X Vježba

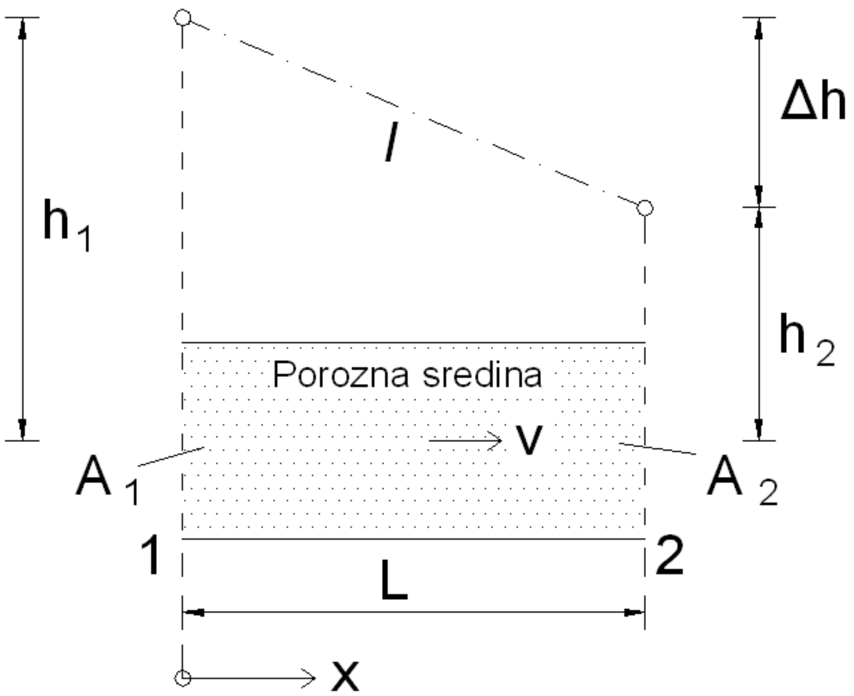
Strujanje podzemnih voda

1. Uvod

U hidrotehničkoj praksi se često susrećemo s problemima vezanim za tok podzemne vode. Najčešće je potrebno odrediti razinu ili protok podzemne vode. U okviru vježbi predviđena su tri modela vezana za tok podzemnih voda (numerički model procjeđivanja ispod zagata, fizikalni model procjeđivanja ispod brane i fizikalni model radijalnog strujanja prema zdencu). Na to se nadovezuje i program u kojem se računa pronos tvari nošenih tokom podzemnih voda. U okviru ove vježbe će se malo detaljnije opisati neki pojmovi vezani za tok podzemnih voda te ponoviti neki pojmovi koji su već objašnjeni u okviru hidromehanike i geotehničkih predmeta.

2. Shema kontinuuma

Prije nego što se krene na objašnjavanje teorije filtracije, valja napomenuti da se iznesena razmatranja odnose na opisivanje porozne sredine preko sheme kontinuuma. Shema kontinuuma podrazumijeva da je porozna sredina homogena te da ima određene fizikalne karakteristike koje vrijede u svim elementima prostora (većih od reprezentativnog elementarnog volumena), kao što su npr. poroznost i koeficijent filtracije. Drugim riječima, ne promatra se tečenje vode kroz svaku pojedinu strujnu cijev koja se formira u poroznoj sredini. Time se prelazi iz mikroskopskog u makroskopsko mjerilo.



Slika 10.1 Filtracija kroz poroznu sredinu (cijev ispunjenu poroznim materijalom)

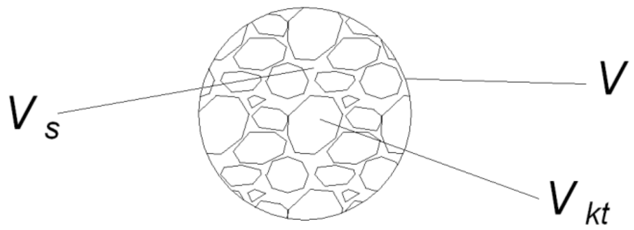
2.1 Darcyev zakon

Darcy (1856) je odredio hidrauličke značajke filtracije u sredinama međuzrnske poroznosti te je primijetio da je protok kroz poroznu sredinu linearno proporcionalan s padom potencijala tj. $Q \propto \Delta h$, te je definirao brzinu podzemnog toka (za potrebe računanja protoka) koja se može izračunati kao umnožak koeficijenta filtracije i hidrauličkog gradijenta. Valja naglasiti da Darcyeva brzina nije stvarna brzina kretanja čestica vode u tlu.

$$v = -k \cdot \frac{\Delta h}{L} = -k \cdot I$$

gdje je:
k koeficijent filtracije (m/s) (ujedno predstavlja brzinu filtracije pri $I = 1$)
$h = z + p / \rho g$ piezometarski potencijal

Protok $Q = v \cdot A$ se definira kao umnožak Darcyeve brzine i površine protjecajnog presjeka. Stvarna brzina procjeđivanja se može definirati jednadžbom $v_s = v / n$ pri čemu n predstavlja poroznost tla.



Slika 10.3 Definicijska skica za poroznost tla *n* i koeficijent pora tla *e*

Poroznost tla je $n = V_s / V$ (V_s je volumen pora u ukupnom promatranom volumenu; V je ukupni promatrani volumen). Drugi omjer koji se koristi je koeficijent pora $e = V_s / V_{kt}$ (V_{kt} je volumen krute tvari u ukupnom promatranom volumenu)

Stvarna brzina procjeđivanja podzemne vode je veća od Darcyeve. U inženjerskoj praksi je uobičajeno da se koristiti Darcyeva brzina jer pri računanju protoka nije potrebno poznavati poroznosti n. Kod računanja napredovanja čestice nošene tokom podzemne vode treba voditi brigu o poroznosti kao i o zakrivljenosti strujnih cijevi.

2.1 Koeficijent filtracije

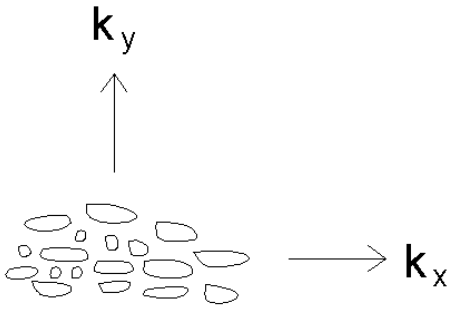
Darcyev koeficijent filtracije se može izraziti jednadžbom:

$$k = \frac{\rho g}{\mu} \cdot \kappa$$

gdje je:
κ [m^2] permeabilnost porozne sredine koja ovisi o obliku i rasporedu zrna koje ju formiraju (ne o fluidu koji teče poroznom sredinom). Obično je $\kappa = f(d^2)$
ρ [kg/m^3] gustoća fluida koji protječe
μ [kg/(m·s)] dinamički koeficijent viskoznosti fluida koji protječe

2.2 Anizotropija

Anizotropija je svojstvo sredine da ima različite karakteristike u različitim smjerovima. Kod vodonosnih slojeva se pod anizotropijom obično podrazumijeva razlika u vrijednosti koeficijenta filtracije u horizontalnom i vertikalnom smjeru:



Slika 10.4 Anizotropija vodonosnog sloja ($k_x > k_y$)

Načelno se mogu ustanoviti dvije vrste anizotropije:

- anizotropija jednog sloja → posljedica taloženja čestica (slaganja krute faze), koje se taalože obično tako da se dulja stranica čestice postavi horizontalno
- anizotropija čitavog vodonosnika uslijed uslojene strukture, gdje se izmjenjuju slojevi vrlo različite vodopropusnosti (npr. u šljunku se javljaju leće gline ili praha). Ovo može rezultirati vrlo visokim vrijednostima anizotropije (realne su i veličine anizotropije 1000)

2.3 Određivanje koeficijenta filtracije

Koeficijenti filtracije se mogu određivati na razne načine, a najčešći su:

- *laboratorijsk*i (pouzdan samo za koherentne materijale)
- *in situ* (pokusi crpljenja - najpouzdaniji način)
- *empirijski - po formulama* (vežu se npr. na d_{10}, n, e, faktor oblika zrna i sl. Mana u ovom pristupu je da za isti granulometrijski dijagram se izračunata vrijednost k ovisno o korištenoj jednadžbi može razlikovati za red veličine)

Često puta se može reći da je određivanje reda veličine koeficijenta filtracije dovoljno točan podatak. U slučaju da se govori o tečenju podzemne vode, tada se najčešće koeficijent filtracije naziva koeficijent vodopropusnosti tla.

Uobičajene vrijednosti (redovi veličine) koeficijenta vodopropusnosti prema materijalima:

Materijal	k (m/s)
čisti šljunak	10^{-2} (m/s) i veći
čisti pijesak	$10^{-2} \div 10^{-4}$ (m/s)
pijesak graduirani	$10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-5}$ (m/s)
sitni pijesak	$5 \cdot 10^{-5} \div 10^{-6}$ (m/s)
prah i pijesak	$2 \cdot 10^{-5} \div 10^{-6}$ (m/s)
prah i mulj	$5 \cdot 10^{-6} \div 10^{-7}$ (m/s)
glina	10^{-7} (m/s) i manje

2.4 Granice važenja Darcyevog zakona:

U području laminarnog strujanja vrijedi linearan odnos brzine i gradijenta. To je prisutno dok je

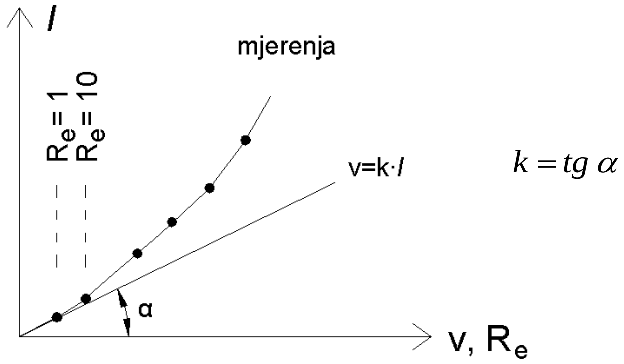
$$Re = (v \cdot d) / \upsilon < Re_{krit}$$

gdje je:

Re_{krit} kritična vrijednost Reynolsdovog broja pri kojoj dolazi do prijelaza iz laminarnog u turbulentni režim, a ovisno o granulometriji porozne sredine ima vrijednosti između 1 i 10

d reprezentativni promjer zrna u poroznoj sredini

υ koeficijent kinematske viskoznosti fluida (vode)



Slika 10.5 Granice važenja Darcyevog zakona

Turbulentni tok se obično javlja u blizini filtera zdenca, izvora i općenito pri velikim gradijentima te krupnozrnom materijalu. U turbulentnom režimu ne vrijedi linearni odnos između pada potencijala i Darcyeve brzine.

2.5 Početni gradijent

Kada je k vrlo mali (npr. kod gline $k \approx 10^{-9}$ m/s), postoji početni gradijent I_0 pri kojem počinje tok podzemne vode. Više autora je pokazalo da je kod gline I_0 negdje oko 30. (Bear, 1972.)

Kod gline je kod gradijenta $I < I_0$ tok difuzne naravi, što znači da se glina ne ocjeđuje gravitacijski, već se voda “premješta” iz područja veće koncentracije u područje manje koncentracije, a isušiti se može jedino termički.

2.6 Poroznost

Pod pojmom poroznost se najčešće podrazumijeva odnos volumena šupljina u uzorku tla prema ukupnom volumenu tla. Poroznost koristimo i kod računanja količine vode koja se iscijedi (drenira) iz tla i tada takovu poroznost zovemo efektivna ili aktivna poroznost koja je manja od geomehaničke jer se u prirodnim uvjetima iz uzorka ne iscijedi sva voda. Kod računanja stvarne brzine vode se također koristi pojam poroznosti koji je opet manji od geomehaničke jer kroz sve pore ne protječe voda. Kod pronosa tvari nošenih tokom podzemne vode također koristimo pojam poroznosti koji se za isti uzorak razlikuje od prethodno navedenih zbog mehanizma nošenja tvari tokom podzemne vode.

Slika 10.6 Geomehanička poroznost za različite modele tla

pored geomehaničke poroznosti n, poznajemo i aktivnu ili efektivnu poroznost n_e. Njome se definira kroz koliki dio se, od ukupnog volumena pora, odvija tečenje. U pravilu vrijedi ($n_e < n$).

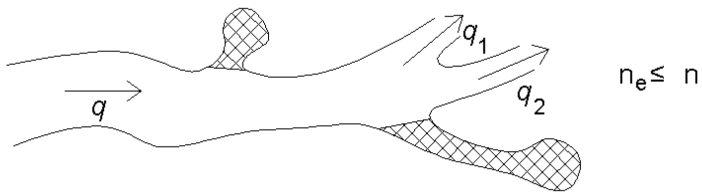
$$u = \frac{v}{n_e}$$

gdje je:

u efektivna brzina (srednja brzina u porama kroz koje se odvija tečenje)

v brzina određena Darcyevim zakonom

n_e efektivna poroznost



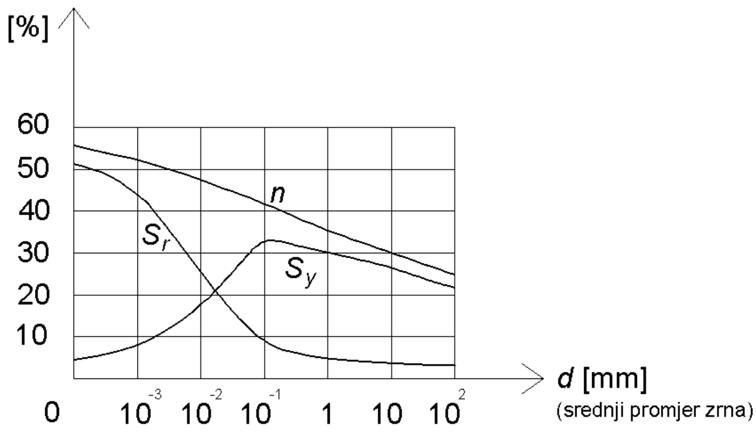
Slika 10.7 Pore kroz koje se ne odvija tečenje (šrafirani dio presjeka)

Specifični koeficijent izdašnosti S_y je omjer volumena vode koji se može drenirati pod djelovanjem gravitacije i ukupnog volumena tla (Sl. 10.8).

Specifični koeficijent retenciranja S_r je omjer volumena zadržane (nedrenirane) vode i ukupnog volumena tla (Sl. 10.8).

U slučaju da je tlo potpuno saturirano, odnosno da su sve pore tla ispunjene vodom, vrijedi:

$$S_y + S_r = n$$



Slika 10.8 Koeficijent izdašnosti S_y, koeficijent retenciranja S_r i geomehanička poroznost n

3. Laplaceova jednadžba

Strujanje podzemne vode mora zadovoljiti jednadžbu kontinuiteta koja za potencijalno strujanje ima oblik $div\,\vec{v} = 0$. Kad se u jednadžbi kontinuiteta brzina izrazi preko Darcyevog zakona (v = - $k\,I$) dobiva se diferencijalna jednadžba kojom se može opisati stacionarno strujanje podzemne vode u homogenoj i izotropnoj sredini:

$$\nabla(k \cdot \nabla h) = 0$$

Definirati će se potencijal strujanja $\varphi = kh$. Da bi se riješila Laplaceova diferencijalna jednadžba, potrebno je poznavati rubne uvijete.

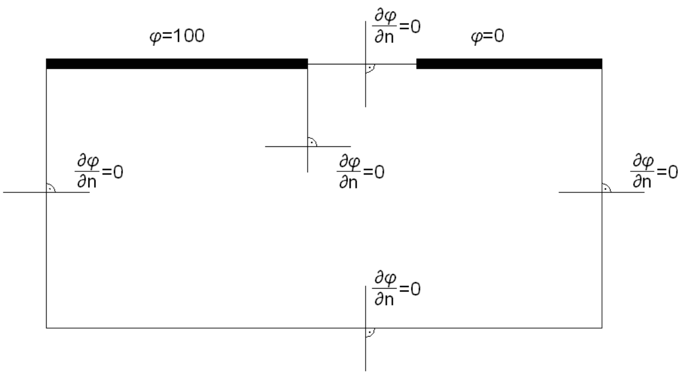
Od rubnih uvjeta razlikujemo:

- Dirichletov (prvi) rubni uvjet, pri čemu je definiran potencijal φ = const. na otvorenoj granici i

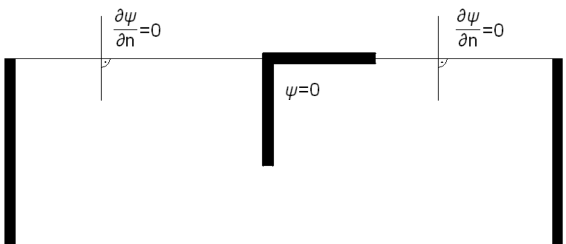
- Neumannov (drugi) rubni uvjet pri čemu je definiran nulti protok pomoću $v_n = 0$ kroz krutu (nepropusnu) granicu

Nepropusna granica je ujedno i strujnica.

Za slučaj procjeđivanja ispod zagata se mogu definirati rubni uvjeti kao na slici 10.9 i 10.10.



Slika 10.9 Rubni uvjeti za računanje potencijala (relativne vrijednosti između 0 i 100)



Slika 10.10 Rubni uvjeti za računanje strujnica (relativne vrijednosti između 0 i 100)

Brzina potencijalnog podzemnog strujanja se iz jednadžbe kontinuiteta i preko Darcyevog zakona definira kao:

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Uvesti će se strujna funkcija (iz uvjeta bezvrložnosti toka) koja će se definirati kao:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

I funkcija potencijala i strujna funkcija zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu:

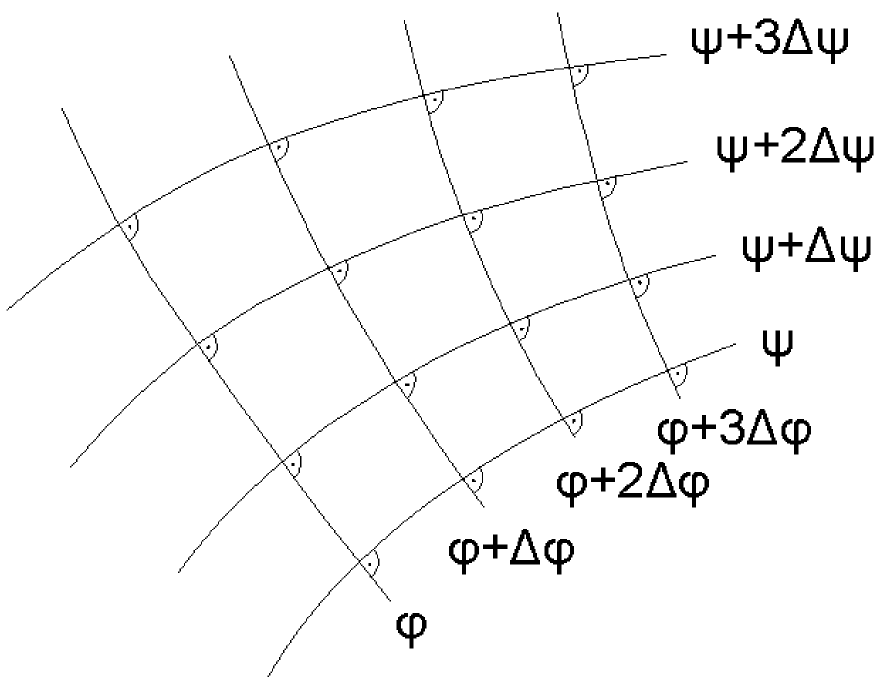
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = \Delta \psi = 0$$

Za detaljnije objašnjenje jednadžbi pogledati u V. Jović: Osnove hidromehanike; 4. Poglavlje: Potencijalno strujanje

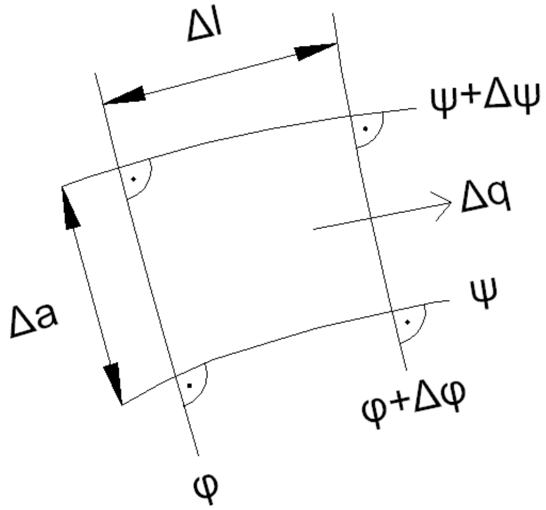
3.1 Strujna mreža

Potencijalno strujanje je u potpunosti definirano strujnom mrežom, odnosno strujnicama i ekvipotencijalama koje su međusobno okomite.



Slika 10.11 Detalj strujne mreže

Pomoću strujne mreže se mogu definirati protoci između pojedinih strujnica (unutar pojedinih strujnih cijevi).



Slika 10.12 Definicijska skica za računanje diferencijalnog protoka Δ*q*

Protok kroz jednu strujnu cijev ($m^3/s/m'$) je definiran izrazom:

$$\Delta q = v \cdot \Delta a = k \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} \cdot \Delta a$$

$$\Delta h = \frac{\Delta H}{n}$$

pri čemu je n broj ekvipotencijalnih prostora (broj ekvipotencijala umanjen za 1).

Ukupan protok ispod zagata (po dužnom metru) je definiran jednadžbom:

$$q = m \cdot \Delta q$$

pri čemu je m broj strujnih cijevi.

4. Metode rješavanja potencijalnog strujanja

Za potrebe rješavanja potencijalnog strujanja se može koristiti niz pristupa (metoda):

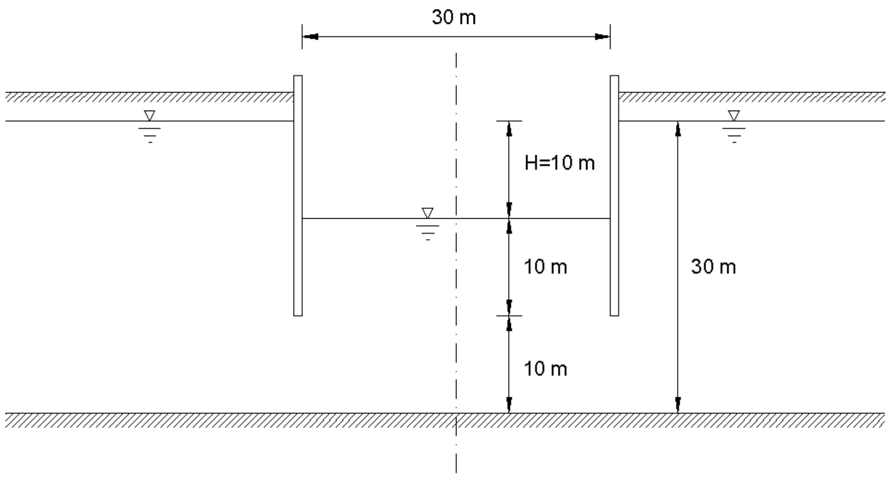
1) Numerički modeli – u posljednje vrijeme se najčešće koriste. Zasnivaju se na diskretizaciji prostora i rješavanju vladajućih jednadžbi na modelom obuhvaćenom prostoru uz zadovoljavanje početnih i rubnih uvjeta. Za rješavanje vladajućih diferencijalnih jednadžbi, najčešće se koriste :
   - metoda konačnih diferencija
   - metoda konačnih elemenata
   - metoda konačnih volumena i
   - metoda rubnih elemenata

2) Analitička rješenja – tretiraju samo mali broj elementarnih problema jednostavne geometrije i najčešće se koriste za verifikaciju numeričkih modela
3) Fizikalni modeli – modeli koji se zasnivaju na zadovoljavanju zakona sličnosti. U novije vrijeme se koriste uglavnom za sagledavanje kemijskih i fizikalnih procesa vezanih za tok vode i pronos zagađivala u poroznoj sredini
4) Analogni modeli – modeli koji koriste neku analognu prototipnu pojavu. Najčešće je to ili viskozna analogija (laminarno strujanje u tankom sloju između dvije ravne ploče) ili električna analogija (polje električnih potencijala koje odgovara polju piezometarskih potencijala, pri čemu se koristi svojstvo da postoji analogija između Darcyevog i Ohmovog zakona). U posljednje vrijeme se vrlo rijetko koriste.

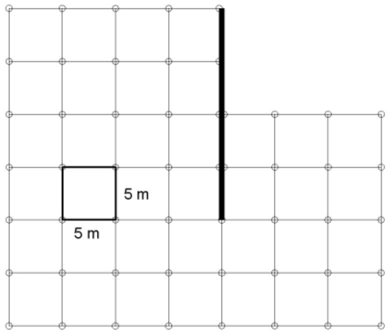
5. Primjer

U izotropnom tlu izvedena je nepropusna zavjesa zanemarive debljine. Za zadane veličine treba odrediti:

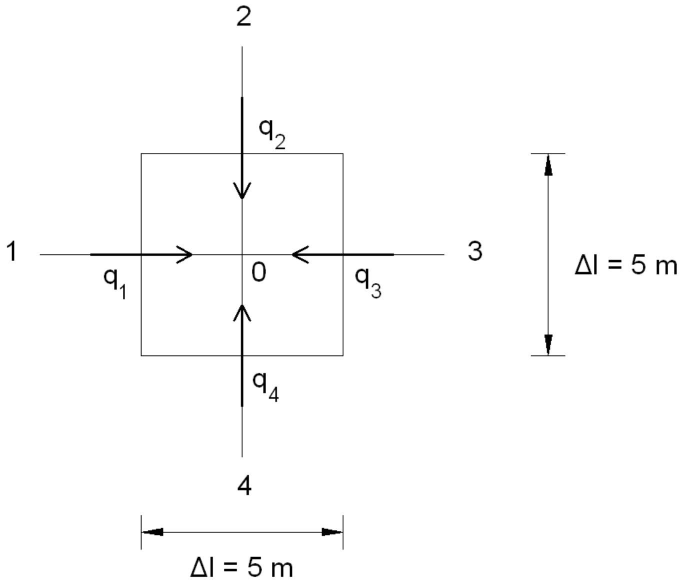
a) strujnu mrežu
b) protok ispod zavjese
c) tlakove na zavjesu



Za potrebe određivanja rasporeda tlakova na zavjesu i dotoka u građevnu jamu treba riješiti jednadžbu $\Delta\varphi = 0$ na području modela. Zbog osne simetrije moguće je diskretizacionom shemom obuhvatiti samo polovinu područja.



Za svaki čvor unutar diskretizacione sheme vrijedi jednadžba kontinuiteta.



$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

Specifični protok iz svakog smjera se može definirati kao umnožak brzine i površine (s obzirom da je usvojena jedinična širina modela množi se sa Δl)

$$q_i = v_i \cdot \Delta l$$

Brzina toka podzemne vode se može izračunati na osnovu Darcyevog zakona

$$v_i = -k \cdot \frac{h_i - h_0}{\Delta l}$$

Ako se potencijal definira kao

$$\varphi_i = k \cdot h_i$$

slijedi

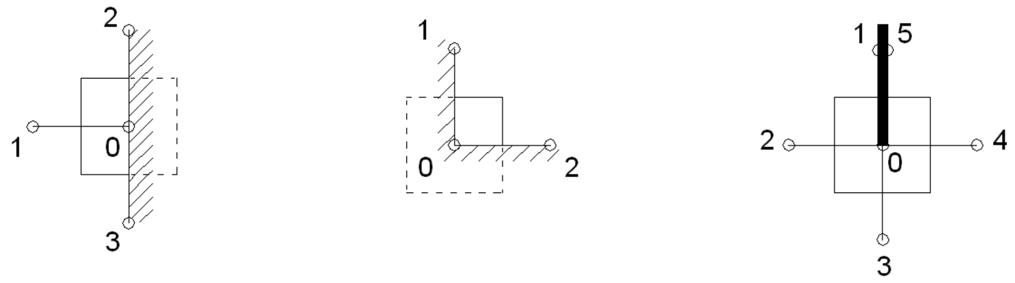
$$v_i = \frac{\varphi_i - \varphi_0}{\Delta l} \qquad \rightarrow \qquad q_i = \frac{\varphi_i - \varphi_0}{\Delta l} \cdot \Delta l = \varphi_i - \varphi_0$$

Jednadžba kontinuiteta za pojedini čvor poprima oblik

$$\sum_{i=1}^{4} q_i = \varphi_1 - \varphi_0 + \varphi_2 - \varphi_0 + \varphi_3 - \varphi_0 + \varphi_4 - \varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0$$

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}$$

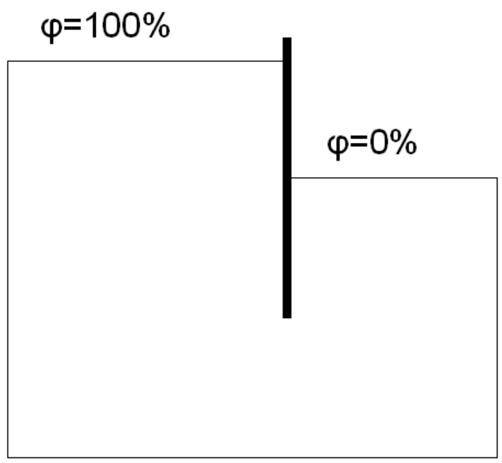
Analogno se mogu dobiti jednadžbe za rubne čvorove:



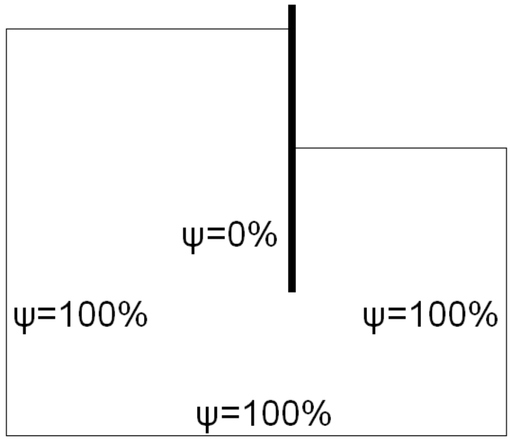
$$\varphi_0 = \frac{2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{4} \qquad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \varphi_0 = \frac{\frac{\varphi_1}{2} + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \frac{\varphi_5}{2}}{4}$$

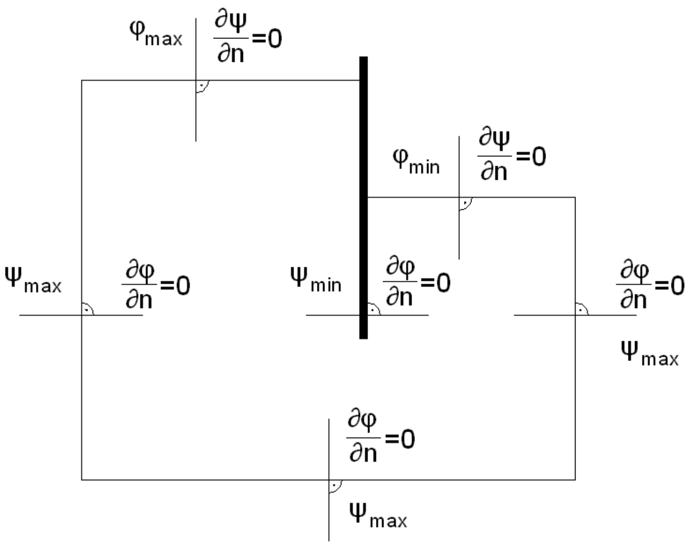
Osim vladajuće jednadžbe potrebno je definirati i rubne uvijete.

Za vrijednost funkcije φ (potencijal) se mogu definirati rubni uvjeti:



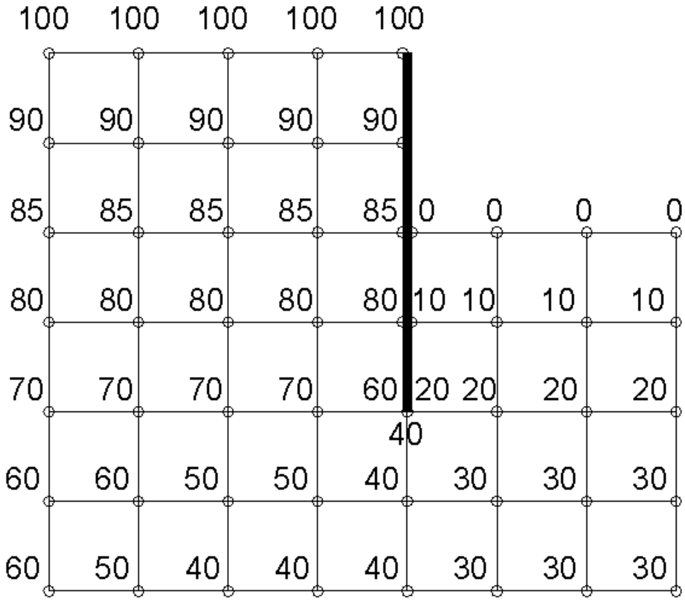
Za vrijednost funkcije ψ (strujna funkcija) se mogu definirati rubni uvjeti:



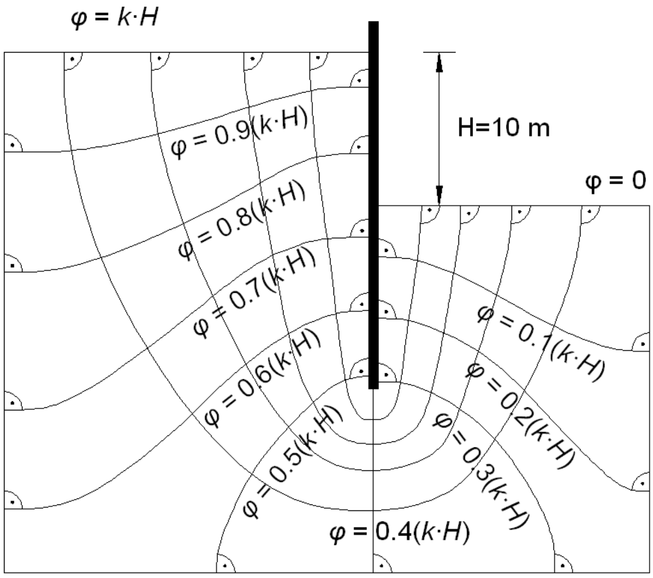


Postavljene jednadžbe se mogu riješiti ili metodom relaksacije ili direktno. U okviru vježbi je uobičajeno da se sustav jednadžbi rješava iterativno, odnosno metodom relaksacije.

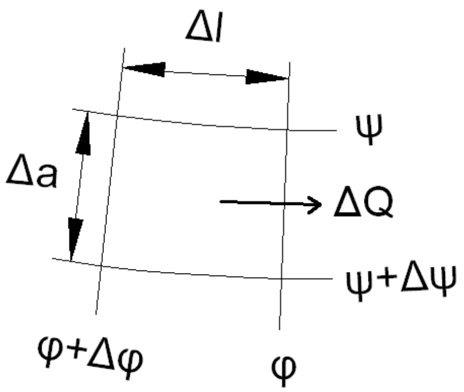
Pretpostaviti će se raspodjela potencijala φ u prvom koraku. Koristeći izvedene jednadžbe, računaju se vrijednosti potencijala po čvorovima za idući korak. Taj postupak se ponavlja dok raspodjela potencijala φ ne konvergira k pravom rješenju, odnosno dok razlika između izračunatih potencijala u dva iterativna koraka ne dosegne vrijednost manju od dopuštene.



Kao rezultat iteracijskog postupka, dobiva se točan raspored vrijednosti potencijala te se iz tih podataka može nacrtati strujna mreža.



Protok ispod zavjese se može računati na sljedeći način:



$\Delta Q = v \cdot \Delta a \cdot \Delta b$

$\Delta Q = k \cdot \dfrac{\Delta h}{\Delta l} \cdot \Delta a \cdot \Delta b$ (za jednu strujnu cijev)

ukupno: $Q = \sum \Delta Q = m \cdot \Delta Q$

m – broj strujnih cijevi

$$\Delta h = \frac{H}{n}$$

H – ukupna potencijalna energija “na raspolaganju” za savladavanje otpora trenja

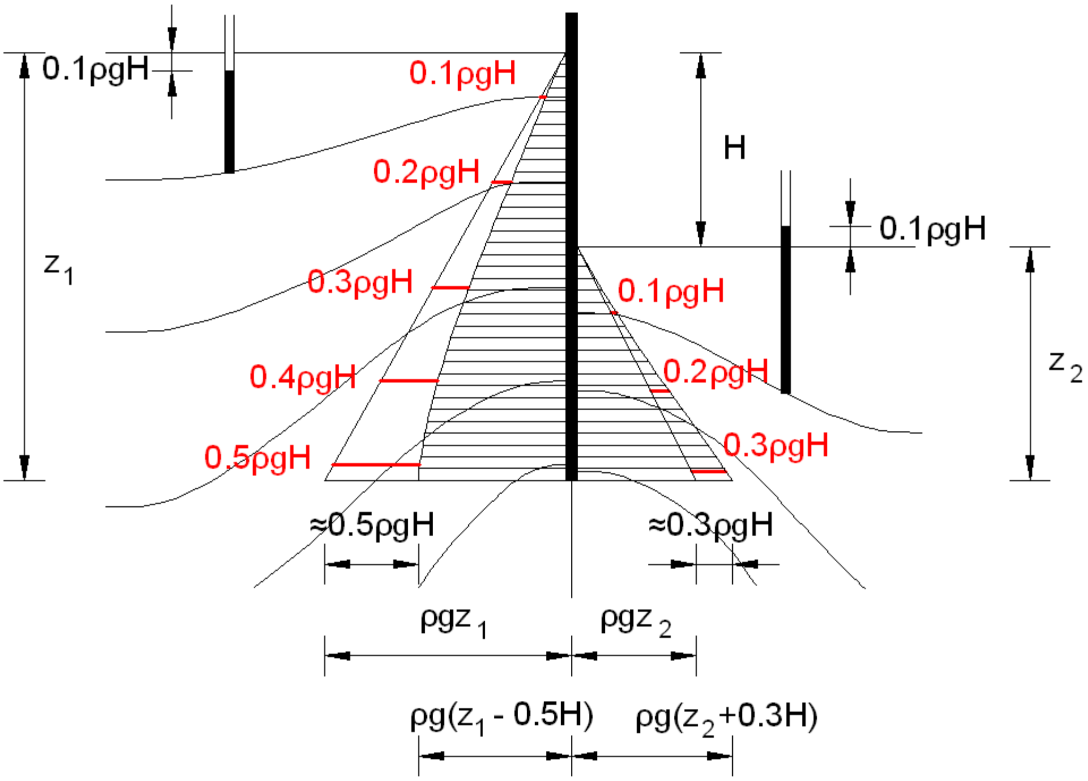
n – broj ekvipotencijalnih prostora (u ovom slučaju n = 10)

$$Q = m \cdot \Delta Q = m \cdot k \cdot \frac{H}{n} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \Delta b$$

- za kvadratičnu mrežu: $\Delta a = \Delta l$
- po metru širine $\Delta b = 1\, m$

$$Q = k \cdot H \cdot \frac{m}{n} \left[m^3 / s / m' \right]$$

Određivanje sile tlaka na zavjesu:



GRAĐEVINSKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Diplomski studij

Ak.god.

Predmet: **H I D R A U L I K A**

Student :

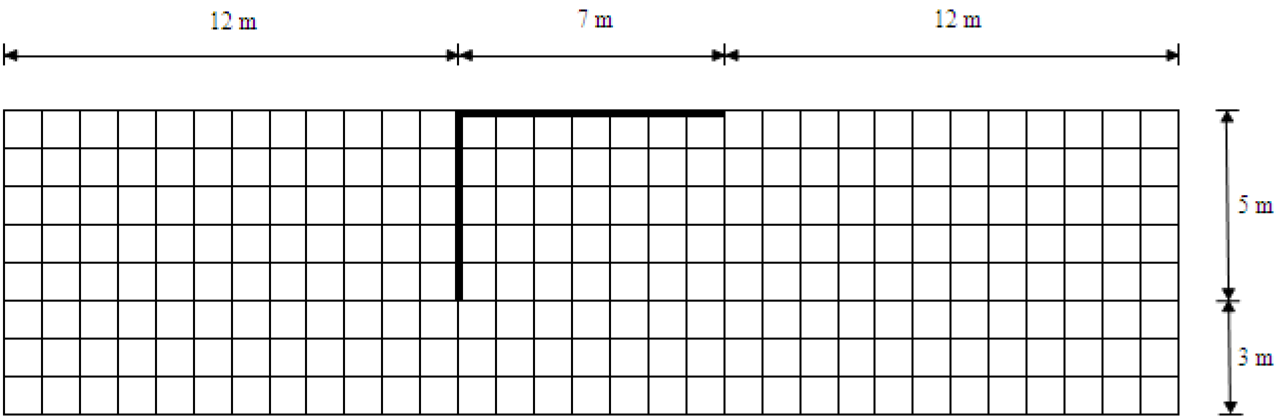
Mat.broj :

Zadatak 10 : **Strujanje podzemnih voda**

Za definirano područje i problem strujanja vode ispod brane s vertikalnom zavjesom, pomoću matematičkog modela procjeđivanja, odredite:

a) Skup ekvipotencijalnih linija
b) Skup strujnih linija
c) Protok ispod brane

Ukupna razlika piezometarskog potencijala ΔH =_________m, dok je koeficijent vodopropusnosti homogene i izotropne porozne sredine k =________m/s.



Zadano:

Pregledao:

Rok predaje: