

KORIGIRATI!

PREZIME I IME:

GRUPA:

VJEROJATNOST I STATISTIKA Kolokvij 9.12.2020. D C

1. Zdravko može doći do posla tramvajima broj 5 i 7. Tramvajem broj 5 se vozi s vjerojatnosti 0.6, a tramvajem broj 7 s vjerojatnosti 0.4. Vjerojatnost da zakasni na posao ako se vozio tramvajem broj 5 iznosi 0.15, dok vjerojatnost da zakasni ako se vozio tramvajem broj 7 iznosi 0.3. Kolika je vjerojatnost

- ⇒
- (a) (7 ^{ovaj} ~~boda~~) da Zdravko zakasni na posao,
 - (b) (8 ^{ovaj} ~~boda~~) da se Zdravko vozio tramvajem broj 7 ako znamo da je zakasnio na posao,
 - (c) (8 ^{ovaj} ~~boda~~) da se vozio tramvajem broj 5 ako znamo da nije zakasnio na posao?

H_1 -- Zdravko se vozio tramvajem br. 5, $P(H_1) = 0,6$
 H_2 -- " " " " " " " " br. 7, $P(H_2) = 0,4$

A -- " " " " " " " " je zakasnio na posao

$$P(A|H_1) = 0,15 \quad P(A|H_2) = 0,3$$

$$a) P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,6 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,3 \\ = 0,09 + 0,12 = \boxed{0,21}$$

$$b) P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,21} = \frac{0,12}{0,21} = \boxed{0,5714}$$

$$c) P(A^c|H_1) = 1 - P(A|H_1) = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,21 = 0,79$$

$$P(H_1|A^c) = \frac{P(H_1) \cdot P(A^c|H_1)}{P(A^c)} = \frac{0,6 \cdot 0,85}{0,79} = \boxed{0,6456}$$

2. (a) (10 bodova) Tipkovnica računala ima 100 tipki. Zatvorenih očiju trebamo stisnuti slovo g , a svaku tipku pogađamo s jednakom vjerojatnošću. Ponavljamo sve dok ne pogodimo g . Odredite vjerojatnost

(i) da je slovo g stisnuto u 20-om pokušaju.

(ii) da niti nakon 3 pokušaja nismo uspjeli stisnuti slovo g .

- (b) (14 bodova) Dana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X

$$f(x) = \begin{cases} C|x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(i) Odredite C .

(ii) Odredite funkciju raspodjele od X i nacrtajte njen graf.

(a) $X = \overset{\text{redni}}{\text{broj pokušaja u kojem je stisnuto slovo } g}$

$$p = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Geo}(0.01)$$

$$(i) \mathbb{P}(X=20) = (1-0.01)^{19} \cdot 0.01 = (0.99)^{19} \cdot 0.01$$

$$(ii) \mathbb{P}(X > 3) = (1-0.01)^3 = (0.99)^3 = 0.970299$$

$$\begin{aligned} \text{iii: } \mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - [\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)] \\ &= 1 - [0.01 + 0.99 \cdot 0.01 + 0.99^2 \cdot 0.01] = 1 - [0.01 + 0.009801 + 0.009801] \\ &= 0.970299 \end{aligned}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} C|x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$(i) \cdot 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C \left[\int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx \right] = C \left[-\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right] = C \cdot 1 \Rightarrow \underline{\underline{C=1}}$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

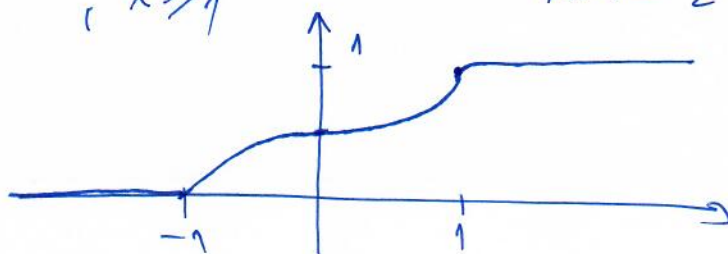
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

• $-1 < x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-1}^x (-t) dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

• $0 < x < 1$:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x t dt = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$



3. a) (8 bodova) Zadana je uniformna slučajna varijabla $X \sim U(-2, 2)$. Odredite $\mathbb{E}(X)$ i $\mathbb{P}(X > 0)$.

b) Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je tablicom

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 2 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

i) (8 bodova) Odredite marginalne funkcije vjerojatnosti i očekivanja slučajnih varijabli X i Y .

ii) (4 boda) Izračunajte $\mathbb{P}(X > 1, |Y| < 1)$.

iii) (3 boda) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

a) $\mathbb{E}(X) = \frac{-2+2}{2} = \underline{\underline{0}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 0) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{0 - (-2)}{2 - (-2)} \\ &= 1 - \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

b) i) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 = \underline{\underline{1,5}}$$

$$\mathbb{E}(Y) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,4 = \underline{\underline{0,2}}$$

ii) $\mathbb{P}(X > 1, |Y| < 1) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \underline{\underline{0,3}}$

iii) $0,3 = f(1,1) \neq f_1(1) \cdot f_2(1) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$
 $\Rightarrow X$ i Y su **nezavisne** !!