \, dx$$

može pisati kao $u^5 \, du$, *a to je diferencijal od*

$$\frac{u^6}{6} + C.$$

Dakle je

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx = \int u^5 du = \int d\left(\frac{u^6}{6} + C\right) = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.\spadesuit$$

Promatrajmo općeniti slučaj u kojem se pojavljuje produkt oblika

$$g(u(x))u'(x)$$

kao integrand. Uočavajući da je izraz

$$u'(x)dx$$

u stvari diferencijal argumenta funkcije g, tj.

$$d(u(x)) = u'(x)dx,$$

možemo podintegralnu funkciju pisati kao

$$g(u)du.$$

Ako je $G(u)$ primitivna funkcija od $g(u)$, onda iz

$$G'(u) = g(u)u'(x)$$

slijedi

$$dG(u) = G'(u)du = g(u)u'(x)dx = g(u)du.$$

Odatle dobivamo opće pravilo:

$$\boxed{\int g(u(x))u'(x)dx = G(u(x)) + C.}$$

Primjer 7.4. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \text{tg } x$.

Integral $\int \text{tg } x\,dx$ *nije tablični, a nije ni produkt. Uočimo da kvocijent* $\frac{\sin x}{\cos x}$ *možemo pisati kao*

$$\frac{1}{\cos x}\sin x,$$

i da je $\sin x$ *derivacija od* $-\cos x$. *Manipuliramo malo izraz pod integralom kako bismo ga sveli na oblik pogodan za supstituciju:*

$$\int \text{tg } x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx =$$

$$-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C. \spadesuit$$

Napomena 7.2. *Uočimo posebno jednostavan slučaj zamjene varijable:*

$$u = ax + b, \quad du = a\,dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \int f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Ključni korak pri supstituciji je izbor nove varijable u koja će podintegralni izraz svesti na derivaciju složene funkcije. Nakon uvođenja nove varijable u iz podintegralnog izraza mora posve nestati varijabla x, kako iz integranda, tako i iz diferencijala. Dakle, dio s dx mora se moći zgodno izraziti u terminima difrencijala novouvedene varijable u.

Primjer 7.5. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$.

Uvedimo supstituciju $u = x^2 - 1$. *Sada je* $du = 2x\,dx$, *pa je*

$$dx = \frac{du}{2x}.$$

Uvrstimo u integral, imamo

$$\int \frac{3x}{x^2-1}dx = 3\int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C = \frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Da smo imali

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx,$$

to se ne bi dalo riješiti gornjom supstitucijom jer se dx *ne bi dao izraziti preko* du. $\spadesuit$

Parcijalna integracija

Parcijalnu integraciju primjenjujemo kad je podintegralna funkcija produkt dvaju faktora od kojih se jedan "lako" integrira, a drugi se deriviranjem pojednostavnjuje. Polazimo od formule za derivaciju produkta funkcija,

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Pišući to kao diferencijal imamo

$$d(uv) = (uv)'dx = u'v\,dx + v'u\,dx = v\,du + u\,dv.$$

Integrirajući obje strane gornje jednakosti dobivamo

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv.$$

To možemo pisati

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

ili, zbog $dv = v'dx$, $du = u'dx$,

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

Možemo to iskazati u obliku teorema:

Teorem 7.4. *Neka su u i v neprekidno diferencijabilne funkcije na intervalu I, tj. klase $C^1(I)$. Tada vrijedi*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.\clubsuit$$

Napomena 7.3. *Pravilo parcijalne integracije se najčešće zapisuje i pamti kao*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Primjer 7.6. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Odredimo integral funkcije $f(x) = x\cos x$.*

   Imamo produkt u kojem oba faktora znamo lako integrirati. Koji od njih treba odabrati kao v?

Stavimo $u = x$, $v' = \cos x$, *tj.* $dv = v'dx = \cos x\, dx$. *Sada je* $v = \sin x$, $du = u'dx = dx$. *Imamo*

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Do čega bi doveo suprotni izbor? Imali bismo $u = \cos x$, $v' = x$, *tj.* $dv = v'dx = x\, dx$. *Sada je* $v = \frac{x^2}{2}$, $du = -\sin x\, dx$. *Imamo*

$$\int x \cos x\, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x\, dx.$$

Dobili smo integral koji je kompliciraniji od polaznog.

2. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = x^2 e^x$.

   Poučeni prethodnim primjerom stavljamo $dv = e^x dx$, *tj.* $v' = e^x$, *i* $u = x^2$, *što daje* $du = u'dx = 2x\, dx$ *i* $v = e^x$. *Dobivamo*

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

   Još nismo izračunali polazni integral, no sveli smo ga na jednostavniji integral

$$\int x e^x dx.$$

   Primijenimo li parcijalnu integraciju još jednom, dobivamo

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

   Konačno,

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C. \spadesuit$$

Iz Primjera 7.6 možemo zaključiti da će se parcijalnom integracijom moći integrirati produkti polinoma i eksponencijalnih ili trigonometrijskih funkcija. Takvi se produkti još mogu integrirati i metodom neodređenih koeficijenata.
Parcijalnom se integracijom možemo poslužiti i kad, na prvi pogled, nema produkta u podintegralnoj funkciji.

Primjer 7.7. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \ln x$.

   Stavimo $dv = dx$, *tj.* $v' = 1$, *i* $u = \ln x$, *što daje* $du = u'dx = \frac{dx}{x}$ *i* $v = x$. *Dobivamo*

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

2. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

   Stavimo $dv = dx$, *tj.* $v' = 1$, *i* $u = \operatorname{arctg} x$, *što daje* $du = u'dx = \frac{dx}{1+x^2}$ *i* $v = x$. *Dobivamo*

$$\int \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \; dx}{x^2 + 1}.$$

   Sada analogno kao i u Primjeru 7.5 imamo

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

   Imamo

$$\int \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \mathrm{C}. \spadesuit$$

Još jedna mogućnost primjene parcijalne integracije ilustrirana je sljedećim primjerima:

Primjer 7.8. 1. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \sin^2 x$.

   Označimo

$$I = \int \sin^2 x \, dx.$$

   Sada imamo

$$I = \int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx.$$

   Stavimo $dv = \sin x \, dx$, *tj.* $v' = \sin x$, *i* $u = \sin x$, *što daje* $du = u'dx = \cos x \, dx$ *i* $v = -\cos x$. *Dobivamo*

$$\begin{aligned} I = \int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x \sin x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x \, dx \\ &= x - \sin x \cos x - I. \end{aligned}$$

Odatle je

$$2I = x - \sin x \cos x,$$

pa je

$$I = \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

2. *Parcijalnom integracijom mogu se izvesti i rekurzivne formule.*

   Odredimo integral funkcije $f(x) = \sin^m x$.

   Označimo

$$I_m = \int \sin^m x \, dx.$$

   Sada imamo

$$I_m = \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx.$$

   Stavimo $dv = \sin x \, dx$, *tj.* $v' = \sin x$, *i* $u = \sin^{m-1} x$, *što daje* $du = u' dx = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x \, dx$ *i* $v = -\cos x$. *Dobivamo*

$$\begin{aligned} I_m &= \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \, dx \\ &= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m. \end{aligned}$$

   Odatle je

$$I_m = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

   Formula za I_m *je* ***rekurzivna****, tj. daje nam* I_m *u terminima integrala s nižom potencijom funkcije* $\sin x$. *Kako znamo* I_0 *i* I_1, *nakon konačno mnogo primjena gornje formule doći ćemo do eksplicitnog izraza za* I_m.

   Slično se računaju i integrali

$$\int \cos^m x \, dx, \quad \int \sin^{-m} x \, dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x \, dx. \spadesuit$$

Integriranje racionalnih funkcija

Podsjetimo se da je racionalna funkcija funkcija oblika

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stupnja n i m, redom. Pretpostavljamo da su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ skraćeni, tj. da nemaju zajedničkih faktora i da je $n < m$. Ako nije, možemo podijeliti polinom u brojniku polinomom u nazivniku. Rezultat će biti polinom stupnja $n - m$ i ostatak u vidu racionalne funkcije kojoj je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika. Polinomijalni komad se izravno integrira, i problem je sveden na integraciju racionalne funkcije s $n < m$. Ponekad se takva racionalna funkcija još zove i **prava racionalna funkcija**.
Sve se racionalne funkcije mogu integrirati. Neke se mogu zgodnim supstitucijama svesti na tablične integrale.

Primjer 7.9. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

1. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \frac{3x}{x^2+5}$.

   Uvedimo supstituciju $u = x^2 + 5$. *Sada je* $du = 2x\,dx$, *pa je*

   $$dx = \frac{du}{2x}.$$

   Uvrstimo u integral, imamo

   $$\int \frac{3x}{x^2+5}dx = 3\int \frac{x}{u}\frac{du}{2x} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+5) + C.$$

2. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$.

   Imamo

   $$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1}.$$

   Uvedimo supstituciju $u = \frac{x}{3}$, *pa je* $du = \frac{dx}{3}$. *Uvrstimo u integral, imamo*

   $$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{3}\text{arctg}\ u + C = \frac{1}{3}\text{arctg}\ \frac{x}{3} + C.$$

3. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

   Uvedimo supstituciju $u = x - 3$, *pa je* $du = dx$. *Uvrstimo u integral, imamo*

$$\int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x-3| + C. \spadesuit$$

Integriranje racionalnih funkcija za koje ne možemo naći zgodnu supstituciju temelji se na metodi rastava racionalne funkcije na parcijalne (djelomične) razlomke. Ideja metode je načelno jednostavna: polinom u nazivniku se faktorizira u linearne i kvadratne faktore i zatim se $R(x)$ prikaže kao zbroj razlomaka u čijim su nazivnicima potencije linearnih i kvadratnih faktora, a u brojnicima konstante ili linearni polinomi. Time se dobiva sustav linearnih jednadžbi za koeficijente u brojnicima parcijalnih razlomaka. Nakon nalaženja tih koeficijenata parcijalne razlomke integriramo izravno iz tablice pomoću jednostavnih supstitucija.
Metoda se temelji na sljedećim svojstvima polinoma.

Napomena 7.4. *Neka je* $P_n(x)$ *polinom stupnja* $n > 0$ *s realnim koeficijentima. Tada vrijedi:*

1. *ako je* $x_0 \in \mathbb{C}$ *nultočka od* $P_n(x)$, *onda polinom* $(x - x_0)$ *dijeli* $P_n(x)$;
2. *ako je* $x_0 \in \mathbb{C}$ *nultočka od* $P_n(x)$, *onda je to i* $\overline{x_0}$;
3. *ako je* $x_0 \in \mathbb{C}$ *nultočka kratnosti* r *od* $P_n(x)$, *onda je to i* $\overline{x_0}$.

(Ovdje $\overline{x_0}$ *označava konjugirano kompleksni broj od* x_0, *tj. ako je* $x_0 \in \mathbb{C}$ *oblika* $a + bi$, *gdje su* $a, b \in \mathbb{R}$, *onda je* $\overline{x_0} = a - bi$.*)*

Dokaz:

1. *Dijeljenjem polinoma* $P_n(x)$ *polinomom* $(x - x_0)$ *dobivamo polinom stupnja* $n - 1$, $Q_{n-1}(x)$, *i ostatak* $r(x)$ *koji je polinom stupnja* 0, *tj. konstanta,* $r(x) = C \in \mathbb{R}$. *Dakle imamo*

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1} + C.$$

   Uvrštavajući nultočku x_0 *u gornju jednadžbu imamo* $C = 0$, *tj. polinom* $(x - x_0)$ *dijeli polinom* $P_n(x)$.

2. *Ako je* $x_0 \in \mathbb{R}$, *onda je* $\overline{x_0} = x_0$, *pa tvrdnja očito vrijedi.*

   Neka je $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Kako je* $P_n(x)$ *polinom s realnim koeficijentima imamo*

$$P_n(\overline{x_0}) = \overline{P_n(x_0)} = \overline{0} = 0.$$

3. Ako je $x_0 \in \mathbb{R}$, onda je $\overline{x_0} = x_0$, pa tvrdnja očito vrijedi.

Neka je $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Kako je x_0 nultočka kratnosti r od $P_n(x)$, onda je po tvrdnji 2. i $\overline{x_0}$ nultočka kratnosti jedan ili više od $P_n(x)$. Iz 1. znamo da $P_n(x)$ možemo podijeliti polinomom $(x - x_0)(x - \overline{x_0})$. Neka je

$$P_{n-2}(x) = P_n(x) : ((x - x_0)(x - \overline{x_0})).$$

Kako je x_0 nultočka kratnosti r od $P_n(x)$, to je x_0 nultočka kratnosti $r - 1$ od $P_{n-2}(x)$. Dakle je po tvrdnji 2. $\overline{x_0}$ nultočka od $P_{n-2}(x)$, odnosno $\overline{x_0}$ je nultočka kratnosti dva ili više od $P_n(x)$. Nastavljajući ovaj postupak nakon r koraka zaključujemo da je $\overline{x_0}$ nultočka kratnosti r ili više od $P_n(x)$. Međutim, njena kratnost je točno r. Ne može biti veća jer bi u suprotnom $\overline{\overline{x_0}} = x_0$ bila nultočka od $P_n(x)$ kratnosti veće od r što je suprotno pretpostavci.♣

Napomena 7.5. *Iz Teorema 5.5 znamo da svaki polinom $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ stupnja $n > 0$ s realnim koeficijentima ima točno n kompleksnih nultočaka $z_1, ..., z_n$, među kojima može biti istih. Neka su $x_1, x_2, ..., x_s$ sve različite nultočke među $z_1, ..., z_n$ od $P_n(x)$ s pripadnim kratnostima $r_1, r_2, ..., r_s$, redom, $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$.*
Iz Napomene 7.4 direktno slijedi da se $P_n(x)$ može zapisati kao

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_s)^{r_s}.$$

Međutim, među brojevima $x_1, x_2, ..., x_s$, odnosno među linearnim fakorima $(x - x_1), (x - x_2), ..., (x - x_s)$, $s \leq n$, ima možda onih s komplesnim koeficijentima. Mi želimo isključivo raditi s realnim koeficijentima.
Neka je $\gamma = u + vi$, $v \neq 0$, jedna kompleksna nultočka među različitim nultočkama $x_1, x_2, ..., x_s$ od $P_n(x)$ kratnosti r_γ. Tada je po Napomeni 7.4 i $\overline{\gamma} = u - vi$ nultočka od $P_n(x)$ kratnosti r_γ. Dakle, u rastavu polinoma $P_n(x)$ uvijek se u paru javljaju faktori $(x - (u + vi))^{r_\gamma}$ i $(x - (u - vi))^{r_\gamma}$. Množeći ta dva faktora dobivamo

$$(x - (u + vi))^{r_\gamma}(x - (u - vi))^{r_\gamma} = (x^2 - 2ux + u^2 + v^2)^{r_\gamma}.$$

Dakle svaki polinom $P_n(x)$ s realnim koeficijentima možemo zapisati kao produkt različitih linearnih i kvadratnih faktora s realnim koeficijentima i pripadajućim kratnostima, tj.

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha)^{r_\alpha}(x - \beta)^{r_\beta} \cdots (x^2 + ax + b)^{r_{ab}}(x^2 + cx + d)^{r_{cd}} \cdots$$

gdje je $(r_\alpha + r_\beta + ...) + 2(r_{ab} + r_{cd} + ...) = n$,

$$x^2 + ax + b = (x - (e + fi))(x + (e - fi)),\ f \neq 0,$$

$$x^2 + cx + d = (x - (g + hi))(x + (g - hi)),\ h \neq 0, ...$$

i gdje su $\alpha, \beta, ...$ različite realne nultočke s pripadnim kratnostima $r_\alpha, r_\beta, ...$ i $e + fi, g + hi, ...$ različite kompleksne nultočke s pripadnim kratnostima $r_{ab}, r_{cd}, ...$, među različitim nultočkama $x_1, x_2, ..., x_s$ od $P_n(x)$. Kvadratni faktori nemaju realnih korijena, tj.

$$a^2 - 4b < 0, \quad c^2 - 4d < 0,\ ...$$

Neka je polinom $Q_m(x)$ rastavljen kao u Napomeni 7.5, tj.

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^{r_\alpha}(x-\beta)^{r_\beta}\cdots(x^2+ax+b)^{r_{ab}}(x^2+cx+d)^{r_{cd}}\cdots,$$

gdje je $(r_\alpha + r_\beta + ...) + 2(r_{ab} + r_{cd} + ...) = m$. Tada $R(x)$ možemo pisati kao

$$\begin{aligned}
R(x) =& \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_{r_\alpha}}{(x-\alpha)^{r_\alpha}} \\
&+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_{r_\beta}}{(x-\beta)^{r_\beta}} + \ldots \\
&+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+ax+b} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+ax+b)^2} + \ldots + \frac{M_{r_{ab}}x+N_{r_{ab}}}{(x^2+ax+b)^{r_{ab}}} \\
&+ \frac{R_1x+L_1}{x^2+cx+d} + \frac{R_2x+L_2}{(x^2+cx+d)^2} + \ldots + \frac{R_{r_{cd}}x+L_{r_{cd}}}{(x^2+cx+d)^{r_{cd}}} + \ldots
\end{aligned}$$

Svođenjem desne strane na zajednički nazivnik i množenjem s $Q_m(x)$ dobivamo jednakost $P_n(x) = S(x)$, pri čemu je $S(x)$ polinom u čijim se koeficijentima pojavljuju nepoznati koeficijenti

$$A_1, ..., A_{r_\alpha}, B_1, ..., B_{r_\beta}, M_1, N_1, ..., M_{r_{ab}}, N_{r_{ab}}, ...$$

iz brojnika desne strane. Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od x u $P_n(x)$ i $S(x)$ (Teorem 5.4) dobivamo sustav linearnih jednadžbi iz kojeg nalazimo nepoznate koeficijente u brojnicima parcijalnih razlomaka.
Ovim je postupkom problem integriranja racionalne funkcije $R(x)$ sveden na problem integriranja parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p}, \quad i \quad \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^q}.$$

Prvi slučaj je gotovo trivijalan:

$$\boxed{\int \frac{A}{(x-\alpha)^p}dx = \begin{cases} -\frac{A}{(p-1)(x-\alpha)^{p-1}} + C, & p > 1 \\ A\ln|x-\alpha| + C, & p = 1. \end{cases}}$$

Drugi je slučaj osjetno složeniji. Supstitucijom

$$t = \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}$$

dobivamo

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^q}dx = (b-\frac{a^2}{4})^{-q+\frac{1}{2}}(N-\frac{aM}{2})\int \frac{dt}{(t^2+1)^q} + (b-\frac{a^2}{4})^{-q+1}M\int \frac{tdt}{(t^2+1)^q}.$$

Time smo problem sveli na određivanje integrala

$$I_{1,q} = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^q} \quad i \quad I_{2,q} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^q}.$$

Integral $I_{1,q}$ se lako izračuna supstitucijom $u = t^2+1$:

$$\boxed{I_{1,q} = \begin{cases} \frac{(b-\frac{a^2}{4})^{q-1}}{2(q-1)} \frac{1}{(x^2+ax+b)^{q-1}} + C, & q > 1 \\ \frac{1}{2}\ln|x^2+ax+b| + C, & q = 1. \end{cases}}$$

Integracija integrala $I_{2,q}$ je složenija. Dobiva se

$$\boxed{I_{2,q} = \begin{cases} \frac{t}{2(q-1)(t^2+1)^{q-1}} + \frac{2q-3}{2q-2} I_{2,q-1}, & q > 1 \\ \operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} + C, & q = 1. \end{cases}}$$

(Račun kojim se dolazi do ove formule izostavljamo.)
Kako je formula za $I_{2,q}$ rekurzivna, i kako znamo izračunati integral $I_{2,1}$, nakon konačno mnogo primjena gornje formule doći ćemo do eksplicitnog izraza za $I_{2,q}$. Time je problem integracije racionalne funkcije u potpunosti riješen. Integral racionalne funkcije izražava se preko kombinacije racionalnih funkcija, logaritama i arkustangensa.

Primjer 7.10. *Odredimo integral racionalne funkcije* $f(x) = \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}$.

Polazimo od faktorizacije

$$x^3-2x^2+x = x(x-1)^2.$$

Imamo

$$\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Odatle slijedi

$$2x^2-3x+3 = A(x-1)^2+Bx+Dx(x-1) = (A+D)x^2+(-2A-D+B)x+A.$$

To nam daje sustav

$$\begin{aligned} A + D &= 2 \\ -2A + B - D &= -3 \\ A &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje je $A = 3$, $B = 2$, $D = -1$. *Dakle je*

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= 3 \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x-1} \\ &= 3 \ln |x| - \frac{2}{x-1} - \ln |x - 1| + C. \spadesuit \end{aligned}$$

Ako su nulišta nazivnika jednostruka, sustav za koeficijente se može lako riješiti njihovim uvrštavanjem:

Primjer 7.11. *Odredimo integral racionalne funkcije* $f(x) = \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}$.

Imamo

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+1}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$x + 2 = A(x + 1)(x - 2) + Bx(x + 1) + Dx(x - 2).$$

Uvrštavajući nulište $x = 0$ *dobivamo* $A = -1$; *uvrštavajući nulište* $x = -1$ *dobivamo* $D = \frac{1}{3}$; *uvrštavajući nulište* $x = 2$ *dobivamo* $B = \frac{2}{3}$. *Dakle je*

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} dx &= -\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= -\ln |x| + \frac{2}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{3} \ln |x + 1| + C. \spadesuit \end{aligned}$$

Na integriranje racionalnih funkcija svodi se i integriranje racionalnih funkcija eksponencijalne funkcije i racionalnih funkcija hiperboličkih funkcija. Racionalna funkcija eksponencijalne funkcije je, npr.

$$f(x) = \frac{(e^{2x})^3 + 2e^{2x} - 3}{e^{2x} - 5}.$$

Neka je $R(e^{ax})$ racionalna funkcija eksponencijalne funkcije e^{ax}. Supstitucijom $e^{ax} = t$, tj. $ae^{ax}dx = dt$, dobivamo $dx = \frac{1}{a}\frac{dt}{e^{ax}} = \frac{1}{a}\frac{dt}{t}$. Dakle je

$$\boxed{\int R(e^{ax})dx = \frac{1}{a}\int \frac{R(t)}{t}dt,}$$

što znamo riješiti.

Racionalna funkcija u varijablama $\sin x$ i $\cos x$ može se također integrirati kao racionalna funkcija varijable uvedene supstitucijom $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. To je tzv. **univerzalna trigonometrijska supstitucija**. Ona daje

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.}$$

Primjer 7.12. *Odredimo integral funkcije* $f(x) = \frac{1}{5+\sin x+3\cos x}$.

Koristeći univerzalnu trigonometrijsku supstituciju imamo

$$\int \frac{1}{5+\sin x+3\cos x}dx = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{5+5t^2+2t+3-3t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+t+4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}} + C. \spadesuit$$

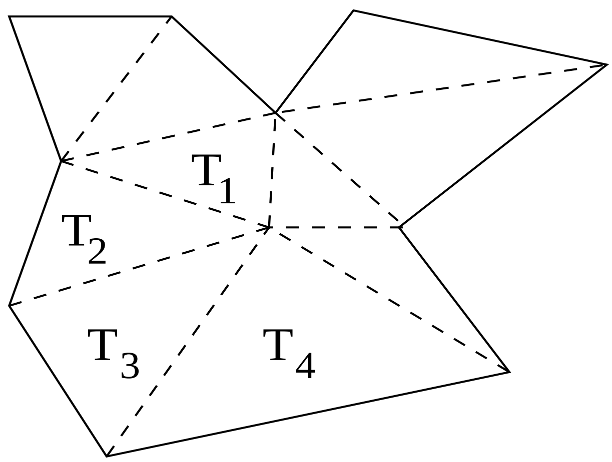
Sličnom se supstitucijom, $\mathrm{th}\frac{x}{2} = t$, integriranje racionalne funkcije od $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$ svodi na integriranje racionlne funkcije od t. Imamo

$$\boxed{\mathrm{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}.}$$

7.2 Određeni integral

7.2.1 Motivacija - problem površine (ploštine)

Problem određivanja površine (ploštine) geometrijskog lika lako je rješiti ako je taj lik omeđen "ravnim" komadima granice, tj. dužinama. Lik se triangulira, tj. podijeli na trokute tako da se ti trokuti ne preklapaju i da je njihova unija jednaka cijelom zadanom liku. Uz te uvjete površina lika je jednaka zbroju površina svih



Slika 7.3: Triangulacija područja u ravnini omeđenog dužinama.

trokuta u triangulaciji. Kako površinu trokuta znamo računati, problem možemo smatrati u biti riješenim.

$$P = \sum_i P(T_i),$$

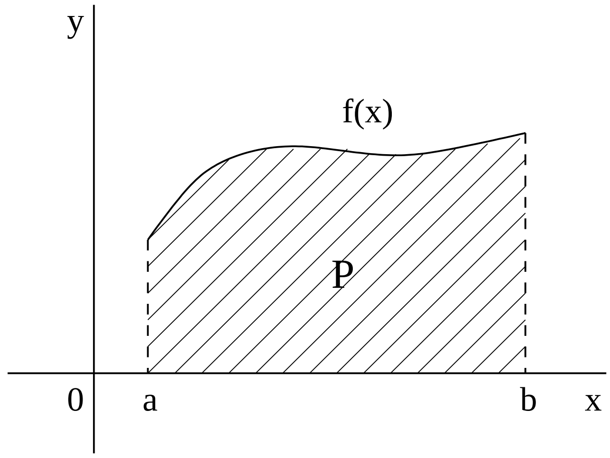
gdje se zbraja po svim trokutima triangulacije T_i.

Napomena 7.6. *Bilo bi korektnije govoriti o određivanju* ***ploštine*** *ravnog lika nego o određivanju njegove* ***površine****. Površina je geometrijska kategorija, ploha. Ploština je realan broj koji na određen način služi kao mjera površine. Imajući to na umu mi ćemo uglavnom i dalje govoriti o površini, jer je to uobičajenije.*

Što ako neki komadi granice ravninskog lika nisu ravni, ako su ti komadi krivulje?
Promatramo najjednostavniji takav slučaj, kad imamo lik omeđen s tri dužine i jednim komadom krivulje. Takav lik često zovemo **krivuljnim trapezom**.

Općenit slučaj se može svesti na zbroj površina krivuljnih trapeza čija unija čini zadani lik. Pri tom rastavljamo lik tako da krivuljni trapezi imaju ravne stranice paralelne s koordinatnim osima, i da komad krivulje bude graf neke funkcije. Neka je ta funkcija neprekidna.

Promatrajmo, dakle, krivuljni trapez omeđen odozdo komadom osi x, slijeva pravcem $x = a$, zdesna pravcem $x = b$ i odozgo grafom strogo pozitivne i neprekidne na $[a, b]$ funkcije $f(x)$. (Funkcija f je strogo pozitivna na $[a, b]$ ako



Slika 7.4: Krivuljni trapez.

je $f(x) > 0$, za svaki $x \in [a, b]$.) Po Teoremu 6.6, funkcija f na segmentu $[a, b]$ poprima minimalnu i maksimalnu vrijednost. Dakle je

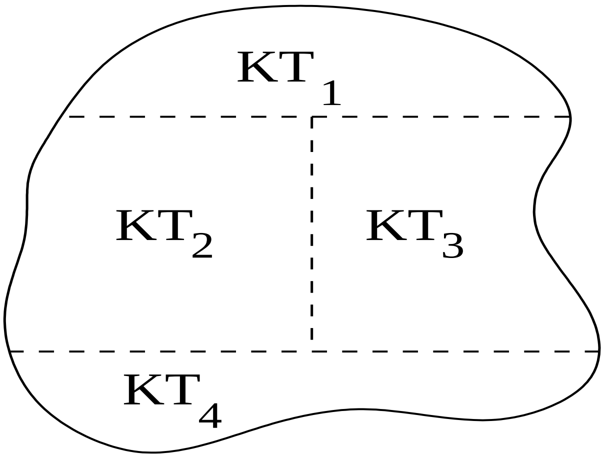
$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

gdje je m minimum, a M maksimum funkcije f na $[a, b]$. Sada se krivuljni trapez koji promatramo može cijeli upisati u pravokutnik kojem je osnovica segment $[a, b]$ i visina M. S druge strane, pravokutnik s osnovicom $[a, b]$ i visinom m je cijeli sadržan u našem krivuljnom trapezu. Označimo li traženu ploštinu s P, odavde slijedi

$$(b - a)m \leq P \leq (b - a)M.$$

Imamo gornju i donju ocjenu nepoznate veličine P. Ta je ocjena to bolja što je manja razlika vrijednosti M i m. Smanjenje te razlike može se postići podjelom segmenta $[a, b]$ na manje segmente i promatranjem krivuljnih trapeza nad tim manjim segmentima. Ideja je da se uzimanjem sve užih i užih osnovica nepoznata ploština P može po volji dobro aproksimirati zbrojevima površina pravokutnika upisanih ili opisanih malim krivuljnim trapezima.

Podijelimo segment $[a, b]$ na bilo kakav način na n podsegmenata točkama $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$, pri čemu su $x_i \in \langle a, b\rangle$ za svaki $i = 1, ..., n - 1$. Krajeve segmenta $[a, b]$ označimo s $x_0 = a$ i $x_n = b$. Označimo duljine malih segmenata s $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ...n$. Označimo s m_i i M_i najmanju i najveću vrijednost funkcije f na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$ (brojevi m_i i M_i



Slika 7.5: Rastav ravnog lika na krivuljne trapeze.

postoje po Teoremu 6.6). Uvijek je

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \quad i = 1, ...n,$$

jer najmanja (najveća) vrijednost na podsegmentu ne može biti manja (veća) od najmanje (najveće) vrijednosti na cijelom segmentu.

Označimo li sada zadanu podjelu $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ s r, jasno je da su toj podjeli r pridružena dva broja $s(r)$ i $S(r)$, koji predstavljaju zbrojeve površina upisanih i opisanih pravokutnika krivuljnim trapezima nad segmentima te podjele:

$$s(r) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S(r) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Veličine $S(r)$ i $s(r)$ zovemo **gornja i donja Darbouxova suma funkcije f za podjelu r na segmentu $[a, b]$**. Zbog $m_i \leq M_i$, $i = 1, ..., n$, imamo $s(r) \leq S(r)$, a zbog $m \leq m_i$ i $M_i \leq M$, $i = 1, ..., n$, imamo

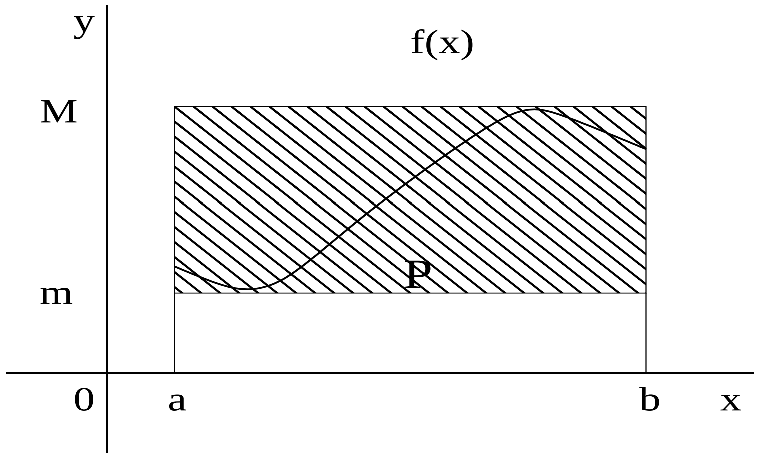
$$S(r) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b - a).$$

Slično,

$$m(b - a) \leq s(r),$$

pa vrijedi

$$m(b - a) \leq s(r) \leq S(r) \leq M(b - a).$$



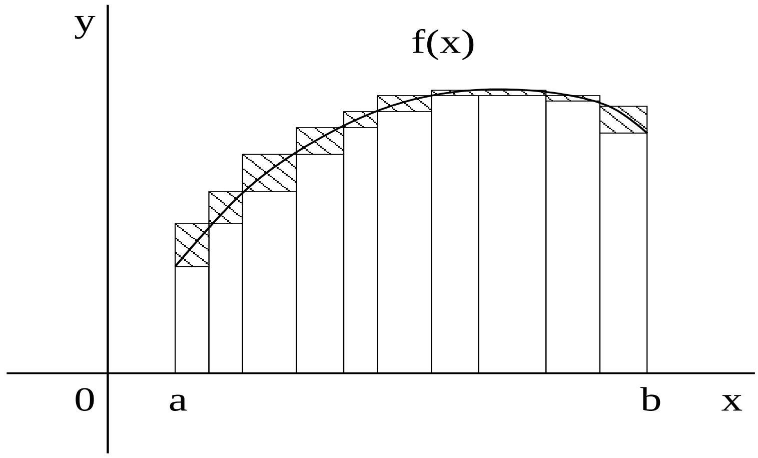
Slika 7.6: Gornja i donja međa za ploštinu krivuljnog trapeza.

Dakle su obje veličine $s(r)$ i $S(r)$ ograničene i odozdo i odozgo za svaku podjelu r.

Što se zbiva s gornjom i donjom Darbouxovom sumom prijeđemo li na sitniju podjelu segmenta $[a, b]$?
Istim zaključivanjem kao gore vidimo da se gornja Darbouxova suma ne povećava, a donja se ne smanjuje. To vrijedi ako se podjela profinjuje, tj. ako su stare točke u podjeli podskup novih. Dakle, tada je svaki mali krivuljni trapez stare podjele rastavljen na konačan broj još manjih krivuljnih trapeza.
Uzmimo u svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ točku s_i, $i = 1, ..., n$. Kako je $m_i \leq f(s_i) \leq M_i$, $i = 1, ..., n$, to vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Izraz $\sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta x_i$ zovemo **integralna suma funkcije** f. Ako uzimanjem sve finijih i finijih podjela od $[a, b]$ gornja i donja Darbouxova suma teže prema vrijednostima koje su jednake i koje ne ovise o načinu dijeljenja od $[a, b]$, onda i integralna suma između njih mora težiti prema istoj vrijednosti. Pokazuje se da je to uvijek slučaj za neprekidnu funkciju f.



Slika 7.7: Podjela intervala na podintervale i odgovarajuće aproksimacije ploštine pravokutnicima.

Definicija 7.2. *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada veličinu*

$$\lim_{\Delta x_i \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i$$

zovemo ***određeni integral*** *funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označavamo s*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Krajevi segmenta $[a, b]$ su ***granice integrala*** *(donja i gornja). Funkcija $f(x)$ je* ***podintegralna funkcija*** *ili* ***integrand****. Veličina x je* ***varijabla integracije****.*

Napomena 7.7. *Iz gornjih smo razmatranja vidjeli da se ploština ravnog lika omeđenog osi x, pravcima $x = a$ i $x = b$, te komadom grafa pozitivne neprekidne (na $[a, b]$) funkcije f definira kao određeni integral funkcije f u granicama od a do b.*

Definicija 7.3. *Ako za funkciju f možemo definirati određeni integral na $[a, b]$ kažemo da je f* ***integrabilna*** *na $[a, b]$.*

Postoje i funkcije za koje limesi gornje i donje Darbouxove sume nisu isti, tj. nisu integrabilne.

Primjer 7.13. *Dirichletova funkcija,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nije integrabilna.

Uočimo da za svaku podjelu r segmenta $[a, b]$ imamo $m_i = 0$ i $M_i = 1$, $i = 1, ..., n$. Dakle je $s(r) = 0$ i $S(r) = b - a$ za svaku podjelu r segmenta $[a, b]$. Gornja i donja Darbouxova suma uvijek teže različitim vrijednostima ($b - a$ i 0), tj. Dirichletova funkcija nije integrabilna.♠

Napomena 7.8. *Dirichletova funkcija ima prekid u svakoj točki.*

Iz Primjera 7.13 vidimo da nisu sve funkcije na segmentu $[a, b]$ integrabilne. Koje jesu? Neprekidne sigurno jesu. Koje još?

Teorem 7.5. *Svaka monotona funkcija na $[a, b]$ je integrabilna.*♣

Teorem 7.6. *Svaka neprekidna funkcija na $[a, b]$ je integrabilna.*♣

Napomena 7.9. *Uočimo da ako je f monotona funkcija na $[a, b]$, onda je ona i ograničena.*

Dokaz:

Ako f raste na $[a, b]$, onda je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, za svaki $x \in [a, b]$, dakle je f ograničena funkcija na $[a, b]$. Analogno se dokaže slučaj kada f pada na $[a, b]$.♣

Primjer 7.14. 1. *Izračunajmo iz definicije*

$$\int_a^b 1 \, dx.$$

Očito je funkcija $f(x) = 1$ neprekidna na $[a, b]$. Za svaku podjelu r segmenta $[a, b]$ je $m_i = M_i = f(s_i) = 1$, $i = 1, ..., n$. Dakle imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = s(r) \leq \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta x_i \leq S(r) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Kako je $S(r) = s(r) = b - a$ prijelazom na limes dobivamo

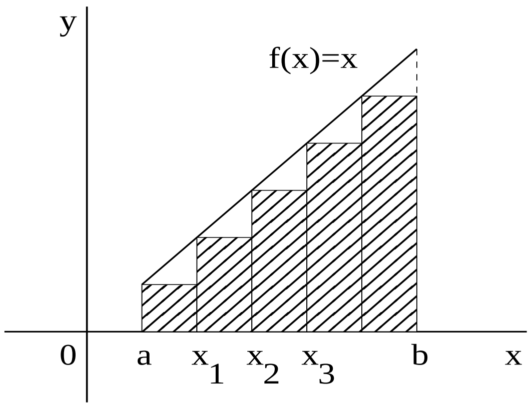
$$b - a \leq \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1\,dx \leq b - a,$$

dakle je

$$\int_a^b 1\,dx = b - a.$$

2. *Izračunajmo*

$$\int_a^b x\,dx.$$



Slika 7.8: Računanje određenog integrala funkcije $f(x) = x$ iz definicije.

Očito je funkcija $f(x) = x$ neprekidna na $[a, b]$. Podijelimo segment $[a, b]$ na n jednakih djelova, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sada je $m_i = a + (i-1)\Delta x$, $M_i = a + i\Delta x$. Dakle imamo

$$\begin{aligned} s(r) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)\Delta x) = na\Delta x + \Delta x^2 \sum_{i=1}^{n} (i-1) \\ &= na\Delta x + \Delta x^2 \frac{n(n-1)}{2} = na\frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{n-1}{n}\frac{(b-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

Prijelazom na limes dobivamo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s(r) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Analogno dobijemo da je

$$S(r) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

dakle je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.\spadesuit$$

Što ako funkcija nije pozitivna na $[a,b]$?
Ako je f neprekidna i negativna na $[a,b]$ ($f(x) \leq 0$, za svaki $x \in [a,b]$) možemo napraviti analognu konstrukciju mjere površine krivuljnog trapeza omeđenog odozgo s osi x, slijeva s pravcem $x = a$, zdesna pravcem $x = b$ i odozdo grafom funkcije f, tj. određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$, kao i za neprekidnu pozitivnu funkciju. Međutim, u ovom slučaju će biti $m \leq 0$ i $M \leq 0$, i za svaku podjelu r segmenta $[a,b]$ će biti $m_i \leq 0$ i $M_i \leq 0$, $i = 1,...,n$. Dakle vrijednost određenog integrala negativne funkcije će biti nepozitivan broj, tj.

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0.$$

Ako je neprekidna funkcija f na $[a,b]$ takva da je pozitivna na $[a,c]$ i negativna na $[c,b]$ (zbog neprekidnosti je $f(c) = 0$), za neki $c \in \langle a,b\rangle$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx$$

razlika ploštine P_1 ispod grafa pozitivnog dijela funkcije f (nad $[a,c]$) i ploštine P_2 iznad grafa negativnog dijela funkcije f (nad $[c,b]$). Dakle, u općem slučaju određeni integral je algebarski zbroj ploština između osi x i grafa krivulje. Po tomu je pravilu

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0.$$

7.2.2 Svojstva određenog integrala

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

   Dokaz:

   Za bilo koju podjelu r segmenta $[a,a]$ su gornja i donja Darbouxova suma jednake nula, pa je $\int_a^a f(x)dx = 0.\clubsuit$

2. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Dokaz:

Ako je $a < b$ onda će u Darbouxovim sumama i integralnoj sumi kojima se definira $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ vrijednosti Δx_i, $i = 1, ..., n$, biti negativne, a vrijednosti m_i, M_i i $f(s_i)$, $i = 1, ..., n$, ostaju iste. Dakle određeni integral mijenja predznak ako se zamijene granice.♣

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ za svaku točku $c \in \langle a, b\rangle$.
Ovo se zove aditivnost integrala po području integracije.

Dokaz:

Rezultat slijedi jer se uzimanjem točke $c \in \langle a, b\rangle$ u svaku podjelu od $[a, b]$ zbrojevi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i$ rastavljaju u zbrojeve u kojima su svi $s_i < c$ i u zbrojeve u kojima su svi $s_i > c$, $i = 1, ..., n$. Prijelazom na limes prvi zbrojevi teže u $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$, a drugi u $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$.♣

Ovo se poopćuje i na konačan zbroj pribrojnika, tj.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx,$$

za $a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < b$.

Uočimo da ovo svojstvo vijedi i za $c \notin \langle a, b\rangle$ ako uzmemo u obzir svojstvo 2. Za $c < a < b$ imamo

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx,$$

pa onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Analogno se dokaže ako je $a < b < c$.

Napomena 7.10. *Iz ovog svojstva slijedi da i funkcije koje na $[a,b]$ imaju konačno mnogo točaka prekida u kojima imaju konačne skokove ($f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ima u $c \in I$ konačan skok ako je $|\lim_{x\longrightarrow c^+} f(x) - \lim_{x\longrightarrow c^-} f(x)| < +\infty$) imaju određeni integral. To možemo napraviti tako da integral $\int_a^b f(x)dx$ zapišemo u obliku*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + ... + \int_{a_{n-1}}^b f(x)dx,$$

gdje su $a < a_1 < a_2 < ... < a_{n-1} < b$ sve točke prekida od f na $[a,b]$. Kako je f neprekidna, na svakom segmentu $[a,a_1],...,[a_{n-1},b]$ znamo izračunati integrale $\int_a^{a_1} f(x)dx, ..., \int_{a_{n-1}}^b f(x)dx$, dakle znamo izračunati i $\int_a^b f(x)dx$.

Definicija 7.4. *Funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je **po dijelovima monotona** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i točke*

$$a < a_1 < a_2 < ... < a_n < b,$$

takve da je f monotona na svakom segmentu $[a,a_1],...,[a_n,b]$.

Dakle, iz Teorema 7.5 i svojstva 3. izravno slijedi da je svaka po dijelovima monotona funkcija na segmentu i integrabilna.

4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$ ili aditivnost integrala.

Dokaz:

Aditivnost integrala slijedi izravno iz Definicije 7.2 i Teorema 6.18.♣

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$ gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan.

Dokaz:

Ovo svojstvo se zove svojstvo homogenosti integrala i izravno slijedi iz Definicije 7.2 i Teorema 6.18.♣

Napomena 7.11. *Ako s $R(I)$ označimo skup svih integrabilnih funkcija na $I = [a,b]$ (skup $R(I)$ nije prazan, unutra se sigurno nalaze sve neprekidne funkcije na $[a,b]$), onda iz svojstva aditivnosti i homogenosti slijedi da je skup $R(I)$ beskonačnodimenzionalni vektorski prostor. Štoviše, $R(I)$ je podprostor realnog vektorskog prostora svih funkcija $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (Napomena 5.13). Beskonačnodimenzionalan je, jer npr. skup*

$$\{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

je linearno nezavisan za svaki $n \in \mathbb{N}$ (Teorem 5.3), i svaka funkcija iz tog skupa je neprekidna na I, dakle i integrabilna. Dakle beskonačni skup $\{x^n : n = 0, 1, ...\}$ se nalazi u nekoj bazi od $R(I)$. Nadalje, iz svojstva aditivnosti i homogenosti određenog integrala vidimo da je određeni integral linearni funkcional na $R(I)$.

6. Ako je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = 0$ osim u konačno mnogo točaka, onda je
$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Dokaz:

Uzmimo prvo da je $f(x) = 0$ osim možda u točki $c \in [a,b]$ i da je $f(c) > 0$. Očito je tada $m = 0$, $M = f(c)$ i za svaku podjelu r segmenta $[a,b]$ točka c pada u točno jedan $[x_{j-1}, x_j]$, pa je $m_i = 0$, $i = 1, ..., n$, $M_i = 0$, $i = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$, i $M_j = f(c)$. Dakle je $s(r) = 0$ i $S(r) = M_j \Delta x_j$. Prelazeći na limes dobivamo da je

$$\lim_{\Delta x_j \longrightarrow 0} S(r) = 0,$$

dakle je

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

U slučaju kad je $f(x) = 0$ osim u konačno mnogo točaka, i kad f nije nužno pozitivna dokaz ide posve analogno tako da segment $[a,b]$ po svojstvu 3. rastavimo na konačan broj podsegmenata koji sadrže najviše jedno nulište funkcije f, i prema dokazanome je

$$\int_a^b f(x)dx = 0.\clubsuit$$

Kao izravnu posljedicu imamo: ako se funkcije g i h razlikuju na $[a,b]$ u samo konačno mnogo točaka onda je

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b h(x)dx.$$

7. a) Ako je $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ neparna, onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

b) Ako je $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ parna, onda je

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Dokaz:

a) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} -f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

b) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.\clubsuit$$

8. Ako je f neprekidna i nenegativna funkcija na $[a, b]$ i ako je $f(c) > 0$ za neki $c \in [a, b]$, onda je

$$\int_{a}^{b} f(x)dx > 0.$$

Dokaz:

Kako je $f(c) > 0$ za neki $c \in [a, b]$ iz Teorema 6.3 slijedi da postoji interval $I' \subset [a, b]$ oko točke c takav da je $f(x) > 0$, za svaki $x \in I'$. Dakle postoje x_1, $x_2 \in I'$ takve da je $x_1 < c < x_2$. Iz pozitivnosti funkcije f na $[a, b]$ odnosno stroge pozitivnosti na $[x_1, x_2]$ imamo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0,$$

odnosno

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx > 0.\clubsuit$$

9. Neka su f i g neprekidne funkcije na $[a, b]$ takve da je $f(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Ako je $f(c) < g(c)$ za bar jedno $c \in [a, b]$ onda vrijedi stroga nejednakost. Ovo svojstvo se zove svojstvo **monotonosti** integrala.

Dokaz:

Po Teoremu 7.8 je dobro definirana funkcija $F \in C^1[a, b]$ formulom

$$F(x) = \int_a^x (g(\zeta) - f(\zeta))d\zeta,$$

i očito ima pozitivnu derivaciju, tj.

$$F'(x) = g(x) - f(x) \geq 0.$$

Dakle, po Teoremu 6.28 F raste na $[a, b]$. Odatle slijedi da je $F(b) \geq F(a) = 0$, odnosno

$$F(b) = \int_a^b (g(\zeta) - f(\zeta))d\zeta \geq 0.$$

Ako je $f(c) < g(c)$ za bar jedno $c \in [a, b]$, onda je $F'(c) = g(c) - f(c) > 0$. Kako je funkcija $F' = g - f$ neprekidna na $[a, b]$ tada iz Teorema 6.3 slijedi da postoji interval $I' \subset [a, b]$ oko točke c takav da je $F'(x) > 0$, za svaki $x \in I'$, odnosno po Teoremu 6.28 F strogo raste na I'. Dakle postoje x_1, $x_2 \in I'$ takve da je $x_1 < x_2$ i $F(x_1) < F(x_2)$. Kako je $F(a) \leq F(x_1)$ i $F(x_2) \leq F(b)$, imamo da je $F(b) > F(a) = 0$, odnosno imamo strogu nejednakost.♣

10. Neka je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Očito vrijedi $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, za svaki $x \in [a, b]$. Nadalje, iz svojstva 9. imamo da je

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

tj.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

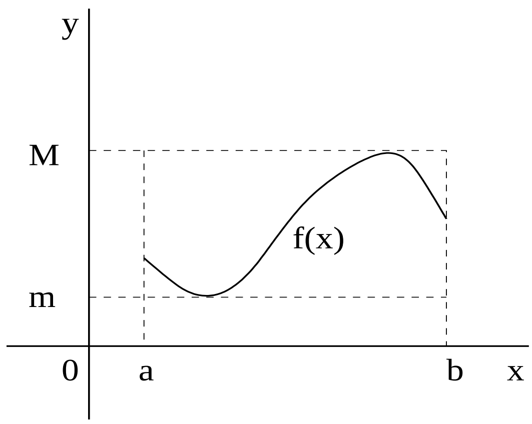
11.

Teorem 7.7 (Teorem srednje vrijednosti). *Neka je funkcija f neprekidna na $[a,b]$. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dokaz:

Po Teoremu 6.6, iz neprekidnosti funkcije f na $[a,b]$ slijedi da f dostiže svoj minimum m i maksimum M na $[a,b]$, tj. $m \leq f(x) \leq M$, za svaki $x \in [a,b]$. Ako f nije konstanta na $[a,b]$, iz svojstva 9. i Primjera 7.14



Slika 7.9: Teorem srednje vrijednosti za određeni integral.

slijedi

$$m(b-a) = m\int_a^b dx < \int_a^b f(x)dx < M\int_a^b dx = M(b-a).$$

Nadalje iz Teorema 6.6 znamo da funkcija f poprima barem jednom svaku vrijednost između m i M, pa postoji barem jedan $c \in [a,b]$ za koji je

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).\clubsuit$$

Izraz

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

se zove **srednja vrijednost** funkcije f na segmentu $[a, b]$. Površina ispod grafa neprekidne funkcije f nad $[a, b]$ jednaka je površini pravokutnika s osnovicom $b - a$ i visinom $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Odatle ime teoremu.

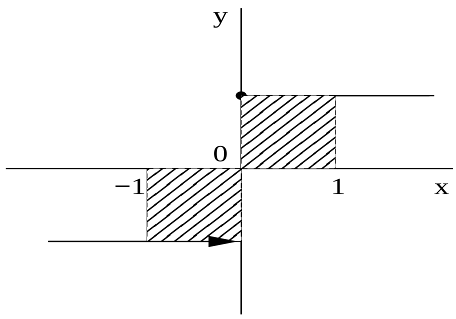
Teorem 7.7 kaže da je srednja vrijednost neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$ jednaka vrijednosti te funkcije u nekoj točki tog segmenta.

Napomena 7.12. *Srednja vrijednost je poopćenje pojma* ***aritmetičke sredine*** *(aritmetička sredina od* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *je* $\overline{a} = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$*).*

Za funkcije koje nisu neprekidne Teorem 7.7 ne mora vrijediti:

Primjer 7.15. *Neka je dana funkcija* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *formulom*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



Slika 7.10: Teorem srednje vrijednosti ne mora vrijediti za funkcije koje nisu neprekidne.

Očito je da funkcija f ima prekid u $x_0 = 0$. Nadalje, kako je f neparna funkcija, iz

svojstva 7. imamo da je

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0,$$

međutim ne postoji točka $c \in [-1, 1]$ za koju je $f(c) = 0$.♠

7.3 Newton - Leibnizova formula

Računanje određenih integrala izravno iz definicije mukotrpno je i teško izvedivo čak i za jednostavne funkcije. Srećom, postoji veza između primitivne funkcije i određenog integrala koja omogućuje računanje određenih integrala pomoću neodređenih. Dokazat ćemo tu vezu u najjednostavnijem slučaju, kad je podintegralna funkcija neprekidna.

Prije formuliranja i dokazivanja teorema, promatrajmo na segmentu $[a, b]$ neprekidnu i, jednostavnosti radi, pozitivnu funkciju f. Za svaki $x \in [a, b]$ postoji $\int_a^x f(\zeta)d\zeta$, i taj je broj jednak ploštini između grafa funkcije f i osi x omeđenoj vertikalnim pravcima $x = a$ i x. Dakle imamo pridruživanje koje svakom $x \in [a, b]$ pridruži ploštinu ispod grafa funkcije f desno od a i lijevo od x. Tim je pridruživanjem definirana funkcija koju označimo s F. Imamo

$$x \longmapsto F(x),$$

gdje je

$$F(x) = \int_a^x f(\zeta)d\zeta.$$

Pokazat ćemo da je ta funkcija F derivabilna na $[a, b]$ i izračunat ćemo njenu derivaciju.

Teorem 7.8. *Neka je $f \in C[a, b]$. Funkcija F definirana formulom*

$$F(x) = \int_a^x f(\zeta)d\zeta$$

je derivabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

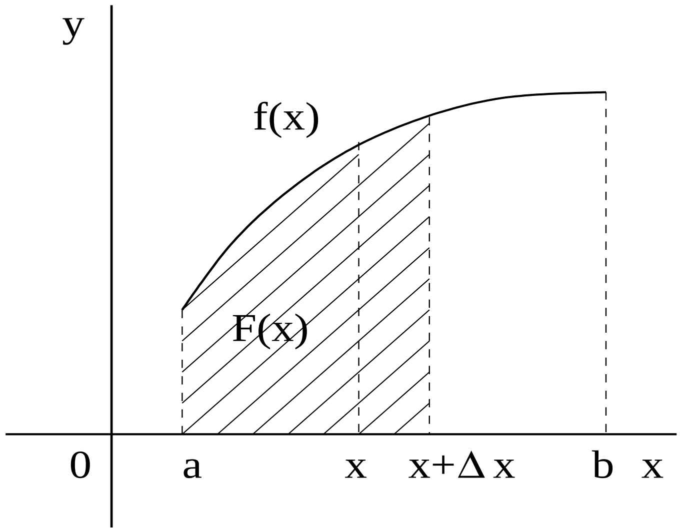
Dokaz:

Računamo derivaciju od F po definiciji:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(\zeta)d\zeta - \int_a^x f(\zeta)d\zeta = \int_x^{x+\Delta x} f(\zeta)d\zeta.$$

Hoćemo gledati

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$



Slika 7.11: Funkcija $F(x)$.

Funkcija f je neprekidna na $[a, b]$, pa onda i na svakom podsegmentu $[x, x+\Delta x]$. Onda ona na tom segmentu poprima svoj minimum m u ζ_1 i maksimum M u ζ_2 (Teorem 6.6). Po Teoremu 7.7 vrijedi

$$m\Delta x \leq \int_{x}^{x+\Delta x} f(\zeta) d\zeta \leq M\Delta x,$$

odnosno

$$f(\zeta_1) = m \leq \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq M = f(\zeta_2).$$

Prijelazom na limes kad $\Delta x \longrightarrow 0$, točke ζ_1 i ζ_2 moraju težiti prema x, pa imamo

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} f(\zeta_1) \leq \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} f(\zeta_2).$$

Kad $\zeta_1 \longrightarrow x$, onda, zbog neprekidnosti funkcije f na $[a, b]$, mora vrijediti $f(\zeta_1) \longrightarrow f(x)$ (Teorem 6.12). Slično i za $\zeta_2 \longrightarrow x$. Odatle slijedi

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq f(x),$$

tj.

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x),$$

tj. $F'(x) = f(x)$. Dakle je $F(x)$ derivabilna funkcija na cijelom $[a, b]$ i $F'(x) = f(x)$.♣

Teorem 7.8 kaže da je $\int_a^x f(\zeta)d\zeta$ primitivna funkcija funkcije f. Slična se tvrdnja može dokazati i ako se uvjet neprekidnosti funkcije f zamijeni uvjetom integrabilnosti, no dokaz je bitno složeniji.

Teorem 7.9 (Newton - Leibnizova formula)**.** *Neka je funkcija f definirana i neprekidna na $[a, b]$ Tada postoji primitivna funkcija F funkcije f i vrijedi*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

Dokaz:

Prema Teoremu 7.8 znamo da je $F(x) = \int_a^x f(\zeta)d\zeta$ primitivna funkcija funkcije f. Uvrstimo li $x = a$ i $x = b$ u izraz za F iz svojstva 1. iz točke 7.2.2 dobivamo

$$F(a) = \int_a^x f(a)d\zeta = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(\zeta)d\zeta.$$

Odatle je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).\clubsuit$$

Newton - Leibnizova formula je jedan od najznačajnijih rezultata cijele matematičke analize. U njoj se povezuju određeni integral, do kojeg dolazimo preko limesa niza integralnih suma, i neodređeni, do kojeg smo došli pokušavajući invertirati linearni operator deriviranja. Time je omogućena primjena metoda razvijenih za neodređene integrale na računanje određenih.

Desna strana Newton - Leibnizove formule se još kraće piše kao

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Čitamo to kao "$F(x)$ u granicama od a do b".

Kod primjene na računanje određenih integrala, u metodama izravne integracije se samo na kraju u izračunati neodređeni integral uvrste granice, i od vrijednosti u gornjoj granici se oduzme vrijednost u donjoj granici. Pri tome nestane konstanta integracije.

Kod metode zamjene varijabli jedan način je da se provede račun do kraja, da se u konačni neodređeni integral vrati putem obrnute supstitucije originalna varijabla integriranja i da se onda uvrste originalne granice. Stvari se znaju zakomplicirati ako ima više supstitucija. Drugi pristup je da se kod svake supstitucije osim podintegralne funkcije i diferencijala modificiraju i granice. Onda na kraju ne treba vraćati natrag originalnu varijablu integracije ni originalne granice. Prilikom izbora supstitucije treba još voditi računa o neprekidnosti derivacije supstitucije i o tome da njene vrijednosti ne izlaze izvan granice zadanog segmenta integracije (da bi određeni integral bio dobro definiran).

Teorem 7.10 (Zamjena varijabli u određenom integralu)**.** *Neka funkcija* φ *ima neprekidnu derivaciju* φ' *na* $[\alpha,\beta]$ *i neka je* $\varphi'(t) \neq 0$ *za* $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$. *Ako vrijednosti funkcije* φ *na* $[\alpha,\beta]$ *ne izlaze izvan segmenta* $[a,b]$, *i ako je* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *onda za* $f \in C([a,b])$ *vrijedi formula zamjene varijabli*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}\clubsuit$$

Primjer 7.16. *Izračunajmo*

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}dx.$$

Stavimo $\varphi(t) = 2\sin t$. *Iz* $\varphi(t) = -\sqrt{3}$, *tj.* $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *imamo* $t_1 = -\frac{\pi}{3}$. *Analogno, iz* $\varphi(t) = \sqrt{3}$ *dobijemo* $t_2 = \frac{\pi}{3}$. *Sada očito funkcija* $\varphi : [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadovoljava uvjete Teorema 7.10, dakle imamo*

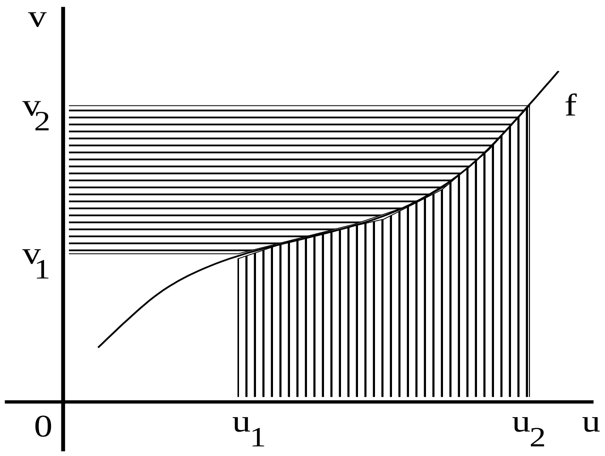
$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,dt = 4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.\spadesuit\end{aligned}$$

Kod parcijalne integracije situacija je jednostavnija, samo se uvrste granice:

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_a^b [(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)]dx \\ &= \int_a^b (u(x)v(x))'dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,\end{aligned}$$

tj.

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.}$$



Slika 7.12: Parcijalna integracija

Formula za parcijalnu integraciju ilustrirana je na slici 7.12. Površina horizontalno iscrtkanog područja jednaka je $\int_{v_1}^{v_2} udv$, površina vertikalno iscrtkanog područja je $\int_{u_1}^{u_2} vdu$. Njihov zbroj jednak je razlici $u_2v_2 - u_1v_1$, a to je upravo $uv|_{u_1v_1}^{u_2v_2}$.

Primjer 7.17. *Izračunajmo*

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Iz Primjera 7.6 imamo

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1. \spadesuit$$

7.4 Nepravi integral

Do sada smo uvijek pretpostavljali da je podintegralna funkcija neprekidna (dakle po Teoremu 6.6 i omeđena) na području integracije, kao i da je samo područje integracije konačno. Vrijednosti integrala mogu se ponekad (ali ne uvijek) izračunati i ako su neki od tih uvjeta narušeni. U takvim slučajevima govorimo o **nepravim integralima**.

Promatramo prvo slučaj kad integrand nije ograničen na području integracije. Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b\rangle$ i neka je

$$\lim_{x \longrightarrow b-} f(x) = +\infty.$$

Znamo da za svaki $x \in [a, b\rangle$ postoji integral te funkcije u granicama od a do x, tj. postoji

$$\int_a^x f(\zeta) d\zeta.$$

Ako funkcija $\displaystyle\int_a^x f(\zeta) d\zeta$ teži prema nekoj konačnoj graničnoj vrijednosti $L \in \mathbb{R}$ kada $x \longrightarrow b-$, kažemo da nepravi integral $\displaystyle\int_a^b f(\zeta) d\zeta$ ima vrijednost ili da **konvergira** i pišemo

$$\boxed{\int_a^b f(\zeta) d\zeta = \lim_{x \longrightarrow b-} \int_a^x f(\zeta) d\zeta = L.}$$

Ako promatrani limes ne postoji, kažemo da integral **divergira** ili da nema značenja. Ovakav nepravi integral zove se **nepravi integral 1. vrste**.

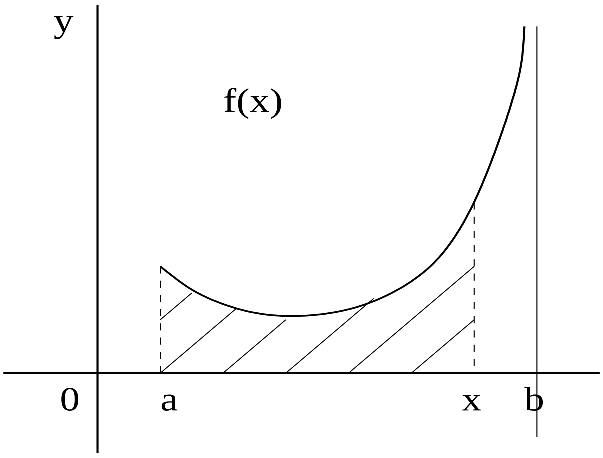
Slično se radi u slučajevima kad $f(x) \longrightarrow -\infty$ za $x \longrightarrow b-$, te za slučajeve kad funkcija nije ograničena u donjoj granici integracije, tj. u točki a.

Primjer 7.18. *1. Integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

je nepravi integral, jer $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow +\infty$ *kada* $x \longrightarrow 1-$. *Znamo da je*

$$\int_0^x \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \arcsin \zeta \Big|_0^x = \arcsin x,$$



Slika 7.13: Nepravi integral funkcije koja nije ograničena na području integracije.

i znamo da je

$$\lim_{x \longrightarrow 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

pa onda znamo i da $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *konvergira i da je*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

2. *Integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

je nepravi integral, jer $\frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty$ *kada* $x \longrightarrow 0+$. *Računamo*

$$\int_x^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = 2\sqrt{\zeta}\Big|_x^1 = 2(1-\sqrt{x}).$$

Nadalje imamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \int_x^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = 2 \lim_{x \longrightarrow 0+} (1-\sqrt{x}) = 2.$$

Dakle $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *konvergira i*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

3. *Integral*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

je nepravi integral, jer $\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ *kada* $x \longrightarrow 0+$. *Računamo*

$$\int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln \zeta \Big|_x^1 = -\ln x.$$

Nadalje imamo

$$\lim_{x\longrightarrow 0+} \int_x^1 \frac{d\zeta}{\zeta} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty. \spadesuit$$

Dakle ovaj nepravi integral divergira.

Ako se točka u kojoj funkcija nije definirana nalazi u segmentu integracije, taj interval se rastavi u dva intervala s tom točkom kao granicom, tj.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \longrightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \longrightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Ako oba limesa na desnoj strani postoje, onda $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ konvergira, inače divergira.

Primjer 7.19. 1. *Izračunajmo* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *nije definirana u točki* $x_0 = 0$ *segmenta* $[-1, 1]$. *Dakle imamo*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon_1 \longrightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \longrightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \longrightarrow 0} (-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}) + \lim_{\varepsilon_2 \longrightarrow 0} (-\frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon_2}^1) \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 - 1 + \lim_{\varepsilon_2 \longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_2} = +\infty.\end{aligned}$$

Dakle $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ *divergira.*

2. *Izračunajmo* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^n}$.

Stavimo $\varphi(t) = t + b$. *Iz* $\varphi(t) = a$, *tj.* $t + b = a$ *imamo* $t_1 = a - b$. *Analogno, iz* $\varphi(t) = b$ *dobijemo* $t_2 = 0$. *Sada očito funkcija* $\varphi : [a - b, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadovoljava uvjete Teorema 7.10, dakle imamo*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^n} = \int_{a-b}^0 \frac{dt}{t^n}.$$

Ako je $n < 0$, *onda je* $-n > 0$ *pa imamo*

$$\int_{a-b}^0 \frac{dt}{t^n} = \frac{t^{-n+1}}{-n+1}\Big|_{a-b}^0 = -\frac{(a-b)^{1-n}}{1-n}.$$

Ako je $n = 0$ *imamo*

$$\int_{a-b}^0 \frac{dt}{t^n} = \int_{a-b}^0 dt = t\Big|_{a-b}^0 = b - a.$$

Ako je $n \geq 1$, *onda funkcija* $f(x) = \frac{1}{(x-b)^n}$ *nije definirana u desnom rubu segmenta* $[a, b]$, *odnosno funkcija* $g(t) = \frac{1}{t^n}$ *nije definirana u desnom rubu segmenta* $[a - b, 0]$. *Integral*

$$\int_{a-b}^0 \frac{dt}{t^n}$$

je nepravi integral za $n \geq 1$, *jer* $\frac{1}{t^n} \longrightarrow +\infty$ *za paran* n *i* $\frac{1}{t^n} \longrightarrow -\infty$ *za neparan* n *kada* $t \longrightarrow 0-$. *Znamo da je*

$$\int_{a-b}^t \frac{d\zeta}{\zeta^n} = \ln|\zeta|\Big|_{a-b}^t = \ln|t| - \ln(b-a),$$

za $n = 1$ *i*

$$\int_{a-b}^t \frac{d\zeta}{\zeta^n} = \frac{\zeta^{-n+1}}{-n+1}\Big|_{a-b}^t = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} - \frac{(a-b)^{-n+1}}{-n+1},$$

za $n > 1$. *Kako je*

$$\lim_{t \longrightarrow 0-} (\ln|t| - \ln(b-a)) = -\infty$$

i

$$\lim_{t \longrightarrow 0-} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} - \frac{(b-a)^{-n+1}}{-n+1} = +\infty,$$

za paran n i

$$\lim_{t \longrightarrow 0-} \frac{t^{-n+1}}{-n+1} - \frac{(b-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\infty$$

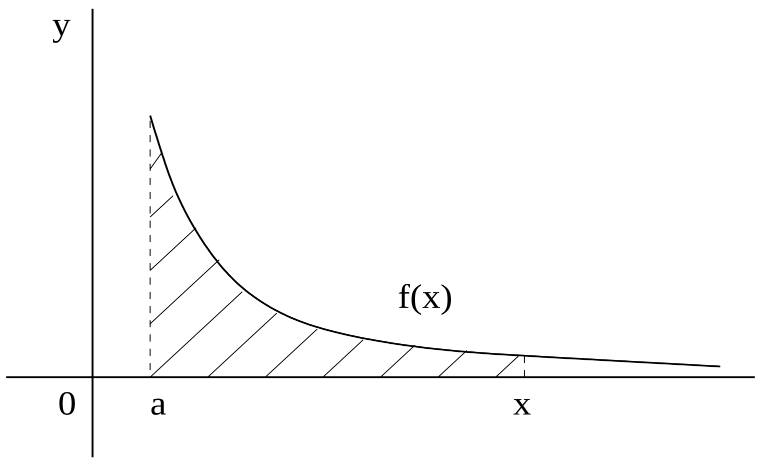
za neparan n, integral $\int_{a-b}^{0} \frac{dx}{t^n}$ *divergira za* $n \geq 1$. *Dakle*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^n}$$

konvergira za $n < 1$, *divergira za* $n \geq 1$.♠

Problem konvergencije nepravih integrala može se rješavati sličnim metodama kao problem konvergencije redova. Uz svojstvo monotonosti integrala (svojstvo 9. iz točke 7.2.2) npr. Primjer 7.19 može poslužiti pri uspoređivanju.

Promatrajmo sada drugi mogući izvor problema, tj. situaciju kad područje integracije nije ograničeno. Neka je funkcija f neprekidna na $[a, +\infty\rangle$. Znamo



Slika 7.14: Nepravi integral po neograničenom području integracije.

da za svaki $x \in [a, +\infty\rangle$ postoji integral te funkcije u granicama od a do x, tj. postoji

$$\int_a^x f(\zeta)d\zeta.$$

Ako funkcija $\int_a^x f(\zeta)d\zeta$ teži prema nekoj konačnoj graničnoj vrijednosti kada

$x \longrightarrow +\infty$, kažemo da nepravi integral $\int_a^{+\infty} f(\zeta)d\zeta$ ima vrijednost ili da **konvergira** i pišemo

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(\zeta)d\zeta.}$$

Ako promatrani limes ne postoji, kažemo da integral **divergira**.

Slično postupamo i za slučaj

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$$

pa i za slučaj

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ovakvi se integrali zovu **nepravi integrali 2. vrste**.

Primjer 7.20. *1. Izračunajmo*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Imamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\zeta}d\zeta = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (-e^{-\zeta}\Big|_0^x) = 1 - \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x} = 1.$$

Dakle gornji nepravi integral konvergira.

2. Izračunajmo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Imamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln \zeta\Big|_1^x = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Dakle vidimo da ovaj nepravi integral divergira. Može se pokazati da nepravi integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

konvergira za svaki $p > 1$ i divergira za $0 < p \leq 1$.

3. Izračunajmo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Imamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\zeta}\Big|_1^x \right) = -\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1.$$

4. Izračunajmo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Zbog neparnosti funkcije arctg *imamo*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \zeta \Big|_{-x}^{x} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(-x)) = 2 \lim_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

Zanimljivo je da neomeđena površina ispod grafa racionalne funkcije ima transcendentnu konačnu vrijednost π.♠

7.5 Primjene integralnog računa

7.5.1 Površina lika u ravnini

U točki 7.2.1 smo rekli da za neprekidnu i pozitivnu funkciju $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ broj

$$\int_a^b f(x)dx$$

predstavlja ploštinu lika omeđenog grafom funkcije f, osi x, pravcem $x = a$ i pravcem $x = b$.

Ako je funkcija f neprekidna i negativna na $[a, b]$, onda broj

$$\int_a^b f(x)dx$$

predstavlja ploštinu površine omeđene grafom funkcije f, osi x, pravcem $x = a$ i pravcem $x = b$, ali negativnog predznaka.

Nadalje, ako je $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna takva da je pozitivna na $[a, c]$ i negativna na $[c, b]$, za neki $c \in \langle a, b\rangle$, onda

$$\int_a^b f(x)dx$$

je razlika ploštine površine P_1 ispod grafa pozitivnog dijela funkcije f (nad $[a, c]$) i ploštine površine P_2 iznad grafa negativnog dijela funkcije f (nad $[c, b]$), tj.

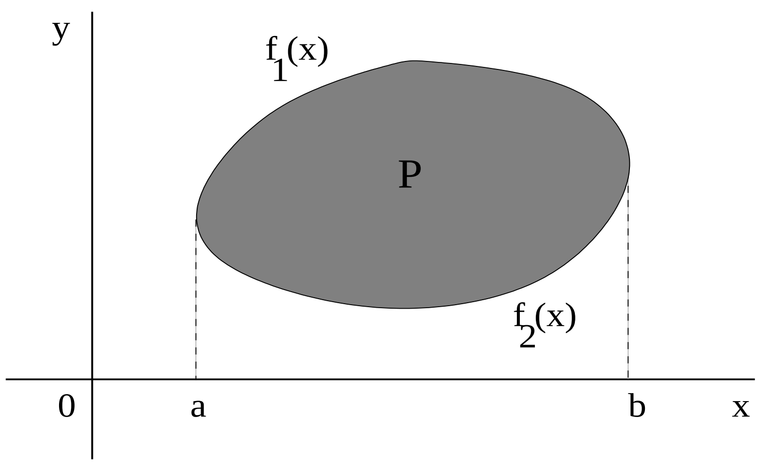
$$\int_a^b f(x)dx = P_1 - P_2.$$

Ploština površine između grafa funkcije f, osi x, pravca $x = a$ i pravca $x = b$, tj. broj $P_1 + P_2$, jednaka je

$$\boxed{P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.}$$

Iz gornjih razmatranja imamo da je ploština površine između grafova fukcija f_1 i f_2 omeđena pravcima $x = a$ i $x = b$, gdje su $f_1, f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $f_1(x) \geq f_2(x)$, za svaki $x \in [a, b]$, dana s

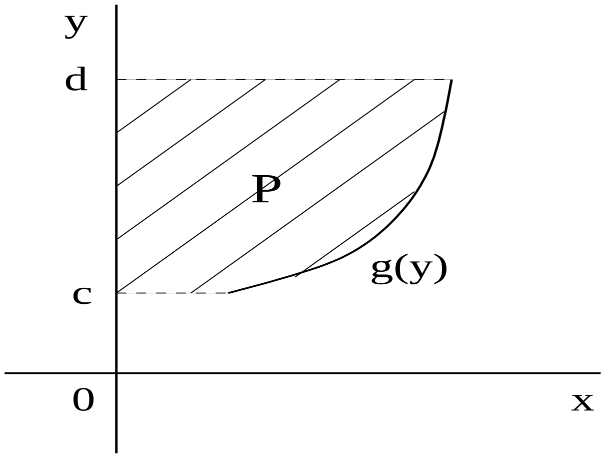
$$\boxed{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.}$$



Slika 7.15: Ploština lika omeđenog grafovima dviju funkcija.

Ako je $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i pozitivna funkcija u varijabli y, tj. promatramo krivulju $x = g(y)$, onda je ploština površine omeđene grafom funkcije g, osi y, pravcem $y = c$ i pravcem $y = d$ dana s

$$\int_c^d g(y)dy.$$

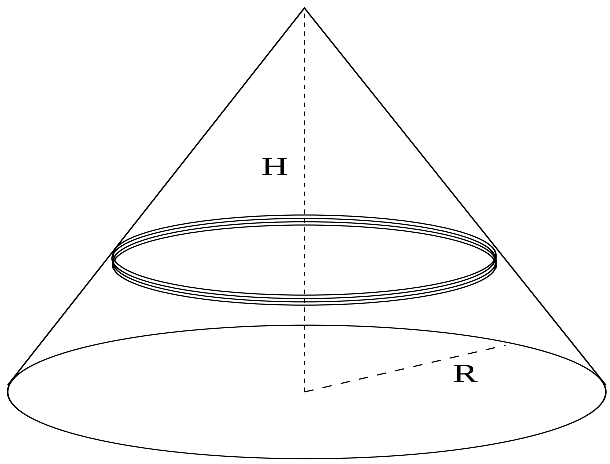


Slika 7.16: Ploština lika omeđenog grafom funkcije od y.

Analogno se definiraju i ostali određeni integrali (ploštine), tj. za slučaj kada je funkcija g negativna, određeni integral proizvoljne neprekidne funkcije, ploštinu omeđenu grafom proizvoljne neprekidne funkcije, osi y, pravcem $y = c$ i pravcem $y = d$ i ploštinu između grafova neprekidnih funcija g_1 i g_2 na $[c,d]$ takvih da je $g_1(y) \geq g_2(y)$, za svaki $y \in [c,d]$.

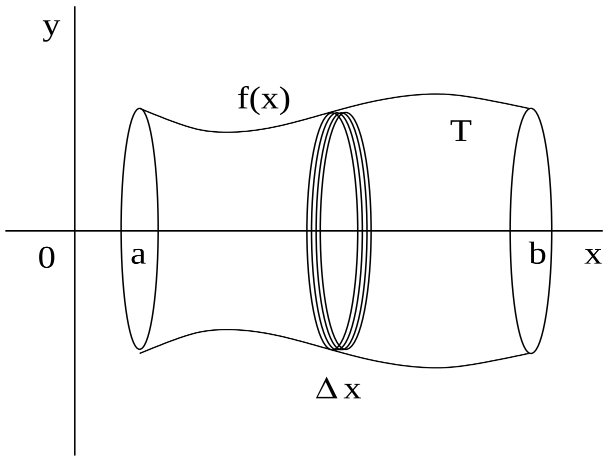
7.5.2 Volumen rotacijskog tijela

Promatramo neko tijelo u tri dimenzije, recimo stožac visine H i polumjera osnovice r. Narežemo ga na tanke ploške, recimo visine $\Delta h = \frac{H}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, i u svakom sloju između visine h i $h+\Delta h$, $h = 0, \Delta h, ..., H-\Delta h$, zamijenimo komad stošca, tj. krnji stožac visine Δh, valjkom iste visine s osnovicom jednakom gornjoj (tj. manjoj) osnovici krnjeg stošca. Za veliki $n \in \mathbb{N}$ će zbroj volumena tih valjčića biti dobra aproksimacija volumena stošca. Za $n \longrightarrow \infty$, tj. za $\Delta h \longrightarrow 0$, dobit ćemo točnu formulu za volumen stošca.



Slika 7.17: Volumen stožca kao limes sume volumena tankih valjaka.

Promatrajmo sada tijelo T u tri dimenzije omeđeno ravninama $x = a$ i $x = b$ te plohom koja nastaje rotacijom grafa funkcije f oko osi x. Uzmimo da je funkcija f pozitivna i neprekidna na segmentu $[a, b]$. Podijelimo segment $[a, b]$ na n dijelova pomoću točaka $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Time je i tijelo T podijeljeno na n slojeva. Volumen komada tijela T između ravnina $x = x_i$ i $x = x_{i+1}$, $i = 0, 1, ..., n - 1$, zamijenimo valjkom čija osnovica ima polumjer $f(x_i)$ a visina je $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. Površinu osnovice tog valjčića



Slika 7.18: Volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom grafa funkcije $f(x)$ oko osi x.

označimo s $P(x_i)$. Promatramo zbroj svih volumena tih valjčića:

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i)\Delta x_{i+1}.$$

Prijeđemo na limes; ako taj limes postoji kad $n \longrightarrow \infty$, tj. kad $\max \Delta x_{i+1} \longrightarrow 0$, onda gornja suma teži prema vrijednosti koja nije ništa drugo doli određeni integral od a do b funkcije $P(x)$ koja daje površinu poprečnog presjeka tijela T ravninom paralelnom s ravninom yz kroz točku $(x, 0, 0)$. No taj poprečni presjek je krug, a njegova površina za zadani x je jednaka $f^2(x)\pi$. S druge strane, u limesu zbroj volumena valjčića teži prema volumenu tijela T. Odatle slijedi formula za volumen dijela prostora kojeg dobijemo rotacijom grafa neprekidne funkcije $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oko osi x omeđenog ravninama $x = a$ i $x = b$:

$$\boxed{V_x = \int_a^b P(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$

Primjer 7.21. *Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom luka sinusoide između $x = 0$ i $x = \pi$ oko osi x.*

Iz Primjera 7.8 imamo

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2(x)dx = \pi \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.\spadesuit$$

Vidimo da je volumen tijela T jednak integralu po njegovoj visini funkcije površine poprečnog presjeka P na određenoj visini.

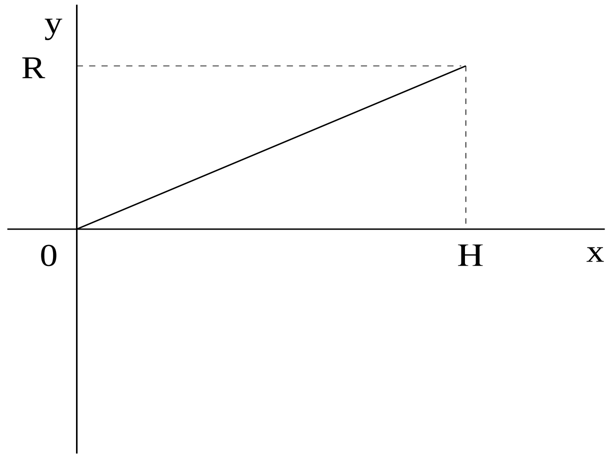
Primjer 7.22. *Izračunajmo volumen stošca visine H i polumjera osnovice R.*

Po gornjoj formuli, koristeći činjenicu da takav stožac nastaje rotacijom grafa funkcije

$$y = \frac{R}{H}x$$

oko osi x, imamo

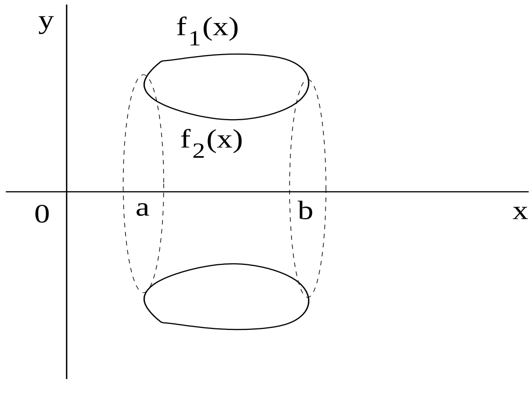
$$V_x = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2}x^2dx = \frac{R^2\pi}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{R^2\pi}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}R^2\pi H.\spadesuit$$



Slika 7.19: Volumen stožca nastalog rotacijom dužine oko osi x.

Pomoću ove formule možemo računati i volumene tijela koja nastaju rotacijom zatvorenih krivulja oko x osi. Dakle, ako su $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne i takve da je $f_1(x) \geq f_2(x)$, za svaki $x \in [a,b]$, onda je volumen dijela prostora koji nastaje rotacijom dijela ravnine između grafova funkcija f_1 i f_2 omeđenog pravcima $x = a$ i $x = b$ dan s

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx.}$$

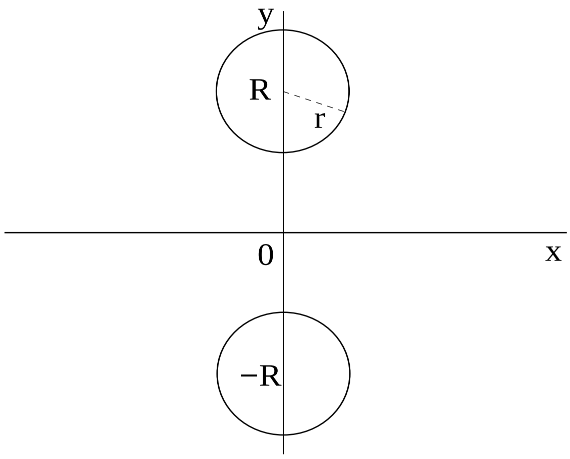


Slika 7.20: Volumen tijela nastalog rotacijom područja omeđenog grafovima dviju funkcija oko osi x.

Primjer 7.23. *Izračunajmo volumen torusa koji nastaje rotacijom kružnice*

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2,$$

$R > r$.



Slika 7.21: Volumen torusa nastalog rotacijom kružnice sa središtem na osi y oko osi x.

Iz jednadžbe kružnice $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ *imamo*

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$

dakle je

$$f_1^2(x) - f_2^2(x) = 4R\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Imamo

$$V = \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}dx = 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Sada iz Primjera 7.16 imamo

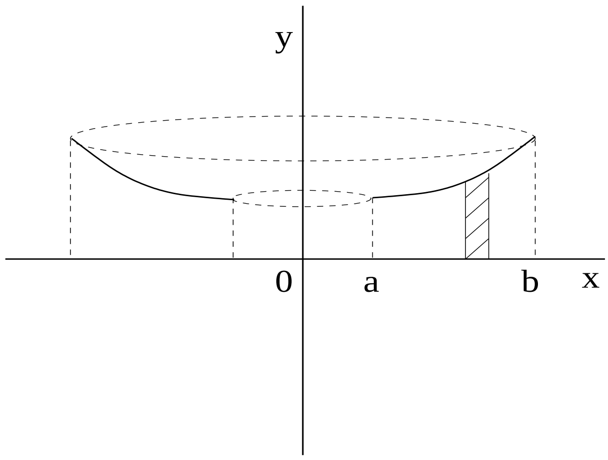
$$V = 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 4R\pi \frac{r^2}{2} \left[\arcsin \frac{x}{r} + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin \frac{x}{r}) \right] \Big|_{-r}^{r}$$
$$= 2Rr^2\pi^2 = 2R\pi r^2\pi. \spadesuit$$

Ovaj rezultat je posebni slučaj prvog Guldinovog teorema.

Teorem 7.11 (Prvi Guldinov teorem)**.** *Volumen tijela koje nastaje rotacijom lika oko osi x jednak je produktu površine lika i opsega kružnice koju pri rotaciji opisuje težište lika.*♣

Na Guldinov teorem ćemo se vratiti kasnije.

Promatrajmo sada tijelo koje nastaje rotacijom lika oko osi y omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, x osi i grafom (pozitivne i neprekidne na $[a, b]$) funkcije f. Podijelimo li opet segment $[a, b]$ na n dijelova, rotacijom komada između $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, nastaje cilindrični sloj. Zamijenimo li komad grafa od



Slika 7.22: Volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom grafa funkcije $f(x)$ oko osi y.

f iznad segmenta $[x_{i-1}, x_i]$ konstantom $f(x_i)$, volumen tog komada možemo izračunati. Razrežemo ga po izvodnici i razmotamo, dobijemo prizmu, tj. paralelepiped sa stranicama osnovice $f(x_i)$ i $2\pi x_i$, debljine $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Volumen tog paralelepipeda je približno jednak

$$2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i,$$

a zbroj svih takvih volumena je dobra aproksimacija volumena cijelog tijela. U limesu, to nam daje formulu za volumen dijela prostora kojeg dobijemo rotacijom grafa neprekidne funkcije $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ oko osi y

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.}$$

Primjer 7.24. *Izračunajmo volumen tijela koje nastaje rotacijom funkcije $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dane formulom $f(x) = x^2$ oko osi y i osi x.*

Imamo

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 = \frac{\pi}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2},$$
$$V_x = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}. \spadesuit$$

7.5.3 Težište

Težište homogenog ravnog lika

Neka je funkcija f neprekidna i pozitivna na $[a,b]$. Promatramo lik omeđen pravcima $x = a$, $x = b$, segmentom $[a,b]$ na osi x i grafom funkcije f nad $[a,b]$. Uzmemo li škare i izrežemo taj lik, dobijemo tanko tijelo. Pretpostavimo da je materijal na kojem je lik bio nacrtan homogen, tj. da mu je gustoća svuda ista. Želimo odrediti težište izrezanog lika. (Težište je točka u kojoj, ako podupremo tijelo, ono ostaje u ravnoteži.) Iz klasične mehanike znamo da za sustav materijalnih točaka s masama m_i smještenima u točkama (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$, vrijedi

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ovdje su x_T i y_T koordinate težišta materijalnih točaka. Suma u nazivnicima je ukupna masa sustava, a izrazi u brojnicima su **statički** ili **linearni momenti** sustava masa, i to $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ s obzirom na os y (jer su brojevi x_i, $i = 1, ..., n$, udaljenosti točaka od osi y), a $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ s obzirom na os x (jer su brojevi y_i,

$i = 1, ..., n$, udaljenosti točaka od osi x). Označimo li te statičke momente s M_y i M_x, redom, a ukupnu masu s M, imamo

$$x_T = \frac{M_y}{M}, \quad y_T = \frac{M_x}{M}.$$

Izrazi za sustav od n (konačno mnogo) materijalnih točaka izvode se induktivno: za jednu materijalnu točku koordinate težišta su očito koordinate same materijalne točke, ako imamo dvije materijalne točke, onda koordinate težišta se lagano nalaze preko zakona ravnoteže za poluge. Induktivno, ako težište od n materijalnih točaka s masama $m_1, m_2, ..., m_n$ ima koordinate (x_T, y_T) i ako dodamo u sustav još jednu materijalnu točku s masom m na poziciju (x, y), onda je to sustav dviju materijalnih točaka s masama $m_1 + ... + m_n$ i m na pozicijama, redom, (x_T, y_T) i (x, y), a koordinate težišta tog sustava slijede iz **zakona ravnoteže za poluge**

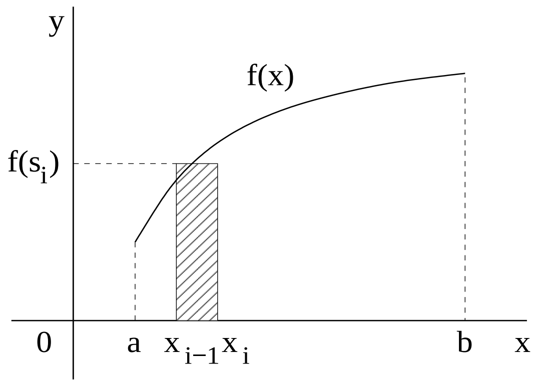
$$F_1 k_1 = F_2 k_2,$$

odnosno

$$m_1 k_1 = m_2 k_2,$$

gdje su k_1 i k_2 duljine krakova poluge, a F_1 i F_2 odnosno m_1 i m_2 sile odnosno mase na pripadne krakove poluge.

Ideja za računanje težišta lika je: podijelimo lik na male pravokutnike i zamijenimo lik sustavom materijalnih točaka od kojih će svaka biti smještena



Slika 7.23: Težište homogenog krivuljnog trapeza.

u težištu jednog pravokutnika (a to znamo odrediti) i imat će masu jednaku masi

pravokutnika. Povećanjem broja pravokutnika težište takvog sustava materijalnih točaka bit će sve bolja i bolja aproksimacija težišta lika.
Podijelimo segment $[a, b]$ na n dijelova $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Promatramo pravokutnik visine $f(s_i)$ nad $[x_{i-1}, x_i]$ za neki $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Uz konstantnu gustoću mase μ, njegova masa je jednaka $\mu f(s_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a težište mu ima ordinatu $\frac{1}{2}f(s_i)$ i apscisu $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Računamo statički moment tog sustava materijalnih točaka s obzirom na os x. To se dobije zbrajanjem po svim pravokutnicima, dakle

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu f^2(s_i)\Delta x_i.$$

Prijelazom na sve finije i finije podjele segmenta $[a, b]$, ovaj će izraz u limesu postati određeni integral od a do b funkcije $\frac{\mu}{2}f^2(x)$. Dakle je

$$\boxed{M_x = \tfrac{1}{2}\mu \int_a^b f^2(x)dx.}$$

Statički moment s obzirom na os y računa se slično. Masa pravokutnika je i dalje $\mu f(s_i)\Delta x_i$, a apscisa njegovog težišta je $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Kako je broj $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ između x_{i-1} i x_i, a ta udaljenost je mala, možemo uzeti da je apscisa težišta pravokutnika, recimo, upravo x_i. Zbrajajući po svim pravokutnicima dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \mu x_i f(s_i)\Delta x_i,$$

a to u limesu daje

$$\boxed{M_y = \mu \int_a^b x f(x)dx.}$$

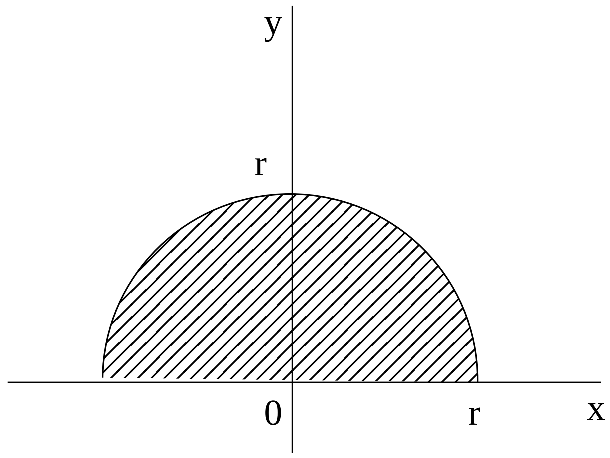
Kako je masa promatranog lika jednaka

$$M = \mu P,$$

pri čemu je P njegova površina (što znamo izračunati), to nam formule za koordinate težišta glase

$$\boxed{x_T = \frac{\int_a^b x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_T = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.}$$

Sada je jasno što govori prvi Guldinov teorem (Teorem 7.11).



Slika 7.24: Težište homogenog polukruga.

Primjer 7.25. *Odredimo težište polukruga polumjera r sa središtem u ishodištu.*

Imamo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. *Iz simetrije je jasno da mora biti* $x_T = 0$. *Također, iz Primjera 7.16 znamo da je*

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}r^2\pi.$$

Ostaje izračunati y_T. *Kako je*

$$\frac{1}{2}\int_{-r}^{r} f^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}r^3,$$

imamo

$$y_T = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi},$$

pa težište ima koordinate $(0, \frac{4}{3}\frac{r}{\pi})$.
Analognim računom bismo dobili težište polukruga polumjera r sa središtem u ishodištu, ali opisanog funkcijom $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$. *Dakle težište je* $(0, -\frac{4}{3}\frac{r}{\pi})$.♠

Primjer 7.26. *Sada možemo, po prvom Guldinovu teoremu, izračunati razliku između volumena "vanjskog" i "unutarnjeg" dijela torusa.*

Neka je dan torus T koji nastaje rotacijom kružnice polumjera r sa središtem u R, $R > r$, *tj.*

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2.$$

Tada su, po prvom Guldinovu teoremu i Primjeru 7.25, volumen vanjskog V_v *i volumen unutarnjeg* V_u *dijela torusa dani s*

$$V_v = \frac{1}{2}r^2\pi(2(R + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi})\pi) = r^2R\pi^2 + \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$V_u = \frac{1}{2}r^2\pi(2(R - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi})\pi) = r^2R\pi^2 - \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Dakle je

$$V_v - V_u = \frac{8}{3}r^3\pi.\spadesuit$$

Zbog aditivnosti momenata (ako u sustav od n materijalnih točaka s momentima M_x i M_y dodamo još jednu materijalnu točku mase m na koordinate (u, v) tada su novi momenti jednaki $M_x + mv$ i $M_y + mu$), težište lika omeđenog zatvorenom krivuljom (tj. dijelom ravnine između grafova neprekidnih funkcija f_1 i f_2 na $[a, b]$ takvih da je $f_2(x) \geq f_1(x)$, za svaki $x \in [a, b]$, i omeđenim pravcima $x = a$ i $x = b$) računa se po formulama

$$\boxed{M_x = \tfrac{1}{2}\mu \int_a^b f_2^2(x)dx - \tfrac{1}{2}\mu \int_a^b f_1^2(x)dx,}$$

$$\boxed{M_y = \mu \int_a^b xf_2(x)dx - \mu \int_a^b xf_1(x)dx,}$$

$$\boxed{x_T = \tfrac{M_y}{M}, \quad y_T = \tfrac{M_x}{M},}$$

gdje je M ploština između grafova neprekidnih funkcija f_1 i f_2 na $[a, b]$ omeđena pravcima $x = a$ i $x = b$, tj.

$$M = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx.$$

Napomena 7.13. *Koordinate težišta se mogu izračunati i iz prvog Guldinovog teorema.*

Težište homogenog rotacijskog tijela

Promatramo rotacijsko tijelo koje nastaje vrtnjom grafa (pozitivne i neprekidne na $[a, b]$) funkcije f oko osi x. Zbog simetrije, težište će ležati na osi rotacije, tj. na osi x. Zanima nas njegova apscisa. Podijelimo segment $[a, b]$ na n podsegmenata točkama $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Obujam dijela tijela između ravnina $x = x_{i-1}$ i $x = x_i$, $i = 1, ..., n$, je između obujama valjaka $m_i^2 \pi \Delta x_i$ i $M_i^2 \pi \Delta x_i$, gdje su m_i i M_i najmanja i najveća vrijednost funkcije f na $[x_{i-1}, x_i]$ i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Zbog neprekidnosti od f, volumen tog dijela (sloja) tijela je $\Delta V_i = f^2(s_i)\pi\Delta x_i$, gdje je $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Uz konstantnu gustoću μ, masa tog komadića je $\mu f^2(s_i)\pi\Delta x_i$. Možemo smatrati da je ta masa koncentrirana u težištu tog sloja, a to je u središtu valjka. Dakle mu je apscisa s_i. Sad imamo sustav materijalnih točaka mase $m_i = \mu\Delta V_i = \mu f^2(s_i)\pi\Delta x_i$ u koordinatama $(s_i, 0)$. Računamo statički moment s obzirom na os y, M_y:

$$M_y = \mu\pi \sum_{i=1}^{n} s_i f^2(s_i)\Delta x_i.$$

U limesu $\Delta x_i \longrightarrow 0$ ovo prelazi u određeni integral

$$\boxed{M_y = \mu\pi \int_a^b x f^2(x) dx,}$$

pa za apscisu težišta dobivamo

$$\boxed{x_T = \frac{\int_a^b x f^2(x) dx}{\int_a^b f^2(x) dx} = \frac{\int_a^b x\, dm}{\int_a^b dm}.}$$

Ovdje smo s dm označili veličinu $dm = \mu\pi f^2(x)dx$; njenim integriranjen od a do b dobije se masa rotacijskog tijela,

$$\boxed{M = \int_a^b dm.}$$

Sličnim razmatranjem dobijemo da se težište tijela koje se dobije rotacijom grafa funkcije f oko y osi nalazi na osi y i da mu je ordinata (sada gledamo inverznu funkciju f^{-1} funkcije f, koja je funkcija varijable y)

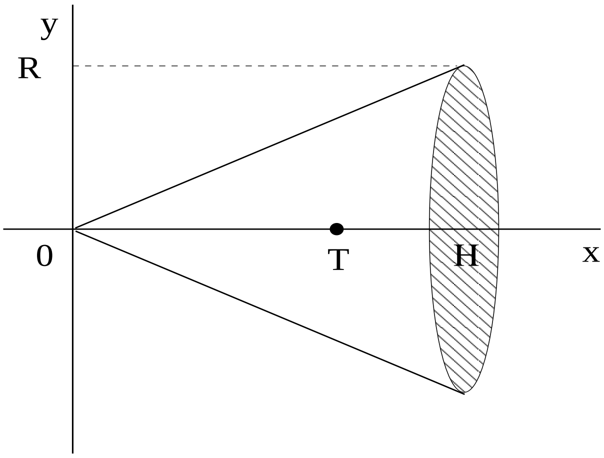
$$\boxed{y_T = \frac{\int_a^b y(f^{-1}(y))^2 dy}{\int_a^b (f^{-1}(y))^2 dy} = \frac{\int_a^b y\, dm}{\int_a^b dm}.}$$

Primjer 7.27. *Odredimo apscisu težišta stošca visine H i polumjera osnovice R kojeg dobijemo rotacijom pravca $f(x) = \frac{R}{H}x$ za $\mu = 1$.*

Imamo

$$M_y = \mu\pi \int_0^H x f^2(x) dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \frac{1}{4} R^2 \pi H^2.$$

Zbog $M = \mu V = \frac{1}{3}R^2\pi H$, dobivamo $x_T = \frac{3}{4}H$, tj. težište se nalazi na četvrtini visine stošca, mjereno od osnovice.♠



Slika 7.25: Težište homogenog stožca.

Primjer 7.28. *Odredimo težište polukugle koja nastaje rotacijom polukružnice $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ (polukružnica sa središtem u ishodištu polumjera R) oko osi y, za $\mu = 1$.*

Kako je $f^{-1}(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$ za $x \in [0, R]$ imamo

$$M_x = \mu\pi \int_0^R y(f^{-1}(y))^2 dy = \pi \int_0^R y(R^2 - y^2) dy = \frac{\pi}{4} R^4.$$

Zbog $M = \mu V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}R^3\pi$, dobivamo $x_T = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{8}R$.♠

Po formulama koje smo izveli mogu se računati i koordinate težišta tijela kojima gustoća nije konstantna, već se mijenja kao funkcija koordinate po kojoj se integrira. U tom slučaju bismo imali

$$dm = \pi\mu(x) f^2(x) dx,$$

i μ više ne bi izlazio kao konstanta izvan integrala. Iz fizikalnih razloga uzimamo $\mu(x) > 0$ na $[a, b]$ (μ je gustoća mase).

7.5.4 Moment ustrajnosti (inercije)

Za materijalnu točku mase m definiramo njen **moment ustrajnosti**, **moment tromosti** ili **moment inercije** s obzirom na zadanu točku, pravac ili ravninu kao produkt mase točke i kvadrata udaljenosti do zadane točke, pravca ili ravnine. Pišemo

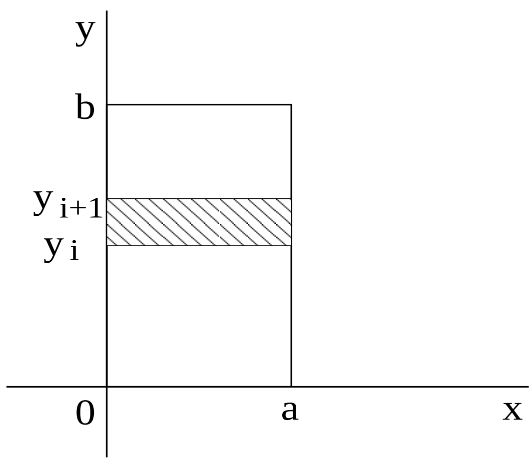
$$I = mr^2,$$

gdje je r rečena udaljenost. Veličina I se još zove i **kvadratni moment**, a ako je s obzirom na točku, zove se i **polarni moment**. Za sustav od n materijalnih točaka s masama $m_1, m_2, ..., m_n$ na udaljenostima $r_1, r_2, ..., r_n$ od zadane točke, pravca ili ravnine imamo

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Kao i statički moment, moment inercije je aditivan. Pomoću integrala možemo definirati momente inercije i za ravne likove i za tijela.

Promatramo prvo homogeni pravokutnik sa stranicama a i b smješten u ravnini tako da mu stranica b leži na osi y, a stranica a leži na x osi. Izračunajmo njegov moment inercije s obzirom na os x. Podijelimo stranicu b, tj. segment $[0, b]$ na osi y, na n dijelova $0 = y_0 < y_1 < ... < y_n = b$. Tako smo naš pravokutnik podijelili na male pravokutnike sa stranicama a i $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$,



Slika 7.26: Moment inercije homogenog pravokutnika.

$i = 1, ..., n$. Masa svakog malog pravokutnika je $\mu a \Delta y_i$, a njegovo težište, tj. mjesto u kojem smatramo da je masa koncentrirana ima ordinatu s_i, gdje je $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$. Za veliki n je $s_i \approx y_i$, dakle je moment inercije malog pravokutnika aproksimiran s $\mu a \Delta y_i s_i^2$. Zbrajanjem po svim malim pravokutnicima dobivamo $\sum_{i=1}^{n} \mu a \Delta y_i s_i^2$, a to, za $\Delta y_i \longrightarrow 0$, teži u

$$\mu a \int_a^b y^2\, dy = \mu a \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\mu abb^2 = \frac{1}{3}Mb^2 = I_x,$$

tj.

$$\boxed{I_x = \tfrac{1}{3}Mb^2},$$

gdje je $M = \mu ab$ masa pravokutnika.
Slično se dobije da je

$$\boxed{I_y = \tfrac{1}{3}Ma^2.}$$

Ako je pravokutnik smješten tako da ga osi x i y raspolavljaju, dobije se

$$\boxed{I_x = \tfrac{1}{12}Mb^2, \quad I_y = \tfrac{1}{12}Ma^2.}$$

Promatramo sad homogeni ravni lik omeđen komadom $[a, b]$ osi x, pravcima $x = a$ i $x = b$, te grafom (pozitivne i neprekidne na $[a, b]$) funkcije f. Podijelimo lik na n malih pravokutnika s osnovicama $[x_{i-1}, x_i]$ i visinama $f(s_i)$, $i = 1, ..., n$, za $s_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Za svaki od tih pravokutnika je moment tromosti s obzirom na os x jednak

$$\frac{1}{3}M_i f^2(s_i) = \frac{1}{3}\mu f^3(s_i)\Delta x_i,$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Zbrajanjem po svim pravokutnicima dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\mu f^3(s_i)\Delta x_i,$$

što u limesu za $\Delta x_i \longrightarrow 0$ daje

$$I_x = \frac{1}{3}\mu \int_a^b f^3(x)dx.$$

Uvedemo li oznake $dP = f(x)dx$, $dm = \mu dP = \mu f(x)dx$, imamo

$$\boxed{I_x = \tfrac{1}{3}\int_a^b f^2(x)dm.}$$

Sličnim se razmatranjem dobije

$$\boxed{I_y = \int_c^d g^2(y)dm,}$$

pri čemu je lik omeđen pravcima $y = c$ i $y = d$, komadom $[c, d]$ osi y i grafom pozitivne i neprekidne na $[c, d]$ funkcije g.

Neka je dana materijalna točka mase m s koordinatama (x, y). Znamo da je $I_x = my^2$ i $I_y = mx^2$. Broj $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ je udaljenost materijalne točke od ishodišta, pa je moment tromosti s obzirom na ishodište I_0 jednak

$$I_0 = mr^2 = mx^2 + my^2 = I_y + I_x.$$

Tako za pravokutnik s početka ove točke imamo

$$\boxed{I_0 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + b^2),}$$

a ako mu je ishodište u sredini, onda je

$$\boxed{I_0 = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2).}$$

Primjer 7.29. *Izračunajmo moment inercije polukruga sa središtem u ishodištu i polumjera r obzirom na x os, za $\mu = 1$.*

Očito je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, dakle je

$$I_x = \frac{1}{3}\mu \int_{-3}^{r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Stavimo $\varphi(t) = r\cos t$. Iz $\varphi(t) = -r$ imamo $t_1 = \pi$. Analogno iz $\varphi(t) = r$ imamo $t_2 = 0$. Očito funkcija $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava Teorem 7.10, pa je

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{-3}^{r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3}\int_{\pi}^{0} r^3(1 - \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}(-r\sin t)dt = \frac{r^4}{3}\int_{0}^{\pi} \sin^4 t\, dt.$$

Sada iz Primjera 7.8 imamo

$$I_x = \frac{1}{8}r^4\pi.$$

Zbog aditivnosti momenta inercije i simetrije moment inercije cijelog kruga je

$$I_x = \frac{1}{4}r^4\pi = \frac{1}{4}\mu r^2\pi r^2 = \frac{1}{4}Mr^2.$$

Također zbog simetrije, moment inercije cijelog kruga obzirom na y os je $I_y = I_x$, dakle je

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{2}Mr^2.\spadesuit$$

Kombinacijom razmatranja iz točke 7.5.2 i ovih gore dolazimo do formule za moment inercije rotacijskog tijela nastalog rotacijom grafa funkcije f (neprekidne i pozitivne na segmentu $[a, b]$) oko osi x s obzirom na ravninu kroz ishodište:

$$\boxed{I_r = \mu\pi \int_a^b x^2 f^2(x) dx.}$$

Moment inercije takvog tijela s obzirom na os rotacije oko koje je tijelo nastalo dan je formulom

$$\boxed{I_x = \tfrac{1}{2}\mu\pi \int_a^b f^4(x) dx.}$$

Formula se dobije tako da se prvo izvede formula za moment inercije valjka visine h i polumjera osnovice r

$$I_x = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2}\mu\pi r^4 h,$$

a onda se interval $[a, b]$ podijeli na male podsegmente $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, i zbroje se momenti inercije malih valjaka polumjera $f(s_i)$, gdje je $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, i visine $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Prijelazom na limes dobijemo gornju formulu.

Primjer 7.30. *Moment inercije homogene kugle gustoće μ i polumjera r s obzirom na promjer kao os vrtnje dan je formulom*

$$I_x = \frac{2}{5} M r^2.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo danu kuglu dobili vrtnjom polukruga $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ oko osi x. Također je jasno da je zbog simetričnosti svejedno koji pravac kroz središte uzmemo kao os vrtnje, pa uzmimo os x. Sada iz gornje formule imamo

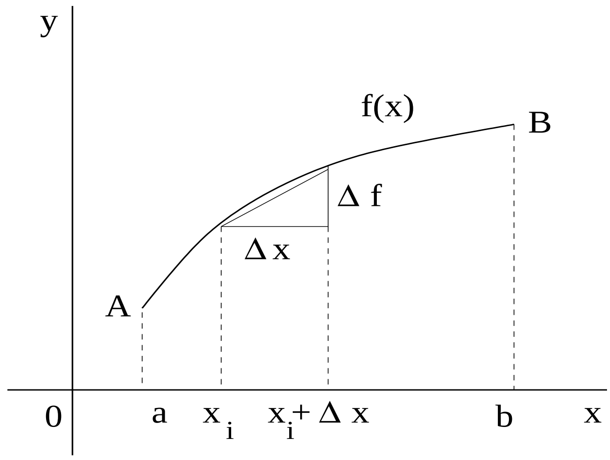
$$I_x = \frac{1}{2}\mu\pi \int_{-r}^{r} f^4(x) dx = \frac{1}{2}\mu\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)^2 dx = \mu\pi \frac{8}{15} r^5 = \frac{2}{5} M r^2. \spadesuit$$

7.5.5 Duljina i težište luka ravne krivulje

Promatramo luk ravne krivulje koja je na $[a, b]$ zadana kao graf funkcije $f \in C^1[a, b]$ eksplicitnom formulom $y = f(x)$. Podijelimo segment $[a, b]$ na podsegmente $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Duljina luka od točke $A = (a, f(a))$ do točke $B = (b, f(b))$ bit će aproksimirana duljinom izlomljene crte koja se sastoji od spojnica točaka $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$. Duljina svakog takvog komada je, po **Pitagorinu poučku**, jednaka

$$d_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ..., n$. Zbrajajući dobivamo duljinu izlomljene crte



Slika 7.27: Duljina luka zadanog kao graf funkcije $f(x)$.

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(s_i)} \Delta x_i,$$

gdje je $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Ovdje smo koristili teorem srednje vrijednosti (Teorem 6.26). Za limes kad $\Delta x_i \longrightarrow 0$ imamo da je duljina luka $\widehat{AB}$ jednaka

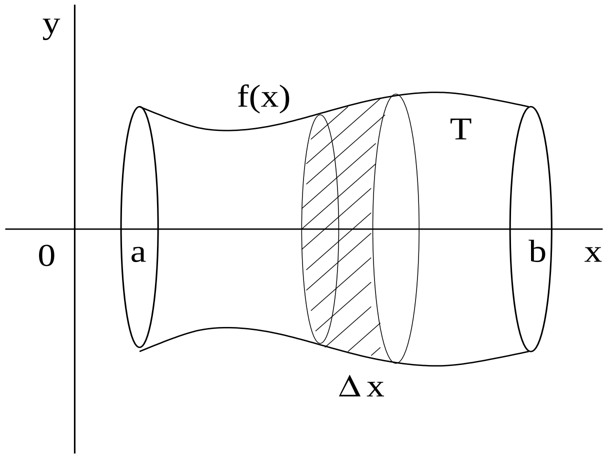
$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.}$$

Sličnim se razmatranjem dobivaju i statički momenti luka krivulje homogene gustoće, mase μ, a onda i koordinate težišta:

$$\boxed{x_T = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}{s}, \quad y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} dx}{s}.}$$

7.5.6 Površina rotacijske plohe

Neka neprekidna i pozitivna funkcija f na $[a, b]$ rotira oko osi x. Dijeljenjem segmenta $[a, b]$ na podsegmente $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, možemo na svakom takvom segmentu zamijeniti komad plohe nastale rotacijom grafa funkcije f oko osi x plaštom krnjeg stošca s osnovicama $f^2(x_{i-1})\pi$ i $f^2(x_i)\pi$. Kako je površina



Slika 7.28: Ploština plašta rotacijskog tijela.

plašta krnjeg stošca polumjera donje osnovice R, polumjera gornje osnovice r i duljine izvodnice l jednaka $\pi l(R+r)$, imamo da je površina plašta krnjeg stošca u našem slučaju jednaka

$$\pi\sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)),$$

gdje je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Zbrajajući sva ta oplošja krnjih stožaca dobivamo

$$\pi\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x_i =$$

$$2\pi\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\sqrt{1+f'(s_i)}\Delta x_i,$$

gdje je $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Ovdje smo ponovno koristili teorem srednje vrijednosti (Teorem 6.26). To u limesu daje formulu za površinu rotacijske plohe

$$\boxed{P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = 2\pi\int_a^b f(x)ds.}$$

Ovdje smo s ds označili **diferencijal luka**,

$$ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Primjer 7.31. *Izračunajmo oplošje kugle, tj. ploštinu sfere polumjera r.*

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo danu kuglu dobili vrtnjom polukruga $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ oko osi x. Sada iz gornje formule imamo

$$P = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx = 4r^2\pi. \spadesuit$$

Ovo je ilustracija rezultata poznatog kao drugi Guldinov teorem.

Teorem 7.12 (Drugi Guldinov teorem)**.** *Površina rotacijske plohe nastale rotacijom luka $\widehat{AB}$ oko osi x jednaka je produktu duljine luka i opsega kružnice što je pri rotaciji opiše težište luka.*$\clubsuit$

7.5.7 Primjene u fizici

Prijeđeni put pri nejednolikom gibanju

Pomoću integrala možemo odrediti prijeđeni put u vremenu između trenutka t_1 i t_2 ako nam je poznata vrijednost brzine $v(t)$ u svakom trenutku između t_1 i t_2. Točnije, ako znamo položaj tijela u trenutku $t_1 = 0$, i ako je taj položaj dan izrazom $s(0) = s_0$, onda u svakom trenutku $t > 0$ imamo

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt + s_0.$$

Za slučaj konstantne brzine $v(t) = v$, gornja se formula svodi na izraz

$$s(t) = vt + s_0.$$

Rad sile

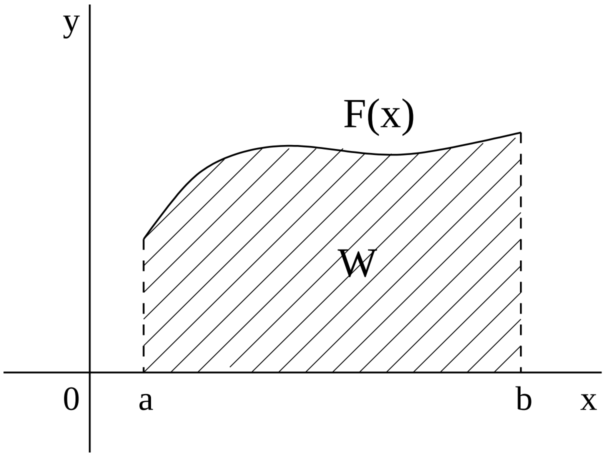
Sila je tipičan primjer vektorske veličine. Ako konstantna sila $\overrightarrow{F}$ djeluje na putu duljine $|\overrightarrow{s}|$ u smjeru vektora $\overrightarrow{s}$, ona pri tome vrši rad

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}.$$

Ako su vektori $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{s}$ kolinearni, dobivamo poznatu formulu za rad

$$W = F \cdot s.$$

Promatrajmo sada slučaj sile konstantnog smjera čiji iznos se neprekidno mijenja. Jednostavnosti radi, uzmimo da je $\overrightarrow{F}(x) = F(x)\overrightarrow{i}$. Podijelimo segment $[a, b]$ na n posegmenata točkama $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ i pretpostavimo da je na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, duljine Δx_i, $i = 1, ..., n$, sila konstantna, recimo $F(x_i)$.



Slika 7.29: Rad sile $F(x)$ na putu $[a, b]$.

Tada je suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i)x_i\Delta x_i$$

dobra aproksimacija rada koji sila $F(x)$ izvrši na putu $[a, b]$. Iz neprekidnosti funkcije $F(x)$ i razmatranja koja smo proveli kod uvođenja određenog integrala slijedi da povećavajući neograničeno broj podintervala dok njihova duljina teži u nulu možemo dobiti traženu formulu za rad sile $F(x)$ na putu $[a, b]$

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Odavde odmah slijedi da je rad sile $F(x)$ na putu $[a, b]$ po iznosu jednak komadu površine između grafa funkcije $F(x)$ i osi x omeđenom pravcima $x = a$ i $x = b$.

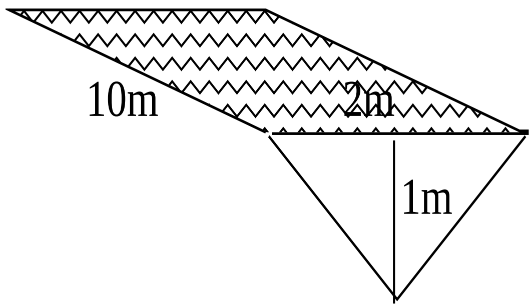
Primjer 7.32. *Znamo da je za rastezanje neke opruge za duljinu x potrebno uložiti rad W_1. Koliki je rad potrebno uložiti za rastezanje iste opruge za duljinu $3x$?*

Prema Hookeovom zakonu, sila kojom se opruga opire rastezanju proporcionalna je (i suprotna) rastezanju, $F = -kx$. Konstanta k nam nije zadana u ovom primjeru, no nije ni bitna. Bitna je činjenica da sila linearno ovisi o rastezanju. Tada će njen integral (tj. rad) biti kvadratna funkcija pomaka x, pa slijedi da za rastezanje $3x$ treba uložiti rad $9W_1$.♠

Posebno važan slučaj je rad sile teže. Iz fizike znamo da je za podizanje tijela mase m na visinu h potrebno uložiti rad $W = mgh$, pri čemu je $g \approx 9.80665$ m/s^2 ubrzanje Zemljine sile teže na njenoj površini. Tu podrazumijevamo da je visina h jako mala u odnosu na polumjer Zemlje. To je formula dobivena integriranjem konstantne sile mg od 0 do h. Ako sila nije konstantna, tj. ako se masa tijela mijenja, onda je

$$W(h) = \int_a^b F(x)dx.$$

Primjer 7.33. *Jarak duljine 10 m, širine 2 m i dubine 1 m čiji je poprečni presjek jednakokračni trokut ispunjen je vodom. Koliki je rad potrebno uložiti za isušivanje jarka?*

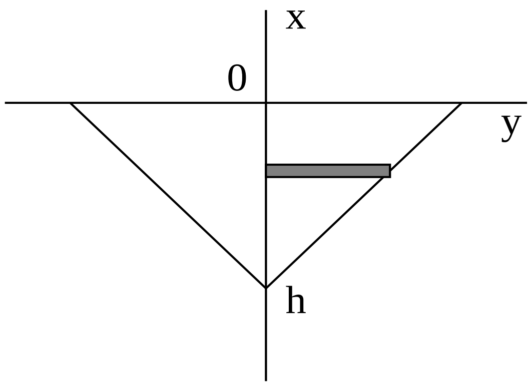


Slika 7.30: Jarak iz Primjera 7.33.

Za isušivanje jarka potrebno je svu vodu iz njega dići (barem) do njegove površine. Problem rješevamo tako da izračunamo masu vode u sloju između dubine x i $x + \Delta x$ te rad potreban ze njeno podizanje do površine, i nakon toga zbrojimo sve te doprinose uzimajući sve tanje i tanje slojeve. Prijelazom na limes dobivamo

$$W = g\int_0^h x\, m(x)dx,$$

pri čemu je $m(x)$ masa vode u sloju debljine dx na dubini x. Postavimo koordinatni sustav tako da ishodište bude na sredini stranice koja predstavlja površinu jarka, a x os ide prema dolje tako da se dno jarka nalazi na apscisi $x = h$. U tom je koordinatnom sustavu širina jarka na dubini x dana formulom $y = 2(h - x)$.



Slika 7.31: Jarak iz Primjera 7.33.

Dakle sloj vode na dubini x ima masu $m(x) = 2(1 - x) \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot dx$ kg. (Ovdje smo uzeli da je gustoća vode jednaka 10^3 kg/m^3, duljina jarka je 10 m, širina $2(1 - x)$ m, a debljina sloja je dx metara). Integrirajući doprinose svih dubina od 0 do $h = 1$ m, imamo

$$W = g \int_0^1 20000(1 - x)x dx = 20000g \int_0^1 (x - x^2) dx = 32688.83 \ J.$$

Zadatak smo mogli i jednostavnije riješiti uočavajući da je težište vode u jarku na dubini od $\frac{1}{3}$ m (jer je težište trokuta na trećini težišnice, a težišnica se ovdje podudara sa simetralom i visinom) a njena težina je 98066 N. To možemo učiniti jer se iznos $g(x)$ ne mijenja značajno s promjenom x.♠

Veličinu $g(x)$ možemo smatrati konstantnom ako je razlika visina dovoljno mala. Primjer situacije u kojoj to ne smijemo pretpostaviti nalazimo u balistici.

Primjer 7.34. *Koliki je rad potreban uložiti da se tijelo (npr. projektil) težine P podigne na visinu h iznad Zemljine površine?*

Ako h nije zanemarivo malo u usporedbi s polumjerom Zemljine R ne smijemo više uzimati g kao konstantnu veličinu. Po Newtonovom zakonu *znamo da je sila kojom Zemlja djeluje na tjelo mase* m_p *na udaljenosti* x *od središta zemlje jednaka* $F(x) = G\frac{m_z m_p}{x^2}$. *(Ovdje je* m_z *masa Zemlje,* m_p *masa projektila i* G *univerzalna gravitacijska konstanta). No ta sila je, po definiciji, upravo težina tijela. Uzimajući da su* m_p, m_z *i* G *konstante, imamo* $F(x) = \frac{K}{x^2}$, *gdje smo s* K *označili* $K = Gm_z m_p$. *Za* $x = R$ *imamo težinu tijela na površini Zemlje,* $F(R) = \frac{K}{R^2} = P$. *Dakle je* $K = PR^2$ *i* $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$. *Traženi rad je sada jednak*

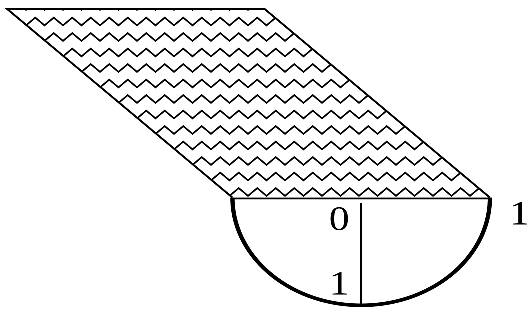
$$W(h) = \int_R^{R+h} \frac{PR^2}{x^2} dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = \frac{PRh}{R+h}.$$

Uočimo da gornji račun ne bi bio valjan za raketu čija se masa mijenja, tj. smanjenje zbog utroška goriva.♠

Hidrostatički tlak

Po Pascalovom zakonu, sila P kojom tekućina specifične težine μ djeluje na površinu S na dubini h dana je formulom $P = \mu h S$. Polazeći od te formule moguće je izračunati ukupnu silu kojom tekućina djeluje na stijenke posude i/ili na objekte s kojima je u kontaktu. To se postiže integriranjem po dubini sile na mali element površine.

Primjer 7.35. *Kanal polukružnog presjeka polumjera* 1 *m zatvoren je zasunom. Kolikom silom djeluje voda na zasun ako je s jedne strane zasuna kanal pun a s druge prazan?*



Slika 7.32: Kanal iz Primjera 7.35.

Primjer ostavljamo bez rješenja kako bi ga studenti mogli samostalno formulirati i rješiti primjenjujući Pascalov zakon i određeni integral.♠

Bibliografija

[1] D. Blanuša, Viša matematika I i II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.

[2] K. Horvatić, Linearna algebra, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[3] V.A. Ilin, E.G. Poznjak, Analitičeskaja geometrija, Nauka, Moskva, 1981.

[4] S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[5] S. Kurepa, Matematička analiza 1 i 2, Tehnička knjiga, Zagreb, 1976.

[6] Ž. Marković, Uvod u višu analizu I i II, Sveučilište u Zagrebu, 1961.

[7] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1 i 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[8] M.M. Postnikov, Analitičeskaja geometrija, Nauka, Moskva, 1979.

[9] B. Zalar, Težišča in vztrajnostni momenti, DMFA, Ljubljana, 2005.