Vjerojatnost i statistika

Zbirka zadataka

24. listopada 2019.

Sadržaj

Poglavlje 1

Kombinatorika

1.1 Permutacije

Permutacija je poredak konačnog broja objekata u redoslijed. Ako imamo n objekata, onda je broj mogućih poredaka $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Zadatak 1.1. Napišite sve permutacije bez ponavljanja skupa $S = \{1, 2, 3\}$.

Rješenje: Permutacije su uređene trojke skupa S: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. Broj permutacija: $3! = 6$. □

Zadatak 1.2. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenaka skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$, pri čemu se znamenke ne smiju ponavljati?

Rješenje: Ima $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ takva broja. □

Zadatak 1.3. Na koliko načina možemo razdijeliti 5 različitih pari čarapa u 5 ladica ako u svaku ladicu smijemo staviti samo jedan par?

Rješenje: Na $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina. □

1.2 Permutacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n objekata od čega je n_1 objekata prve vrste, n_2 objekata druge vrste, … i n_k objekata k-te vrste. Broj različitih poredaka ove familije je

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Zadatak 1.4. Na koliko načina je moguće nanizati 4 zelene, 5 plavih i 6 crvenih perlica?

Rješenje: Perlice razlikujemo samo po boji, dakle bitan nam je poredak perlica koje su međusobno različitih boja. Kad bi svih 15 perlica bilo različite boje, mogli bismo ih nanizati na 15! načina. Međutim, moramo uzeti u obzir da se perlice istih boja međusobno ne razlikuju, pa dobivamo konačan broj od $\frac{15!}{4!\cdot 5!\cdot 6!} = 630630$ mogućnosti. □

Zadatak 1.5. Koliko različitih peteroznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 1, 2, 2, 2$?

Rješenje: Od ukupno 5 znamenaka, imamo dvije jedinice i tri dvojke, dakle možemo sastaviti $\frac{5!}{2!3!} = 10$ različitih peteroznamenkastih brojeva. □

Zadatak 1.6. Na koliko načina možemo rasporediti 5 osobnih automobila, 7 motocikala i 3 kombi-vozila na 15 policijskih postaja ako svakoj postaji pripada samo jedno vozilo?

Rješenje: Na $\frac{15!}{5!7!3!} = 720720$ načina. □

1.3 Varijacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $1 \leqslant k \leqslant n$. Varijacija je poredak bilo kojih k objekata (od n) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Specijalno, ako je $k = n$, onda se radi o permutaciji.

Zadatak 1.7. Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5, 6$ tako da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Prvu znamenku možemo izabrati na 6 načina, drugu znamenku na 5 načina, a treću na 4 načina (znamenke se ne smiju ponavljati). Ukupan broj mogućnosti: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. □

Zadatak 1.8. Koliko ima različitih dvoznamenkastih brojeva sastavljenih od znamenki iz skupa $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, takvih da se znamenke ne ponavljaju?

Rješenje: Budući da 0 ne može biti na prvom mjestu (inače nemamo dvoznamenkasti broj!), prvu znamenku možemo izabrati na 4 načina. Drugu znamenku također biramo na 4 načina jer se znamenke ne smiju ponavljati. Dakle, broj različitih dvoznamenkastih brojeva iz skupa S je $4 \cdot 4 = 16$. $\square$

Zadatak 1.9. U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo odabrati 3 loptice bez vraćanja ako je poredak izvučenih loptica bitan?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. $\square$

Zadatak 1.10. U kutiji se nalaze 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti najviše jednu lopticu?

Rješenje: Na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. $\square$

1.4 Varijacije s ponavljanjem

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $k \geqslant 1$. Varijacija s ponavljanjem je poredak bilo kojih k (možemo ponavljati/uzimati isti objekt) u dani redoslijed duljine k. Broj takvih poredaka je

$$n^k.$$

Zadatak 1.11. Koliko različitih troznamenkastih brojeva možemo sastaviti od znamenaka $1, 2, 3, 4, 5$ ako dozvoljavamo ponavljanje?

Rješenje: Budući da je ponavljanje znamenki dozvoljeno, sva tri broja možemo izabrati na 5 načina, pa ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ mogućnosti. $\square$

Zadatak 1.12. Iz kutije u kojoj je sedam kuglica različitih boja izvlačimo dvije kuglice jednu po jednu, s vraćanjem ponovo u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti tim postupkom ako je poredak izvučenih kuglica bitan?

Rješenje: Navedenim postupkom dobit ćemo $7 \cdot 7 = 49$ različitih uzoraka. $\square$

Zadatak 1.13. U kutiji su 3 loptice različitih boja. Na koliko načina možemo razdijeliti loptice u 6 kutija ako je dozvoljeno da u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj loptica?

Rješenje: Na $6^3 = 216$ načina. □

1.5 Kombinacije

Imamo familiju od n različitih objekata. Neka je $0 \leqslant k \leqslant n$. Kombinacija je bilo koji podskup veličine k ove familije. Takvih podskupova imamo

$$\binom{n}{k}.$$

Neka su $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant n$. Binomni koeficijent, u oznaci $\binom{n}{k}$, je broj dan formulom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vrijede sljedeća svojstva:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1$, jer definiramo $0! = 1$.

(ii) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

(iii) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$.

Zadatak 1.14. Na koliko načina možemo iz grupe od 10 ljudi izabrati četveročlani odbor?

Rješenje: Na $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$ načina. □

Zadatak 1.15. Skup od 50 proizvoda sadrži 10 neispravnih proizvoda. Na koliko se različitih načina može formirati uzorak koji bi sadržavao 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda?

Rješenje: U skupu se nalazi 10 neispravnih i 40 ispravnih proizvoda. Od 10 neispravnih, mi izabiremo 3 proizvoda na $\binom{10}{3}$ načina. Iz podskupa ispravnih proizvoda izabiremo 5 proizvoda na $\binom{40}{5}$ načina. Dakle, osmeročlani uzorak u kojem ima 5 ispravnih i 3 neispravna proizvoda možemo formirati na $\binom{40}{5} \cdot \binom{10}{3} = 78960960$ načina. □

Zadatak 1.16. U kutiji se nalazi 5 loptica različitih boja. Na koliko načina možemo izabrati 3 loptice bez vraćanja ako poredak izabranih loptica nije bitan?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina. □

Zadatak 1.17. Imamo 3 jednake loptice. Na koliko načina možemo razdijeliti 3 loptice u 5 kutija ako u svaku kutiju smijemo staviti samo jednu lopticu?

Rješenje: Na $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ načina. □

1.6 Kombinacije s ponavljanjem

Imamo n različitih spremnika. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Kombinacija s ponavljanjem je bilo koji raspored k objekata (koje ne razlikujemo) u tih n spremnika. Objekte možemo zamišljati kao kuglice u nizu, a spremnike određujemo s $n-1$ pregradom. Npr. na slici prikazujemo jedan takav raspored 8 kuglica u 6 spremnika.

Slika 1.1: Raspored 8 objekata u 6 spremnika

Slika određuje sljedeći raspored kuglica: dvije u prvi spremnik, jedna u drugi spremnik, tri u treći spremnik, jedna u četvrti spremnik, nijedna u peti spremnik i jedna u šesti spremnik.

Prebrojimo sad moguće rasporede za n spremnika i k objekata. U tom bismo slučaju na slici imali ukupno $k+n-1$ mjesto za kuglicu i pregradu. Raspored je određen odabirom k mjesta na koje bismo stavili kuglice, odnosno odabirom $n-1$ mjesta na koje bismo stavili pregrade. Stoga takvih rasporeda imamo

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

Zadatak 1.18. Na koliko se načina 10 jednakih kuglica može rasporediti u 5 različitih kutija?

Rješenje: To možemo učiniti na $\binom{10+5-1}{10}$ načina. $\square$

Zadatak 1.19. Deset jednakih olovaka raspoređujemo u tri različite posude. Koliko razdioba možemo dobiti?

Rješenje: $n = 3, k = 10$. Možemo dobiti $\binom{3+10-1}{10} = 66$ različitih razdioba. $\square$

Zadatak 1.20. U studentskoj menzi se prodaju tri vrste kolača. Na koliko je načina moguće kupiti 9 kolača?

Rješenje: Imamo tri različite vrste kolača ($n = 3$) od kojih želimo sastaviti skup od 9 kolača ($k = 9$). To je moguće napraviti na $\binom{3+9-1}{9} = \binom{11}{9} = 55$ načina. $\square$

Zadatak 1.21. Iz kutije u kojoj su tri kuglice različitih boja izvlačimo jednu kuglicu, bilježimo boju i vraćamo je u kutiju. Koliko različitih uzoraka možemo dobiti ako postupak ponavljamo 8 puta uz pretpostavku da redosljed nije bitan?

Rješenje: $n = 3, k = 8$, dobit ćemo $\binom{3+8-1}{8} = 45$ različitih uzoraka. $\square$

Zadatak 1.22. (DZ) Koliko rješenja (x, y, z) u skupu $\mathbb{N}_0$ ima jednadžba $x + y + z = 10$?

Poglavlje 2

Vjerojatnost a priori

Definicija 2.1 (Vjerojatnost *a priori*)**.** *Izvršavamo pokus koji ima najviše konačno mnogo ishoda koji su svi jednako vjerojatni. Vjerojatnost* a priori *događaja vezanog uz ovaj pokus se definira kao omjer broja povoljnih ishoda (koji ulaze u promatrani događaj) i broja svih ishoda.*

Primjenjiva je samo na slučajne pokuse s konačno mnogo jednako vjerojatnih ishoda.

Definicija 2.2 (Vjerojatnost *a posteriori*)**.** *Izvršavamo neki slučajan pokus. Neka je A neki događaj vezan uz taj pokus. Vjerojatnost* a posteriori *događaja A se definira kao*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},$$

gdje je n_A broj pojavljivanja događaja A u n ponavljanja pokusa.

Neka svojstva vjerojatnosti:

(i) $A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Zadatak 2.1. A, B i C su događaji vezani za isti prostor elementarnih događaja Ω. Koristeći skupovne operacije napišite izreke za događaje:

a) nastupili su A i B dok C nije nastupio,

b) nastupila su barem dva događaja,

c) nastupio je samo jedan događaj.

(Prodajemo stanove u Zagrebu. Označimo sa A događaj "prodan je stan na Trešnjevci", s B događaj "prodan je stan u Mlinovima" i s C događaj "prodan je stan na Kajzerici". Koristeći skupovne operacije napišite izreke za događaje:

a) prodani su stanovi na Trešnjevci i u Mlinovima, dok na Kajzerici nije,

b) prodani su stanovi u barem dva kvarta,

c) prodan je stan u samo jednom kvartu.)

Rješenje:

a) $A \cap B \cap C^C$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C)$

□

Zadatak 2.2. Na slučajan način izabiremo studenta Građevinskog fakulteta u Zagrebu. Razlikujemo sljedeće događaje:
$A \ldots$ izabrana osoba je pušač
$B \ldots$ izabrana osoba ima plavu kosu
$C \ldots$ izabrana osoba je student prve godine
Opišite riječima događaje:

a) $A^C \cap B \cap C$

b) $(A \cup B)^C$

c) $A \cup (B \cap C)^C$

Rješenje:

a) Izabrana osoba je plavokosi nepušač, student prve godine.

b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \Rightarrow$ Izabrana osoba je nepušač koji nema plavu kosu.

c) $A \cup B^C \cup C^C \Rightarrow$ Izabrana osoba ili puši ili nema plavu kosu ili nije student prve godine.

$\square$

Zadatak 2.3. Eksperiment se sastoji u bacanju tri simetrična novčića.

a) Ispišite elemente skupa Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:
A - pojavio se barem jedan grb
B - pojavilo se barem jedno pismo
C - pojavilo se više grbova nego pisama
D - nije se pojavio grb
E - pojavili su se i grb i pismo
F - pojavilo se više pisama nego grbova
G - pojavili su se samo grbovi ili samo pisma

Rješenje:

a) $$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,G),(P,G,P),(P,G,G),(G,P,P),(G,P,G),\\ (G,G,P),(G,G,G)\}$$

b) $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(E) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4}$.

$\square$

Zadatak 2.4. Eksperiment se sastoji u bacanju tri igraće kocke.

a) Opišite skup Ω svih mogućih ishoda.

b) Izračunajte vjerojatnosti događaja:
$A \ldots$ na sve tri kocke je pao isti broj,
$B \ldots$ suma brojeva na sve tri kocke je 6.

Rješenje:

a) $\Omega = \{(x,y,z) \in S^3 : S = \{1,2,3,4,5,6\}\}$

b) $A = \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$
$B = \{(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),$
$(3,1,2),(3,2,1),(2,2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$.

□

Zadatak 2.5. U kutiji su dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice. Izvlačimo jednu po jednu kuglicu i stavljamo ih u niz.

a) Koliko postoji različitih uzoraka sastavljanih od dvije bijele, tri zelene i četiri crvene kuglice?

b) Kolika je vjerojatnost da se izabere niz u kojem su baš prve dvije kuglice bijele, zatim tri zelene i na kraju četiri crvene?

Rješenje:

a) Navedenih uzoraka ima $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$.

b) Tražimo vjerojatnost pojavljivanja skupa $A = (b,b,z,z,z,c,c,c,c)$. Od ukupno 1260 mogućnosti, nama odgovara samo jedna, dakle tražena vjerojatnost je jednaka $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1260}$.

□

Zadatak 2.6. U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice s vraćanjem u kutiju. Kolika je vjerojatnost

a) da u drugom izvlačenju izvadimo žutu kuglicu?

b) da u uzorku imamo barem jednu žutu kuglicu?

Rješenje:

a) Definiramo događaj $A =$ "u drugom izvlačenju dobivena je žuta kuglica". Budući da u prvom i trećem izvlačenju kuglice možemo izabrati na 5^2 načina, vrijedi da je $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5^2}{5^3} = 0.2$.

b) Neka je B događaj "izvučena je barem jedna žuta kuglica". Tada je B^C = "nije izvučena nijedna žuta kuglica". Stoga je $\mathbb{P}(B^C) = \dfrac{4^3}{5^3}$, jer kuglice biramo iz skupa od preostale 4 različite kuglice, pa slijedi da je $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{4^3}{5^3}$. $\square$

Zadatak 2.7. Imamo tri loptice koje raspoređujemo u pet kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti najviše jednu lopticu. Kolika je vjerojatnost da prva kutija bude puna ako

a) pretpostavimo da su sve loptice različitih boja?

b) su sve loptice iste boje?

Rješenje:

Definiramo događaj A = "prva kutija je puna".

a) Budući da su sve loptice različite, prvu kutiju možemo napuniti na 3 načina, a preostale dvije loptice možemo razdijeliti na $4 \cdot 3$ načina i stoga je $\mathbb{P}(A) = \frac{3\cdot(4\cdot3)}{5\cdot4\cdot3} = 0.6$

b) Nakon što napunimo prvu kutiju preostale loptice možemo razdijeliti na $\binom{4}{2}$ načina, pa je $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = 0.6$.

$\square$

Zadatak 2.8. U uzorak uzimamo 3 proizvoda od ukupno 10 proizvoda (od kojih je 6 ispravnih i 4 neispravna). Kolika je vjerojatnost da u uzorku

a) nema neispravnih proizvoda?

b) ima jedan neispravan proizvod?

c) ima barem dva ispravna proizvoda?

Rješenje:
Tri proizvoda koja uzimamo u uzorak možemo izabrati na $\binom{10}{3} = 120$ načina.

a) Broj uzoraka koji nemaju neispravnih proizvoda je jednak $\binom{6}{3}\binom{4}{0} = 20$. Označimo sa A događaj "u uzorku nema neispravnih proizvoda". Tada je $\mathbb{P}(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

b) Broj uzoraka u kojem se nalazi točno jedan neispravan proizvod je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$.
Ukoliko sa B označimo događaj "u uzorku je točno jedan neispravan proizvod" imamo $\mathbb{P}(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

c) Broj uzoraka s barem dva ispravna proizvoda je jednak $\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{3}\binom{4}{0} = 60 + 20 = 80$.
Označimo sa C događaj "u uzorku se nalaze barem dva ispravna proizvoda". Tada je $\mathbb{P}(C) = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$. □

Zadatak 2.9. U skupu od 50 žarulja 3 su štedne.

a) Na koliko načina možemo odabrati dvije žarulje iz navedenog skupa? Na koliko načina možemo odabrati dvije štedne žarulje?

b) Kolika je vjerojatnost da će dvije odabrane žarulje biti štedne?

c) Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati jednu štednu i jednu običnu žarulju?

Rješenje:

a) Dvije žarulje iz skupa od 50 žarulja možemo odabrati na $\binom{50}{2} = 1225$ načina, a dvije štedne žarulje možemo izabrati na $\binom{3}{2} = 3$ načina.

b) Definiramo događaj $A =$ "odabrali smo dvije štedne žarulje". Tada je prema a) i definiciji vjerojatnosti a priori $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{1225} = 0,0024$.

c) Za događaj $B =$ "odabrali smo jednu štednu i jednu običnu žarulju" vrijedi $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{47}{1}\binom{3}{1}}{1225} = \dfrac{141}{1225} \approx 0.1151$.

□

Zadatak 2.10. Bacamo dvije igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti

a) barem jedna četvorka,

b) broj djeljiv s 2 ili s 3?

Rješenje: Znamo da je $n_\Omega = 6^2 = 36$.

a) Ishodi povoljni za događaj $A =$"pala je barem jedna četvorka" su $(4,4)$ i $(4,i),(i,4), i = 1,2,3,5,6$. Dakle $\mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$.

b) Brojevi djeljivi s dva su 2, 4 i 6, a brojevi djeljivi s tri su 3 i 6. Označimo s B događaj "pao je broj djeljiv s 2 ili 3". Tada je $B^c = \{(5,1),(1,5),(1,1),(5,5)\}$ i

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{8}{9}.$$

□

Zadatak 2.11. U kutiji imamo 5 kuglica različitih boja (plava, crvena, žuta, zelena, ljubičasta). Izvlačimo 3 kuglice bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati uzorak u kojem se nalaze plava, crvena i zelena kuglica, ako je:

a) poredak boja bitan?

b) poredak boja nije bitan?

Rješenje:
Definiramo događaj $A =$ "izabrali smo plavu, crvenu i zelenu kuglicu".

a) Ukoliko je poredak boja bitan broj ishoda povoljnih za događaj A je jednak $3!$, tako da je $\mathbb{P}(A) = \frac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3} = 0.1$.

b) U slučaju kada poredak boja nije bitan samo jedan ishod je povoljan za događaj A i stoga je $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0.1$.

□

Zadatak 2.12. Imamo 7 loptica koje raspoređujemo u 10 kutija tako da u svaku kutiju možemo staviti proizvoljan broj loptica. Kolika je vjerojatnost da u četvrtoj kutiji imamo tri loptice?

Rješenje: Označimo sa A događaj "u četvrtoj kutiji imamo tri jednake loptice". Budući da smo potrošili jednu kutiju i tri loptice, preostale loptice raspoređujemo na $\binom{9+4-1}{4}$ načina i stoga je
$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{9+4-1}{4}}{\binom{10+7-1}{7}} = \frac{9}{208} \approx 0.0433$ □

Zadatak 2.13. U kutiji se nalazi 20 kuglica (12 bijelih i 8 crnih). Izvlačimo 4 kuglice jednu za drugom bez vraćanja u kutiju. Kolika je vjerojatnost da će barem jedna od njih biti bijela?

Rješenje: Uvedimo oznake za događaje $A =$ "izvučena je barem jedna bijela kuglica" i $A^C =$ "izvučene su sve crne kuglice". Tada je
$\mathbb{P}(A^C) = \dfrac{\binom{8}{4}\binom{12}{0}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{14}{969}$ i $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{14}{969} = \frac{955}{969}$. □

Poglavlje 3

Geometrijska definicija vjerojatnosti

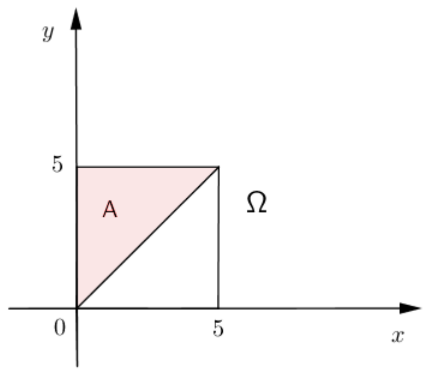
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ izmjeriv i ograničen skup. Za $A \in \mathcal{F}$ označimo s $\mu(A)$ površinu skupa A, a s $\mu(\Omega)$ površinu skupa Ω. Tada je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

vjerojatnost da smo slučajnim odabirom točke iz prostora Ω odabrali upravo točku iz izmjerivog skupa A.

Zadatak 3.1. Nasumce biramo točku iz kvadrata $\Omega = [0,5] \times [0,5]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x,y) \in \Omega : 0 \leqslant x, y \leqslant 5$ i $x \leqslant y\}$?

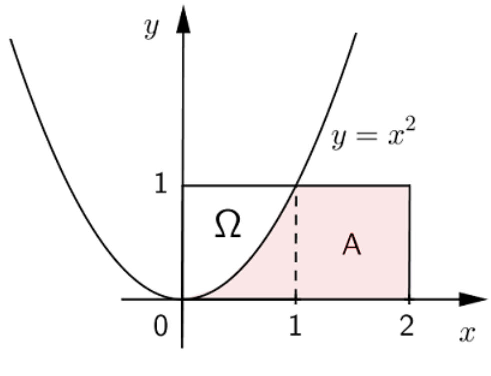
Rješenje:



Budući da je $\Omega = [0,5] \times [0,5]$, njegova površina iznosi $\mu(\Omega) = 5^2 = 25$.
Površina skupa A sa slike je jednaka $\mu(A) = \dfrac{5^2}{2} = \dfrac{25}{2}$.
Vjerojatnost da smo odabrali točku iz skupa A iznosi
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{25}{2}}{25} = \dfrac{1}{2}$. $\square$

Zadatak 3.2. Iglom gađamo pravokutnik $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ cm^2. Kolika je vjerojatnost da pogodimo točku $T(x,y)$ unutar zadanog pravokutnika takvu da je $y \leqslant x^2$?

Rješenje:

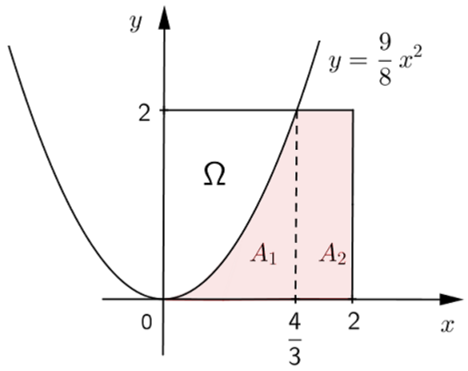


Površina pravokutnika $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ iznosi $\mu(\Omega) = 2$.
Površina skupa A na slici je jednaka
$\mu(A) = \int_0^1 x^2\,dx + 1 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Prema tome, vjerojatnost da smo pogodili točku iz skupa A iznosi
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{2}{3}.$ $\square$

Zadatak 3.3. Biramo nasumce točke iz kvadrata $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x, y) \in \Omega : y \leqslant \frac{9}{8}x^2\}$?

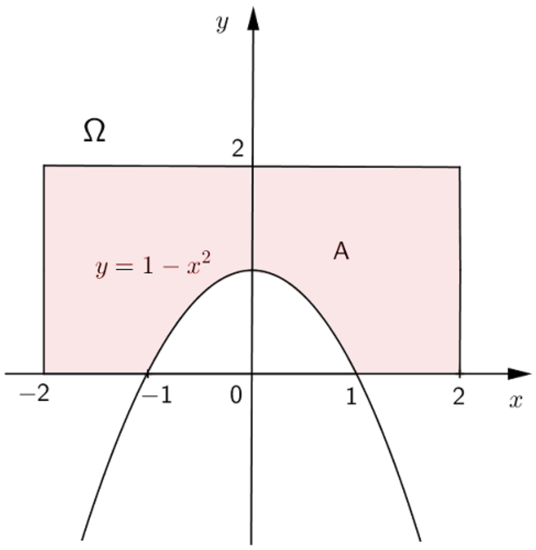
Rješenje:



Površina kvadrata $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ je jednaka $\mu(\Omega) = 2^2 = 4$.
Površina skupa A iznosi
$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \frac{9}{8}x^2\,dx + (2 - \frac{4}{3}) \cdot 2 = \frac{9}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4^3}{3^3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}.$
Vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa A je jednaka
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{20}{9}}{4} = \dfrac{5}{9}.$ $\square$

Zadatak 3.4. Nasumce biramo točku iz pravokutnika $\Omega = [-2, 2] \times [0, 2]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa $A = \{(x, y) \in \Omega : y \geqslant 1 - x^2\}$?

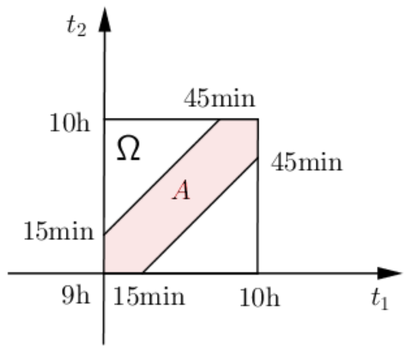
Rješenje:



Pravokutnik $\Omega = [-2, 2] \times [0, 2]$ ima površinu $\mu(\Omega) = 4 \cdot 2 = 8$.
Površina skupa A iznosi
$\mu(A) = 8 - \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\, dx = 8 - (x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = 8 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$.
Dakle, vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz skupa A je jednaka
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{\frac{20}{3}}{8} = \dfrac{5}{6}$. $\square$

Zadatak 3.5. Dvije osobe dogovore se da će na određeno mjesto doći između 9 i 10 sati i da će se svaka tamo zadržati 15 minuta ali ne nakon 10 sati. Kolika je vjerojatnost da će se te dvije osobe susresti ako pretpostavimo da su momenti njihovih dolazaka nasumce odabrani momenti vremena između 9 i 10 sati?

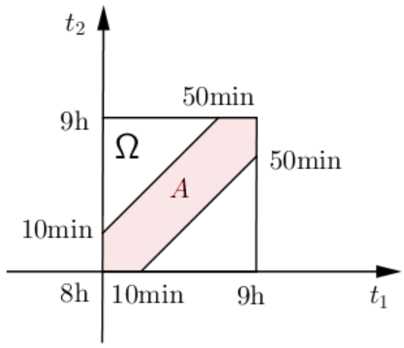
Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:
$A \ldots$ osobe će se susresti,
$t_1 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 1,
$t_2 \ldots$ trenutak kada je došla osoba 2,
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 9\text{h} \leqslant t_1, t_2 \leqslant 10\text{h}\}$ i
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leqslant 15\,\text{min}\}$.



Površine skupova Ω i A iznose redom
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$ i $\mu(A) = 60^2 - 45^2 = 1575$.
Vjerojatnost da će se osobe susresti je jednaka
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{1575}{3600} = \dfrac{7}{16}$. □

Zadatak 3.6. Dva vlaka stižu na stanicu između 8 i 9 sati. Svaki se zadrži na stanici 10 minuta ali ne poslije 9 sati. Kolika je vjerojatnost da će se vlakovi susresti?

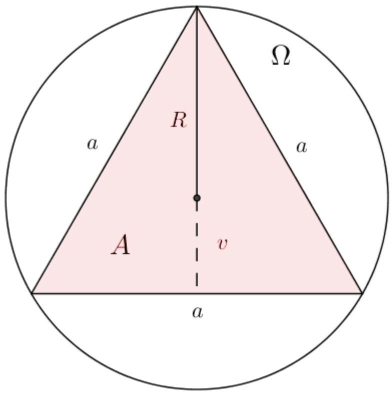
Rješenje: Uvedimo sljedeće oznake:
$A \ldots$ vlakovi će se susresti,
$t_1 \ldots$ trenutak kada je došao vlak 1,
$t_2 \ldots$ trenutak kada je došao vlak 2,
$\Omega = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : 8\text{h} \leqslant t_1, t_2 \leqslant 9\text{h}\}$ i
$A = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| \leqslant 10\,\text{min}\}$.



Površine skupova Ω i A su jednake
$\mu(\Omega) = 60^2 = 3600$ i $\mu(A) = 60^2 - 50^2 = 1100$.

Vjerojatnost da će se vlakovi susresti iznosi
$\mathbb{P}(A) = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$ $\square$

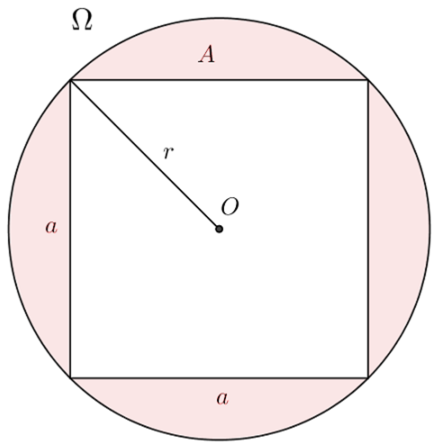
Zadatak 3.7. Unutar kruga radijusa R slučajno je odabrana točka. Nađite vjerojatnost da ta točka bude u jednakostraničnom trokutu stranice a upisanom u navedeni krug.



Rješenje: Za jednakostranični trokut upisan u krug vrijedi sljedeća relacija $R = \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Prema tome, $\sqrt{3}R = a$.
Uvedimo oznake
$\Omega \ldots$ skup svih točaka kruga radijusa R i
$A \ldots$ sve točke upisanog jednakostraničnog trokuta.
Njihove površine su redom $\mu(\Omega) = R^2\pi$ i
$\mu(A) = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a \cdot \frac{3}{2}R}{2} = \frac{\sqrt{3}R \cdot 3R}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$
Vjerojatnost da ćemo odabrati točku iz jednakostraničnog trokuta iznosi
$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}}{R^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.4135.$ $\square$

Zadatak 3.8. U krug radijusa $r = 2$ upisan je kvadrat. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući nasumce točke iz kruga odabrati točku izvan kvadrata?

Rješenje:



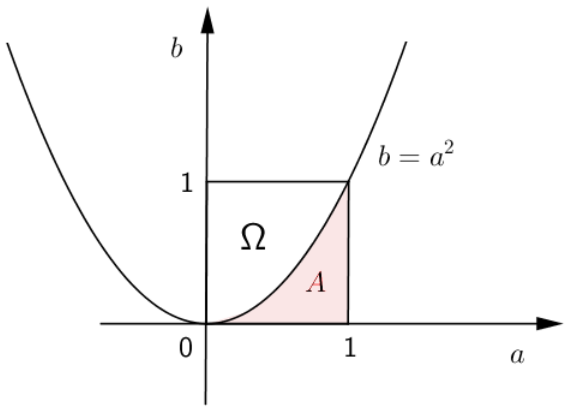
Označimo sa
$\Omega \ldots$ krug radijusa $r = 2$ i sa
$A \ldots$ točke unutar kruga, a izvan upisanog kvadrata.
Ako sa a označimo stranicu upisanog kvadrata, tada po Pitagorinom poučku znamo da vrijedi

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2,$$

iz čega dolazimo do $a^2 = 8$.
Površine kruga i skupa A su jednake
$\mu(\Omega) = 4\pi$ i
$\mu(A) = 4\pi - 8$.
Vjerojatnost da smo odabrali točke izvan kvadrata iznosi
$\mathbb{P}(A) = \frac{4\pi-8}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$. $\square$

Zadatak 3.9. Koeficijenti a i b jednadžbe $x^2+2ax+b = 0$ biraju se slučajno i nezavisno iz segmenta $[0, 1]$. Kolika je vjerojatnost da će navedena jednadžba imati realna rješenja?

Rješenje:
Jednadžba $x^2 + 2ax + b = 0$ ima realna rješenja ako je $D = (2a)^2 - 4b \geqslant 0$, tj. ako vrijedi $a^2 - b \geqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant b$.
Prostor elementarnih događaja
$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant a, b \leqslant 1\}$ ima površinu $\mu(\Omega) = 1^2 = 1$.
Događaj $A \ldots$ "jednadžba ima realna rješenja" možemo zapisati u obliku $A = \{(a, b) \in \Omega : a^2 \geqslant b\}$.



Površina skupa A iznosi $\mu(A) = \displaystyle\int_0^1 a^2 da = \frac{a^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.
Prema tome, vjerojatnost da promatrana jednadžbe ima realna rješenja je jednaka $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

$\square$

Poglavlje 4

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Definicija 4.1. *Za događaje A i B vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kažemo da su* nezavisni *ako je*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). \tag{4.1}$$

Napomenimo da ako su A i B nezavisni, onda su to i A^C i B, A i B^C i A^C i B^C.

Definicija 4.2. *Uvjetna vjerojatnost ili vjerojatnost od A uz uvjet B je jednaka*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Posebno, ako su A i B nezavisni, informacija o A nam ne donosi ništa važno prilikom zaključivanja o neizvjesnosti B, pa vrijedi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, kao i obratno, $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Zadatak 4.1. Dva strijelca gađaju određenu metu nezavisno jedan o drugome. Vjerojatnost da će prvi strijelac pogoditi metu iznosi 0.7, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi je 0.8. Kolika je vjerojatnost da metu pogode:

a) oba strijelca?

b) točno jedan strijelac?

c) barem jedan strijelac?

d) niti jedan strijelac?

Rješenje: Uvedimo oznake za događaje:
$A \ldots$ prvi strijelac je pogodio metu i
$B \ldots$ drugi strijelac je pogodio metu.
Tada vrijedi
$\mathbb{P}(A) = 0.7$ i $\mathbb{P}(A^c) = 1 - 0.7 = 0.3$, te
$\mathbb{P}(B) = 0.8$ i $\mathbb{P}(B^c) = 1 - 0.8 = 0.2$.

a) Vjerojatnost da oba strijelca pogode metu je jednaka
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$.

b) Vjerojatnost da točno jedan strijelac pogodi metu iznosi
$\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathbb{P}((A \cap B^c) + \mathbb{P}((A^c \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.14 + 0.24 = 0.38$.

c) Vjerojatnost da barem jedan strijelac pogodi metu je
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.7 + 0.8 - 0.7 \cdot 0.8 = 0.94$.

d) Vjerojatnost da niti jedan strijelac ne pogodi metu iznosi
$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$.

$\square$

Zadatak 4.2. Bacamo simetričnu igraću kocku. Kolika je vjerojatnost da će pasti neparan broj pod uvjetom da je pao broj ne veći od 3?

Rješenje: Za prostor elementarnih događaja
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vrijedi $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$, $\omega_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Uvedimo oznake:
$A \ldots$ pao je broj ne veći od 3 i
$B \ldots$ pao je neparan broj.
Tada je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 3, 5\}$. Prema tome, vjerojatnost da će pasti neparan broj pod uvjetom da je pao broj ne veći od 3 iznosi
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$. $\square$

Zadatak 4.3. Bacamo tri simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da je pala točno jedna šestica ako je poznato da su pali različiti brojevi?

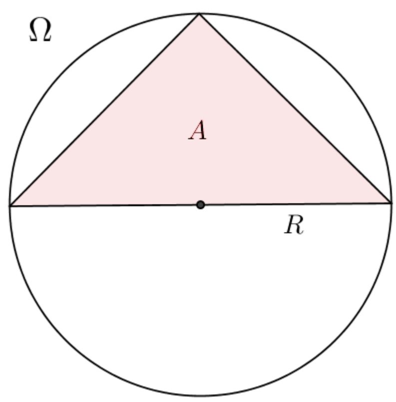
Rješenje: Ukupan broj ishoda opisanog eksperimenta iznosi $n_\Omega = 6^3$.
Uvedimo oznake:
$A \ldots$ pala je točno jedna šestica i
$B \ldots$ pali su različiti brojevi.
Tada je broj ishoda povoljan za događaj B jednak $n_B = 6 \cdot 5 \cdot 4$, a broj ishoda povoljnih za događaj $A \cap B$ iznosi $n_{A \cap B} = 3 \cdot 5 \cdot 4$.
Vjerojatnost da je pala točno jedna šestica ako znamo da su pali različiti brojevi je jednaka
$\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}} = \dfrac{1}{2}.$ □

Zadatak 4.4. U krugu radijusa R slučajno je odabrana jedna točka. Kolika je vjerojatnost da se točka nalazi

a) u najvećem jednakokračnom trokutu upisanom u krug s bazom u središtu kruga,

b) u trokutu pod uvjetom da se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta?

Rješenje:



a) Definiramo događaj
$A \ldots$ točka se nalazi u trokutu.

Tada je $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\frac{2R \cdot R}{2}}{R^2 \pi} = \dfrac{1}{\pi}.$

b) Definiramo događaj
$B \dots$ točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta (nalazi se u gornjem polukrugu).
Tada je događaj
$A \cap B \dots$ "točka se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta i nalazi se u trokutu"
jednak događaju
$A \dots$"točka se nalazi u trokutu".
Stoga je vjerojatnost da je odabrana točka u trokutu pod uvjetom da se ne nalazi u polukrugu ispod trokuta jednaka

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{\frac{R^2\pi}{2}}{R^2\pi}} = \frac{2}{\pi}$$

$\square$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $H_1, H_2, \dots, H_n$ disjunktni događaji takvi da vrijedi $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$. Tada $H_1, \dots, H_n$ nazivamo *potpun sustav događaja* i za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \dots + \mathbb{P}(A|H_n)\mathbb{P}(H_n).$$

Dakle, gornja formula daje vjerojatnost događaja A ako znamo vjerojatnost po dijelovima $(H_i), i = 1, \dots, n$. Formulu zovemo *formula potpune vjerojatnosti*.

Iz formule potpune vjerojatnosti direktno slijedi i takozvana *Bayesova formula*:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)}, \quad \text{za } i = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Gornju formula daje vjerojatnost uzroka H_i uz danu posljedicu A.

Zadatak 4.5. Neki proizvod izrađuje se na tri stroja.
Na prvom stroju se izrađuje 40% ukupne proizvodnje i od toga je 0.1% neispravnih proizvoda,
na drugom stroju se izrađuje 35% ukupne proizvodnje i od toga je 0.2% neispravnih proizvoda, a
na trećem stroju se izrađuje 25% ukupne proizvodnje i od toga je 0.25% neispravnih proizvoda.
Kolika je vjerojatnost

a) da nasumično odabran proizvod bude neispravan,

b) da je odabrani proizvod načinjen na prvom stroju ako znamo da je neispravan?

Rješenje:
a) Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ proizvod je izrađen na prvom stroju,
$H_2 \ldots$ proizvod je izrađen na drugom stroju,
$H_3 \ldots$ proizvod je izrađen na trećem stroju i
$A \ldots$ proizvod je neispravan.

Tada je

$\mathbb{P}(H_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.35, \quad \mathbb{P}(H_3) = 0.25 \quad$ i

$\mathbb{P}(A|H_1) = 0.001$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.002$, $\mathbb{P}(A|H_3) = 0.0025$.

Prema formuli potpune vjerojatnosti, vjerojatnost da nasumično odabran proizvod bude neispravan iznosi

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3) = 0.001725.$

b) Vjerojatnost da je odabrani proizvod načinjen na prvom stroju ako znamo da je neispravan, prema Bayesovoj formuli iznosi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.4}{0.001 \cdot 0.4 + 0.002 \cdot 0.35 + 0.0025 \cdot 0.25} = 0.2319.\end{aligned}$$

□

Zadatak 4.6. Uređaj se može naći u dva režima rada: normalnom i otežanom. U normalnom režimu se nalazi 75%, a u otežanom režimu 25% radnog vremena. Za vrijeme normalnog rada uređaj otkazuje s vjerojatnošću 0.2, a za vrijeme otežanog rada s vjerojatnošću 0.5. Ako znamo da je uređaj otkazao, kolika je vjerojatnost da se to dogodilo za vrijeme otežanog režima rada? Kolika je vjerojatnost da uređaj ne otkaže?

Rješenje: Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ uređaj je u normalnom režimu rada,
$H_2 \ldots$ uređaj je u otežanom režimu rada   i
$A \ldots$ uređaj je otkazao.

Tada je

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.75, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.25, \qquad \text{i} \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = 0.2, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.5.$$

Prema Bayesovoj formuli vjerojatnost da je uređaj radio u otežanom režimu rada kada je otkazao iznosi

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{0.25 \cdot 0.5}{0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.5} = 0.45.$$

Znamo da događaj "uređaj nije otkazao" možemo označiti sa A^C. Vrijedi da je

$$\mathbb{P}(A^C|H_1) = 0.8, \quad \mathbb{P}(A^C|H_2) = 0.5.$$

Vjerojatnost da uređaj ne otkaže je prema formuli potpune vjerojatnosti jednaka

$$\mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(A^C|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A^C|H_2)\mathbb{P}(H_2) = 0.8 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.725. \quad \square$$

Zadatak 4.7. Promatrani stroj može raditi normalno i pod opterećenjem. Stroj radi normalno 60% vremena, a ostalo pod opterećenjem. Vjerojatnost da radi ispravno dok je pod opterećenjem iznosi 0.7, dok je vjerojatnost ispravnog rada dok nije pod opterećenjem jednaka 0.9. Izračunajte vjerojatnost da:

a) stroj radi ispravno.

b) je stroj ispravan i pod opterećenjem.

c) je stroj pod opterećenjem ako je ispravan.

d) je stroj pod opterećenjem ako nije ispravan.

Rješenje: Uvedimo oznake:
$H_1 \ldots$ stroj je pod opterećenjem,
$H_2 \ldots$ stroj nije pod opterećenjem   i

$A\ldots$ stroj radi ispravno.

Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.6 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{P}(A|H_1) = 0.7, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 0.9.$$

a) Vjerojatnost da stroj radi ispravno iznosi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) = 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9 = 0.82.$$

b) Vjerojatnost da je stroj ispravan i da radi pod opterećenjem iznosi

$$\mathbb{P}(A \cap H_1) = \mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28.$$

c) Vjerojatnost da je stroj pod opterećenjem ako je ispravan je jednaka

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.9} = 0.3415.\end{aligned}$$

d) Znamo da je $\mathbb{P}(A^c|H_1) = 0.3$ i $\mathbb{P}(A^c|H_2) = 0.1$. Tada je vjerojatnost da je stroj pod opterećenjem ako nije ispravan jednaka

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1|A^c) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A^c|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A^c|H_2)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.1} = 0.667.\end{aligned}$$

□

Formula produkta vjerojatnosti: Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \quad (4.3)$$

Zadatak 4.8. Kuharica zna pripremiti 4 vrste jela. Tjedan započinje bilo kojim jelom s jednakom vjerojatnošću. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana s vjerojatnošću 0.4 ili odabire jedno od preostalih jela, koja su sva jednako vjerojatna. Kolika je vjerojatnost da će izbor jela biti b, b, a, c, c?

Rješenje: Definiramo događaje:
$A_1 \dots$ prvo izabrano jelo je b,
$A_2 \dots$ drugo izabrano jelo je b,
$A_3 \dots$ treće izabrano jelo je a,
$A_4 \dots$ četvrto izabrano jelo je c i
$A_5 \dots$ peto izabrano jelo je c.

Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.25, \quad \mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.4, \quad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.2 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 0.4.$$

Vjerojatnost da će izbor jela biti b, b, a, c, c prema formuli produkta vjerojatnosti iznosi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$\cdot \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) = 0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = \frac{1}{625}. \qquad \square$$

Zadatak 4.9. Građevinska tvrtka nabavlja crijep od dobavljača A, B i C. Pri prvoj kupnji vjerojatnost da odabere dobavlječa A iznosi 0.5, a s jednakom vjerojatnošću bira dobavljače B i C. Pri svakoj sljedećoj kupnji vjerojatnost da ostane pri istom dobavljaču iznosi 0.6, a između ostala dva dobavljača bira s jednakim vjerojatnostima. Kolika je vjerojatnost da je crijep nabavljen prema redoslijedu AABCCA?

Rješenje: Uvedimo oznake:
$A_1 \dots$ prvi izabrani dobavljač je A,
$A_2 \dots$ drugi izabrani dobavljač je A,
$A_3 \dots$ treći izabrani dobavljač je B,
$A_4 \dots$ četvrti izabrani dobavljač je C,
$A_5 \dots$ peti izabrani dobavljač je C i
$A_6 \dots$ šesti izabrani dobavljač je A.

Vjerojatnost da je crijep nabavljen prema redoslijedu AABCCA iznosi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)$$
$$= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$\cdot \mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \cdot \mathbb{P}(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$
$$= 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0.00144. \qquad \square$$

Zadatak 4.10. Iz snopa od 52 karte izvlačimo dvije karte, jednu po jednu.

a) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu nakon izvlačenja nismo vraćali u snop?

b) Kolika je vjerojatnost da je druga izvučena karta pik ako je prva karta pik, a prvu kartu smo nakon izvlačenja vraćali u snop?

Rješenje: Uvedimo oznake:
$A_1 \ldots$ prva izvučena karta je pik i
$A_2 \ldots$ druga izvučena karta je pik.

a) U slučaju da prvu kartu ne vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu je ostala 51 karta, od čega je 12 pikova pa je tražena vjerojatnost jednaka
$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{12}{1}}{\binom{51}{1}} = \frac{12}{51}$.

b) U slučaju da prvu kartu vraćamo u snop, nakon prvog izvlačenja u snopu su opet 52 karte, od čega 13 pikova pa tražena vjerojatnost iznosi
$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{\binom{13}{1}}{\binom{52}{1}} = \frac{13}{52}$.

□

Poglavlje 5

Slučajne varijable

Teorija vjerojatnosti bazirana samo na definiciji vjerojatnosnog prostora, tj. teoriji skupova, nije previše moćan alat. Dakle, željeli bismo dalje "matematizirati" vjerojatnosni prostor. Vjerojatnosnom prostoru (pokusa) pridružujemo funkcije koje u teoriji vjerojatnosti zovemo *slučajne varijable.*

Neka je sad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. *Slučajna varijabla* je funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Slučajne varijable s obzirom na njihovu sliku $R(X)$ dijelimo na

(i) **diskretne** - slika $R(X)$ je konačan ili prebrojiv skup (npr. broj automobila, broj ljudi,...)

(ii) **neprekidne** - slika $R(X)$ je neki interval (npr. količina vode, vrijeme, ...)

5.1 Diskretne slučajne varijable

Diskretna slučajna varijabla određena je svojom slikom $R(X)$ i brojevima (distribucijom) $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ za $x_i \in R(X)$. Jasno je da je

$$\sum_{x_i \in R(X)} p_i = \sum_{x_i \in R(X)} \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \in R(X)) = 1.$$

Svaku diskretnu slučajnu varijablu zapisujemo tablično

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

i tu tablicu nazivamo *funkcija vjerojatnosti od X* i pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ diskretne slučajne varijable X je definirana relacijom

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{x_i \in R(X), x_i \leqslant x} p_i$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Očekivanje od X, u oznaci $\mathbb{E}(X)$, je broj definiran s

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i \in R(X)} x_i \cdot p_i.$$

Ovaj broj daje usrednjenje (srednju vrijednost) slučajne varijable X.
Svojstva očekivanja:

(i) $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, gdje su X i Y diskretne slučajne varijable.

Varijanca od X u oznaci $\operatorname{Var}(X)$, je broj definiran s

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \sum_{x_i \in R(X)} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = \sum_{x_i \in R(X)} x_i^2 \cdot p_i - E(X)^2. \end{aligned}$$

Svojstva varijance:

(i) $\operatorname{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \operatorname{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $\operatorname{Var}(X + \lambda) = \operatorname{Var}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Standardna devijacija od X, u oznaci $\sigma(X)$, je broj dan formulom

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}.$$

Zadatak 5.1. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$

a) Odredite sliku slučajne varijable X.

b) Odredite funkciju distribucije varijable X.

c) Prikažite grafički funkciju distribucije varijable X.

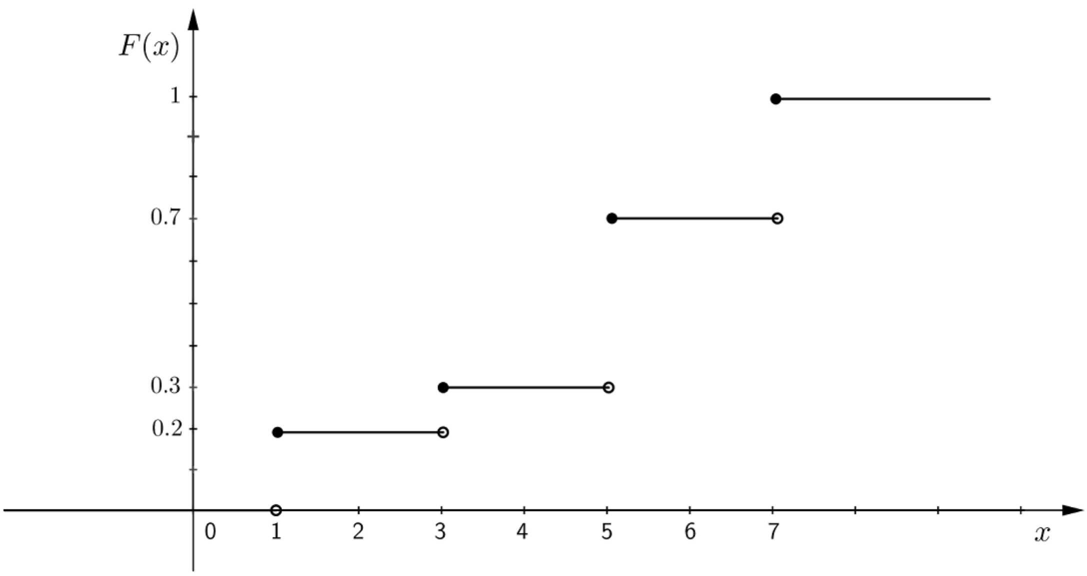
Rješenje:

a) Slika slučajne varijable X: $R(X) = \{1, 3, 5, 7\}$.

b) Funkcija distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leqslant x < 3 \\ 0.3, & 3 \leqslant x < 5 \\ 0.7, & 5 \leqslant x < 7 \\ 1, & x \geqslant 7 \end{cases}$$

c) Graf funkcije distribucije:



$\square$

Zadatak 5.2. Odredite matematičko očekivanje i standardnu devijaciju diskretne slučajne varijable X zadane funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & ? \end{pmatrix}$.

Rješenje: Najprije moramo odrediti vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost 4:
$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - 0.4 - 0.3 - 0.1 = 0.2$.
Sada računamo matematičko očekivanje slučajne varijable X:
$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.1$.
Da bismo našli standardnu devijaciju, moramo najprije odrediti varijancu slučajne varijable X:
$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.2 - 2.1^2$
$= 1.29$.
Standardna devijacija slučajne varijable X iznosi:
$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.29} = 1.136$.

□

Zadatak 5.3. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 6 & 8 \\ C & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 2C \end{pmatrix}$. Odredite

a) konstantu C,

b) očekivanje i varijancu,

c) $\mathbb{P}(1 \leqslant X < 6)$ i $\mathbb{P}(3 \leqslant X)$.

Rješenje:

a) Znamo da mora vrijediti $C + 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.1 + 2C = 1$. Prema tome, $C = 0.1$

b) Određujemo očekivanje slučajne varijable X:
$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 2.5 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.2 = 3.6$.

Sada možemo izračunati i varijancu od X:

$\mathrm{Var}(X) = 1^2 \cdot 0.1 + 1.5^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 2.5^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.1 + 8^2 \cdot 0.2 - 3.6^2 = 6.44$.

c) Tražene vjerojatnosti iznose:

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X < 6) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.7 \quad \text{i}$$

$$\mathbb{P}(3 \leqslant X) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

$\square$

Zadatak 5.4. Bacamo dvije igraće kocke. Neka je X razlika većeg i manjeg broja koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X.

b) Odredite i skicirajte funkciju distribucije slučajne varijable X.

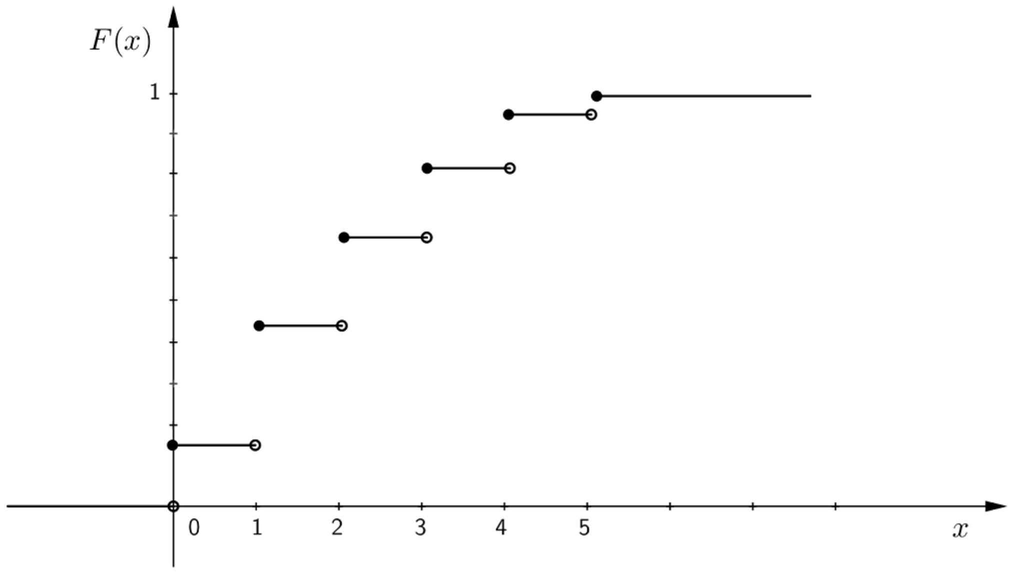
c) Izračunajte $\mathbb{P}(1 < X \leqslant 3)$, $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$ i $\mathbb{P}(0 \leqslant X < 3)$.

Rješenje:

a) Funkcija vjerojatnosti od X je određena sljedećom tablicom:
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}.$$

b) Funkcija distribucije od X ima oblik:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{6}{36}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{16}{36}, & 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{24}{36}, & 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{30}{36}, & 3 \leqslant x < 4 \\ \frac{34}{36}, & 4 \leqslant x < 5 \\ 1, & x \geqslant 5 \end{cases}$$

Graf funkcije distribucije od X je prikazan na sljedećoj slici:



c) Tražene vjerojatnosti iznose:
$\mathbb{P}(1 < X \leqslant 3) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} = \frac{7}{18}$,
$\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{4}{9}$ i
$\mathbb{P}(0 \leqslant X < 3) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} + \frac{8}{36} = \frac{2}{3}$.

$\square$

Zadatak 5.5. Promatramo slučajan pokus bacanja dvije igraće kocke i slučajnu varijablu X= suma brojeva koji su pali.

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X.

b) Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva koji su pali veći od 4, a manji ili jednak 8.

c) Izračunajte očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) Funkcija vjerojatnosti od X ima oblik:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Odredimo funkciju distribucije od X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 \leqslant x < 4 \\ \frac{6}{36}, & 4 \leqslant x < 5 \\ \frac{10}{36}, & 5 \leqslant x < 6 \\ \frac{15}{36}, & 6 \leqslant x < 7 \\ \frac{21}{36}, & 7 \leqslant x < 8 \\ \frac{26}{36}, & 8 \leqslant x < 9 \\ \frac{30}{36}, & 9 \leqslant x < 10 \\ \frac{33}{36}, & 10 \leqslant x < 11 \\ \frac{35}{36}, & 11 \leqslant x < 12 \\ 1, & x \geqslant 12 \end{cases}$$

b) Tražena vjerojatnost iznosi:

$$\mathbb{P}(4 < X \leqslant 8) = \tfrac{4}{36} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{6}{36} + \tfrac{5}{36} = \tfrac{20}{36}.$$

c) Očekivanje od X iznosi:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Varijanca od X je jednaka:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} - 7^2 = 5.83.$$

$\square$

Zadatak 5.6. Ispravan novčić bačen je četiri puta. Neka X označava broj pisama u najduljem nizu. Odredite funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:
Broj pisama u najduljem nizu ne mora biti ukupan broj pisama koje se pojavljuju, jer je npr. $X(p, g, p, g) = 1$, a $X(p, p, g, g) = 2$.
Skup svih ishoda opisanog eksperimenta je dan sa

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{p, g\}, i = 1, 2, 3, 4\}$, pa je $n_\Omega = 2^4 = 16$.
Slika slučajne varijable X ima oblik $R(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Odredimo vjerojatnosti da slučajna varijabla X postiže vrijednosti iz $R(X)$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(\{(g, g, g, g)\}) = \frac{1}{16}, \\
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}(\{(p, g, g, g), (g, p, g, g), (g, g, p, g), \\
&\qquad (g, g, g, p), (p, g, p, g), (g, p, g, p), (p, g, g, p)\}) = \frac{7}{16}, \\
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(\{(p, p, g, g), (g, p, p, g), (g, g, p, p), (p, p, g, p), (p, g, p, p)\}) = \frac{5}{16}, \\
\mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(\{(p, p, p, g), (g, p, p, p)\}) = \frac{2}{16} \quad i \\
\mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(\{(p, p, p, p)\}) = \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Sada možemo napisati funkciju vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$,
a zatim i izračunati očekivanje i varijancu

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{27}{16}, \\
\mathrm{Var}(X) &= \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbb{E}X)^2 \\
&= 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{7}{16} + 2^2 \cdot \frac{5}{16} + 3^2 \cdot \frac{2}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - (\frac{27}{16})^2 \\
&= \frac{247}{256}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 5.7. Diskretne slučajne varijable X i Y zadane su funkcijama vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. Opišite varijable $Z = 3X + 1$ i $V = Y^2$.

Rješenje: Odredimo najprije očekivanja i varijance slučajnih varijabli X i Y:
$\mathbb{E}X = 0.4 + 0.2 + 0.9 = 1.5$, $\mathrm{Var}\, X = 0.4 + 0.4 + 2.7 - 1.5^2 = 1.25$ i
$\mathbb{E}Y = -0.2 + 0.3 + 0.2 = 0.3$, $\mathrm{Var}\, Y = 0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.09 = 0.81$.

Nađimo sada funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable Z:
$Z \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{E}Z = 5.5$ i
$\operatorname{Var} Z = 9 \operatorname{Var} X = 9 \cdot 1.25 = 11.25$.
Sada određujemo funkciju vjerojatnosti, očekivanje i varijancu slučajne varijable V:
$V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{E}V = 0.9$ i
$\operatorname{Var} V = 2.1 - 0.9^2 = 1.29$. □

Zadatak 5.8. Diskretna slučajna varijabla X zadana je funkcijom vjerojatnosti
$X \sim \begin{pmatrix} -e & -1 & 1 & e & e^2 \\ 0.3 & 0.1 & x & 3x & 0.2 \end{pmatrix}$. Odredite

a) broj x,

b) funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \ln |X|$,

c) funkciju distribucije F_Y slučajne varijable Y,

d) očekivanje $\mathbb{E}(Y)$ slučajne varijable Y.

Rješenje:

a) Znamo da vrijedi $0.3 + 0.1 + x + 3x + 0.2 = 1$, pa je $x = 0.1$.

b) Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable Y je dana tablicom:
$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$.

c) Funkcija distribucije slučajne varijable Y ima oblik:
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.8, & 1 \leqslant x < 2 \\ 1, & x \geqslant 2 \end{cases}.$$

d) Očekivanje slučajne varijable Y je jednako:
$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.2 = 1$.

$\square$

Zadatak 5.9. Diskretna slučajna varijabla zadana je funkcijom vjerojatnosti $X \sim \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \sin X$.

Rješenje: Budući da je slika slučajne varijable X jednaka
$R(X) = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$,
onda slika slučajne varijable Y mora biti
$R(Y) = \{\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{4}\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$.
Prema tome, funkcija vjerojatnosti slučajne varijable Y ima oblik:
$Y \sim \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. $\square$

5.2 Primjeri diskretnih slučajnih varijabli

5.2.1 Binomna slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je Bernoullijeva s parametrom $0 \leqslant p \leqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Ova slučajna varijabla može se interpretirati kao ishod pokusa koji može rezultirati samo uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je p). Očito je

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

Diskretna slučajna varijabla X je binomna s parametrima $0 \leqslant p \leqslant 1$ i $n \geqslant 1$ ako je njena raspodjela oblika

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Binomna slučajna varijabla jest broj uspjeha $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ u n nezavisnih ponavljanja pokusa kod kojeg kao ishod imamo uspjeh s vjerojatnošću p i neuspjeh s vjerojatnošću $1-p$. Vjerojatnost od i uspjeha i $n-i$ neuspjeha u n nezavisnih ponavljanja pokusa je $p^i(1-p)^{n-i}$, a broj načina na koje možemo izabrati i uspjeha od n ponavljanja je $\binom{n}{i}$. Nije teško izračunati da je

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Zadatak 5.10. Bacamo simetričnu kocku 3 puta. Neka je X slučajna varijabla koja označava koliko je puta pao broj 6. Odredite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X. Odredite očekivani broj šestica u 3 bacanja.

Rješenje: Znamo da je X="broj pojavljivanja šestice u 3 bacanja". Očito je X binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 3$ i $p = \frac{1}{6}$.
Odredimo vjerojatnosti da X poprimi vrijednosti iz slike $R(X) = \{0, 1, 2, 3\}$:
$f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787,$

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472,$$
$$f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0695 \quad \text{i}$$
$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.0046.$$

Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X zadana je tablicom:
$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$

Očekivani broj šestica u tri bacanja je jednak:
$\mathbb{E}(X) = n \cdot p = \frac{1}{2}.$ □

Zadatak 5.11. Vjerojatnost da se tijekom jedne godine u nekom gradu dogodi potres iznosi $p = 0.2$. Pretpostavljamo da se u jednoj godini ne može dogoditi više od jednog potresa. Kolika je vjerojatnost da se tijekom 5 godina

a) ni u jednoj godini ne dogodi potres,

b) barem jedne godine pojavi potres?

c) Koliki je očekivani broj potresa u razdoblju od 10 godina i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: Uz oznaku X="broj godina s potresom u promatranom razdoblju", očito je $X \sim B(n, 0.2)$.

a) Budući da je $n = 5$, vjerojatnost da se ni u jednoj godini ne dogodi potres iznosi:
$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}0.2^0 \cdot (1 - 0.2)^5 = 0.3277.$

b) Uz $n = 5$, vjerojatnost da se barem jedne godine pojavi potres je jednaka:
$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.3277 = 0.6723.$

c) Kako je $n = 10$, očekivani broj potresa računamo po formuli:
$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0.2 = 2,$
a pripadnu varijancu pomoću izraza:
$\mathrm{Var}(X) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6.$

□

Zadatak 5.12. Strijelac gađa metu 3 puta. U svakom gađanju vjerojatnost pogotka iznosi $\frac{1}{2}$. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj pogodaka u metu. Odredite funkciju vjerojatnosti i funkciju distribucije slučajne varijable X. Kolika je vjerojatnost da će strijelac pogoditi metu jednom ili dva puta?

Rješenje:
Znamo da je X="broj pogodaka u metu u 3 gađanja", pa je jasno da je $X \sim B(3, \frac{1}{2})$.
Odredimo funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X:

$$f(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125,$$

$$f(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.375,$$

$$f(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.375 \quad \text{i}$$

$$f(3) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0.125$$

i stoga je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(0) & f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable X ima oblik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.125, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0.5, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0.875, & 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

Vjerojatnost da će strijelac pogoditi metu jednom ili dva puta iznosi:
$\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0.375 + 0.375 = 0.75.$

□

Zadatak 5.13. Bacamo novčić pet puta. Kolika je vjerojatnost da se pojavilo pismo

a) točno tri puta,

b) više od dva puta,

c) između dva i četiri puta?

Rješenje: Uz oznaku X="broj pojavljivanja pisama u 5 bacanja" vrijedi $X \sim B(5, 0.5)$.

a) Vjerojatnost da se pojavilo pismo točno tri puta iznosi:
$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^2 = 0.3125.$

b) Vjerojatnost da se pojavilo pismo više od dva puta je jednaka:
$\mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{3} 0.5^5 + \binom{5}{4} 0.5^5 + \binom{5}{5} 0.5^5 = 0.5.$

c) Vjerojatnost da se pojavilo pismo između dva i četiri puta je:
$\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{2} 0.5^5 + \binom{5}{3} 0.5^5 + \binom{5}{4} 0.5^5 = 0.78125.$

$\square$

5.2.2 Poissonova slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je Poissonova s parametrom $\lambda > 0$, u oznaci $X \sim Poi(\lambda)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla broji slučajne događaje u vremenu ili prostoru. Parametar λ predstavlja prosječan broj slučajnih događaja u jedinici vremena ili prostora i vrijedi $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Zadatak 5.14. Broj prometnih nesreća na određenoj dionici puta u toku jednog mjeseca je Poissonova slučajna varijabla X s parametrom $\lambda = 4$. Kolika je vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca

a) ne dogodi niti jedna nesreća,

b) dogode više od 3 nesreće?

c) Koliki je očekivani broj nesreća tijekom jednog mjeseca i kolika je pripadna varijanca?

Rješenje: Označimo sa $X =$ "broj prometnih nesreća u toku jednog mjeseca". Znamo da je $X \sim Poi(4)$.

a) Vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca ne dogodi niti jedna nesreća iznosi:
$\mathbb{P}(X=0) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} = 0.01832$.

b) Vjerojatnost da se tijekom nekog mjeseca dogode više od 3 nesreće je jednaka:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>3) &= 1-\mathbb{P}(X\leqslant 3)\\
&= 1-(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3))\\
&= 1-\left(\frac{4^0}{0!}e^{-4}+\frac{4^1}{1!}e^{-4}+\frac{4^2}{2!}e^{-4}+\frac{4^3}{3!}e^{-4}\right)\\
&= 1-(0.0183+0.0733+0.1465+0.1954)\\
&= 0.5665
\end{aligned}$$

c) Očekivani broj nesreća tijekom jednog mjeseca je jednak $\mathbb{E}(X)=4$, dok pripadna varijanca iznosi $\mathrm{Var}(X)=4$.

□

Zadatak 5.15. Na nekom graničnom prijelazu prođu prosječno 2 vozila u minuti. Kolika je vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći

a) jedno vozilo?

b) ?

Rješenje: Neka je X="broj vozila koja prijeđu granični prijelaz u minuti". Tada je $\lambda = 2$ i $X \sim Poi(2)$.

a) Vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći jedno vozilo iznosi:
$\mathbb{P}(X=1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.2707$.

b) Vjerojatnost da će tijekom bilo koje minute proći najviše jedno vozilo je jednaka:
$\mathbb{P}(X\leqslant 1) = \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{2^0}{0!}e^{-2}+\dfrac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.1353+0.2707 = 0.4060$.

□

Zadatak 5.16. Prodavač osiguranja proda prosječno tri police osiguranja tjedno. Izračunajte vjerojatnost da će u nekom tjednu prodati više od dvije a manje od pet polica osiguranja.

Rješenje: Označimo sa $X =$ "broj prodanih polica osiguranja u jednom tjednu". Tada je $\lambda = 3$ i $X \sim P(3)$.
Vjerojatnost da će u nekom tjednu prodavač uspjeti prodati više od dvije, a manje od pet polica osiguranja iznosi:
$\mathbb{P}(2 < X < 5) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} + \frac{3^4}{4!}e^{-3} = 0.2240 + 0.1680 = 0.392.$ □

5.2.3 Hipergeometrijska slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je hipergeometrijska s parametrima $n \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$ i $1 \leqslant k \leqslant n$, u oznaci $X \sim Hip(n, m, k)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \min\{k, m\} \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{\min\{k,m\}} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}, \quad i = 0, 1, \ldots, \min\{k, m\}.$$

Imamo n-članu populaciju koja je sačinjena od m članova 1. vrste i $n - m$ članova 2. vrste. Slučajna varijabla X predstavlja broj i članova 1. vrste u k-članom uzorku. Nije teško vidjeti da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{km}{n} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{km}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{n-k}{n-1}.$$

Zadatak 5.17. U pošiljci ima 20 proizvoda od kojih je 5 neispravno. Odaberemo (bez vraćanja) 3 proizvoda. Odredite:

a) vjerojatnost da su svi proizvodi neispravni.

b) vjerojatnost da smo odabrali više od jednog ispravnog proizvoda.

c) očekivani broj ispravnih proizvoda u uzorku.

Rješenje: Neka je $X =$ "broj ispravnih proizvoda u tročlanom uzorku skupa od 20 elemenata, od kojih je 15 ispravnih". Tada je $X \sim Hip(20, 15, 3)$.

a) Vjerojatnost da su svi proizvodi neispravni je jednaka:
$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{10}{1140} = 0.0088.$

b) Vjerojatnost da smo odabrali više od jednog ispravnog proizvoda iznosi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>1) &= \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)\\ &= \Big(\frac{\binom{15}{2}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{15}{3}\binom{5}{0}}{\binom{20}{3}}\Big)\\ &= 0.8597.\end{aligned}$$

c) Očekivani broj ispravnih proizvoda u uzorku računamo po formuli:
$\mathbb{E}(X) = \frac{3\cdot 15}{20} = 2.25.$

$\square$

Zadatak 5.18. Na polici se nalazi 12 knjiga, od kojih su 3 ljubavni romani. Na slučajan način biramo 4 knjige. Kolika je vjerojatnost

a) da su odabrana točno 2 ljubavna romana?

b) da su odabrana najmanje 3 ljubavna romana?

Rješenje: Označimo sa X="broj ljubavnih romana u skupu od 4 odabrane knjige". Tada je $X \sim Hip(12, 3, 4)$.

a) Vjerojatnost da su odabrana točno 2 ljubavna romana iznosi:
$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{9}{2}\binom{3}{2}}{\binom{12}{4}} = 0.2182.$

b) Vjerojatnost da su odabrana najmanje 3 ljubavna romana je jednaka:
$\mathbb{P}(X \geqslant 3) = \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) = \frac{\binom{9}{1}\binom{3}{3}}{\binom{12}{4}} + 0 = 0.0182.$

$\square$

Zadatak 5.19. Iz špila od 52 karte izvlačimo 6 karata. Kolika je vjerojatnost da smo dobili najviše dva pika?

Rješenje: Neka je X="broj pikova u izvučenih 6 karata (iz špila od 52 karte)". Tada znamo da je $X \sim Hip(52, 13, 6)$.
Vjerojatnost da smo dobili najviše dva pika računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\
&= \frac{\binom{39}{6}\binom{13}{0}}{\binom{52}{6}} + \frac{\binom{39}{5}\binom{13}{1}}{\binom{52}{6}} + \frac{\binom{39}{4}\binom{13}{2}}{\binom{52}{6}} \\
&= 0.1603 + 0.3677 + 0.3151 \\
&= 0.8431.
\end{aligned}$$

□

5.2.4 Geometrijska slučajna varijabla

Diskretna slučajna varijabla X je geometrijska s parametrom $0 < p \leqslant 1$, u oznaci $X \sim G(p)$, ako vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i = (1-p)^{i-1}p, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Ova slučajna varijabla predstavlja broj nezavisnih ponavljanja eksperimenta koji mogu rezultirati uspjehom ili neuspjehom (vjerojatnost uspjeha je p) sve do prvog uspjeha. Dakle, $(1-p)^{i-1}p$ znači da u prvih $i-1$ ponavljanja imamo neuspjehe, a u i-tom ponavljanju dogodi se uspjeh. Nije teško vidjeti da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{i} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Zadatak 5.20. U kutiji se nalazi 5 plavih i 10 zelenih kuglica. Izvlačimo kuglice jednu za drugom s vraćanjem u kutiju dok ne dobijemo plavu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ćemo tek u sedmom izvlačenju dobiti plavu kuglicu? Koliki je očekivani broj izvlačenja?

Rješenje: Neka je X = "broj izvlačenja dok se ne izvuče plava kuglica". Uz $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ imamo da je $X \sim G(\frac{1}{3})$.
Vjerojatnost da ćemo tek u sedmom izvlačenju dobiti plavu kuglicu iznosi:

$\mathbb{P}(X = 7) = (1 - \frac{1}{3})^{7-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} = 0.0293.$
Očekivani broj izvlačenja je jednak $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$ $\square$

Zadatak 5.21. Student izlazi na ispit iz kolegija Vjerojatnost i statistika dok ga ne položi. Ako je vjerojatnost da će student položiti ispit svaki put jednaka $\frac{1}{4}$, kolika je vjerojatnost da će student položiti ispit na trećem izlasku?

Rješenje: Označimo sa X = "broj izlazaka studenta na ispit dok ga ne položi". Tada je $X \sim G(\frac{1}{4})$.
Vjerojatnost da će student položiti ispit na trećem izlasku računamo po formuli:
$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - \frac{1}{4})^{3-1} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = 0.1406.$

$\square$

Zadatak 5.22. Poznato je da je u određenom procesu proizvodnje 20% proizvoda neispravno. Proizvode ispitujemo dok ne naiđemo na prvi neispravni proizvod. Kolika je vjerojatnost da ćemo ispitati samo 5 proizvoda?

Rješenje: Neka je X="broj ispitanih proizvoda do otkrivanja prvog neispravnog". Tada je $p = 0.2$ i $X \sim G(0.2)$.
Vjerojatnost da ćemo ispitati samo 5 proizvoda dok ne naiđemo na prvi neispravni proizvod iznosi:
$\mathbb{P}(X = 5) = (1 - 0.2)^{5-1} \cdot 0.2 = (0.8)^4 \cdot 0.2 = 0.0819.$

$\square$

5.3 Neprekidne slučajne varijable

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla. Dakle, $R(X)$ je neki interval u $\mathbb{R}$. Kao i u diskretnom slučaju X je u potpunosti određena svojom slikom $R(X)$ i funkcijom gustoće. *Funkcija gustoće* od X je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

(i) $f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$,

(iii) $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \quad a \in \mathbb{R}$.

Uočimo da iz svojstva (iii) slijedi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, vrijedi

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nadalje, zbog neprekidnosti od X imamo

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b).$$

Analogno kao i u diskretnom slučaju uvodimo pojam funkcije distribucije. *Funkcija distribucije* od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Vrijedi sljedeće:

(i) $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$,

(ii) F je neopadajuća

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$,

(iv) $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$,

(v) $F'(x) = f(x)$.

Uočimo da kao i u diskretnom slučaju F daje punu informaciju o X, tj.

$$f(x) = F'(x) \quad \text{i} \quad R(X) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}.$$

Za neprekidnu slučajnu varijablu X definiramo *očekivanje* od X s

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Varijancu od X definiramo s

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = E(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - (\mathbb{E}(X))^2$$

Standardnu devijaciju od X definiramo s

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Uočimo da funkcija gustoće ne mora biti neprekidna već samo funkcija distribucije (zadana je integralom). Funkcija distribucije diskretnih slučajnih varijabli je stepenastog oblika (zadana je sumom). Dakle, razlog zašto slučajne varijable nazivamo diskretnim ili neprekidnim je dan svojstvom njihove funkcije distribucije (skokovita ili neprekidna).

Zadatak 5.23. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Odredite konstantu C.

b) Nacrtajte graf funkcije gustoće vjerojatnosti f.

c) Odredite funkciju distribucije F i nacrtajte njen graf.

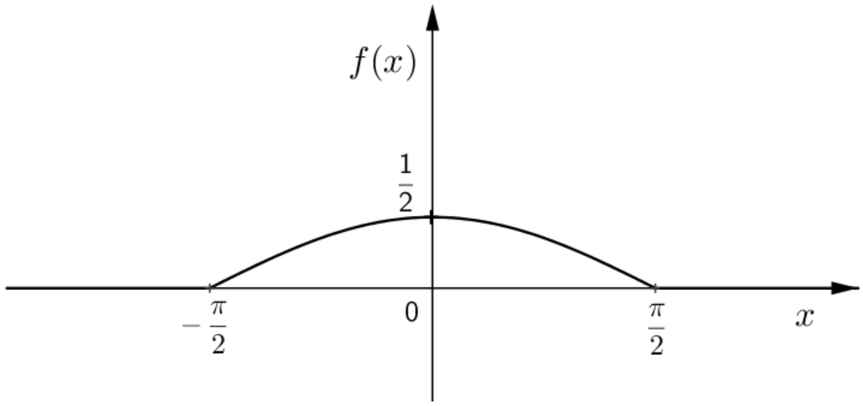
d) Odredite $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4})$.

Rješenje:

a) Konstantu C određujemo iz uvjeta $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
$1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = C \sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = C(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) =$
$2C \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}.$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \cos x & : -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b) Funkcija gustoće slučajne varijable X:

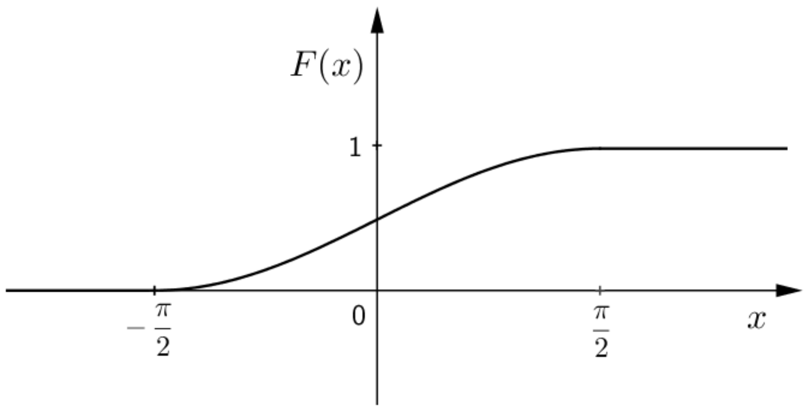


c) Funkciju distribucije određujemo koristeći se formulom $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Za $x < -\frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$

Za $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\ dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\,dt =$
$\frac{1}{2}\sin t|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$

Za $x > \frac{\pi}{2}$ imamo:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot\ dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot\ dt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & : -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



d) $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + 1) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\square$

Zadatak 5.24. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqslant 1 \\ \frac{2}{x^3} & : x > 1 \end{cases}$$

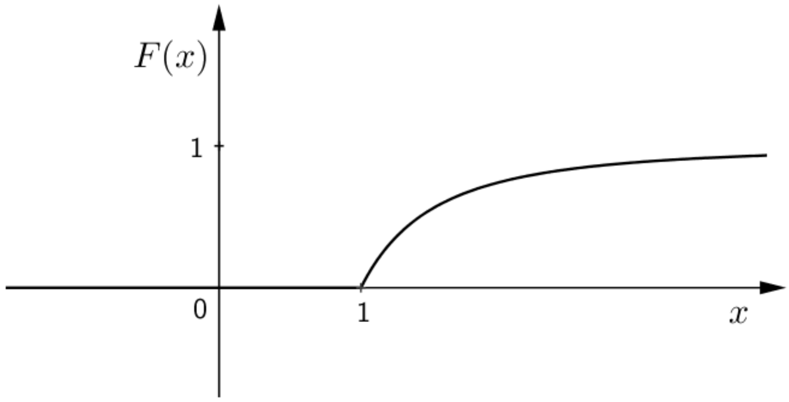
a) Odredite funkciju distribucije F slučajne varijable i nacrtajte njen graf.

b) Izračunajte $\mathbb{P}(0 < X < 3)$ i $\mathbb{P}(X > 1)$.

Rješenje:

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & : x > 1 \end{cases}$$



b) $\mathbb{P}(0 < X < 3) = F(3) - F(0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 1 - F(1) = 1$

$\square$

Zadatak 5.25. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : x < 0, x > 2 \end{cases}$$

a) Odredite konstantu a.

b) Napišite pripadnu funkciju distribucije.

c) Izračunajte $\mathbb{P}(0.4 \leqslant X \leqslant 1.5)$.

Rješenje:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow a\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & : x > 2 \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(0.4 \leqslant X \leqslant 1.5) = F(1.5) - F(0.4) = \frac{1}{8}(1.5^3 - 0.4^3) = 0.4139$

$\square$

Zadatak 5.26. Funkcija distribucije slučajne varijable X zadana je formulom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leqslant 2 \\ 0.5x - 1 & : 2 < x \leqslant 4 \\ 1 & : x > 4 \end{cases}$$

a) Odredite vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost veću od 0.2 i vjerojatnost da poprimi vrijednost manju od 3.

b) Nađite očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) $\mathbb{P}(X > 0.2) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 0.2) = 1 - F(0.2) = 1 - 0 = 1$
$\mathbb{P}(X < 3) = F(3) = 0.5 \cdot 3 - 1 = 0.5$

b) Gustoća od X:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0.5 & : 2 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 0.5 \int_2^4 x\, dx = 0.5 \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 0.5(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}) = 3$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - (\mathbb{E}(X)^2) = 0.5 \int_2^4 x^2 dx - 9 = 0.5 \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 - 9 = 0.5(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}) - 9 = \frac{1}{3}$$

$\square$

Teorem. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla, a funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona i derivabilna. Za neprekidnu slučajnu varijablu $Y = h(X)$ vrijedi:*

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx.$$

Zadatak 5.27. Slučajna varijbla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leqslant 0, x \geqslant \pi \end{cases}$$

Odredite matematičko očekivanje slučajne varijable $Y = X^2$.

Rješenje:
$h(x) = x^2$
$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \begin{Bmatrix} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}x^2 \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\pi^2\cos\pi + x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \cos 0 = \frac{\pi^2}{2} - 2$ □

Zadatak 5.28. Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & : 0 < x < \pi \\ 0 & : x \leqslant 0, x \geqslant \pi \end{cases}$$

Neka je $Y = -2X + 3$. Odredite

a) $\mathbb{E}(Y)$.

b) $\mathrm{Var}(Y)$.

Rješenje:

a) $\mathbb{E}(Y) = -2\mathbb{E}X + 3$
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(-x\cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx) = \frac{1}{2}(\pi + \sin x|_0^{\pi}) = \frac{1}{2}\pi$
$\mathbb{E}(Y) = -\pi + 3$

b) $\mathrm{Var}\,Y = 4\,\mathrm{Var}\,X$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx - (\mathbb{E}(X))^2 = DZ = \frac{\pi^2}{2} - 2 - (\frac{1}{2}\pi)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$
$\mathrm{Var}(Y) = \pi^2 - 8$

□

Zadatak 5.29. Funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X dana je formulom:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ 0 & : x < 0, x > \sqrt{2} \end{cases}$$

a) Odredite F_X, $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

b) Neka je $Y = 2X + 1$. Nađite $\mathbb{E}(Y)$ i $\mathrm{Var}(Y)$.

Rješenje:

a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} & : 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ 1 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x = (\sqrt{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$Var(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2(\sqrt{2} - x)\mathrm{d}x - (\frac{\sqrt{2}}{3})2 = (\sqrt{2}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

b) $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + 1$

$\mathrm{Var}(Y) = 2^2\,\mathrm{Var}(X) = \dfrac{4}{9}$

□

5.4 Primjeri neprekidnih slučajnih varijabli

5.4.1 Normalna (Gaussova) slučajna varijabla

Normalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = \mathbb{R}$ i funkcijom gustoće

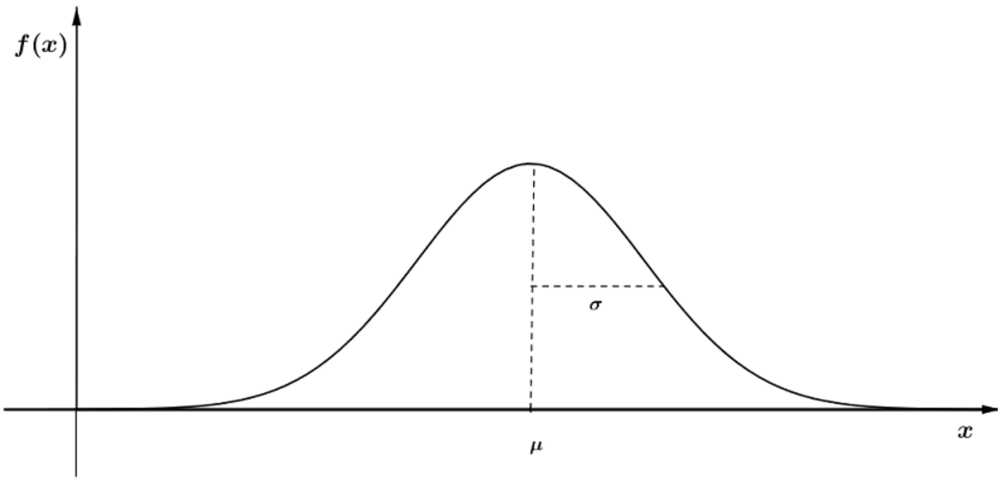
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, f je zvonolika, simetrična oko μ i repovi joj idu u $-\infty$ i $+\infty$. Uočimo i da je

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Parametar μ zovemo *parametrom lokacije*, a σ^2 zovemo *parametrom raspršenja*:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

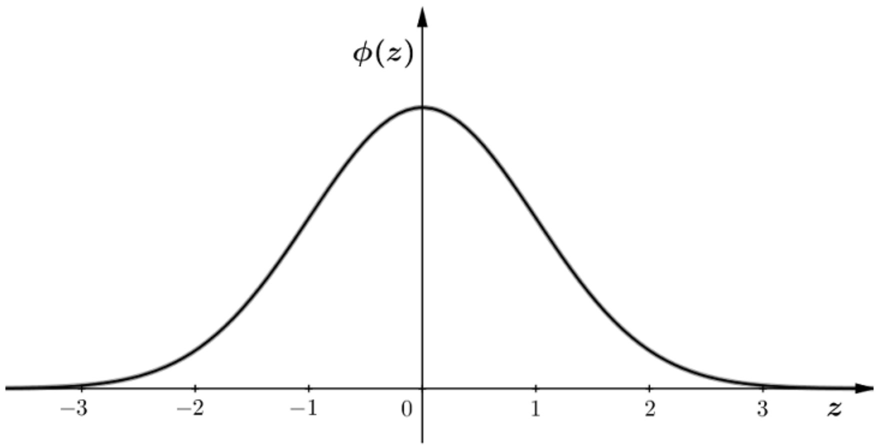


Funkcija distribucije od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je dana s

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Ovaj integral se ne da elementarno riješiti i zato su vrijednosti od F tabelirane. Međutim, bilo bi nepraktično tabelirati F za sve μ i σ, pa to činimo samo za jedan slučaj, za takozvanu jediničnu normalnu slučajnu varijablu, a ostale dobivamo iz ovog. Jedinična normalna slučajna varijabla je

$$Z \sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{i} \quad \Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(x)\, dx.$$



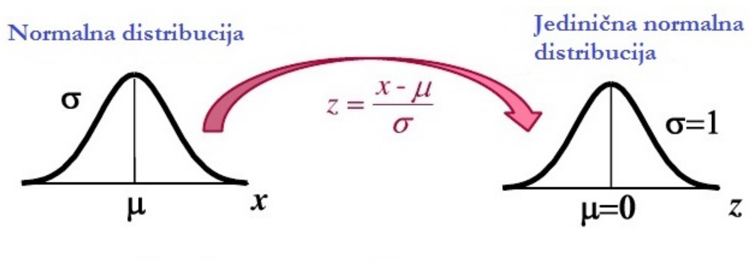
Vrijednosti na osi apscisa, u slučaju standardne normalne slučajne varijable, se označavaju sa z i izražavaju se u jedinicama standardnih devijacija. Na primjer, izraz $z = 2$ označava da je točka apscise udaljena za dvije standardne devijacije u desno.

Imajući tabeliranu $Z \sim N(0,1)$, slučajnu varijablu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dobijemo iz

$$X = \sigma Z + \mu.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} Z \sim N(0,1) &\implies \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2) \\ X \sim N(\mu, \sigma^2) &\implies \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

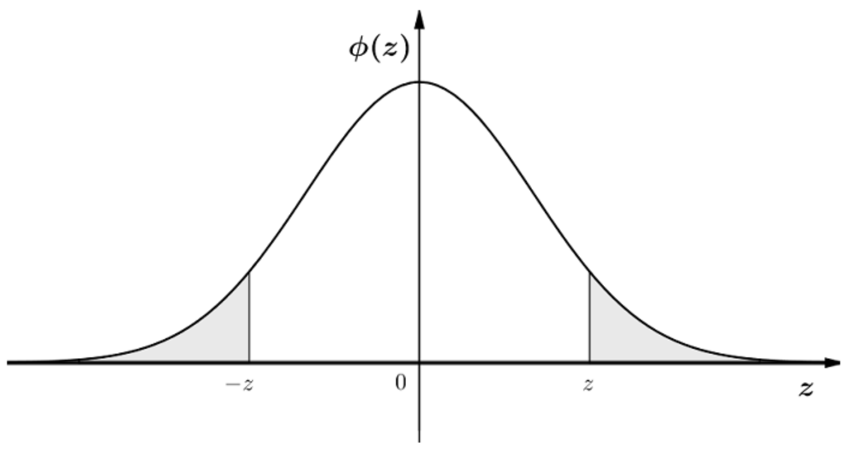


Sada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{x - \mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z \leqslant z) = \Phi(z),$$

gdje je $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ i $\Phi(z)$ iščitamo iz tablice. Uočimo još da je dovoljno tabelirati vrijednosti za $\Phi(z)$ samo za $z \geqslant 0$ jer vrijedi:

$$\Phi(-z) = \mathbb{P}(Z \leqslant -z) = \mathbb{P}(Z \geqslant z) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1 - \Phi(z).$$



Zadatak 5.30. Godišnja količina oborina u nekom mjestu izražena u l/m^2 je normalno distribuirana slučajna varijabla X s očekivanjem $\mu = 360 l/m^2$ i standardnom devijacijom $\sigma = 120 l/m^2$. Kolika je vjerojatnost da

a) neke godine količina oborina premaši $500 l/m^2$?

b) količina oborina bude između $300 l/m^2$ i $400 l/m^2$?

c) količina oborina bude manja od $200l/m^2$?

Rješenje: Znamo da je $X \sim N(360, 120^2)$ godišnja količina oborina u l/m^2.

a) Vjerojatnost da neke godine količina oborina premaši $500l/m^2$ iznosi: $\mathbb{P}(X > 500) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 500) = 1 - F(500) = 1 - \Phi(\frac{500-360}{120}) = 1 - \Phi(1.17) = 1 - 0.879 = 0.121$.

b) Vjerojatnost da količina oborina bude između $300l/m^2$ i $400l/m^2$ je jednaka:
$\mathbb{P}(300 \leqslant X \leqslant 400) = F(400) - F(300) = \Phi(\frac{400-360}{120}) - \Phi(\frac{300-360}{120}) = \Phi(0.33) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.33) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.6293 - 1 + 0.6915 = 0.3208$.

c) Vjerojatnost da količina oborina bude manja od $200l/m^2$ iznosi:
$\mathbb{P}(X < 200) = \Phi(\frac{200-360}{120}) = \Phi(-1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$.

$\square$

Zadatak 5.31. Visina učenika osmih razreda osnovne škole je normalno distribuirana slučajna varijabla s očekivanjem 175 cm i standardnom devijacijom od 8 cm. Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik niži od očekivane visine.

Rješenje: Vjerojatnost da je slučajno odabrani učenik niži od očekivane visine iznosi:
$\mathbb{P}(X < 175) = F(175) = \Phi(\frac{175-175}{8}) = \Phi(0) = 0.5$. $\square$

Zadatak 5.32. Instrumentom se mjeri određena veličina A, pri čemu je greška mjerenja slučajna varijabla X distribuirana po normalnoj razdiobi s očekivanjem $\mu = 0$ i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Kolika je vjerojatnost da

a) greška mjerenja ne premaši po apsolutnoj vrijednosti 6?

b) se pri mjerenju veličine A=60 pogriješi više od 10%?

Rješenje: Znamo da je $X \sim N(0, 25)$ greška kod mjerenja veličine A.

a) Vjerojatnost da greška mjerenja ne premaši po apsolutnoj vrijednosti 6 iznosi:
$\mathbb{P}(|X| \leqslant 6) = \mathbb{P}(-6 \leqslant X \leqslant 6) = F(6) - F(-6) = \Phi(\frac{6-0}{5}) - (1 - \Phi(\frac{6-0}{5})) = 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698.$

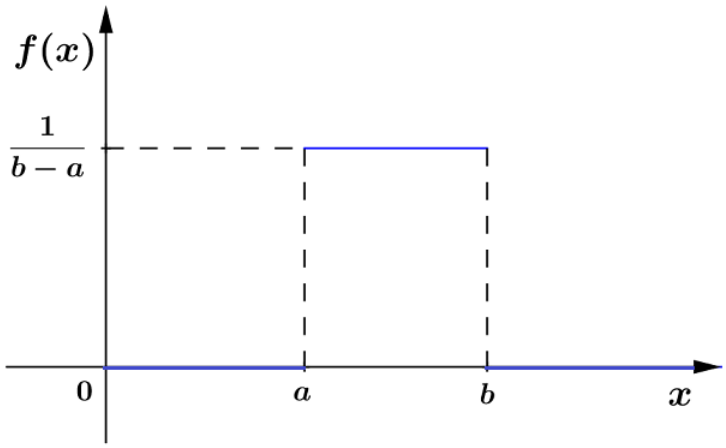
b) Budući da 10% od $A = 60$ iznosi 6, treba odrediti:
$\mathbb{P}(|X| > 6) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leqslant 6) = 1 - 0.7698 = 0.2302.$

$\square$

5.4.2 Uniformna slučajna varijabla

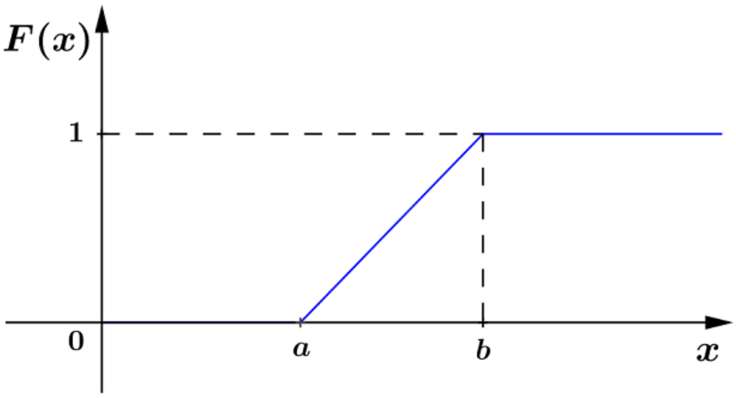
Uniformna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim U(a,b)$, je neprekidna slučajna varijabla za koju vrijedi $R(X) = [a,b]$ i

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Uočimo da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x > b \end{cases} .$$



Lako se vidi da vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Zadatak 5.33. Slučajna varijabla X distribuirana je uniformno na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = \sin X$

Rješenje:
Budući da sinus preslikava $[0, \frac{\pi}{2}]$ u segment $[0, 1]$, slika varijable Y je $R(Y) = [0, 1]$. Distribuciju od Y označimo s $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y)$. Očito je $F_Y(y) = 0$ za $y < 0$, te je $F_Y(y) = 1$ za $y \geqslant 1$.

Funkcija distribucije slučajne varijable X dana je s

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ \frac{2}{\pi}x & : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & : x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Za $y \in [0, 1]$ je $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sin X \leqslant y)$, što je (budući da je $X \in [0, \frac{\pi}{2}]$ te je sinus rastuća funkcija na tom intervalu), jednako $\mathbb{P}(X \leqslant \arcsin y) = F(\arcsin y) = \frac{2}{\pi} \arcsin y$. Dakle, funkcija distribucije slučajne varijable Y je dana s

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & : y < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y & : 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases}$$

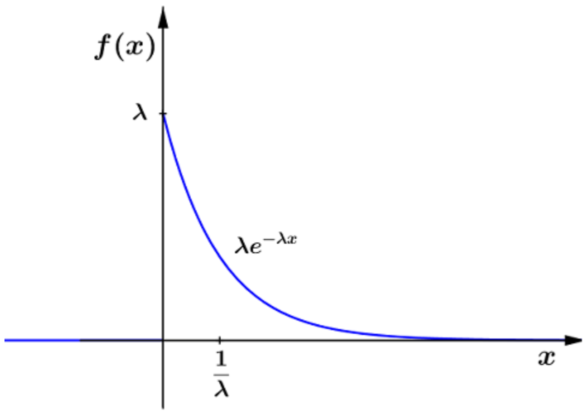
$\square$

5.4.3 Eksponencijalna slučajna varijabla

Eksponencijalna slučajna varijabla X, u oznaci $X \sim Exp(\lambda)$, je neprekidna slučajna varijabla dana s $R(X) = (0, \infty)$ i

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za parametar $\lambda > 0$.



Uočimo da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ova slučajna varijabla slična je po svome značenju Poissonovoj slučajnoj varijabli. Naime, Poissonova slučajna varijabla je brojala slučajne događaje, dok eksponencijalna mjeri vrijeme između dva slučajna događaja kao što su dolazak telefonskih poziva u centralu, dolazak mušterija u trgovinu i slično. Broj λ označava, slično kao i kod Poissonove slučajne varijable, prosječan broj pojavljivanja promatranog događaja u jedinici vremena.

Zadatak 5.34. Vijek trajanja žarulje je slučajna varijabla X distribuirana po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem $\mathbb{E}X = 2000$ sati. Kolika je vjerojatnost da će žarulja pregoriti:

a) u prvih tisuću sati rada?

b) u toku drugih tisuću sati rada?

c) nakon 5000 sati rada?

Rješenje: Budući da je $\mathbb{E}(X) = 2000 = \frac{1}{\lambda}$ imamo da je parametar eksponencijalne slučajne varijable X jednak $\lambda = \frac{1}{2000}$.
Stoga je funkcija distribucije od X oblika:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

a) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti u prvih tisuću sati rada iznosi:
$\mathbb{P}(X \leqslant 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935.$

b) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti u toku drugih tisuću sati rada je jednaka:
$\mathbb{P}(1000 < X \leqslant 2000) = F(2000) - F(1000) = 1 - e^{-\frac{1}{2000}\cdot 1000} - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 2000} = e^{-0.5} - e^{-1} = 0.2387.$

c) Vjerojatnost da će žarulja pregoriti nakon 5000 sati rada je:
$\mathbb{P}(X > 5000) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 5000) = 1 - F(5000) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{2000}\cdot 5000} = e^{-2.5} = 0.0821.$

$\square$

Zadatak 5.35. Službenik na šalteru posluži u prosjeku 30 stranaka na sat. Ako je vrijeme posluživanja eksponencijalna slučajna varijabla X, kolika je vjerojatnost da će iduća stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju)? Kolika je vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute?

Rješenje: Vjerojatnost da će stranka potrošiti više od 5 minuta na posluživanju (i čekanju) iznosi:
$\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = e^{-0.5\cdot 5} = 0.082,$
a vjerojatnost da će potrošiti manje od 2 minute je jednaka:
$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = F(2) = 1 - e^{-0.5\cdot 2} = 0.632.$ $\square$

5.5 Diskretni dvodimenzionalni slučajni vektori

Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije diskretne slučajne varijable. Funkciju $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, danu s $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ zovemo *dvodimenzionalni slučajni vektor*.
Ako je $R(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $R(Y) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, tada (X, Y) zapisujemo pomoću sheme:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ x_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix},$$

gdje je $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

Funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x, Y = y), & x \in R(X), y \in R(Y) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

zovemo *funkcija vjerojatnosti od* (X, Y). Vrijedi $p_{ij} = f(x_i, y_j)$.

Funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danu s

$$F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \in R(X) \\ x_i \leqslant x}} \sum_{\substack{y_j \in R(Y) \\ y_j \leqslant y}} f(x_i, y_j)$$

zovemo *funkcija distribucije od* (X, Y).

Marginalne funkcije vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) su funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dane s $f_1(x) = \sum\limits_{y \in R(Y)} f(x,y)$, $f_2(y) = \sum\limits_{x \in R(X)} f(x,y)$.
Marginalne funkcije vjerojatnosti su baš funkcije vjerojatnosti od slučajnih varijabli X i Y, tj. $f_1(x) = f_X(x)$, $f_2(y) = f_Y(y)$.

Kovarijanca od (X, Y) je broj μ_{xy} definiran s $\mu_{xy} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, gdje je

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x_i \in R(X)} \sum_{y_j \in R(Y)} x_i y_j f(x_i, y_j).$$

Koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y je broj $\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_1\sigma_2}$, gdje su $\sigma_1 = \sqrt{\operatorname{Var} X}$ i $\sigma_2 = \sqrt{\operatorname{Var} Y}$.

Slučajne varijable X i Y su *nezavisne* ako vrijedi

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \forall x \in R(X), \forall y \in R(Y).$$

Teorem. *Neka je (X,Y) dvodimenzionalni slučajni vektor i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada vrijedi* $\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum\limits_{x_i \in R(X)} \sum\limits_{y_j \in R(Y)} h(x_i,y_j)f(x_i,y_j)$.

Zadatak 5.36. Dvodimenzionalni slučajni vektor (X,Y) zadan je shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0.05 & 0.1 & 0.03 \\ -1 & 0.05 & 0.05 & 0.12 \\ 0 & 0.1 & 0.05 & 0.07 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0.06 \\ 2 & 0.05 & 0 & 0.03 \\ 3 & 0.05 & 0.05 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) marginalne funkcije vjerojatnosti, te očekivanja $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ i varijance $\operatorname{Var}(X), \operatorname{Var}(Y)$ komponenti slučajnog vektora,

b) vjerojatnost $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1)$.

Rješenje:

a) Neka je $f_1 \ldots$ funkcija vjerojatnosti od X:
   $f_1(-2) = 0.05 + 0.1 + 0.03 = 0.18$,
   $f_1(-1) = 0.05 + 0.05 + 0.12 = 0.22$,
   $f_1(0) = 0.1 + 0.05 + 0.07 = 0.22$,
   $f_1(1) = 0 + 0.1 + 0.06 = 0.16$,
   $f_1(2) = 0.05 + 0 + 0.03 = 0.08$ i
   $f_1(3) = 0.05 + 0.05 + 0.04 = 0.14$.
   Prema tome,

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.18 & 0.22 & 0.22 & 0.16 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix}.$$

Neka je $f_2 \ldots$ funkcija vjerojatnosti od Y:
$f_2(0) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 + 0.05 = 0.3$,
$f_2(1) = 0.1 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.05 = 0.35 \quad$ i
$f_2(2) = 0.03 + 0.12 + 0.07 + 0.06 + 0.03 + 0.04 = 0.35$.
Tada je

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

Odredimo očekivanja i varijance komponenti slučajnog vektora:

$$\mathbb{E}(X) = (-2)\cdot 0.18 - 1\cdot 0.22 + 0\cdot 0.22 + 1\cdot 0.16 + 2\cdot 0.08 + 3\cdot 0.14 = 0.16,$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0.03 + 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.35 = 0.35 + 0.7 = 1.05,$$

$\mathrm{Var}(X) = (-2)^2\cdot 0.18 + (-1)^2\cdot 0.22 + 1\cdot 0.16 + 2^2\cdot 0.08 + 3^2\cdot 0.14 - 0.16^2 = 2.68 - 0.16^2 = 2.6544 \quad$ i

$$\mathrm{Var}(Y) = 1^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.35 - 1.05^2 = 0.6475.$$

b) Tražena vjerojatnost iznosi:
$\mathbb{P}(|X| \leqslant 1, |Y| \leqslant 1) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0 + 0.1 = 0.35.$

$\square$

Zadatak 5.37. Bacamo dvije kocke. Definiramo slučajne varijable X="veći od brojeva koji su pali" i

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{ako je zbroj brojeva na na obje kocke paran} \\ 1, & \text{ako je zbroj brojeva na obje kocke neparan.} \end{cases}$$

a) Odredite kovarijancu μ_{xy} i koeficijent korelacije ρ_{xy} slučajnog vektora (X, Y).

b) Odredite vjerojatnosti $\mathbb{P}(3 < X \leqslant 6, Y = 1)$ i $\mathbb{P}(2 \leqslant X < 4, Y < 1)$.

c) Kolika je vrijednost funkcije distribucije slučajnog vektora $F(3, 1)$ u točki $(3, 1)$?

d) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno zavisne?

e) Odredite očekivanje kompozicije $\mathbb{E}(X \cdot Y^{17})$.

Rješenje:

a) Znamo da su slike slučajnih varijabli X i Y sljedeći skupovi: $R(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $R(Y) = \{0, 1\}$.

Funkcija vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y), te marginalne funkcije vjerojantosti varijabli X i Y dane su shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & \frac{1}{36} & 0 & \frac{1}{36} \\ 2 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} \\ 3 & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{5}{36} \\ 4 & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{7}{36} \\ 5 & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{9}{36} \\ 6 & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{11}{36} \\ f_2(y) & \frac{18}{36} & \frac{18}{36} & 1 \end{pmatrix}.$$

Kovarijanca μ_{XY} je definirana relacijom $\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Stoga računamo sljedeća očekivanja:

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=0}^{1} i \cdot j \cdot f(i,j) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot 1\frac{4}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{6}{36} = \frac{82}{36} = 2.2778,$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot f_1(i) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.4722 \quad \text{i}$$

$$E(Y) = \sum_{j=0}^{1} j \cdot f_2(j) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5.$$

Dakle, kovarijanca iznosi:

$$\mu_{XY} = 2.27 - 4.472 \cdot 0.5 = 0.0416.$$

Koeficijent korelacije ρ_{XY} se računa po formuli $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_1\sigma_2}$, gdje je $\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ i $\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$.

Odredimo standardne devijacije σ_1 i σ_2:

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1^2 \cdot \dfrac{1}{36} + 2^2 \cdot \dfrac{3}{36} + 3^2 \cdot \dfrac{5}{36} + 4^2 \cdot \dfrac{7}{36} + 5^2 \cdot \dfrac{9}{36} + 6^2 \cdot \dfrac{11}{36} - 4.472^2 = 1.9715,$

$\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1.4041,$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} - 0.5^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$ i

$\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 0.5.$

Prema tome, koeficijent korelacije iznosi:

$$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{0.0416}{1.4041 \cdot 0.5} = 0.0594.$$

b) Tražene vjerojatnosti su jednake:
$\mathbb{P}(3 < X \leqslant 6, Y = 1) = \dfrac{4}{36} + \dfrac{4}{36} + \dfrac{6}{36} = \dfrac{14}{36}$ i
$\mathbb{P}(2 \leqslant X < 4, Y < 1) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{4}{36}.$

c) Vrijednost funkcije distribucije u zadanoj točki iznosi:
$F(3,1) = f(1,0) + f(2,0) + f(3,0) + f(1,1) + f(2,1) + f(3,1) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{3}{36} + 0 + \dfrac{2}{36} + \dfrac{2}{36} = \dfrac{9}{36}.$

d) Budući da je $f(1,1) = 0$ i $f_1(1) = \frac{1}{36}$, $f_2(1) = \frac{18}{36}$, slučajne varijable X i Y su zavisne.

e) Očekivanje kompozicije iznosi:
$\mathbb{E}(XY^{17}) = 1 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 0^{17} \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 5 \cdot 1^{17} \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot 1^{17} \cdot \frac{6}{36} = 2.27.$

□

Zadatak 5.38. Promatramo slučajan pokus bacanja 2 igraće kocke i slučajnu varijablu X="suma brojeva koji su pali", te varijablu Y="broj 1 ako su pali jednaki brojevi, 0 inače". Nađite funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y). Odredite vjerojatnost $\mathbb{P}(3 < X \leqslant 6, Y = 1)$ i vrijednost $F(8, 1)$ funkcije distribucije slučajnog vektora. Ispitajte jesu li varijable X i Y nezavisne.

Rješenje: Funkcija vjerojatnosti slučajnog vektora (X, Y) ima oblik:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{36} \\ 3 & \frac{2}{36} & 0 \\ 4 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 5 & \frac{4}{36} & 0 \\ 6 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 7 & \frac{6}{36} & 0 \\ 8 & \frac{4}{36} & \frac{1}{36} \\ 9 & \frac{4}{36} & 0 \\ 10 & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \\ 11 & \frac{2}{36} & 0 \\ 12 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Tražena vjerojatnost iznosi:

$$\mathbb{P}(3 < X \leqslant 6, Y = 1) = f(4,1) + f(5,1) + f(6,1) = \frac{1}{36} + 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{18},$$

dok je vrijednost funkcije distribucije jednaka:

$$F(8,1) = f(2,0) + f(3,0) + f(4,0) + \cdots + f(7,1) + f(8,1) = \frac{13}{18}.$$

Varijable X i Y nisu nezavisne jer je $f(6,1) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = f_1(6) \cdot f_2(1)$. □

Zadatak 5.39. Neka je (X, Y) slučajni vektor iz prethodnog zadatka i neka je $h(x, y) = x \cdot y$. Odredite očekivanje kompozicije $\mathbb{E}(h(X, Y))$.

Rješenje: Traženo očekivanje iznosi:
$\mathbb{E}(h(X,Y)) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j f(x_i, y_j) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 12 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{6}.$ □

Zadatak 5.40. Ispitajte jesu li komponente X i Y slučajnog vektora

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 \\ 1 & 0.16 & 0.24 \\ 2 & 0.24 & 0.36 \end{pmatrix}$$

nezavisne?

Rješenje: Dopunimo funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora vrijednostima marginalnih funkcija vjerojatnosti

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 0 & 1 & f_1(x) \\ 1 & 0.16 & 0.24 & 0.4 \\ 2 & 0.24 & 0.36 & 0.6 \\ f_2(y) & 0.4 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Provjerimo nezavisnost komponenti slučajnog vektora:
$f(1,0) = 0.16 = 0.4 \cdot 0.4 = f_1(1) \cdot f_2(0)$,
$f(1,1) = 0.24 = 0.4 \cdot 0.6 = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(2,0) = 0.24 = 0.6 \cdot 0.4 = f_1(2) \cdot f_2(0)$,
$f(2,1) = 0.36 = 0.6 \cdot 0.6 = f_1(2) \cdot f_2(1)$.
Da, X i Y su nezavisne. □

Zadatak 5.41. Bacamo igraću kocku i promatramo slučajne varijable

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ako je pao neparan broj} \\ 1, & \text{ako je pao paran broj} \end{cases}$$

i

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ako je pao broj manji od tri} \\ 2, & \text{ako je pao broj veći ili jednak tri.} \end{cases}$$

a) Odredite funkciju vjerojatnosti i marginalne funkcije vjerojatnosti vektora (X,Y).

b) Izračunajte kovarijancu μ_{XY} i koeficijent korelacije ρ_{XY}.

c) Jesu li slučajne varijable X i Y međusobno nezavisne?

Rješenje:

a) Funkcija vjerojatnosti i marginalne funkcije vjerojatnosti su dane sljedećom shemom:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & f_1(x) \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ f_2(y) & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Da bismo odredili kovarijancu najprije moramo izračunati sljedeća očekivanja:
$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ i
$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.
Kovarijanca iznosi:
$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = 0$,
a koeficijent korelacije je jednak:
$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = 0$.

c) Provjeravamo nezavisnost komponenti slučajnog vektora:
$f(0,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(0) \cdot f_2(1)$,
$f(0,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(0) \cdot f_2(2)$,
$f(1,1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(1) \cdot f_2(1)$,
$f(1,2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = f_1(1) \cdot f_2(2)$.
Da, X i Y su nezavisne.

$\square$

Zadatak 5.42. Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom vjerojatnosti

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite:

a) kovarijancu i koeficijent korelacije,

b) vrijednosti $\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leqslant 3)$, $F(1,2)$, $\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1, 2 \leqslant Y \leqslant 3)$ i $F(0,3)$,

c) očekivanje $\mathbb{E}(XY^2)$.

Rješenje:

a) Funkciju vjerojatnosti slučajnog vektora dopunjavamo vrijednostima marginalnih funkcija vjerojatnosti:

$$(X,Y) \sim \begin{pmatrix} X\backslash Y & 1 & 2 & 3 & f_1(x) \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ f_2(y) & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Određujemo očekivanja potrebna za računanje kovarijance:
$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0. = 0.4$,
$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 = 2.1$ i
$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 3 \cdot 0.3 + 1 \cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3 \cdot 0.1 = 0.7$.
Kovarijanca iznosi:
$\mu_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.7 - 0.84 = -0.14$.
Odredimo varijance i standardne devijacije komponenti slučajnog vektora:
$\mathrm{Var}(X) = 0.4 - 0.4^2 = 0.24$,
$\mathrm{Var}(Y) = 0.3 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 - 2.1^2 = 5.1 - 4.41 = 0.69$,
$\sigma_1 = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0.4899$ i
$\sigma_2 = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = 0.8307$.
Prema tome, koeficijent korelacije je jednak:
$\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{-0.14}{0.4899 \cdot 0.8307} = -0.344$.

b) Tražene vrijednosti iznose:
$\mathbb{P}(X = 0, 1 < Y \leqslant 3) = 0.2 + 0.3 = 0.5$,
$F(1, 2) = 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.6$,
$\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1, 2 \leqslant Y \leqslant 3) = 0.2 + 0.3 + 0.1 + 0.1 = 0.7$ i
$F(0, 3) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$.

c) Očekivanje kompozicije je jednako:
$\mathbb{E}(XY^2) = 0 \cdot 1^2 \cdot 0.1 + 0 \cdot 2^2 \cdot 0.2 + 0 \cdot 3^2 \cdot 0.3 + 1 \cdot 1^2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 2^2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3^2 \cdot 0.1 = 1.5$.

$\square$

Poglavlje 6

Statistika

6.1 Deskriptivna statistika

Uzoračka aritmetička sredina:

- negrupirani podaci : $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- grupirani podaci (ako se medu brojevima $x_1, \ldots, x_n$ pojavljuju brojevi $a_1, ..., a_k$, $k < n$, s frekvencijama $f_1, ..., f_k$): $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i f_i$,
- podaci grupirani u razrede: $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i} f_i$ pri čemu s x_{sr_i} označavamo sredine razreda, k je broj razreda te vrijedi $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$

Uzoračka varijanca:

- negrupirani podaci: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}_n^2)$
- grupirani podaci: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$
- podaci grupirani u razrede: $s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i}^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$

Uzoračka standardna devijacija: $s_n = \sqrt{s_n^2}$

Koeficijent varijacije: $K_V = \frac{s_n}{\overline{x}_n}$

Koeficijent asimetrije:

- negrupirani podaci: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$
- grupirani podaci: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(a_i - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$
- podaci grupirani u razrede: $K_A = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$

Koeficijent spljoštenosti:

- negrupirani podaci: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$
- grupirani podaci: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(a_i - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$
- podaci grupirani u razrede: $K_E = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3$

6.1.1 Diskretna statistička razdioba

Zadatak 6.1. Promatramo broj putnika koji čekaju autobus na nekoj autobusnoj stanici. U 50 promatranja, dobiveni su sljedeći rezultati o broju putnika na stanici:
$0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7.$

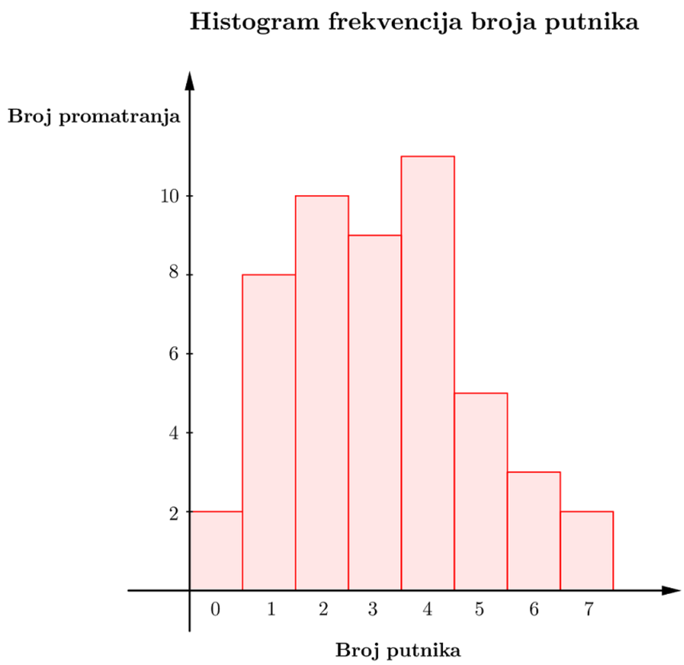
Grupirajte podatke u tabelu frekvencija te odredite relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije broja putnika. Nacrtajte histogram i poligon apsolutnih frekvencija. Izračunajte uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku varijancu (standardnu devijaciju).

Rješenje:

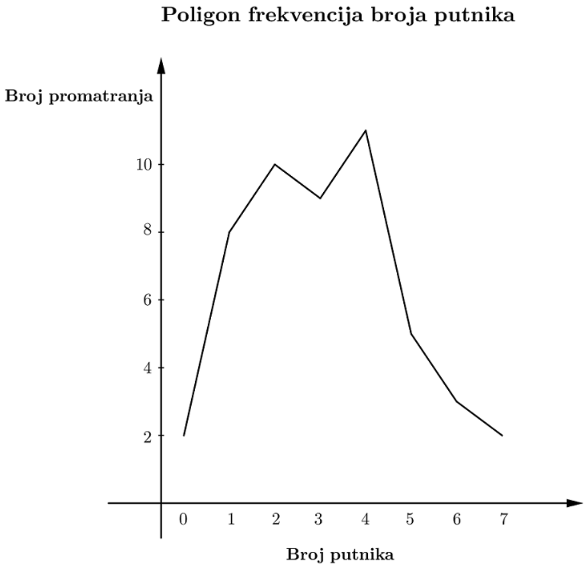
Grupirajmo podatke u tablicu frekvencija te izračunajmo relativne i kumulativne relativne frekvencije:

a_i (broj putnika)	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i (broj promatranja)	2	8	10	9	11	5	3	2
$\frac{f_i}{n}$ (relativne frekvencije)	$\frac{2}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$
$F_n(x_i)$ (kumulativne relativne frekvencije)	$\frac{2}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{29}{50}$	$\frac{40}{50}$	$\frac{45}{50}$	$\frac{48}{50}$	$\frac{50}{50}$

Tablica 6.1: Tablica frekvencija, relativnih frekvencija i kumulativnih relativnih frekvencija broja putnika iz Zadatka 6.1



Slika 6.1: Histogram frekvencija iz Tablice 6.1.1



Slika 6.2: Poligon frekvencija iz Tablice 6.1.1

Uzoračka aritmetička sredina:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i f_i$$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{50} &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{8} a_i f_i \\
&= \frac{1}{50}(0\cdot 2 + 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 9 + 4\cdot 11 + 5\cdot 5 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2) \\
&= 3.12
\end{aligned}$$

Uzoračka varijanca:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 f_i - n\overline{x}_n^2)$$

$$\begin{aligned}
s_{50}^2 &= \frac{1}{49}(\sum_{i=1}^{8} a_i^2 f_i - 50\overline{x}_{50}^2) \\
&= \frac{1}{49}(0^2\cdot 2 + 1^2\cdot 8 + 2^2\cdot 10 + \cdots + 7^2\cdot 2 - 50\cdot 3.12^2) \\
&= 3.0465
\end{aligned}$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_n = \sqrt{s_n^2}$$

$s_{50} = \sqrt{s_{50}^2} = \sqrt{3.0465} = 1.7454$

$\square$

Mod - najčešći podatak (tj. podatak s najvećom frekvencijom)

Medijan:

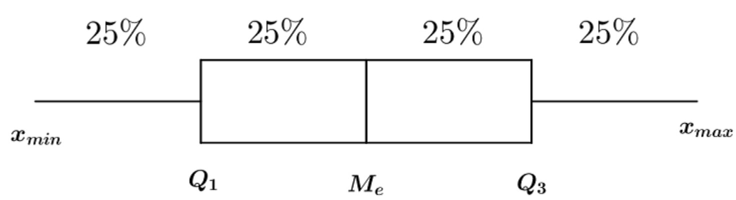
$$M_e = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor}, & \frac{n}{2} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \frac{n}{2} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$

Prvi kvartil:

$$Q_1 = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor}, & \frac{n}{4} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2}, & \frac{n}{4} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$

Treći kvartil:

$$Q_3 = \begin{cases} x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor}, & \frac{3n}{4} \text{ nije prirodan broj} \\ \dfrac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2}, & \frac{3n}{4} \text{ je prirodan broj.} \end{cases}$$



Slika 6.3: Medijan i kvartili

Zadatak 6.2. Odredite 1. kvartil, medijan, 3. kvartil i uzoračku aritmetičku sredinu za zadane nizove statističkih podataka:

a) 1, 1, 7, 5, 5, 4, 5, 2;

b) 2, 5, 1, 3, 7.

Za koji od navedenih slučajeva se može na jedinstven način odrediti mod? Odredite ga.

Rješenje:

a) Poredajmo podatke po veličini:
1, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 7,
te izračunajmo njihovu aritmetičku sredinu:

$$\overline{x}_8 = \frac{1}{8}(2 \cdot 1 + 2 + 4 + 3 \cdot 5 + 7) = \frac{30}{8} = 3.75.$$

Budući da je $n = 8$ paran i djeljiv s 4, računamo:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5,$$

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{4+5}{2} = 4.5 \quad \text{i}$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{5+5}{2} = 5.$$

b) Ponovno, poredajmo podatke po veličini:
1, 2, 3, 5, 7
i odredimo uzoračku aritmetičku sredinu:

$$\overline{x}_5 = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 5 + 7) = \frac{18}{5} = 3.6.$$

Budući da $\frac{n}{2} = \frac{5}{2}$, $\frac{n}{4} = \frac{5}{4}$ i $\frac{3n}{4} = \frac{15}{4}$ nisu prirodni brojevi, računamo:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 2,$$

$$M_e = x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor} = x_3 = 3 \quad \text{i}$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_4 = 5.$$

Mod se može na jednoznačan način odrediti za slučaj a) i iznosi $M_0 = 5$. $\square$

Zadatak 6.3. Odredite mod te medijan i kvartile zadanih statističkih podataka:

a) $\begin{array}{c|c|c|c} a_i & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 3 & 2 & 2 \end{array}$;

b) $\begin{array}{c|c|c|c} a_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 2 & 4 & 2 \end{array}$.

Rješenje:

a) Podatke iz tablice prikažemo u obliku niza:
2, 2, 2, 3, 3, 4, 4.

Očito da je $M_0 = 2$.

Budući da $\frac{n}{2} = \frac{7}{2}$, $\frac{n}{4} = \frac{7}{4}$ i $\frac{3n}{4} = \frac{21}{4}$ nisu prirodni brojevi, računamo:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 2,$$

$$M_e = x_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor} = x_4 = 3 \quad \text{i}$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_6 = 4.$$

b) Podatke iz tablice prikažemo u obliku niza:
1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3.

Jasno je da mod iznosi $M_0 = 2$.

Broj $n = 8$ je dijeljiv s 2 i 4, pa računamo:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5,$$

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \quad \text{i}$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5.$$

□

Zadatak 6.4. Odredite mod, 1. kvartil, medijan i 3. kvartil, te uzoračku varijancu i uzoračku standardnu devijaciju statističkih podataka:

a)

a_i	0	1	3	4
f_i	3	2	2	1

;

b) 1, -1, 7, 2, 5, 1.

Rješenje:

a) Posložimo podatke iz tablice u niz:
0, 0, 0, 1, 1, 3, 3, 4.

Vidimo da je $M_0 = 0$.

Budući da je $n = 8$ paran i dijeljiv s 4, računamo:

$$Q_1 = \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{0+0}{2} = 0,$$

$$\mathrm{M_e} = \frac{\mathrm{x}_{\frac{n}{2}} + \mathrm{x}_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{\mathrm{x}_4 + \mathrm{x}_5}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad \text{i}$$

$$Q_3 = \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{3+3}{2} = 3.$$

Odredimo uzoračku aritmetičku sredinu:

$\overline{x}_8 = \frac{1}{8}(0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = \frac{12}{8} = 1.5.$

Uzoračka varijance je jednaka:

$s_8^2 = \frac{1}{7}(0^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1 - 8 \cdot 1.5^2) = 2.5714,$

dok uzoračka standardna devijacija iznosi:

$s_8 = \sqrt{2.57} = 1.6036.$

b) Posložimo podatke po veličini:
-1, 1, 1, 2, 5, 7.

Vidimo da je $M_0 = 1$.

Budući da je $n = 6$ paran i nije djeljiv s 4, računamo:

$$Q_1 = x_{\lfloor \frac{n}{4}+1 \rfloor} = x_2 = 1,$$

$$\mathrm{M_e} = \frac{\mathrm{x}_{\frac{n}{2}} + \mathrm{x}_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \quad \mathrm{i}$$

$$Q_3 = x_{\lfloor \frac{3n}{4}+1 \rfloor} = x_5 = 5.$$

Uzoračka aritmetička sredina iznosi:

$\overline{x}_6 = \frac{1}{6}(1 - 1 + 7 + 2 + 5 + 1) = \frac{15}{6} = 2.5.$

Uzoračka varijanca je jednaka:

$s_6^2 = \frac{1}{5}(1^2 + (-1)^2 + 7^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2 - 6 \cdot 2.5^2) = 8.7.$

Uzoračka standardna devijacija iznosi:

$s_6 = \sqrt{8.7} = 2.9496.$

$\square$

6.1.2 Neprekidna statistička razdioba

Zadatak 6.5. Ispitujemo skup od 200 žarulja tako da sve žarulje istovremeno upalimo i mjerimo vrijeme neprekidnog rada žarulje do pregaranja. Dobiveni su rezultati mjerenja:

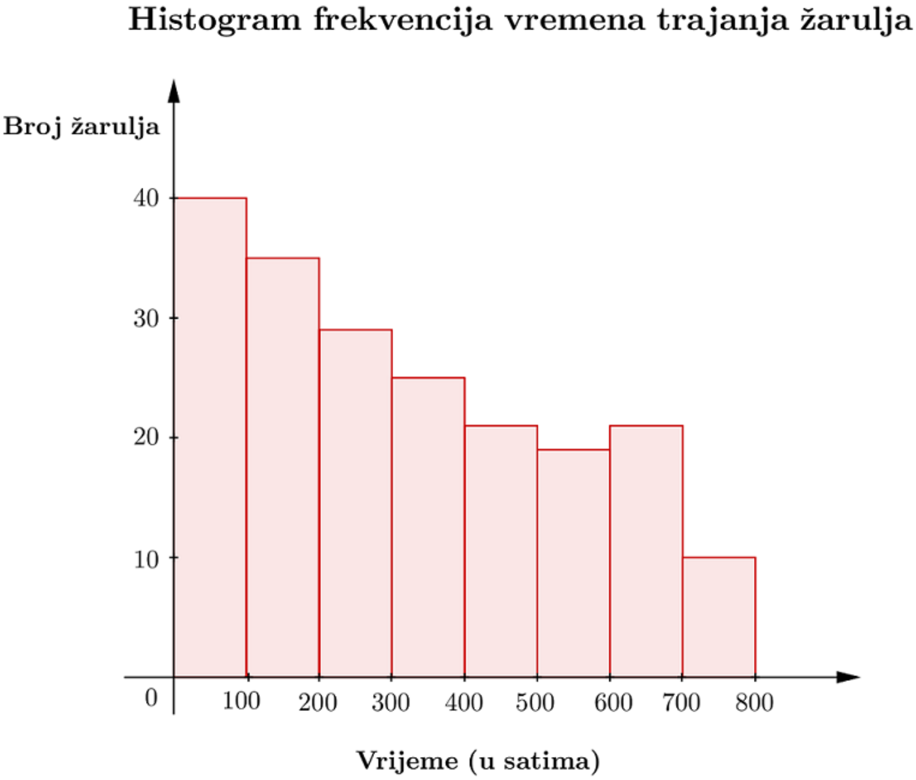
x_i (vrijeme u satima)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
f_i (broj žarulja)	40	35	29	25	21	19	21	10

Odredite relativne frekvencije i kumulativne relativne frekvencije, te nacrtajte histogram relativnih (apsolutnih frekvencija). Izračunajte uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku varijancu (standardnu devijaciju) danih podataka.

Rješenje:

x_i (vrijeme u satima)	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
f_i (broj žarulja)	40	35	29	25	21	19	21	10
$\frac{f_i}{n}$ (relativne frekvencije)	0.2	0.175	0.145	0.125	0.105	0.095	0.105	0.05
$F_n(x_i)$ (kumulativne relativne frekvencije)	0.2	0.375	0.52	0.645	0.75	0.845	0.95	1

Tablica 6.2: Tabela frekvencija, relativnih frekvencija i kumulativnih relativnih frekvencija iz Zadatka 6.5



Slika 6.4: Histogram apsolutnih frekvencija podataka iz Zadatka 6.5

Uzoračka aritmetička sredina se računa po formuli:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i} f_i$$

i stoga je

$$\begin{aligned}\overline{x}_{200} &= \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{8} x_{sr_i} f_i \\ &= \frac{1}{200}(50\cdot 40 + 150\cdot 35 + 250\cdot 29 + 350\cdot 25 + 450\cdot 21 + 550\cdot 19 + 650\cdot 21 + 750\cdot 10) \\ &= 321.5.\end{aligned}$$

Uzoračka varijanca se računa po formuli:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{k} x_{sr_i}^2 f_i - n\overline{x}_n^2),$$

tako da je

$$\begin{aligned}
s_{200}^2 &= \frac{1}{199}(\sum_{i=1}^{8} x_{sr_i}^2 f_i - 200 \cdot \overline{x}_{200}^2) \\
&= \frac{1}{199}(50^2 \cdot 40 + 150^2 \cdot 35 + 250^2 \cdot 29 + \cdots + 750^2 \cdot 10 - 200 \cdot 321.5^2) \\
&= 48178.64.
\end{aligned}$$

Uzoračka standardna devijacija se računa po formuli:

$$s_n = \sqrt{s_n^2},$$

pa je

$$s_{200} = \sqrt{s_{200}^2} = 219.4963.$$

□

Zadatak 6.6. Dani su podaci o tlačnoj čvrstoći 80 aluminij - litij legura:

tlačna čvrstoća	broj legura
70-90	2
90-110	3
110-130	6
130-150	14
150-170	22
170-190	17
190-210	10
210-230	4
230-250	2

a) Izračunajte uzoračku varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije K_V.

b) Nađite koeficijent asimetrije K_A i koeficijent spljoštenosti K_E (eksces) distribucije. Nacrtajte histogram tlačne čvrstoće legura.

Rješenje:

a) Aritmetička sredina:

$$\overline{x}_{80} = \frac{1}{80}(80 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + \cdots + 240 \cdot 2) = 163.5$$

Uzoračka varijanca:

$$s_{80}^2 = \frac{1}{79}(80^2 \cdot 2 + 100^2 \cdot 3 + \cdots + 240^2 \cdot 2 - 80 \cdot 163.5^2) = 1111.6456$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_{80} = \sqrt{s_{80}^2} = \sqrt{1111.6456} = 33.3413$$

Koeficijent varijacije:

$$K_V = \frac{s_{80}}{\overline{x}_{80}} = \frac{33.3413}{163.5} = 0.2039$$

b) Koeficijent asimetrije se računa po formuli:

$$K_A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^3}{s_n^3}$$

i stoga je

$$\begin{aligned} K_A &= \frac{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{9} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_{80})^3}{s_{80}^3} \\ &= \frac{\frac{1}{80}(2 \cdot (80 - 163.5)^3 + 3 \cdot (100 - 163.5)^3 + \cdots + 2 \cdot (240 - 163.5)^3)}{33.3413^3} \\ &= \frac{-5369.25}{33.3413^3} = -0.1448. \end{aligned}$$

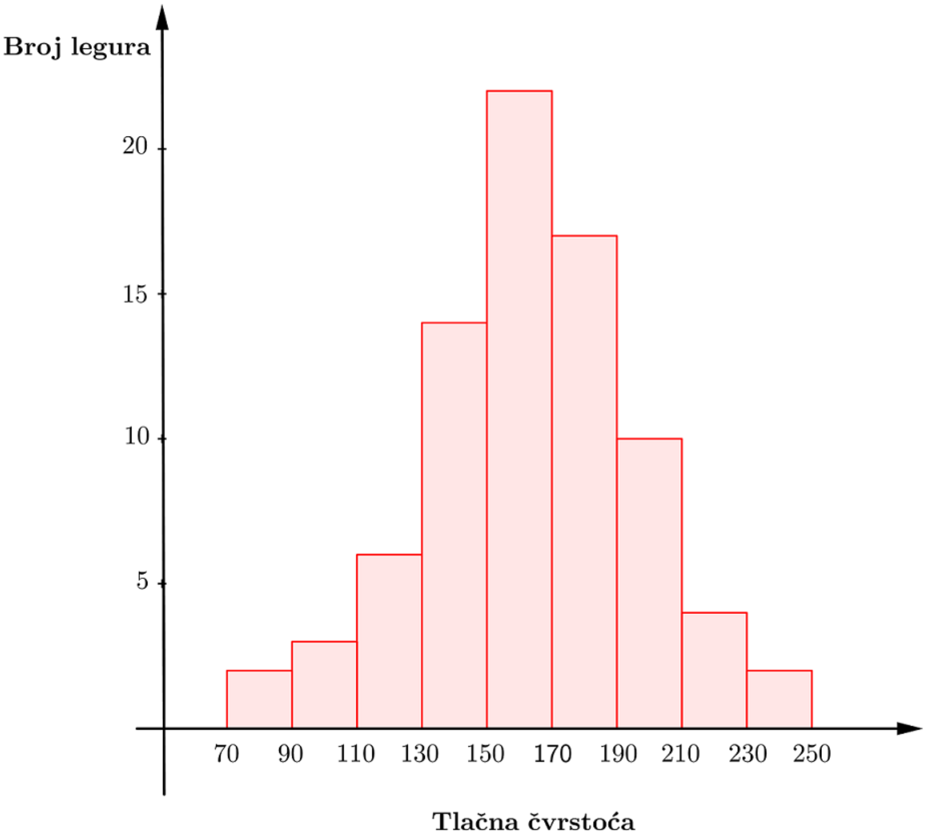
Koeficijent spljoštenosti se računa po formuli:

$$K_E = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_n)^4}{s_n^4} - 3.$$

Prema tome,

$$
\begin{aligned}
K_E &= \frac{\frac{1}{80}\sum_{i=1}^{9} f_i(x_{sr_i} - \overline{x}_{80})^4}{s_{80}^4} - 3 \\
&= \frac{\frac{1}{80}(2\cdot(80-163.5)^4 + 3\cdot(100-163.5)^4 + \cdots + 2\cdot(240-163.5)^4)}{33.3413^4} - 3 \\
&= \frac{3750334.813}{33.3413^4} - 3 = 0.0349.
\end{aligned}
$$

Histogram frekvencija tlačne čvrstoće aluminij - litij legura



Slika 6.5: Histogram frekvencija podataka iz Zadatka 6.6

□

Zadatak 6.7. Mjerenjem tjelesne težine na 100 učenica osmih razreda neke osnovne škole dobiveni su podaci:

razredi	x_{sr_i}	f_i	$F_n(x_i)$
60 - 63	61.5	5	5
63 - 66	64.5	18	23
66 - 69	67.5	42	65
69 - 72	70.5	27	92
72 - 75	73.5	8	100

a) Izračunajte uzoračku varijancu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije K_V.

b) Nađite koeficijent asimetrije K_A i koeficijent spljoštenosti K_E (eksces), te prikažite distribuciju podataka grafički.

Rješenje:

a) Aritmetička sredina:

$$\overline{x}_{100} = \frac{1}{100}(61.5 \cdot 5 + 64.5 \cdot 18 + 67.5 \cdot 42 + 70.5 \cdot 27 + 73.5 \cdot 8) = 67.95$$

Uzoračka varijanca:

$$s_{100}^2 = \frac{1}{99}(61.5^2 \cdot 5 + 64.5^2 \cdot 18 + 67.5^2 \cdot 42 + 70.5^2 \cdot 27 + 73.5^2 \cdot 8 - 100 \cdot 67.95^2) = 8.5275$$

Uzoračka standardna devijacija:

$$s_{100} = \sqrt{s_{100}^2} = \sqrt{8.5275} = 2.9202$$

Koeficijent varijacije:

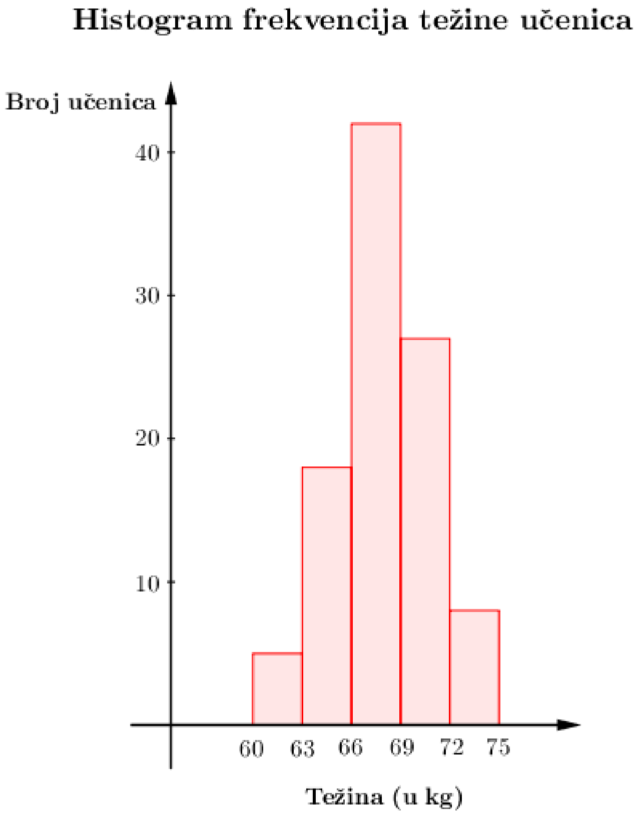
$$K_V = \frac{s_{100}}{\overline{x}_{100}} = \frac{2.9202}{67.95} = 0.0430$$

b) Koeficijent asimetrije:

$$
\begin{aligned}
K_A &= \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} f_i(x_{sr_i}-\overline{x}_{100})^3}{s_{100}^3} \\
&= \frac{\frac{1}{100}(5\cdot(61.5-67.95)^3+18\cdot(64.5-67.95)^3+\cdots+8\cdot(73.5-67.95)^3)}{2.9202^3} \\
&= \frac{-2.6549775}{2.9202^3} = -0.1066
\end{aligned}
$$

Koeficijent spljoštenosti:

$$
\begin{aligned}
K_E &= \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} f_i(x_{sr_i}-\overline{x})^4}{s_{100}^4} - 3 \\
&= \frac{\frac{1}{100}(5\cdot(61.5-67.95)^4+18\cdot(64.5-67.95)^4+\cdots+8\cdot(73.5-67.95)^4)}{2.9202^4} - 3 \\
&= \frac{199.3587086}{2.9202^4} - 3 = -0.2585
\end{aligned}
$$



Slika 6.6: Histogram apsolutnih frekvencija iz Zadatka 6.7

□

6.2 Intervali povjerenja i testiranja za očekivanje

Neki od zadataka iz ovog poglavlja su riješeni pomoću EXCELLa. Rješenja se nalaze u datotekama INTERVALI i TESTOVI na stranicama predmeta VJEROJATNOST I STATISTIKA.

6.2.1 Intervali povjerenja za očekivanje normalne razdiobe

Razlikujemo dva osnovna slučaja:

- poznata varijanca populacije σ^2:

$$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- nepoznata varijanca populacije σ^2:
  - veliki uzorak ($n \geqslant 30$):

$$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$$

  - mali uzorak ($n < 30$):

$$(\overline{x}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$$

Zadatak 6.8. Uzorak od 2000 mjerenja slučajne varijable X s varijancom $\sigma^2 = 20$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x}_{2000} = 150$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.95$.

Rješenje: Poznati su sljedeći podaci:
$n = 2000, \overline{x}_{2000} = 150$, $\sigma^2_{2000} = 20$ i $\alpha = 0.05$.

Standardna devijacija populacije je poznata, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Kvantil standardne normalne slučajne varijable iznosi:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.

Interval povjerenja je:
$(150 - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2000}}, 150 + 1.96 \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2000}}) = (149.804, 150.196).$ $\square$

Zadatak 6.9. Poznato je da slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa standardnom devijacijom $\sigma = 4$. Na uzorku veličine $n = 18$ izračunata je aritmetička sredina $\overline{x}_n = 7$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.99$.

Rješenje: Zadano je:
$n = 18, \overline{x}_{18} = 7$, $\sigma = 4$ i $\alpha = 0.01$.

Standardna devijacija populacije je poznata, interval za očekivanje je dan formulom:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}).$

Kvantil standardne normalne slučajne varijable iznosi:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.01}{2}} = z_{0.995} = 2.58.$

Interval povjerenja je:
$(7 - 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{18}}, 7 + 2.58 \cdot \frac{4}{\sqrt{18}}) = (4.5676, 9.4324).$ $\square$

Zadatak 6.10. Normalno distribuirana slučajna varijabla X ima nepoznato očekivanje. Uzet je uzorak veličine $n = 20$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x}_{20} = 1001.62$ i vrijednost uzoračke varijance $s^2_{20} = 92.66$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.99$.

Rješenje: Zadani su sljedeći podaci:
$n = 20, \overline{x}_{20} = 1001.62$, $s^2_{20} = 92.66$ i $\alpha = 0.01$.

Standardna devijacija σ je nepoznata, uzorak je mali, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x}_n - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}).$

Kvantil Studentove (t) razdiobe s $n - 1$ stupnjeva slobode iznosi:
$t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(19)}_{1-\frac{0.01}{2}} = t^{(19)}_{0.995} = 2.86.$

Interval povjerenja je:
$(1001.62 - 2.86 \cdot \frac{\sqrt{92.66}}{\sqrt{20}}, 1001.62 + 2.86 \cdot \frac{\sqrt{92.66}}{\sqrt{20}}) = (995.46, 1007.78).$ $\square$

Zadatak 6.11. Normalno distribuirana slučajna varijabla X ima nepoznato očekivanje. Uzet je uzorak veličine $n = 15$ i dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x}_{15} = 30$ i vrijednost uzoračke varijance $s_{15}^2 = 9$. Odredite interval povjerenja za očekivanje uz pouzdanost od $1 - \alpha = 0.9$.

Rješenje: Zadani su sljedeći podaci:
$n = 15, \overline{x}_{15} = 30,\ s_{15}^2 = 9$ i $\alpha = 0.1$.

Standardna devijacija σ je nepoznata, uzorak je mali, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$.

Kvantil Studentove (t) razdiobe s $n-1$ stupnjeva slobode iznosi:
$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} = t_{1-\frac{0.1}{2}}^{(14)} = t_{0.95}^{(14)} = 1.76$.

Interval povjerenja je:
$(30 - 1.76 \cdot \frac{3}{\sqrt{15}}, 30 + 1.76 \cdot \frac{3}{\sqrt{15}}) = (28.636, 31.364)$. $\square$

Zadatak 6.12. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu X smo uzeli uzorak veličine $n = 200$ i izračunali vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x}_{200} = 20$ i vrijednost uzoračke varijance $s_{200}^2 = 25$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.9$.

Rješenje: Poznati su ljedeći podaci:
$n = 200, \overline{x}_{200} = 20,\ s_{200}^2 = 25$ i $\alpha = 0.9$.

Standardna devijacija σ je nepoznata, uzorak je velik, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$.

Kvantil standardne normalne slučajne varijable iznosi:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.9}{2}} = z_{0.95} = 1.65$.

Interval povjerenja je:
$(20 - 1.65 \cdot \frac{5}{\sqrt{200}}, 20 + 1.65 \cdot \frac{5}{\sqrt{200}}) = (19.4166, 20.5834)$. $\square$

Zadatak 6.13. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu X smo uzeli uzorak veličine $n = 100$ i izračunali vrijednost uzoračke aritmetičke sredine

$\overline{x}_{100} = 8$ i vrijednost uzoračke varijance $s_{100}^2 = 0.81$. Odredite interval povjerenja za očekivanje pouzdanosti $1 - \alpha = 0.95$.

Rješenje: Poznati su sljedeći podaci:
$n = 100, \overline{x}_{100} = 8$, $s_{100}^2 = 0.81$ i $1 - \alpha = 0.95$.

Standardna devijacija σ je nepoznata, uzorak je velik, pa je interval za očekivanje dan formulom:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{s_n}{\sqrt{n}})$.

Kvantil standardne normalne slučajne varijable iznosi:
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.

Interval povjerenja je:
$(8 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}}, 8 + 1.65 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{100}}) = (7.8236, 8.1764)$. $\square$

6.2.2 Testovi hipoteza za očekivanje normalne razdiobe

Testiranje hipoteza se provodi u sljedeća tri koraka:

(a) Određivanje kritičnog područja c_α (pri čemu razlikujemo tri vrste testa)

- $H_0 \ldots \mu \geqslant \mu_0$
  $H_1 \ldots \mu < \mu_0$
  - poznata varijanca populacije:
  $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}]$
  - nepoznata varijanca populacije i velik uzorak ($n \geqslant 30$):
  $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}]$
  - nepoznata varijanca populacije i mali uzorak ($n < 30$):
  $c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$
- $H_0 \ldots \mu \leqslant \mu_0$
  $H_1 \ldots \mu > \mu_0$
  - poznata varijanca populacije:
  $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty\rangle$
  - nepoznata varijanca populacije i velik uzorak ($n \geqslant 30$):
  $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty\rangle$

- nepoznata varijanca populacije i mali uzorak ($n < 30$):
$c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n-1), \infty\rangle$

- $H_0 \dots \mu = \mu_0$
$H_1 \dots \mu \neq \mu_0$
- poznata varijanca populacije:
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\rangle$
- nepoznata varijanca i velik uzorak ($n \geqslant 30$):
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\rangle$
- nepoznata varijanca i mali uzorak ($n < 30$):
$c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\rangle$

Razina značajnosti α predstavlja vjerojatnost pogreške 1. vrste (tj. da odbacimo ispravnu nultu hipotezu).

(b) Određivanje vrijednosti testne statistike (testa) t (u dva slučaja)
- poznata varijanca populacije:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma}$$

- nepoznata varijanca populacije:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n}$$

(c) Izvođenje zaključka
- $t \in c_\alpha \Rightarrow$ odbacujemo nultu hipotezu H_0
- $t \notin c_\alpha \Rightarrow$ ne odbacujemo nultu hipotezu H_0

Zadatak 6.14. Slučajna varijabla je normalno distribuirana uz poznatu varaijancu $\sigma^2 = 25$. Na uzorku veličine $n = 16$ dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x}_{16} = 11$. Uz razinu značajnosti $\alpha = 0.01$ testirajte:

a) nul-hipotezu $H_0 \dots \mu \leqslant 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \dots \mu > 8$.

b) nul-hipotezu $H_0 \dots \mu \geqslant 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \dots \mu < 8$.

c) nul-hipotezu $H_0 \dots \mu = 8$ i alternativnu hipotezu $H_1 \dots \mu \neq 8$.

Rješenje: Varijanca je poznata ($\sigma^2 = 25$), pa testnu statistiku računamo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{16} \cdot \frac{11-8}{5} = 2.4.$$

a) Promatramo test oblika:
$H_0 \ldots \mu \leqslant 8$,
$H_1 \ldots \mu > 8$.
Budući da je varijanca poznata kritično područje određujemo na sljedeći način: $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, +\infty\rangle = [2.33, \infty\rangle$.
Vidimo da je $t \in c_\alpha$ i stoga odbacujemo nul-hipotezu.

b) Za test oblika:
$H_0 \ldots \mu \geqslant 8$
$H_1 \ldots \mu < 8$
kritično područje određujemo na sljedeći način:
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}] = \langle -\infty, -2.33]$.
Budući da $t \notin c_\alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu.

c) Testu:
$H_0 \ldots \mu = 8$
$H_1 \ldots \mu \neq 8$
odgovara kritično područje
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\rangle = \langle -\infty, -z_{1-\frac{0.01}{2}}] \cup [z_{1-\frac{0.01}{2}}, \infty\rangle$, tj.
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{0.995}] \cup [z_{0.995}, \infty\rangle = \langle -\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty\rangle$.
Zbog $t \notin c_\alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu.

$\square$

Zadatak 6.15. Slučajna varijabla je normalno distribuirana uz poznatu varaijancu $\sigma^2 = 100$. Na uzorku veličine $n = 16$ dobivena je vrijednost uzoračke aritmetičke sredine $\overline{x}_{16} = 130$. Uz razinu značajnosti $\alpha = 0.01$ testirajte:

a) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \leqslant 120$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu > 120$.

b) nul-hipotezu $H_0 \ldots \mu \geqslant 120$ i alternativnu hipotezu $H_1 \ldots \mu < 120$.

Rješenje: Varijanca je poznata ($\sigma^2 = 100$), pa testnu statistiku računamo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{16} \cdot \frac{130 - 120}{10} = 4.$$

a) Za test:
$H_0 \ldots \mu \leqslant 120$
$H_1 \ldots \mu > 120$
kritično područje određujemo po formuli:
$c_\alpha = [z_{1-\alpha}, +\infty\rangle = [2.33, \infty\rangle$.
Budući da je $t \in c_\alpha$ odbacujemo nul-hipotezu.

b) Ukoliko je test oblika:
$H_0 \ldots \mu \geqslant 120$
$H_1 \ldots \mu < 120$
kritično područje određujemo na sljedeći način:
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}] = \langle -\infty, -2.33]$.
Vidimo da $t \notin c_\alpha$ i stoga ne odbacujemo nul-hipotezu.

$\square$

Zadatak 6.16. Za normalno distribuiranu slučajnu varijablu želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 9.45$ prema alternativnoj hipotezi

a) $H_1 \ldots \mu \neq 9.45$,

b) $H_1 \ldots \mu < 9.45$.

pri čemu smo na uzorku veličine $n = 12$ dobili uzoračku aritmetičku sredinu $\overline{x}_{12} = 9.9825$ i uzoračku varijancu $s_{12}^2 = 0.77438$. Razina značajnosti je $\alpha = 0.05$.

Rješenje: Varijanca je nepoznata, a uzorak mali ($n < 30$), pa testnu statistiku računamo na sljedeći način:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n} = \sqrt{12} \cdot \frac{9.9825 - 9.45}{\sqrt{0.77438}} = 2.0962.$$

a) Za ovaj test kritično područje ima oblik:
$c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \infty\rangle$
$= \langle -\infty, -t_{1-\frac{0.05}{2}}(n-1)] \cup [t_{1-\frac{0.05}{2}}(n-1), \infty\rangle$, tj.
$c_\alpha = \langle -\infty, -t_{0.975}(11)] \cup [t_{0.975}(11), \infty\rangle = \langle -\infty, -2.2] \cup [2.2, \infty\rangle$.
Budući da $t \notin c_\alpha$ nulta se hipoteza ne odbacuje.

b) U ovom slučaju kritično područje je:
$c_\alpha =< \infty, -z_{1-\alpha}] = \langle -\infty, -1.8]$,
pa zbog $t \notin c_\alpha$ ne odbacujemo nul-hipotezu.

$\square$

Zadatak 6.17. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \ldots \mu = 4.5$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \ldots \mu > 4.5$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 15$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x}_{15} = 5.15933$ i uzoračku varijancu $s_{15}^2 = 1.26625$. Razina značajnosti je 0.05.

Rješenje: promatramo test:
$H_0 \dots \mu = 4.5$,
$H_1 \dots \mu > 4.5$.
Varijanca nije poznata, pa vrijednost testa računamo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{15} \cdot \frac{5.15933 - 4.5}{1.12528} = 2.2693.$$

Budući da je uzorak malen, kritično područje određujemo na sljedeći način:
$c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n-1), \infty\rangle = [t_{0.95}(14), \infty\rangle = [1.76, \infty\rangle$.
Zbog $t \in c_\alpha$ odbacujemo nul-hipotezu. □

Zadatak 6.18. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \dots \mu = 11$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \dots \mu \neq 11$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 100$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x}_{100} = 9$ i uzoračku varijancu $s_{100}^2 = 25$. Razina značajnosti je 0.1.

Rješenje: Promatramo test:
$H_0 \dots \mu = 11$,
$H_1 \dots \mu \neq 11$.
Varijanca je nepoznata, a uzorak velik i stoga vrijednost testa određujemo po formuli:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{100} \cdot \frac{9 - 11}{5} = -4,$$

dok kritično područje određujemo na sljedeći način:
$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{0.95}] \cup [z_{0.95}, \infty\rangle = \langle -\infty, -1.65] \cup [1.65, \infty\rangle$.
Budući da je $t \in c_\alpha$ odbacujemo nul-hipotezu. □

Zadatak 6.19. Želimo testirati nultu hipotezu $H_0 \dots \mu = 12$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 \dots \mu < 12$ za normalno distribuiranu slučajnu varijablu nepoznate varijance. Uzorak duljine $n = 200$ je dao aritmetičku sredinu $\overline{x}_{200} = 15$ i korigiranu uzoračku varijancu $s_{200}^2 = 16$. Razina značajnosti je 0.05.

Rješenje: Zadan je test oblika:
$H_0 \dots \mu = 12$,
$H_1 \dots \mu < 12$.
Budući da je varijanca nepoznata, a uzorak velik testnu statistiku i kritično područje određujemo na sljedeći način:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{200} \cdot \frac{15 - 12}{4} = 10.6066,$$

$c_\alpha = \langle -\infty, -z_{0.95}] = \langle -\infty, -1.65]$.
Vidimo da $t \notin c_\alpha$ i stoga ne odbacujemo nul-hipotezu. $\square$

Sljedeći zadaci predstavljaju rezultate konkretnih istraživanja objavljenih u različitim časopisima. Sadrže intervale povjerenja i testove hipoteza, te pokazuju koliko je široka primjena ovih metoda procjene očekivanja normalne razdiobe u praksi.

Zadatak 6.20. Članak Mix Design for Optimal Strength Development of Fly Ash Concrete (Cement and Concrete Research, 1989) istražuje tlačnu čvrstoću betona s letećim pepelom (mješavina silicija, aluminija, željeza, magnezijeva oksida i ostalih sastojaka). Dane su tlačne čvrstoće devet uzoraka (u megapascalima):
40.2, 30.4, 28.9, 30.5, 22.4, 25.8, 18.4, 14.2, 15.3.

a) Nađite 95% pouzdani interval za tlačnu čvrstoću i interpretirajte ga.

b) Pretpostavimo da smo saznali da je podatak 40.2 posljedica krivog mjerenja. Pokušajte isključiti navedeni podatak i ponovno pronaći interval pouzdanosti.

Rješenje:

a) Tražimo interval oblika: $(\overline{x}_n - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$.
Uzoračka aritmetička sredina iznosi:
$\overline{x}_9 = \frac{1}{9}(40.2 + \cdots + 15.3) = 25.1222$.
Kvantil Studentove razdiobe sa osam stupnjeva slobode je jednak:
$t^8_{0.975} = 2.31$.
Uzoračka standardna devijacija iznosi:

$$s_9 = \sqrt{\frac{1}{8}(40.2^2 + \cdots + 15.3^2 - 9 \cdot 25.1222^2)} = 8.4203.$$

Interval povjerenja za tlačnu čvrstoću je:

$$(25.1222 - 2.31 \cdot \tfrac{8.4203}{\sqrt{9}}, 25.1222 + 2.31 \cdot \tfrac{8.4203}{\sqrt{9}}) = (18.6498, 31.5947).$$

Prema tome, očekivana vrijednost tlačne čvrstoće betona s letećim pepelom će se kretati u granicama navedenog intervala povjerenja.

b) Riješite za vježbu.

$\square$

Zadatak 6.21. Proizvođač proizvodi klipne prstene za motore automobila. Poznato je da je dijametar prstena normalno distribuiran sa $\sigma = 0.001$ milimetara. Slučajni uzorak od 15 prstenova ima prosječan dijametar od 74.036 milimetara. Konstruirajte 99%-tni pouzdani interval za očekivanu vrijednost dijametra klipnog prstena.

Rješenje: Zadani su sljedeći podaci:
$n = 15, \overline{x}_{15} = 74.036$, $\sigma = 0.001$ i $1 - \alpha = 0.99$.
Budući da je varijanca poznata interval povjerenja računamo po formuli:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Kvantil standardne normalne razdiobe iznosi: $z_{0.995} = 2.58$.
Interval povjerenja za očekivani dijametar klipnog prstena motora je:
$(74.036 - 2.58 \cdot \frac{0.001}{\sqrt{15}}, 74.036 + 2.58 \cdot \frac{0.001}{\sqrt{15}}) = (74.0353, 74.0367)$. $\square$

Zadatak 6.22. Snaga pucanja prediva (breaking strength of yarn) koja se koristi u proizvodnji materijala mora biti minimalno 100 psi. Iskustvo je pokazalo da je snaga pucanja normalno distribuirana i da joj je $\sigma = 2$ psi. Testiran je slučajni uzorak veličine 9 i prosječna snaga pucanja je iznosila 98 psi. Testirajte ispravnost prediva na nivou značajnosti od 5%.

Rješenje: Test za snagu pucanja prediva postavimo na sljedeći način:
$H_0 \ldots \mu \leqslant 100$,
$H_1 \ldots \mu > 100$.
Zadano je $n = 9, \overline{x}_9 = 98, \sigma = 2$.
Prema tome, testna statistika iznosi:

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{9} \cdot \frac{98 - 100}{2} = -3.$$

Kritično područje je oblika: $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty) = [z_{0.95}, \infty) = [1.65, \infty)$.
Budući da $z \notin c_\alpha$ ne odbacujemo H_0, tj. smatramo da je snaga pucanja prediva manja ili jednaka 100 psi. $\square$

Zadatak 6.23. Članak u ASCE Journal of Energy Engineering ("Overview of Reservoir Release Improvements at 20 TVA Dams") sadrži podatke o koncentraciji razgrađenog kisika u tokovima ispod 20 brana u Tennessee Valley

Authority sistemu. Podaci su kako slijedi (u miligramima po litri): 5.0, 3.4, 3.9, 1.3, 0.2, 0.9, 2.7, 3.7, 3.8, 4.1, 1.0, 1.0, 0.8, 0.4, 3.8, 4.5, 5.3, 6.1, 6.9 i 6.5. Odredite 95% pouzdani interval za očekivanu koncentraciju razgrađenog kisika.

Rješenje: Budući da je varijanca nepoznata, a uzorak malen tražimo interval oblika:
$(\overline{x}_n - t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{n}})$.
Uzoračka aritmetička sredina iznosi: $\overline{x}_{20} = \dfrac{1}{20}(5.0 + \cdots + 6.5) = 3.265$.
Kvantil Studentove razdiobe s 19 stupnjeva slobode je jednak $t^{19}_{0.975} = 2.09$.
Uzoračku varijancu računamo na sljedeći način:
$s_{20} = \sqrt{\dfrac{1}{19}(5.0^2 + \cdots + 6.5^2 - 20 \cdot 3.265^2)} = 2.1273$.
Dakle, interval povjerenja za očekivanu koncentraciju razgrađenog kisika iznosi:
$(3.265 - 2.09 \cdot \dfrac{2.1273}{\sqrt{20}}, 3.265 + 2.09 \cdot \dfrac{2.1273}{\sqrt{20}}) = (2.2694, 4.2606)$. □

Zadatak 6.24. Proučavano je prianjanje različitih biofilmova na čvrste podloge za potencijalno korištenje u tehnologiji za zaštitu okoliša. Za bakterijski soj Acinetobacter, dobiveno je sljedećih 5 mjerenja: 2.69, 5.76, 2.67, 1.62, 4.12 din/cm^2. Uz pretpostavku da je populacija normalno distribuirana uz standardnu devijaciju 0.66 din/cm^2, odredite 95% pouzdani interval za očekivano prianjanje. Uz 1% značajnosti testirajte tvrdnju da je očekivano prianjanje veće od 3.5 din/cm^2.

Rješenje: Znamo da je $n = 5$ i $\sigma = 0.66$.
Iz podataka izračunamo uzoračku aritmetičku sredinu:
$\overline{x}_5 = \frac{1}{5}(2.69 + \cdots + 4.12) = 3.372$.
Budući da je varijanca populacije poznata, za određivanje intervala povjerenja koristimo kvantil standardne normalne razdiobe: $z_{0.975} = 1.96$.
95% pouzdani interval za očekivano prijanjanje biofilma je oblika:
$(\overline{x}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, prema tome, njegove granice su jednake:
$(3.372 - 1.96 \cdot \frac{0.66}{\sqrt{5}}, 3.372 + 1.96 \cdot \frac{0.66}{\sqrt{5}}) = (2.7935, 3.9505)$.

Testiramo hipoteze:
$H_0 \ldots \mu \leqslant 3.5$,
$H_1 \ldots \mu > 3.5$.

Testna statistika iznosi:

$$t = \sqrt{5} \cdot \frac{3.372 - 3.5}{0.66} = -0.4337.$$

Kritično područje ima oblik: $c_{0.01} = [z_{0.99}, \infty\rangle = [2.33, \infty\rangle$.
Budući da $t \notin c_\alpha$ ne odbacujemo H_0, tj. smatramo da je očekivano prijanjanje biofilma manje ili jednako 3.5 din/cm^2. $\square$

Zadatak 6.25. Inžinjer na 12 primjeraka testira tlačnu čvrstoću betona (za koju je poznato da je normalno distribuirana) i dobiva sljedeće podatke:

2216	2237	2249	2204	2225	2301
2281	2263	2318	2255	2275	2295

Uz 5% značajnosti testirajte pretpostavku da je tlačna čvrstoća betona manja od 2500.

Rješenje:
Testiramo hipoteze:
$H_0 \ldots \mu \geqslant 2500$,
$H_1 \ldots \mu < 2500$.

Iz uzorka na poznati način izračunamo uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku varijancu:
$\overline{x}_{12} = 2259.917, s_{12} = 35.5693$.

Testna statistika ima vrijednost:

$$t = \sqrt{12} \cdot \frac{2259.917 - 2500}{35.5693} = -23.38177432.$$

Kritično područje je oblika: $\langle -\infty, -t_{1-\alpha}(n-1)]$.
Budući da je $t \in \langle -\infty, -t_{0.95}(11)] = \langle -\infty, -1.7959]$ odbacujemo H_0.

Na razini značajnosti od 5% odbacujemo pretpostavku da je tlačna čvrstoća betona veća ili jednaka 2500 (tj. možemo reći da prihvaćamo da je manja od 2500). $\square$

Zadatak 6.26. Sustavi za evakuaciju avionske posade se pokreću na čvrsti plin. Stopa izgaranja plina je važna karakteristika proizvoda. Specifikacije zahtjevaju da prosječna stopa izgaranja bude 50 centimetara po sekundi. Znamo da je standardna devijacija $\sigma = 2$ centimetara po sekundi. Uzet je slučajni uzorak veličine 25 i dobivena je prosječna stopa izgaranja od 51.3 centimetara po sekundi. Koji zaključak donosimo na razini signifikantnosti od 5%?

Rješenje: Testiramo tvrdnje:
$H_0 \dots \mu = 50$,
$H_1 \dots \mu \neq 50$.

Testna statistika je

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{25} \cdot \frac{51.3 - 50}{2} = 3.25.$$

Kritično područje ima oblik: $c_{0.05} = \langle -\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty\rangle$.
Vidimo da je $t = 3.25 \in c_\alpha$ pa odbacujemo H_0.
Uz 5% značajnosti odbacujemo hipotezu da očekivana stopa izgaranja iznosi 50 centimetara po sekundi. $\square$

Zadatak 6.27. Inžinjer koji proučava vlačnu čvrstoću (tensile strength) čelične legure namijenjene za upotrebu u osovinama golf palica zna da je čvrstoća približno normalno distribuirana sa $\sigma = 60$ psi. Slučajni uzorak od 12 jedinki ima prosječnu vlačnu čvrstoću od 3250 psi. Uz 1% značajnosti testirajte hipotezu da je očekivana vlačna čvrstoća jednaka 3500 psi.

Rješenje: Provodimo testiranje sljedećih hipoteza:
$H_0 \dots \mu = 3500$,
$H_1 \dots \mu \neq 3500$.

Testna statistika iznosi:

$$t = \sqrt{12} \cdot \frac{3250 - 3500}{60} = -14.4338.$$

Kritično područje je oblika:
$c_{0.01} = \langle -\infty, -z_{0.995}] \cup [z_{0.995}, \infty\rangle = \langle -\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty\rangle$.
Budući da je $t \in c_{0.01}$ odbacujemo H_0, tj. smatramo da je vlačna čvrstoća čelične legure različita od 3500 psi. $\square$

6.2.3 T-test za dva uzorka

- testiramo jednakost očekivanja dva **nezavisna** uzorka iz **normalne distribucije**

$$\begin{array}{lll} H_0: & \mu_1 = \mu_2 & (\mu_1 \geqslant \mu_2 \;\text{ ili }\; \mu_1 \leqslant \mu_2) \\ H_1: & \mu_1 \neq \mu_2 & (\mu_1 < \mu_2 \;\text{ ili }\; \mu_1 > \mu_2) \end{array}$$

- testna statistika je

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\hat{\sigma}_D}$$

  gdje su n_1 i n_2 veličine uzoraka, a $\hat{\sigma}_D$ ovisi o tome jesu li varijance populacija poznate ili nepoznate (dodatna pretpostavka kod nepoznatih varijanci bi trebala biti njihova jednakost):

  - poznate varijance:

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

  - nepoznate varijance:

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}$$

- Određivanje kritičnog područja c_α

  - $H_0 \ldots \mu_1 \geqslant \mu_2$
    $H_1 \ldots \mu_1 < \mu_2$
    Poznate varijance populacije:
    $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}]$
    Nepoznate varijance populacije i velik uzorci $(n_1, n_2 \geqslant 40)$:
    $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\alpha}]$
    Nepoznate varijance populacije i mali uzorci $(n_1 < 40, n_2 < 40)$:
    $c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)]$
  - $H_0 \ldots \mu_1 \leqslant \mu_2$
    $H_1 \ldots \mu_1 > \mu_2$
    Poznate varijance populacije:
    $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty\rangle$
    Nepoznate varijance populacije i velik uzorci $(n_1, n_2 \geqslant 40)$:
    $c_\alpha = [z_{1-\alpha}, \infty\rangle$
    Nepoznate varijance populacije i mali uzorci $(n_1 < 40, n_2 < 40)$:
    $c_\alpha = [t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2), \infty\rangle$

- $H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$
  $H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$
  Poznate varijance populacije:
  $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\rangle$
  Nepoznate varijance i velik uzorci ($n_1, n_2 \geqslant 40$):
  $c_\alpha = \langle -\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\rangle$
  Nepoznate varijance i mali uzorci ($n_1 < 40, n_2 < 40$):
  $c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), \infty\rangle$

Zadatak 6.28. Proučava se preciznost mjernog instrumenta mjerenjem težina dvaju različitih listova papira. Ponavljajući mjerenja više puta dobiveni su sljedeći podaci:

- Papir 1: 3.481, 3.477, 3.47, 3.448, 3.472, 3.47, 3.485, 3.464, 3.477, 3.475, 3.472, 3.473, 3.472, 3.47, 3.474.
- Papir 2: 3.258, 3.254, 3.256, 3.249, 3.241, 3.254, 3.247, 3.257, 3.239, 3.25, 3.258, 3.239, 3.245, 3.24, 3.254.

Na razini značajnosti od 5% testirajte jesu li prosječne težine dva različita papira jednake. (Pretpostavite da uzorci dolaze iz normalne distribucije)

Rješenje:
Testiramo jednakost prosječnih težina:
$H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$,
$H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$.

Uzoračka aritmetička sredina i varijanca za papir 1 i papir 2 iznose:
$\overline{x}_1 = 3.472, s_1^2 = 6.9 \cdot 10^{-5}$,
$\overline{x}_2 = 3.2494, s_2^2 = 5.1 \cdot 10^{-5}$.
Računamo:

$$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\tfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \tfrac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{\tfrac{(15-1)\cdot 6.9\cdot 10^{-5}+(15-1)\cdot 5.1\cdot 10^{-5}}{15+15-2} \cdot \tfrac{15+15}{15\cdot 15}} = 0.002828.$$

Testna statistika iznosi:

$$t = \frac{3.472 - 3.2494}{0.002828} = 78.71036.$$

Kritično područje je:
$c_\alpha = \langle -\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)] \cup [t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), \infty\rangle$

$= \langle -\infty, -2.048] \cup [2.048, \infty\rangle$.
Budući da je $t \in c_\alpha$ odbacujemo H_0, tj. zaključujemo da su prosječne težine različitih listova papira različite. $\square$

Zadatak 6.29. Proizvođač želi smanjiti vrijeme sušenja primarne boje. Korištene su dvije različite boje, jedna standardna i jedna koja sadrži novi sastojak koji bi trebao smanjiti vrijeme sušenja. Poznato je da su standardne devijacije vremena sušenja 8 minuta. Deset uzoraka obojeno je prvom, a deset drugom bojom. Prosječno vrijeme sušenja prve boje je $\overline{x}_1 = 121$ minuta, a druge $\overline{x}_2 = 112$ minuta. Koji zaključak možemo donijeti o efektima novog sastojka, uz $\alpha = 0.05$?

Rješenje: Testiramo učinak novog sastojka na vrijeme sušenja boje:
$H_0 \ldots \mu_1 \leqslant \mu_2$,
$H_1 \ldots \mu_1 > \mu_2$.
Određujemo:

$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{8^2}{10}} = 3.5777.$

Testna statistika je jednaka:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\hat{\sigma}_D} = \frac{121 - 112}{3.5777} = 2.5156.$$

Kritično područje je interval: $c_{0.05} = [1.65, \infty\rangle$.
Budući da je $t \in c_{0.05}$ odbacujemo H_0, tj. smatramo da novi sastojak smanjuje vrijeme sušenja boje. $\square$

Zadatak 6.30. Promatran je dijametar čeličnih šipki dvaju različitih proizvođača. Uzeta su dva slučajna uzorka veličine $n_1 = 15$ i $n_2 = 17$ i dobivene su aritmetičke sredine i varijance $\overline{x}_1 = 8.73$, $s_1^2 = 0.35$ i $\overline{x}_2 = 8.68$, $s_2^2 = 0.40$. Pretpostavimo da $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ i da su podaci uzeti iz normalne distribucije. Možemo li uz 5% značajnosti tvrditi da proizvođači proizvode čelične šipke različitih dijametara?

Rješenje: Testiramo jednakost dijametara čeličnih šipki različitih proizvođača:
$H_0 \ldots \mu_1 = \mu_2$,
$H_1 \ldots \mu_1 \neq \mu_2$.
Računamo:

$\hat{\sigma}_D = \sqrt{\frac{14 \cdot 0.35 + 16 \cdot 0.40}{30} \cdot \frac{32}{15 \cdot 17}} = 0.2174.$

Testna statistika iznosi:

$$t = \frac{8.73 - 8.68}{0.2174} = 0.23.$$

Kritično područje je oblika:
$c_\alpha = \langle -\infty, -t_{0.975}(30)] \cup [t_{0.975}(30), \infty\rangle = \langle -\infty, 2.04] \cup [2.04, \infty\rangle.$

Budući da $t \notin c_{0.05}$ ne odbacujemo H_0, tj. zaključujemo da različiti proizvođači isporučuju čelične šipke jednakih dijametara. $\square$

6.3 Jednostavna linearna regresija

6.3.1 Koeficijent korelacije

Podatke dobivene mjerenjem dvodimenzionalnog neprekidnog statističkog obilježja (X, Y):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

obično prikazujemo grafički, te tablicom:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Cilj nam je izmjeriti **stupanj linearne povezanosti** veličina X i Y.

S korelacijom treba oprezno! Nema smisla tražiti korelaciju između bilo koje dviju varijabli, moramo imati teoretsku podlogu.

Broj

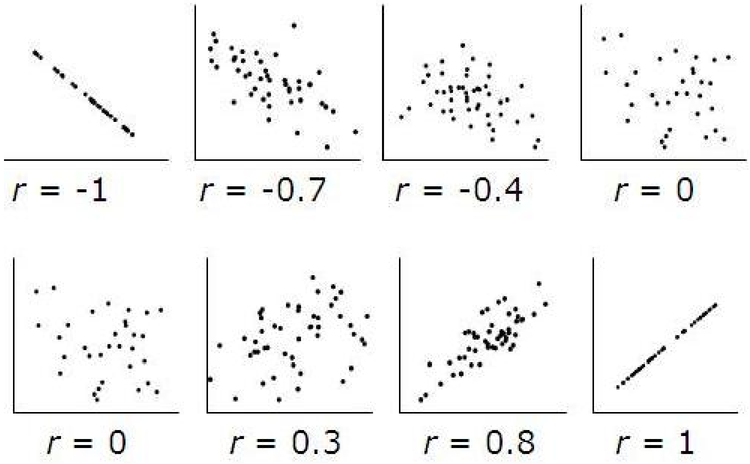
$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} S_{YY}}}$$

je **koeficijent korelacije**.
Pri tome je:

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \; S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}),$$

gdje su $\overline{x}$ i $\overline{y}$ uzoračke aritmetičke sredine danih uzoraka.



Slika 6.7: Primjeri podataka za različite koeficijente korelacije

Vrijedi:

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$$

- Ako je $r_{XY} < 0$, kažemo da su X i Y negativno korelirane.
- Ako je $r_{XY} > 0$, kažemo da su X i Ypozitivno korelirane.
- $r_{XY} = 0 \Rightarrow X$ i Y nisu korelirane

6.3.2 Regresijski pravac (pravac najboljeg pristajanja)

Ako postoji jaka korelacija između X i Y pitamo se koji je najbolji pravac koji ih opisuje. Metodom najmanjih kvadrata dobiva se da je to pravac:

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

pri čemu su parametri $\hat{\beta}_0$ i $\hat{\beta}_1$:

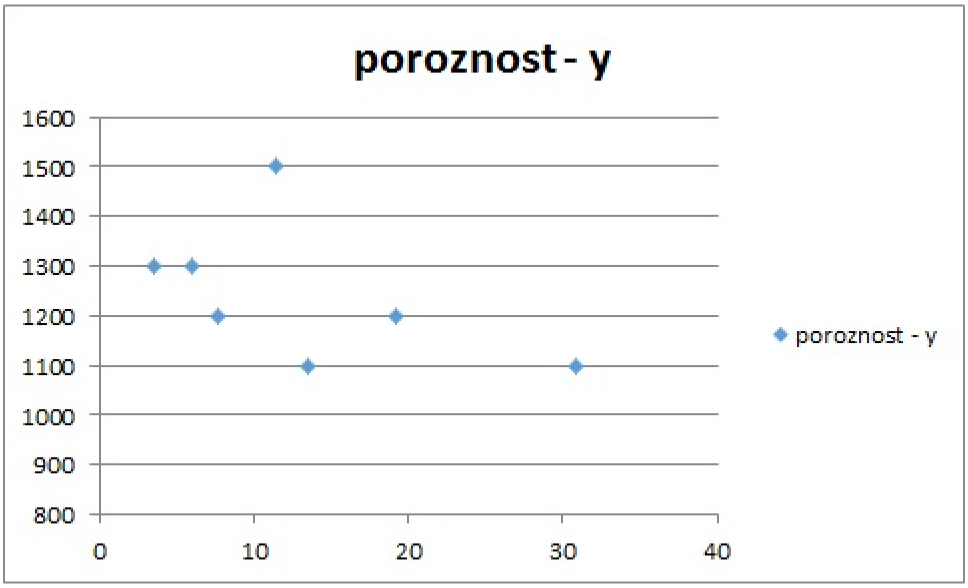
$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad \hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$$

Sljedeća dva zadatka su riješena pomoću Excella. Rješenja se nalaze u datoteci REGRESIJA na stranici predmeta Vjerojatnost i statistika.

Zadatak 6.31. Članak u "Journal of the American Ceramic Society" razmatra povezanost poroznosti cirkonija s temperaturom. Dani su podaci:

Poroznost y	1100	1200	1300	1100	1500	1200	1300
Temperatura x	30.8	19.2	6.0	13.5	11.4	7.7	3.6

Dijagram raspršenja (grafički prikaz podataka) dan je na slici:



Izračunajte koeficijent korelacije i pravac najboljeg pristajanja. Što možete zaključiti?

Rješenje: Računamo

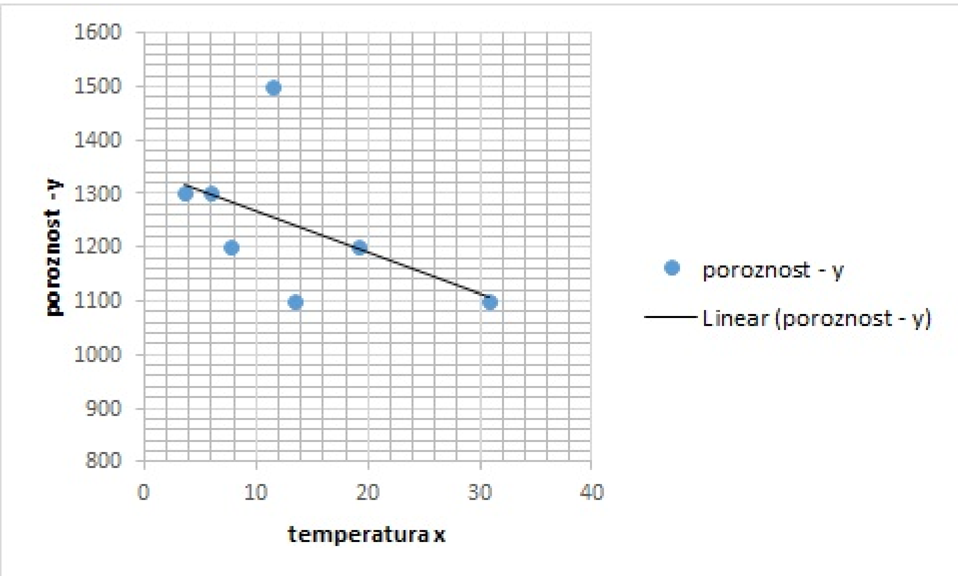
i	temperatura - x	poroznost - y	x_i - x̄	(x_i - x̄)^2	y_i - ȳ	(y_i - ȳ)^2		(x_i - x̄)(y_i - ȳ)
1	30,8	1100	17,629	310,767	-142,857	20408,163		-2518,367
2	19,2	1200	6,029	36,344	-42,857	1836,735		-258,367
3	6	1300	-7,171	51,429	57,143	3265,306		-409,796
4	13,5	1100	0,329	0,108	-142,857	20408,163		-46,939
5	11,4	1500	-1,771	3,138	257,143	66122,449		-455,510
6	7,7	1200	-5,471	29,937	-42,857	1836,735		234,490
7	3,6	1300	-9,571	91,612	57,143	3265,306		-546,939
prosjek	13,171	1242,857	Sxx	523,33429	Syy	117142,9	Sxy	-4001,428571
							r	-0,511054914

Kad izračunamo sve za koeficijent korelacije, lako dobivamo i koeficijente regresijskog pravca:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-4001.429}{523.334} = -7.64603,$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 1242.857 - (-7.64603) \cdot 13.171 = 1343.566.$$

Dakle, pravac najboljeg pristajanja je $\hat{y} = 1343.566 - 7.64603x$.



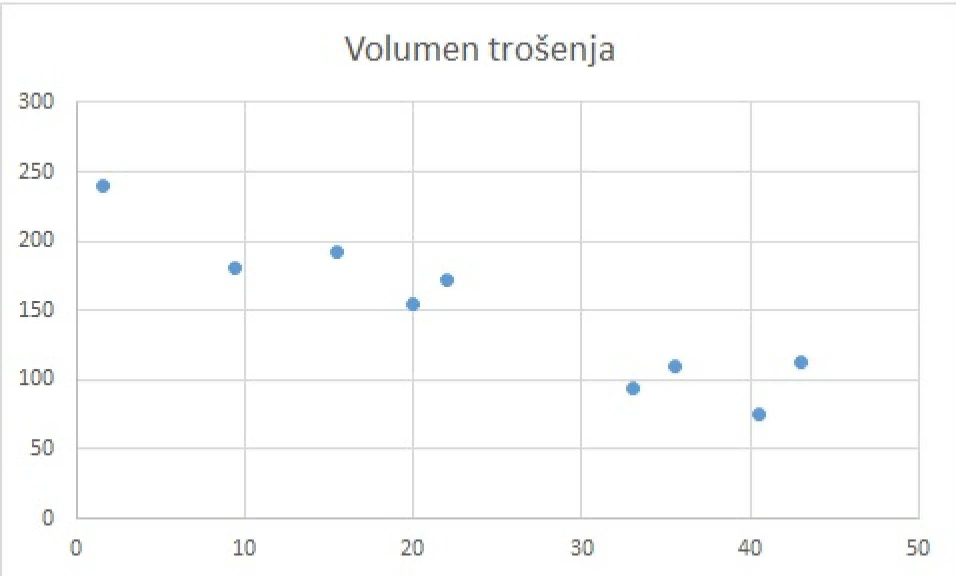
Zaključujemo da poroznost cirkonija opada s porastom temperature. $\square$

Bitna primjena regresijskih modela je prognoziranje novih (ili budućih) vrijednosti varijable Y za određenu razinu varijable X. Ako je x_0 vrijednost za koju nas zanima vrijednost zavisne varijable, uvrštavamo x_0 u jednadžbu regresijskog pravca: $\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$. Osim prognoziranja brojem, možemo naći i prognostički interval određene pouzdanosti.

Zadatak 6.32. Članak u časopisu Wear prezentira podatke o trošenju mekog čelika (volumen trošenja u 10^{-4} kubičnim milimetrima - varijabla y) i viskoznosti ulja (varijabla x) u kojem se čelik kali.

y	240	181	193	155	172	110	113	75	94
x	1.6	9.4	15.5	20.0	22.0	35.5	43.0	40.5	33.0

Dijagram raspršenja dan je na slici:



Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite koliko će biti trošenje mekog čelika uz viskoznost $x = 21.00$.

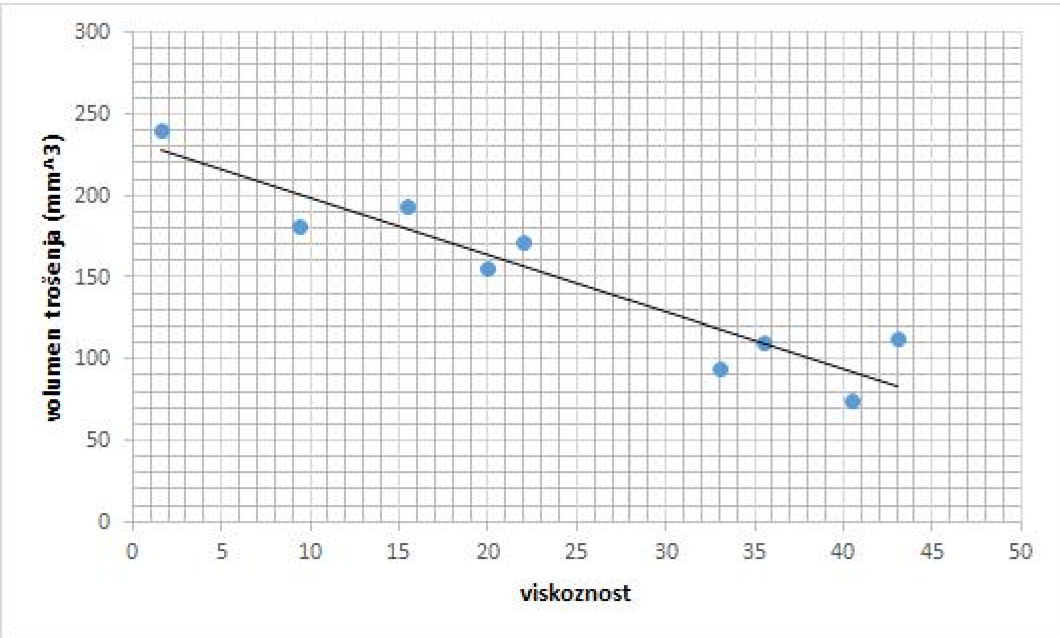
Rješenje: Računamo:

i	viskoznost (X)	trošenje (Y)	x_i - x̄	(x_i - x̄)^2	y_i - ȳ	(y_i - ȳ)^2		(x_i - x̄)(y_i - ȳ)
1	1,6	240	-22,9	524,410	91,889	8443,568		-2104,256
2	9,4	181	-15,1	228,010	32,889	1081,679		-496,622
3	15,5	193	-9,0	81,000	44,889	2015,012		-404,000
4	20	155	-4,5	20,250	6,889	47,457		-31,000
5	22	172	-2,5	6,250	23,889	570,679		-59,722
6	35,5	110	11,0	121,000	-38,111	1452,457		-419,222
7	43	113	18,5	342,250	-35,111	1232,790		-649,556
8	40,5	75	16,0	256,000	-73,111	5345,235		-1169,778
9	33	94	8,5	72,250	-54,111	2928,012		-459,944
prosjek	24,5	148,111	**S_XX**	**1651,420**	**S_YY**	**23116,889**	**S_XY**	**-5794,1**
							r_XY	**-0,93776177**

Računamo koeficijente regresijskog pravca:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-5794.1}{1651,420} = -3.5086,$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 148.111 - (-3.5086) \cdot 24.5 = 234.07.$$



Za viskoznost $x = 21$ dobivamo da će trošenje biti $y = -3.5086 \cdot 21 + 234.07 = 160.389 \cdot 10^{-4}$ mm^3. $\square$

Zadatak 6.33. Linearna regresija korištena je za analizu podataka u istraživanju veze između površinske temperature kolnika (x) i otklona/neravnosti kolnika (y). Na uzorku veličine $n = 20$ dobiveni su sljedeći sumarni podaci: $\overline{x} = 73.9, \overline{y} = 0.6375, S_{XX} = 33881.6, S_{YY} = 0.7319$ te $S_{XY} = 141.445$.

Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite kolika će biti neravnost kolnika na temperaturi $x = 85$. Interpretirajte dobiveni model.

(Temperature su u Fahrenheitima.)

Rješenje: Koeficijenti regresijskog pravca su jednaki:
$\hat{\beta}_1 = \dfrac{141.445}{33881.6} = 0.00417$, $\hat{\beta}_0 = 0.6375 - 0.00417 \cdot 73.9 = 0.365$.
Pravac regresije je dan jednadžbom:

$$y = 0.00417x + 0.365.$$

Zaključujemo da neravnost kolnika raste s temperaturom.

Neravnost kolnika bila bi $y(85) = 0.71945$ na temperaturi $x = 85$. $\square$

Napomena: mali koeficijent uz x ne znači da je slaba veza između varijabli. U prethodnom zadatku možemo izračunati koeficijent korelacije $r_{XY} = 0.898$.

Zadatak 6.34. Linearna regresija korištena je za analizu podataka u istraživanju veze između tlačne čvrstoće (x) i intrinzične propusnosti (y) različitih betona. Na uzorku veličine $n = 14$ dobiveni su sljedeći sumarni podaci: $\overline{x} = 3.0714, \overline{y} = 40.8571, S_{XX} = 25.351, S_{YY} = 159.763$ te $S_{XY} = -59.039$.

Odredite pravac najboljeg pristajanja te pomoću dobivenog modela procijenite kolika propusnost bi bila izmjerena kad je tlačna čvrstoća $x = 4.3$.

Rješenje: Odredimo koeficijente pravca regresije:
$\hat{\beta}_1 = \dfrac{-59.09}{25.351} = -2.331$, $\hat{\beta}_0 = 40.8571 - (-2.331) \cdot 3.0714 = 48.016$.
Dakle, pravac regresije ima jednadžbu:

$$y = -2.331x + 48.016.$$

Prema tome, propusnost opada s rastom tlačne čvrstoće.

Procjenjena vrijednost propusnosti uz tlačnu čvrstoću $x = 4.3$ iznosi $y(4.3) = 37.993$. $\square$