2.5 Implicitno zadane funkcije

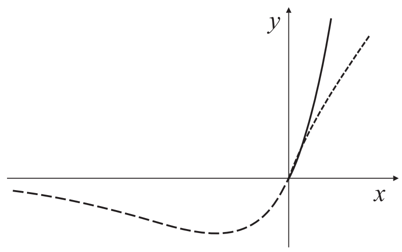
Promatramo funkciju $F(x, y)$ dviju varijabli zadanu na nekom području G u xy - ravnini. Ako za svaki x u intervalu $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle$ postoji jedinstveni y takav da je $F(x, y) = 0$, onda pridruživanjem $x \mapsto y$ definiramo funkciju $y(x)$. Kažemo da je funkcija $y(x)$ **implicitno zadana** jednadžbom $F(x, y) = 0$.

Primjer 2.9. *Jednadžbom* $x^2 - y = 0$ *implicitno je zadana funkcija* $y(x) = x^2$.

Primjer 2.10. *Jednadžbom* $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *nije zadana nikakva funkcija, jer niti za jedan* x *ta jednadžba nema rješenje po* y.

Ako se jednadžba $F(x, y) = 0$ može riješiti po y, onda funkciju $y = y(x)$ imamo u **eksplicitnom** obliku.

Primjer 2.11. $F(x, y) = ye^y - x$.
Na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ *za svaki* x *imamo jedinstveni* y *za koji je* $x = ye^y$. *To znamo jer je* y *inverzna funkcija od* xe^x. *Ta funkcija postoji jer je* xe^x *bijekcija s* $\langle 0, \infty\rangle$ *na* $\langle 0, \infty\rangle$. *Funkcija* y *se ne može dobiti u eksplicitnom obliku preko elementarnih funkcija. Unatoč tome, ona je dobro definirana.*



Slika 2.16: Graf implicitno zadane funkcije y

Pitanja:

1° Kada je jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija $y = y(x)$?

2° Možemo li o funkciji $y(x)$ implicitno zadanoj jednadžbom $F(x, y) = 0$ štogod zaključiti i ako je ne možemo eksplicitno prikazati?
(Rast, pad, ekstremi,. . .)

S pojmovima eksplicitno i implicitno smo se susretali kod jednadžbe pravca. Možemo li iz tog iskustva izvući neke zaključke?

Primjer 2.12. $F(x,y) = Ax + By + C = 0$

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ *za* $B \neq 0$

$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$ *za* $A \neq 0$

Ako su $A, B = 0$*, jednadžba* $C = 0$ *ne opisuje pravac. Dakle, da bi jednadžba* $Ax+By+C = 0$ *opisivala pravac (tj. graf polinoma 1. stupnja), barem jedan od* A, B *mora biti različit od nule, tj.* $A^2+B^2 > 0$*. Eksplicitno se može izraziti ona koordinata uz koju je koeficijent različit od nule. Koeficijenti su vezani uz nagib, nagib je vezan uz derivaciju. Zaista, uz* $F(x, y) = Ax + By + C$ *imamo* $A = \frac{\partial F}{\partial x}$*,* $B = \frac{\partial F}{\partial y}$*.*

Ova se opservacija formalizira sljedećim teoremom.

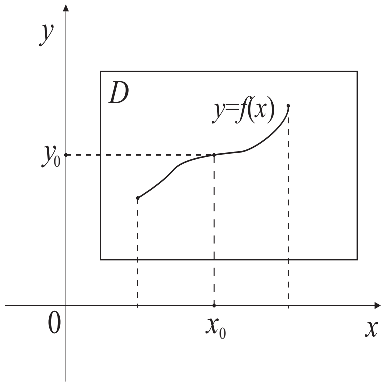
Teorem 2.9. *(O implicitnoj funkciji) Neka je funkcija* $F(x, y)$ *definirana i neprekidna na* $\langle x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1\rangle \times \langle y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2\rangle = D$ *i neka su na* D *neprekidne i njene parcijalne derivacije* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial F}{\partial y}$*. Neka je*

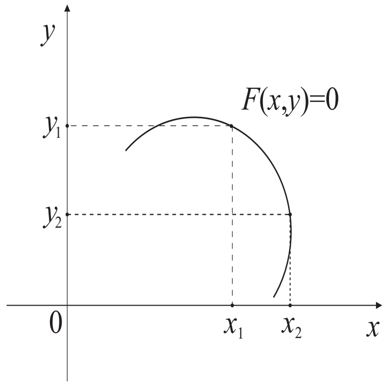
(i) $F(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Tada postoji okolina $I = \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$ *točke* x_0 *na kojoj je zadana neprekidna funkcija* $y = f(x)$ *i* $F(x, f(x)) = 0$ *za sve* x *iz* $\langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$*. Štoviše, funkcija* $f(x)$ *je derivabilna na* I *i vrijedi*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$





Slika 2.17: Implicitno zadana funkcija

Uvjet (i) jamči postojanje rješenja, tj. da bar jedna točka zadovoljava $F(x, y) = 0$, a uvjet (ii) daje jedinstvenost, a time i svojstvo bivanja funkcijom. Gledamo desnu sliku. U točki (x_1, y_1) su uvjeti zadovoljeni, na nekoj okolini od x_1 je krivulja zadana s $F(x, y) = 0$ graf funkcije $y = f_1(x)$. U točki (x_2, y_2) je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, pa nema okoline od x_2 na kojoj je krivulja $F(x, y) = 0$ graf neke funkcije $y = f_2(x)$.

Dokaz teorema o implicitnoj funkciji:

Prva tvrdnja teorema zahtijeva puno vremena i nećemo je dokazivati. Dokazat ćemo samo tvrdnju o derivaciji. U okolini točke (x_0, y_0) imamo zadan $y(x) = f(x)$ takav da je $F(x, f(x)) \equiv 0$. Dakle je i $\frac{d}{dx}F(x, f(x)) = 0$ za sve točke iz te okoline. Po pravilu za deriviranje složene funkcije,

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \quad \text{Odatle, } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = f'(x).$$

Primjer 2.13. $F(x, y) = ye^y - x$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + ye^y = (1 + y)e^y > 0 \quad \textit{za sve } (x, y) \in \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle.$$

$$\textit{Sada imamo } y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-1}{e^y(1 + y)} = \frac{1}{x + e^y}.$$

Primjer 2.14. $F(x, y) = x^2 + y^2 - R$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad y'(x) = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Slično se može dokazati i teorem o uvjetima uz koje jednadžba $F(x, y, z) = 0$ implicitno zadaje funkciju $z = f(x, y)$ u okolini točke (x_0, y_0, z_0) za koju je $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Glavno je da vrijedi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. (Prisjetimo se implicitne i eksplicitne jednadžbe ravnine.)

Tada imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

2.6 Tangencijalna ravnina i normala na plohu

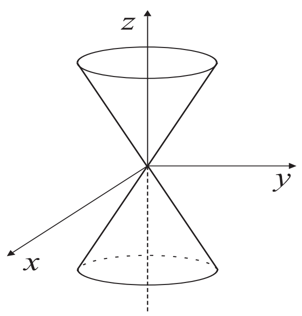
Neka je S ploha zadana jednadžbom $F(x, y, z) = 0$. Točka M na plohi S je **regularna (nesingularna)** točka ako sve tri parcijalne derivacije $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i $\frac{\partial F}{\partial z}$ postoje i neprekidne su u točki M i barem jedna od njih je različita od nule. Ako sve tri parcijalne derivacije iščezavaju u M ili barem jedna od njih ne postoji, točka M je **singularna**.

Uvjet regularnosti točke je $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0.$

Primjer 2.15. *Promatramo plohu zadanu s* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$. *To je stožac s vrhom u ishodištu.*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z.$$

Jedina singularna točka je $(0, 0, 0)$*, tj. ishodište.*



Slika 2.18: Stožac

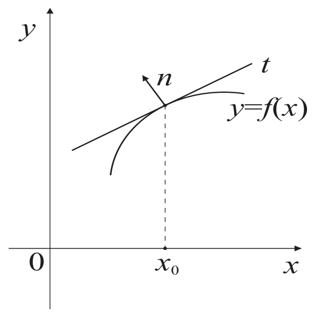
Primjer 2.16. *Ravnina zadana s* $Ax + By + Cz + D = 0$ *nema singularnih točaka.*

Kao prvo, znamo da je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ *uvjet da bi gornja jednadžba definirala ravninu. Tada ravninu možemo shvatiti kao plohu* S *definiranu jednadžbom* $F(x, y, z) = 0$*, pri čemu je* $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$*. Lagano vidimo da je* $\frac{\partial F}{\partial x} = A, \frac{\partial F}{\partial y} = B, \frac{\partial F}{\partial z} = C$ *pa nam gornji uvjet na koeficijente daje nesingularnost svih točaka ravnine.*

Koje je značenje koeficijenata A, B, C u općoj jednadžbi ravnine? Prisjetimo se da je vektor normale na ravninu $Ax + By + Cz + D = 0$ vektor

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

Vidjet ćemo da isto vrijedi za plohe S definirane funkcijom $F(x, y, z)$.



Slika 2.19:

U svakoj točki grafa glatke funkcije $y = f(x)$ imamo jedinstvenu tangentu i normalu. Za razliku od toga, u svakoj regularnoj točki plohe S ima beskonačno mnogo tangenata. Može se pokazati da su one sve okomite na isti pravac, tj. njihovi vektori smjera su okomiti na vektor smjera tog pravca. To posebno znači da sve tangente na plohu S u njenoj regularnoj točki M leže u istoj ravnini.

Tangencijalna ravnina na plohu S u regularnoj točki P je skup svih tangenata na S u točki P. Pravac kroz P okomit na tangencijalnu ravninu zove se **normala** na S u točki P.

Vektor $\vec{n}$ dan sa $\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_P \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_P \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_P \vec{k}$ je vektor normale na plohu S u njenoj regularnoj točki P.

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu S zadanu jednadžbom $F(x, y, z) = 0$ u njenoj regularnoj točki $P(x_0, y_0, z_0)$ dana je s

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0.$$

Jednadžba normale u toj točki je

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}.$$

Ako je ploha S zadana eksplicitno kao $z = f(x,y)$, jednadžbe tangencijalne ravnine i normale u regularnoj točki $P(x_0, y_0, z_0)$ postaju

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y - y_0),$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Zašto nas uopće zanima tangencijalna ravnina? Kao što je tangenta na graf realne funkcije realne varijable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki (x_0, y_0) najbolja linearna aproksimacija te krivulje oko točke (x_0, y_0) (pravac najbliži krivulji), tako i tangencijalna ravnina na plohu $z = f(x, y)$ u točki M najbolje aproksimira plohu u toj točki. To je linearna aproksimacije te plohe u okolini točke M.

2.7 Potpuni diferencijal

Gledamo plohu S i tangencijalnu ravninu u njenoj regularnoj točki $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Neka je S zadano kao $z = f(x, y)$. Stavimo li u jednadžbi tangencijalne ravnine $x - x_0 = \Delta x,\ y - y_0 = \Delta y$ imamo

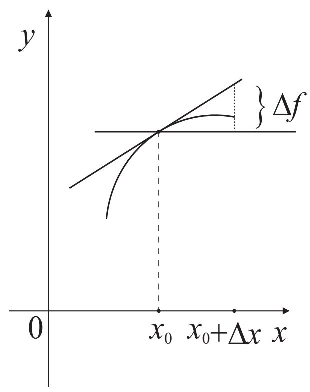
$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Izraz na desnoj strani je promjena z-koordinate točke na tangencijalnoj ravnini kad se iz (x_0, y_0) maknemo za Δx po x i za Δy po y. To je linearna funkcija dviju varijabli, Δx i Δy, a koeficijenti su joj vrijednosti parcijalnih derivacija funkcije f u točki (x_0, y_0). Prirast po tangencijalnoj ravnini je aproksimacija prirasta po plohi. Polinom u dvjema varijablama h i k s koeficijentima $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ se zove **potpuni diferencijal** funkcije f u točki (x_0, y_0). To je polinom 1. stupnja u svojim varijablama.

$$\underbrace{df(x_0, y_0)}_{ime}\ \underbrace{(h, k)}_{argumenti} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{koeficijent} h + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{koeficijent} k$$

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0)(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j}\right) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}). \end{aligned}$$

Prisjetimo se situacije iz jedne dimenzije: $df(x_0)(dx) = f'(x_0)dx$.



Slika 2.20: