2.5 Tangencijalna ravnina na plohu

Neka je ploha zadana jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0.$$

Neka je točka $T = (x_0, y_0, z_0)$ na plohi, dakle $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.
Tangencijalna ravnina na plohu u točki $T = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina π_T s normalom $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$. Dakle, tangencijalna ravnina π_T ima jednadžbu

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{2.2}$$

Napomena. Uočimo da je gornjom jednadžbom ravnina π_T dobro definirana ako i samo ako je barem jedna parcijalna derivacija $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ ili $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ različita od nule. U suprotnom, jednadžba (2.2) postaje $0 = 0$. Ukoliko za točku (x_0, y_0, z_0) plohe vrijedi $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$, tada tu točku zovemo *singularnom točkom* dane plohe. U singularnim točkama plohe nije dobro definirana tangencijalna ravnina. Primjerice, zajednički vrh stožaca iz zadatka 2.3(c) je singularna točka te plohe (i to jedina). Točku plohe koja nije singularna zovemo *regularnom* ili *nesingularnom*.

Napomena. Pokazuje se da tangencijalna ravnina plohe ne ovisi o izboru jednadžbe kojom je ploha zadana.

Pretpostavimo sada da je ploha dana eksplicitno formulom

$$z = f(x, y),$$

odnosno, ploha je graf funkcije dviju varijabli. Iz gornje jednadžbe (2.2) lako se izvodi jednadžba za tangencijalnu ravninu u točki (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$. (Ista ploha je zadana jednadžbom $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$.)

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu zadanu eksplicitno formulom $z = f(x, y)$ u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ glasi:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{2.3}$$

Napomena. Uočimo iz prethodnog da ploha zadana eksplicitno formulom $z = f(x, y)$ nema singularnih točaka.

Zadatak 2.17. Odredimo tangencijalnu ravninu na plohu $z = x^2 + y^2$ u točkama

a) A(0,0)

b) B(1,1).

Rješenje: Ploha je zadana eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$ za $f(x, y) = x^2 + y^2$. Želimo iskoristiti formulu (2.3), pa računamo parcijalne derivacije te funkcije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Za a) dio, primijetimo da je $z_0 = f(0, 0) = 0$. U parcijalne derivacije uvrštavamo $A(0, 0)$ i dobivamo

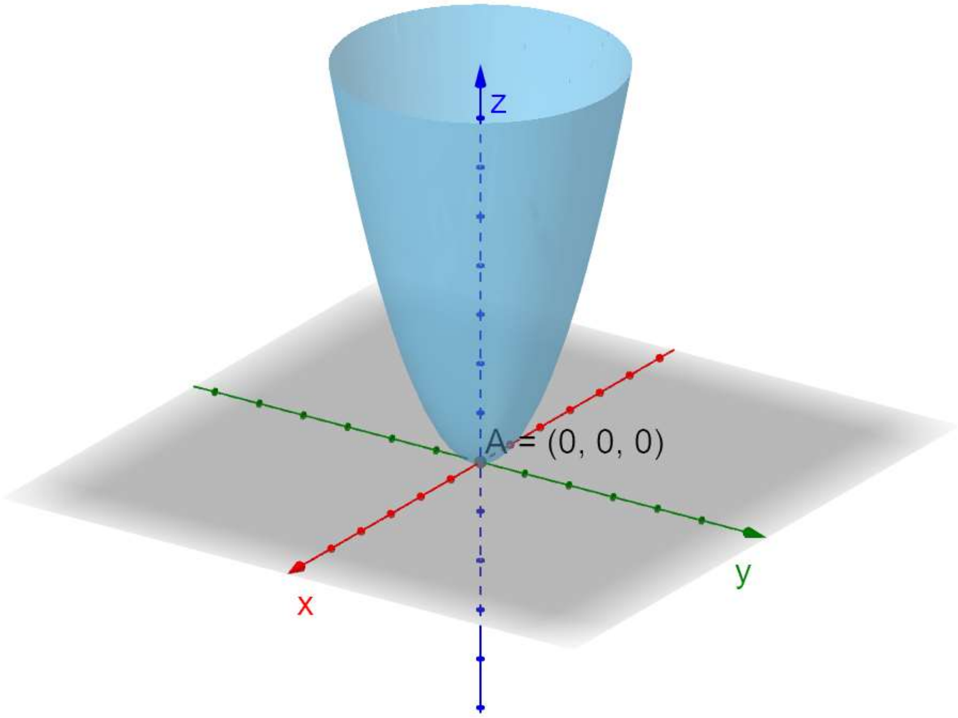
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Prema (2.3), tražena tangencijalna ravnina π_A ima jednadžbu $z = 0$. Ova tangencijalna ravnina prikazana je na Slici 2.1.

Za b) dio, računamo $z_0 = f(1, 1) = 2$ i

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2$$

i dobivamo tangencijalnu ravninu $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, tj. nakon sređivanja $\pi_B \ldots 2x + 2y - z - 2 = 0$. □



Slika 2.1: Tangencijalna ravnina na graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ u točki $A(0, 0)$

Zadatak 2.18. Odredite tangencijalnu ravninu na plohu

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y} \ln(x + y)$$

u točki $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z_0\right)$.

Rješenje: Ploha je dana sa $z = f(x, y)$ za $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y} \ln(x + y)$, $z_0 = f(x_0, y_0) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Želimo iskoristiti formulu (2.3), pa u tu svrhu izračunajmo sljedeće parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y}} \cdot \ln(x+y) + \sqrt{1-x^2-y} \cdot \frac{1}{x+y} \\ &= -\frac{x \cdot \ln(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{\sqrt{1-x^2-y}}{x+y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2-y}} \cdot \ln(x+y) + \sqrt{1-x^2-y} \cdot \frac{1}{x+y} \\ &= -\frac{\ln(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{\sqrt{1-x^2-y}}{x+y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Sada iz formule (2.3) slijedi da je π_T dana jednadžbom

$$z - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right),$$

odnosno

$$x + y - 2z - 1 = 0.$$

□

Zadatak 2.19. Odredite tangencijalnu ravninu na plohu

$$z = xy$$

koja je okomita na pravac $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na plohu $z = xy$ u točki $T = (x_0, y_0, x_0 y_0)$. Stavimo $f(x, y) = xy$. Očito je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = x_0,$$

pa zato π_T ima jednadžbu

$$z - x_0 y_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0),$$

odnosno

$$y_0x + x_0y - z - x_0y_0 = 0.$$

Uvjet da je ravnina okomita na pravac ekvivalentan je uvjetu da je vektor normale te ravnine proporcionalan sa vektorom smjera tog pravca. Stoga za traženu ravninu mora vrijediti

$$\frac{y_0}{2} = \frac{x_0}{1} = \frac{-1}{-2},$$

iz čega vidimo da je $x_0 = \frac{1}{2}$ i $y_0 = 1$. Rješenje je:

$$x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2} = 0.$$

□

Zadatak 2.20. Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu

$$x^4 + 2y^4 - 16z^4 - 2 = 0$$

koje su paralelne s ravninom $8x + 2y - 16z - 3 = 0$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na zadanu plohu $F(x, y, z) = 0$, gdje je $F(x, y, z) = x^4 + 2y^4 - 16z^4 - 2$, u točki $T = (x_0, y_0, z_0)$ te plohe. Ploha je zadana implicitno, pa trebamo koristiti formulu (2.2). Izračunajmo parcijalne derivacije od F u točki T:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(T) = 4x_0^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(T) = 8y_0^3, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(T) = -64z_0^3.$$

Sada iz formule (2.2) vidimo da ravnina π_T ima jednadžbu:

$$\begin{gathered} 4x_0^3(x - x_0) + 8y_0^3(y - y_0) - 64z_0^3(z - z_0) = 0 \\ 4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 4x_0^4 - 8y_0^4 + 64z_0^4 = 0 \\ 4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 4\left(x_0^4 + 2y_0^4 - 16z_0^4\right) = 0. \end{gathered}$$

Jer je točka T na plohi, njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu te plohe, tj. vrijedi $x_0^4 + 2y_0^4 - 16z_0^4 - 2 = 0$. Zato ravnina π_T ima jednostavniju jednadžbu:

$$\begin{gathered} 4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 8 = 0 \qquad / : 4 \\ x_0^3x + 2y_0^3y - 16z_0^3z - 2 = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Sada tražimo za koje sve točke $T = (x_0, y_0, z_o)$ te plohe će ravnina zadana s (2.4) biti paralelna s ravninom $8x + 2y - 16z - 3 = 0$. Ravnine su paralelne ako i samo ako su im vektori normale proporcionalni, stoga mora biti

$$\frac{x_0^3}{8} = \frac{2y_0^3}{2} = \frac{-16z_0^3}{-16} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0^3}{8} = y_0^3 = z_0^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{2} = y_0 = z_0.$$

Osim gornjega uvjeta, tražena točka T mora zadovoljavati i jednadžbu plohe:

$$x_0^4 + 2\left(\frac{x_0}{2}\right)^4 - 16\left(\frac{x_0}{2}\right)^4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm 2.$$

Dakle, dobili smo dvije točke $T_1 = (2, 1, 1)$ i $T_2 = (-2, -1, -1)$, a s time kao rješenje i dvije tražene tangencijalne ravnine

$$\begin{aligned} \pi_{T_1} : &\quad 8x + 2y - 16z - 2 = 0 \\ \pi_{T_2} : &\quad -8x - 2y + 16z - 2 = 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \pi_{T_1} : &\quad 4x + y - 8z - 1 = 0 \\ \pi_{T_2} : &\quad 4x + y - 8z + 1 = 0. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.21. Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu

$$z = 2xy$$

koje prolaze točkom $(1, 0, -4)$, a okomite su na ravninu $x = y$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na zadanu plohu $z = f(x, y)$, gdje je $f(x, y) = 2xy$, u točki $T = (x_0, y_0, 2x_0y_0)$. Ploha je zadana eksplicitno, pa možemo koristiti formulu (2.3). Izračunajmo parcijalne derivacije od f u točki T:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = 2y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = 2x_0.$$

Sada iz formule (2.3) vidimo da ravnina π_T ima jednadžbu:

$$\begin{aligned} z - 2x_0y_0 &= 2y_0(x - x_0) + 2x_0(y - y_0) \\ 2y_0x + 2x_0y - z - 2x_0y_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tražimo točku oblika $T = (x_0, y_0, 2x_0y_0)$ za koju će ravnina π_T dana s (2.5) zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:

- Ravnina π_T je okomita na ravninu $x = y$, tj. $x - y = 0$. Odnosno, njihovi vektori normale međusobno su ortogonalni:

$$0 = (2y_0, 2x_0, -1) \cdot (1, -1, 0) = 2y_0 - 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0.$$

  Stoga jednadžba ravnine π_T uz taj uvjet ima jednostavniji oblik:

$$2x_0x + 2x_0y - z - 2x_0^2 = 0.$$

- Točka $(1, 0, -4)$ se nalazi na ravnini π_T, iz čega slijedi:

$$2x_0 + 4 - 2x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1, 2.$$

Dakle, dobili smo dvije točke $T_1 = (-1, -1, 2)$ i $T_2 = (2, 2, 8)$, a s time kao rješenje i dvije tražene tangencijalne ravnine

$$\begin{aligned} \pi_{T_1} : &\quad 2x + 2y + z + 2 = 0 \\ \pi_{T_2} : &\quad 4x + 4y - z - 8 = 0. \end{aligned}$$

□

Zadatak 2.22. (a) Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $3xy + z^2 = 4$ u točki $(1, 1, 1)$.

(b) Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $x^2y^2 + y - z + 1 = 0$ u točki $(0, 0, 1)$.

(c) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ koje su paralelne s ravninom $x + 4y + 6z = 5$.

(d) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $z^2 = x + y$ koje su okomite na pravac $x = y = z$.

(e) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $xyz = 1$ koje prolaze točkom $(1, 0, 0)$ i okomite su na ravninu $y - 3z = 17$.

Rješenje: Zadaća. □

Zadatak* 2.23. Dokažite da je tangencijalna ravnina na ravninu opet ta ista ravnina, u bilo kojoj njenoj točki.

Rješenje: Zadaća. □