

## MATEMATIKA II

### Zadaci za vježbu- dvostruki i trostruki integrali

1. Skicirajte područje integracije i odredite granice integracije integrala

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

ako je područje integracije  $\Omega$  omeđeno krivuljama:

- (a)  $x = 0, x = 1 - y^2$
- (b)  $y = x^2, y = \frac{2}{1 + x^2}$
- (c)  $y = x, y = 0, y = -x^2 + 2x$
- (d)  $y = x, y = 3x, x + y = 4$
- (e)  $y = x, y = 2x, y = \frac{1}{x}$  u I kvadrantu

2. Skicirajte područje integracije pa zamijenite poredak integriranja u integralu:

(a)  $\int_0^1 dx \int_1^{e^x} f(x, y) dy$

(b)  $\int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy$

(c)  $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$

(d)  $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$

3. Izračunajte  $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} (3 + y) dy$

4. Izračunajte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{2y} \cos(x + y) dx$

5. Izračunajte površinu lika omeđenog kardioidom  $r = 4(1 + \cos\phi)$ .

6. Izračunajte površinu lika omeđenog kružnicom  $r = 4 \cos\phi$  i pravcima  $y = x$  i  $y = \sqrt{3}x$ .

7. Rekonstruirajte i skicirajte područje integracije integrala:

$$\int_0^{\pi} d\phi \int_0^{1+\cos\phi} f(r, \phi) r dr$$

8. Rekonstruirajte i skicirajte područje integracije integrala:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{6\cos\phi} f(r, \phi) r dr$$

9. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte

$$\int \int_{\Omega} e^{1-x^2-y^2} dx dy$$

gdje je  $\Omega$  lik omeđen kružnicom  $x^2 + y^2 = 1$  u I kvadrantu.

10. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte

$$\int \int_{\Omega} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

gdje je  $\Omega$  lik omeđen kružnicama  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  i pravcima  $x = 0$ ,  $y = x$  u I kvadrantu.

11. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^2 (3r - r^2 \sin\phi) dr$$

12. Izračunajte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_0^{2\cos\phi} r^2 \sin\phi dr$$

13. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama  $z = 8 - x^2 - y^2$   
i  $z = 4$ .

14. Pomoću dvostrukog integrala u polarnim koordinatama izračunajte volumen tijela omeđenog cilindrima  $x^2 + y^2 = x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  i ravninama  $z = 0$  i  $z = 2$

15. Izračunajte volumen tijela omeđenog paraboličnim cilindrom  $y = 4 - x^2$ , i ravninama  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

16. Izračunajte volumen tijela omeđenog paraboličnim cilindrom  $z = 1 - y^2$ , i ravninama  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $z + y = 1$ .

17. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama  $z = xy$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , u prvom oktantu.

18. Izračunajte

$$\int_0^1 x dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} dz$$

19. Izračunajte prelaskom na cilindrične koordinate

$$\int \int \int_V y dx dy dz$$

gdje je  $V$  volumen u I oktantu omeđen cilindrom  $x^2 + y^2 = 9$  i ravninama  $z = 0$  i  $z = 5$ .

20. Izračunajte prelaskom na cilindrične koordinate

$$\int \int \int_V z dx dy dz$$

gdje je  $V$  omeđen cilindrom  $x^2 + y^2 = 4$  i ravninama  $z = 0$  i  $z = 4$ .

21. Napišite u cilindričnim koordinatama integral

$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$

22. Napišite u cilindričnim koordinatama integral

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{8-x^2-y^2} f(x, y, z) dz$$

23. Napišite u sfernim koordinatama integral

$$\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

24. Napišite u sfernim koordinatama integral

$$\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$