2.4 Teorem o implicitno zadanoj funkciji

Od interesa je pitanje može li se neka zadana jednadžba $F(x, y) = 0$ riješiti po varijabli y. Odgovor na to daje sljedeći teorem.

Teorem (o implicitno zadanoj funkciji)**.** *Neka je funkcija F klase C^1 definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, te $(x_0, y_0) \in \Omega$ točka za koju vrijede uvjeti:*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Tada postoji otvoreni interval I oko točke x_0 i jedinstvena neprekidna funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f(x_0) = y_0$ i

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Štoviše, funkcija f je klase C^1 i vrijedi formula:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad \forall x \in I. \tag{2.1}$$

Dakle, lokalno oko točke (x_0, y_0) za koju je $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ možemo rješiti jednadžbu $F(x, y) = 0$ po varijabli y, tj. zapisati je u obliku $y = f(x)$ kao funkciju od x (mada je često u praksi teško doći do takve funkcije f).

Zadatak 2.15. Provjerite da se jednadžbom $x^y = y^x$ može zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $x_0 = 1$. Izračunajte $y'(1)$.

Rješenje: Jednadžbu $x^y = y^x$ ne možemo riješiti po y poznatim algebarskim manipulacijama. Stavimo $F(x, y) = x^y - y^x$. Potrebno je provjeriti pretpostavke teorema o implicitno zadanoj funkciji, za točku $(x_0, y_0) = (1, y_0)$. Zbog uvjeta $F(x_0, y_0) = 0$, odnosno $1^{y_0} = y_0^1$ moramo staviti $y_0 = 1$. Funkcija F je očito klase C^1. Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = \left(x^y \cdot \ln x - x \cdot y^{x-1}\right)\Big|_{(1,1)} = 0 - 1^0 = -1 \neq 0.$$

Prema teoremu o implicitno zadanoj funkciji, jednadžbom $x^y = y^x$ može se zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $x_0 = 1$. Prema formuli (2.1), vrijedi

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -\frac{y \cdot x^{y-1} - y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - x \cdot y^{x-1}}\Big|_{(1,1)} = -\frac{1 - 0}{0 - 1} = 1.$$

$\square$

Zadatak 2.16. (a) Provjerite da se jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ može zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Izračunajte $y'(0)$.

(b) Može li se istom jednadžbom zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $(x_0, y_0) = (1, 0)$?

Rješenje:

(a) U ovom slučaju nema potrebe koristiti teorem o implicitno zadanoj funkciji, budući da možemo direktno izvući $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Odlučiti ćemo se za $y = -\sqrt{1 - x^2}$, jer mora biti $y(x_0) = y_0$, tj. $y(0) = -1$. Vrijedi:

$$y'(0) = -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\bigg|_{x=0} = 0.$$

(b) Stavimo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vrijedi

$$F(1, 0) = 0, \qquad \text{ali} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 2y\bigg|_{(1,0)} = 0,$$

pa nam teorem o implicitno zadanoj funkciji ne daje odgovor. Međutim, jasno je da se radi o kružnici radijusa 1, pa iz vertikalnog testa slijedi da nema tražene funkcije $y = f(x)$ oko točke $(1, 0)$.

$\square$