

2. (a) (10 bodova) Odredite vjerojatnost da su u jednoj obitelji od četvero djece

(i) barem dvije djevojčice.

(ii) barem jedan dječak i jedna djevojčica.

Vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice je ista.

(b) (13 bodova) Odredite konstantu C tako da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ C(1 - \cos x), & 0 < x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

bude fukcija raspodjele (distribucije) neke neprekidne slučajne varijable X . Odredite pripadnu funkciju gustoće i $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4})$.

konstantu C ?

a) $X = \text{broj djevojčica u obitelji}$, $X \sim B(4, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - (\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} = \boxed{0,6875} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) &= \cancel{\mathbb{P}(X=0)} + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) \\ &= \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 14 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{8} = \boxed{0,875} \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} C \sin x & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; \text{inače} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C \int_0^{\pi} \sin x dx = C(1 - \cos x) \Big|_0^{\pi} = C(-(-1) - (-1)) = 2C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{\pi}{4}) &= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi}{4}) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})} \end{aligned}$$

3. Bacamo dvije simetrične kocke i definiramo slučajni vektor (X, Y) :

$$X = \begin{cases} 1 & : \text{zbroj brojeva je paran broj} \\ 2 & : \text{zbroj brojeva je neparan broj} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & : \text{pala su dva različita broja} \\ 1 & : \text{pala su dva ista broja} \end{cases}$$

(a) (10 bodova) Odredite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) , te marginalne funkcije vjerojatnosti.

(b) (6 bodova) Odredite kovarijancu slučajnih varijabli X i Y .

(c) (4 boda) Odredite koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y .

(d) (2 boda) Odredite $\mathbb{P}(X + Y = 2)$.

(e) (2 boda) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

NE!

a)

$$(X, Y) \sim \begin{pmatrix} X \backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{12}{36} & \frac{6}{36} & \frac{18}{36} \\ 2 & \frac{18}{36} & 0 & \frac{18}{36} \\ f_2(y) & \frac{30}{36} & \frac{6}{36} & \end{pmatrix}$$

$$b) E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2} = 1,5} \quad E(Y) = 1 \cdot \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{2 - 3}{12} = \boxed{-\frac{1}{12} = -0,8\bar{3}} \end{aligned}$$

$$c) \text{Var}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{9}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\text{Var}(X)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\rho_{XY} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{5} = -0,4472}$$