

KORIGIRATI!

PREZIME I IME:

GRUPA:

VJEROJATNOST I STATISTIKA Kolokvij 9.12.2020. B

⇒

1. (a) (10 bodova) Iz kutije u kojoj je deset kuglica različitih boja izvlačimo četiri kuglice jednu po jednu bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da u uzorku imamo plavu i žutu kuglicu ako poredak izvučenih kuglica nije bitan?

među kojima su plava i žuta

- (b) (13 bodova) Bacamo dvije igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da su oba broja parna ako znamo da su pali jednaki brojevi?

⇒

a) $A =$ imamo barem jednu plavu i jednu žutu kuglicu

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = \boxed{\frac{2}{15} = 0,13}$$

b) $A =$ oba broja su parna

$B =$ pali su jednaki brojevi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$P(B)$ $P(A \cap B)$

3

4

$\frac{6}{36}$

$\frac{9}{36}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

— 1 bit važan

2. (a) (8 bodova) Neka je $X \sim G(p)$ i neka je $E(X) = 3$. Izračunajte $P(1 < X < 4)$ i $P(X > 2)$.

- (b) (15 bodova) Zadana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X

$$f(x) = \begin{cases} C \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite konstantu C i $E(X)$.

6 y

$$a) E(X) = \frac{1}{p} = 3 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < X < 4) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{10}{27} = 0,3703$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X=1) + P(X=2))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} = 0,44$$

$$b) 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \Rightarrow 1 = C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = C \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = C(1 - (-1)) = 2C$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \right. \begin{array}{l} dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) (-1) - \frac{1}{2} (-\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{0}$$

3. a) (8 bodova) Vrijeme ispravnog rada štedne žarulje je eksponencijalna slučajna varijabla s očekivanjem 6 godina nakon kupovine. Kolika je vjerojatnost da će žarulja prestati s ispravnim radom u toku četvrte godine?

b) Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom vjerojatnosti

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

- i) (10 bodova) Odredite marginalne funkcije gustoće i varijance slučajnih varijabli X i Y .
 ii) (4 boda) Za slučajnu varijablu $Z = 3X + 2$ izračunajte $E(Z)$ i $Var(Z)$.
 iii) (2 boda) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

a) X = vrijeme ispravnog rada štedne žarulje

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}, X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{6}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X < 4) = F(4) = 1 - e^{-\frac{4}{6}} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0.4866$$

$$b) i) X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = -0.6 + 0.4 = -0.2$$

$$Var(X) = 0.6 + 0.4 - 0.2^2 = 1 - 0.04 = 0.96$$

$$E(Y) = 0 + 0.4 + 0.8 = 1.2$$

$$Var(Y) = 0 + 0.4 + 0.8 - 1.2^2 = 1.2 - 1.44 = -0.24 \quad 0.56$$

$$ii) E(Z) = 3E(X) + 2 = 3 \cdot (-0.2) + 2 = -0.6 + 2 = 1.4$$

$$Var(Z) = 3^2 Var(X) = 9 \cdot 0.96 = 8.64$$

$$iii) 0.2 = P(1, 1) \neq P_1(1) \cdot P_2(1) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16 \\ \Rightarrow X \text{ i } Y \text{ su zavisne!}$$