Uvod

U kolegiju Mehanika I, koji obuhvaća dio mehanike koji se naziva statika, proučavali smo uvjete ravnoteže tijela ili čestice (točke) pod djelovanjem sila. Ukratko, podrazumjeva se mirovanje.

Kolegij Mehanika II, obuhvaća dva dijela mehanike koji se nazivaju kinematika i dinamika, odnosno proučava gibanje čestice i tijela. Ako sile koje djeluju na tijelo ili česticu nisu u ravnoteži počinje gibanje.

Kinematika je dio teorijske mehanike u kojem se gibanja čestice ili tijela proučava samo s geometrijskog stajališta, ne uzimajući u obzir djelovanje sila odnosno uzroka gibanja. Kinematika se bavi samo geometrijskim zakonitostima, a pošto gibanje možemo shvatiti kao promjenu položaja u prostoru, kinamatika se još naziva geometrija gibanja. Važno je zapamtiti da se u kinematici ne analizira uzrok gibanja, analizira se samo kako se čestica ili tijelo giba, ali ne i zašto nastaje gibanje!

U dinamici se osnovne veličine koje opisuju gibanje povezuju sa silama koje uzrokuju promatrano gibanja. Dakle, u dinamici se istovremeno analizira i uzrok (zašto se tijelo giba) i posljedica (kako se tijelo giba).

Mehanika je grana fizike. Osnivač klasične mehanike je Isaac Newton (1643-1727). On je u mehaniku uveo pojam apsolutno nepomičnog prostora (Euklidov trodimenzionalni prostor) i suglasno tome uveo je pojam apsolutno nepomičnog koordinatnog sustava, unutar kojeg je određen položaj svake točke ili tijela (heliocentrički sustav).

Gibanje čestice ili tijela promatrano u odnosu na nepomični koordinatni sustav naziva se apsolutno gibanje, a promatrano u odnosu prema drugom pomičnom tijelu relativno gibanje. Newton je uveo i pojam apsolutnog ili univerzalnog vremena koje ne ovisi o mjestu i načinu gibanja.

U klasičnoj mehanici prostor i vrijeme smatraju se apsolutnim veličinama. Lako je uočiti da nije moguće odabrati apsolutno nepomičan koordinatni sustav, jer u prirodi ne postoji apsolutno nepomično tijelo za koje bi taj sustav bio vezan. Poznato nam je da je Albert Einstein (1879-1955) svojom teorijom relativnosti opovrgnuo i pretpostavku univerzalnosti vremena.

U svim problemima koje se rješava u Tehničkoj mehanici brzine su puno manje od brzine svjetlosti i pretpostavke klasične mehanike, koje je uveo Newton, mogu se smatrati u potpunosti zadovoljene. Uobičajena pretpostavka je da se nepomični koordinatni sustav veže za Zemlju.

Različite točke na tijelu, promatrano u odabranom koordinatnom sustavu, mogu se različito gibati. Zbog lakšeg razumijevanja, prvo ćemo objasniti kinematiku čestice a zatim kinematiku tijela. Ta su nam znanja potrebna da bi zatim mogli analizirati gibanje sustava složenih od više tijela (koje nazivamo mehanizmi), ali i da bi stekli osnove neophodne za razumijevanje problema u dinamici.

Teorija mehanizama, osim u strojarstvu, ima osobitu važnost i u građevinarstvu, jer se primjenjuje u analizi statički određenih i statički neodređenih sustava, dakle u statičkim proračunima stvarnih konstrukcija u graditeljstvu (to će se učiti u kolegiju Građevna statika).

Da bi u dinamici mogli analizirati sile koje djeluju za vrijeme gibanja tijela, moramo u potpunosti poznavati geometrijske zakonitosti tog gibanja. Temeljna znanja iz dinamike, koje ćemo usvojiti u ovom kolegiju, kasnije će se proširiti u kolegiju Dinamika konstrukcija, u kojem će se učiti kako proračunati različite konstrukcije na djelovanje promjenjivih opterećenja (sile djelovanja vjetra, vode, potresa, rada raznih strojeva, udarnih opterećenja, i slično).

Osnovni pojmovi, oznake i jedinice

GIBANJE

Čestica se giba ako tijekom vremena mijenja položaj u prostoru. Gibanje se opisuje u odabranom koordinatnom sustavu.

Najsloženiji slučaj je promatranje gibanja nekog dijela materije u kojem se svaka čestica giba na zasebni način. Ako materiju modeliramo kao kontinuum onda se svaka čestica materije u geometrijskom smislu može gibati na specifičan način, To možemo opisati slijedećom matematičkom formulacijom:

Položaj čestice u bilo kojem trenutku funkcija je položaja u odabranom početnom trenutku. Taj položaj ima pripadne koordinate x, y, z. Nakon nekog vremena položaj čestice se promjenio i pripadne koordinate su $x + u$, $y + v$, $z + w$. Prirasti u, v, w ovise o vremenu, ali i o početnom položaju promatrane čestice, pa su koordinate položaja čestice u nekom trenutku t određene s tri različite skalarne funkcije od četiri varijable: $x + u(x,y,z,t)$, $y + v(x,y,z,t)$, $z + w(x,y,z,t)$.

U ovom kolegiju se tako složeni slučajevi gibanja neće obrađivati. Ovdje će se proučavati kinematika čestice i nedeformabilnog tijela. Dakle uvodi se idealizacija materije na nedeformabilno tijelo, i koriste se nazivi: apsolutno kruto tijelo i kruto ili čvrsto tijelo.

Položaj čestice za vrijeme gibanja opisan je s tri skalarne funkcije, a gibanje nedeformabilnog tijela u prostoru može se opisati sa šest skalarnih funkcija. Varijabla u ovim funkcijama je vrijeme.

ZAKON GIBANJA

Funkcija koja opisuje prijelaz čestice iz jednog u drugi položaj u prostoru, naziva se zakon gibanja. Zakonom gibanja određen je položaj čestice u svakom trenutku (varijabla funkcije je vrijeme). Zakon gibanja može biti zadan vektorskom ili skalarnom funkcijom. Načini zadavanja zakona gibanja ovise o izboru koordinatnog sustava i detaljnije će biti prikazani u slijedećem poglavlju.

PUTANJA ili TRAJEKTORIJA

To je zamišljena crta ili krivulja koju opisuje čestica za vrijeme gibanja. Prema izgledu putanje odnosno vrsti trajektorije razlikujemo:

Pravocrtno gibanje – putanja je pravac
Krivocrtno gibanje – putanja je krivulja

Prema položaju trajektorije u prostoru moguća je podjela na

Gibanje čestice u prostoru

Gibanje čestice u ravnini

OZNAKE I JEDINICE

U opisu geometrije gibanja koriste se dvije osnovne veličine:

- duljina, za mjerenje udaljenosti i položaja u prostoru (mjeri se u metrima)
- vrijeme (mjeri se u sekundama).

Vrijeme je u mehanici pozitivna skalarna veličina koja se neprekidno jednoliko mijenja i uzima se kao nezavisna varijabla ili argument. Obilježava se slovom *t*.

Sve ostale veličine u kinematici i dinamici funkcije su vremena.

Uobičajene su oznake:

- početni trenutak: t_0 - trenutak od kojeg počinje mjerenje vremena, odnosno promatranje gibanja
- određeni trenutak vremena: t_n - veže se uz neko određeno vrijeme odnosno promatrani trenutak za vrijeme gibanja
- interval vremena: $\Delta t = t_2 - t_1$ - kojim se mjeri vrijeme proteklo između dva određena trenutka ili dvije pojave

Zadavanje položaja čestice u prostoru

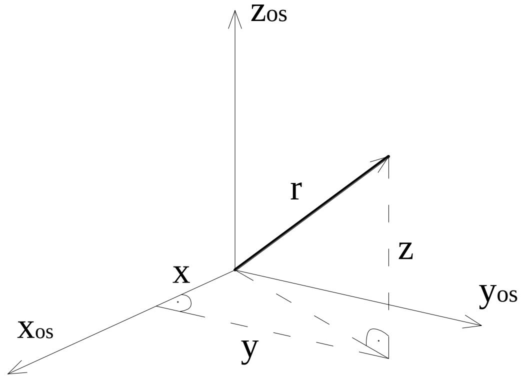
Položaj čestice u prostoru jednoznačno je određen vrhom vektora. Vektori se mogu prikazati koordinatama u tri osnovna koordinatna sustava:

- Kartezijev
- Cilindrični
- Sferni

KARTEZIJEV KOORDINATNI SUSTAV

Naziva se i pravookutni desni koordinatni sustav zbog orijentacije osi x, y, z, koje su u skladu s međusobno okomito postavljenim palcem, kažiprstom i srednjim prstom desne ruke. Ovaj koordinatni sustav najčešće se koristi. Položaj čestice u kartezijevom sustavu određen je s tri koordinate *x*, *y*,i *z*, odnosno s pripadnim vektorom

$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}\ .$$



Iz matematike znamo da se vektor može prikazati i umnoškom jediničnog vektora koji određuje smjer vektora u prostoru, i skalarne funkcije $r(t)$ koja određuje veličinu, odnosno duljinu vektora (apsolutni iznos ili modul vektora).

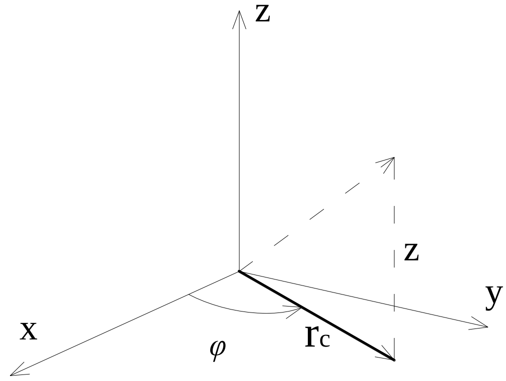
$$\vec{r}(t)=r(t)\cdot\vec{r}_0(t)=r(t)\cdot\left[\cos\alpha(t)\cdot\vec{i}+\cos\beta(t)\cdot\vec{j}+\cos\gamma(t)\cdot\vec{k}\right]$$

Apsolutni iznos ili modul jednak je duljini vektora:

$$r(t)=\left|\vec{r}(t)\right|=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}$$

CILINDRIČNI KOORDINATNI SUSTAV

Položaj točke određen je s koordinatama r_C, φ, z, pri čemu je r_C polumjer valjka, a φ je kut između osi x i ravnine koja prolazi točkom i osi z.



$$r_C=r_C(t),\ \varphi=\varphi(t),\ z=z(t)$$

Ponoviti će se i prijelaz iz cilindričnog u kartezijev sustav i obrnuto:

$$x=r\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\varphi,\ z=z,$$

$$\varphi=arctg\left(\frac{x}{y}\right),\ r=\sqrt{x^2+y^2},\ z=z.$$

Ovaj koordinatni sustav koristi se ako jednostavnije od kartezijevog sustava određuje položaj točke u prostoru.

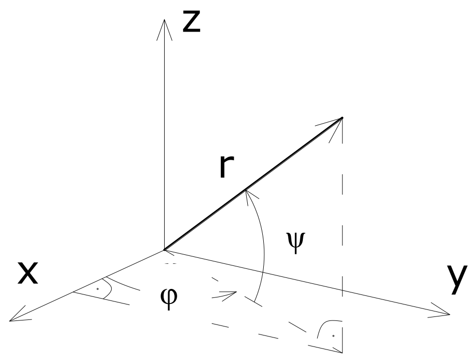
Posebni su slučajevi gibanja ako je::

z = const. - gibanje u ravnini paralelnoj s ravninom x,y
r_C = const. - gibanje po plaštu kružnog valjka
φ = const. - gibanje u vertikalnoj ravnini r, z
z = 0. - gibanje u ravnini x,y zadano polarnim koordinatnim sustavom
z = const. i r_C = const. – gibanje po kružnici polumjera r_C

SFERNI KOORDINATNI SUSTAV

Položaj čestice određen je polumjerom zamišljene kugle i s dva kuta

$$r=r(t),\quad \varphi=\varphi(t),\quad \psi=\psi(t)$$



Slično kao kod cilindričnog koordinatnog sustava, iz geometrijskih odnosa postavlja se veza između koordinata za prijelaz iz sfernog u kartezijev koordinatni sustav, i obrnuto iz kartezijevog u sferni koordinatni sustav:

$$x = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi, \qquad z = r \cdot \sin\psi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \psi = arctg\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Podsjetnik na osnove vektorskog računa

Vektorski produkt vektora $\vec{d} = x_d\vec{i} + y_d\vec{j} + z_d\vec{k}$ i vektora $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ određen je razvojem determinante:

$$\vec{d} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_d & y_d & z_d \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(y_d \cdot b_z - z_d \cdot b_y\right)\vec{i} - \left(x_d \cdot b_z - z_d \cdot b_x\right)\vec{j} + \left(x_d \cdot b_y - y_d \cdot b_x\right)\vec{k}\ .$$

Rezultat vektorskog produkta dvaju vektora je vektor, koji je prema ¨pravilu desne ruke¨ orijentiran okomito na oba vektora. Modul vektorskog produkta jednak je umnošku iznosa oba vektora i sinusa kuta između tih vektora

$$\left|\vec{d} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{d}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| sin\,\alpha\,.$$

Skalarni produkt dva vektora izračunava se tako da se istoimene koordinate dvaju vektora pomnože i rezultati množenja zbroje:

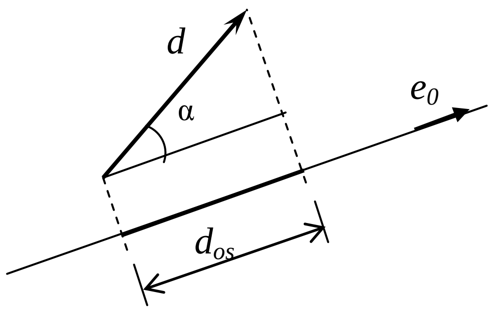
$$\vec{d} \cdot \vec{b} = x_d \cdot b_x + y_d \cdot b_y + z_d \cdot b_z$$

Rezultat skalarnog produkta dvaju vektora je skalar. Iznos skalarnog produkta jednak je umnošku modula oba vektora i kosinusa kuta između tih vektora.

$$\left|\vec{d} \cdot \vec{b}\right| = \left|d\right| \cdot \left|\vec{b}\right| cos\,\alpha$$

Skalarni produkt nekog vektora i jediničnog vektora neke osi jednak je duljini geometrijske projekcije vektora na tu os.

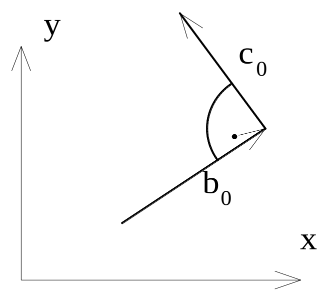
$$\vec{d} \cdot \vec{e}_0 = d \cdot cos\,\alpha = d_{os}$$



Derivacija vektora $\vec{r}$ po vremenu, novi je vektor $\vec{v}$ čije su koordinate određene derivacijom funkcija kojima su zadane koordinate vektora $\vec{r}$.
Ako vektor $\vec{r}$ ima konstantni modul *r*, a orijentacija mu je zadana jediničnim vektorom koji mijenja smjer,

$$\vec{r} = r \cdot \vec{b}_0$$

primjenjuje se pravilo za deriviranje složene funkcije. Dakle, ako jedinični vektor b_0 zatvara sa osi *x* promjenjivi kut $\varphi(t)$



$$\vec{b}_0 = \cos\varphi(t)\vec{i} + \sin\varphi(t)\vec{j} \ ,$$

derivacija po vremenu je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{d\vec{b}_0}{dt},$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{dt} = (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})\frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \vec{c}_0 \ .$$

Vidimo da je derivacija jediničnog vektora b_0 po vremenu jednaka produktu kutne brzine i jediničnog vektora c_0 koji je nastao rotacijom vektora b_0 za 90^0 u smjeru promjenjivog kuta. Lako je provjeriti da će se jednaki rezultat dobiti i pomoću vektorskog produkta $\vec{\omega} \times \vec{b}_0$, pri čemu je vektor kutne brzine orijentiran u smjeru normale na ravninu $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{b}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \cdot \omega \ .$$

Dakle derivacija vektora konstantne duljine i promjenjivog smjera jednaka je vektorskom produktu kutne brzine i vektora položaja

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{d\vec{b}_0}{dt} = r \cdot \vec{\omega} \times \vec{b}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

KINEMATIKA TOČKE

ZADAVANJE ZAKONA GIBANJA

Parametarski način zadavanja gibanja

Položaj čestice u prostoru određen je koordinatama u odabranom koordinatnom sustavu. Svaka koordinata zadaje se nekom skalarnom funkcijom koja ovisi o vremenu, tako da se položaj čestice u prostoru može odrediti za bilo koji trenutak.

$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$ - parametarski zakon gibanja u kartezijevom sustavu

$r_C = r_C(t),\ \varphi = \varphi(t),\ z = z(t)$ - parametarski zakon gibanja u cilindričnom sustavu

$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t),\ \psi = \psi(t)$ - parametarski zakon gibanja u sfernom sustavu

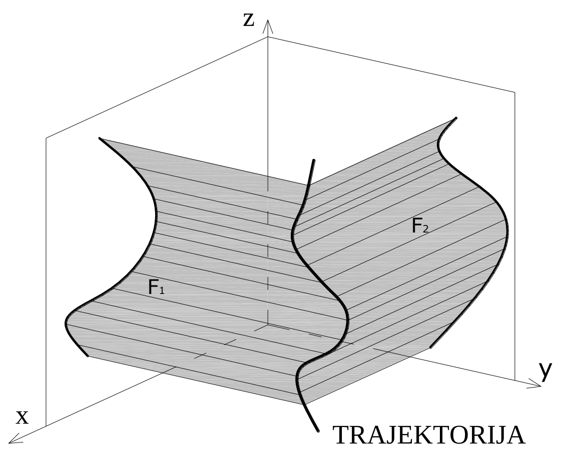
Pomoću ovih funkcija u potpunosti su određena sva kinematička svojstva čestice (položaj, brzina i ubrzanje). Zakon gibanja iz cilindričnog ili sfernog sustava uvijek možemo transformirati u kartezijev koordinatni sustav, prema vezama između koordinata prikazanim u prošlom poglavlju.

Trajektoriju po kojoj se čestica giba može se odrediti kao presječnicu dviju ploha. Jednadžbe ploha se mogu prikazati i u implicitnom obliku:

$$F_1(x,z) = 0. , \qquad F_2(y,z) = 0.$$

Sve točke koje istovremeno zadovoljavaju oba gornja izraza, leže na trajektoriji po kojoj se čestica giba. Analitički izraz za trajektoriju odredi se eliminiranjem varijable vremena t iz zakona gibanja. Npr. iz $z = z(t)$, inverzijom se odredi funkcija *t(z)*: $t = \varphi_3(z)$, a nakon zamjene u *x(t)* i *y(t)* dobivaju se jednadžbe trajektorije:

$$x = x[\varphi_3(z)],\ y = y[\varphi_3(z)]$$



Vektorski način zadavanja gibanja

Ako parametarski zakon gibanja pridružimo koordinatama vektora u kartezijevom prostoru, tada je isto gibanje prikazano vektorskim zakonom gibanja.

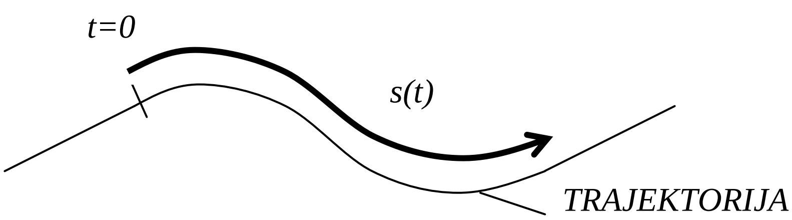
$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}\ .$$

Zbog jednostavne povezanosti parametarskog zadavanja zakona gibanja u kartezijevom sustavu i vektorskog zakona gibanja, u daljnjem tekstu će se gibanje koje je zadano parametarskim ili vektorskim zakonom analizirati u vektorskom obliku, osim u posebnim slučajevima gibanja po sferi, valjku i kružnici, kada će se primjeniti pogodniji sferni, cilindrični ili polarni koordinatni sustav.

Prirodni način zadavanja gibanja

Gibanje je zadano skalarnom funkcijom po vremenu *s(t),* koja za svaki trenutak određuje položaj čestice na nekoj zadanoj trajektoriji odnosno putanji. Ovaj način zadavanja gibanja možemo jednostavno ilustrirati gibanjem automobila koji je idealiziran česticom, po cesti koja je prikazana određenom trajektorijom.

Najčešće se prijeđeni put po trajektoriji mjeri od početnog položaja u zadanom smjeru, i tada vrijedi $t_0=0$ i $s(t_0)=0$. Trajektoriju možemo zamisliti kao koordinatnu krivulju, tako da je položaj čestice u svakom trenutku određen duljinom *s(t)* mjerenom od početnog položaja po luku krivulje kojom je opisana putanja gibanja.



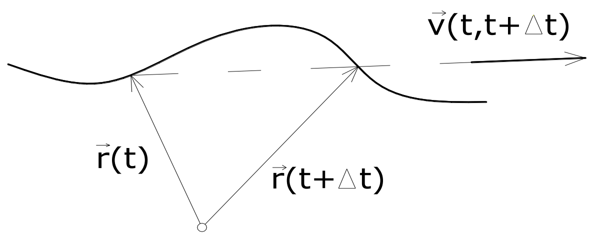
ODREĐIVANJE BRZINE I UBRZANJA

Gibanje je zadano vektorskim zakonom gibanja

$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$$

Brzina čestice jednaka je promjeni vektora položaja čestice $\vec{r}(t)$ u vremenu. Razlikujemo srednju brzinu i trenutnu brzinu.

Srednja brzina definira se za konačni interval vremena Δt u kojem je čestica učinila neki konačni pomak iz prvog položaja koji je određen vrhom vektora $\vec{r}(t)$ u drugi položaj koji je određen vrhom vektora $\vec{r}(t+\Delta t)$.

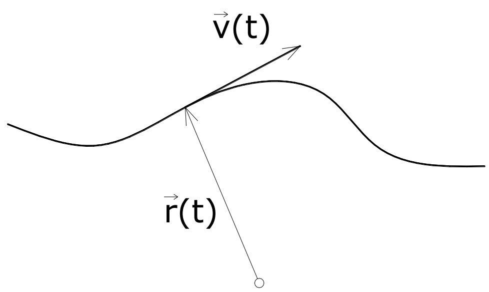


$$\vec{v}(t,t+\Delta t)=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Trenutna brzina jednaka je limesu srednje brzine kada vremenski interval teži nuli. Iz matematike znamo da se na taj način definira prva derivacija vektora položaja čestice po vremenu.

Trenutna brzina definira se za neki trenutak *t*, i jednaka je prvoj derivaciji vektora položaja čestice po vremenu.

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\dot{\vec{r}}$$



Vektor trenutne brzine usmjeren je paralelno s tangentom na trajektoriju u promatranom trenutku.

Iz derivacija funkcija kojima su definirane koordinate vektora položaja određene su funkcije koje definiraju koordinate vektora brzina u bilo kojem trenutku. Kažemo da je određen vektorski zakon promjene brzine u vremenu, ili vektorska funkcija brzine.

$$\vec{v}(t)=\dot{x}\,\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}+\dot{z}\,\vec{k}=v_x(t)\,\vec{i}+v_y(t)\,\vec{j}+v_z(t)\,\vec{k}$$

Svaki vektor može se prikazati umnoškom modula ili apsolutnog iznosa *v(t)* i jediničnog vektora, dakle može se napisati

$$\vec{v}(t)=v(t)\cdot\vec{v}_0(t)=v(t)\cdot\vec{\tau}_0(t).$$

U svakom trenutku mijenja se i veličina brzine i smjer jediničnog vektora brzine. Veličina brzine *v(t)* skalarna je funkcija vremena a jedinični vektor brzine jednak je jediničnom vektoru tangente na trajektoriju $\vec{\tau}_0(t)$ orijentiranom u smjeru gibanja.

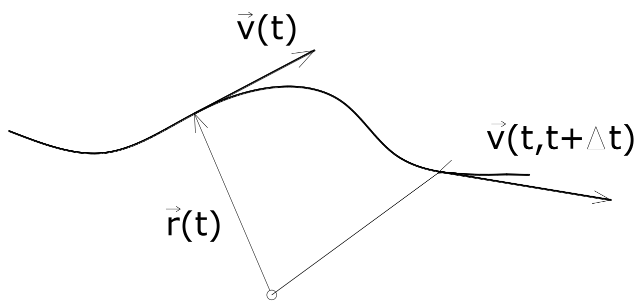
$$v(t)=\sqrt{v_x^{\,2}+v_x^{\,2}+v_z^{\,2}}$$

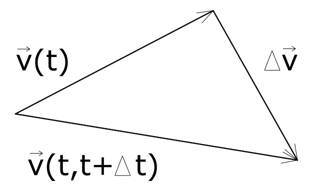
Ubrzanje čestice je promjena trenutne brzine u vremenu. Kao kod definicije brzine i ovdje razlikujemo srednje ubrzanje i trenutno ubrzanje.

Srednje ubrzanje određuje se, analogno srednjoj brzini, za neki konačni vremenski interval Δt. Za to vrijeme čestica iz prvog položaja dospije u drugi položaj na trajektoriji. Trenutna brzina u svakom od tih položaja određena je vektorom koji ima različit iznos i smjer (tangente u svakom položaju različito su usmjerene). Promjena trenutne brzine jednaka je razlici ta dva vektora

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\,.$$

Omjer vektora promjene trenutne brzine $\Delta\vec{v}$ i vremena Δt za koje čestica dospije iz prvog u drugi položaj je srednje ubrzanje u tom intervalu vremena.





$$\vec{a}(t,t+\Delta t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Trenutno ubrzanje je limes srednjeg ubrzanja kada vremenski interval teži nuli, ili prva derivacija vektora brzine po vremenu, odnosno druga derivacija vektora zakona gibanja po vremenu:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

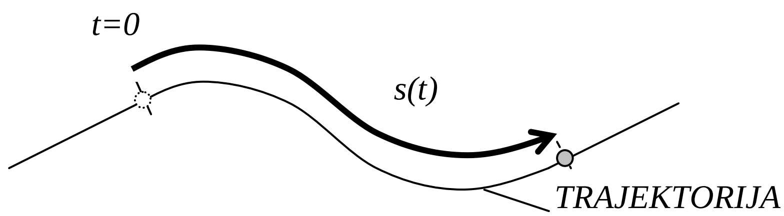
$$\vec{a} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k} \;=\; \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \;=\; a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Deriviranjem funkcija kojima su definirane koordinate vektorske funkcije brzine odrede se funkcije koje definiraju koordinate vektora ubrzanja u bilo kojem trenutku. Kažemo da je određen vektorski zakon promjene ubrzanja u vremenu, ili vektorska funkcija ubrzanja.

U općem slučaju vektor ubrzanja može zatvarati bilo koji kut s pripadnom tangentom na trajektoriju.

Gibanje je zadano na prirodni način

Kod prirodnog načina zadavanja gibanja zadana je trajektorija po kojoj se čestica giba i skalarna funkcija *s(t)*, odnosno skalarni zakon gibanja koji određuje kako se čestica giba po toj trajektoriji. Tim skalarnim zakonom određen je položaj čestice na trajektoriji u svakom trenutku.



Derivacijom zadanog skalarnog zakona gibanja po vremenu odredi se skalarna funkcija brzine, odnosno zakon promjene brzine gibanja čestice po trajektoriji:

$$v(t)=\frac{ds}{dt}.$$

Vektorsku funkciju brzine odredit će se tako da se skalarnoj funkciji pridruži orijentacija jediničnog vektora tangente na trajektoriju. Dakle vektor brzine dobije se umnoškom skalarne funkcije brzine po trajektoriji *v(t)*, i jediničnog vektora tangente na trajektoriju u bilo kojem trenutku.

$$\vec{v}(t)=\frac{ds}{dt}\cdot\vec{\tau}_0(t)$$

Iz derivacije skalarne funkcije brzine po vremenu odredi se skalarna funkcija ubrzanja čestice po trajektoriji, koja se naziva tangencijalno ubrzanje:

$$a_T(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Važno je naglasiti da ubrzanje po trajektoriji određeno derivacijom skalarnog zakona brzine predstavlja samo jednu komponentu vektorske funkcije ukupnog ubrzanja.

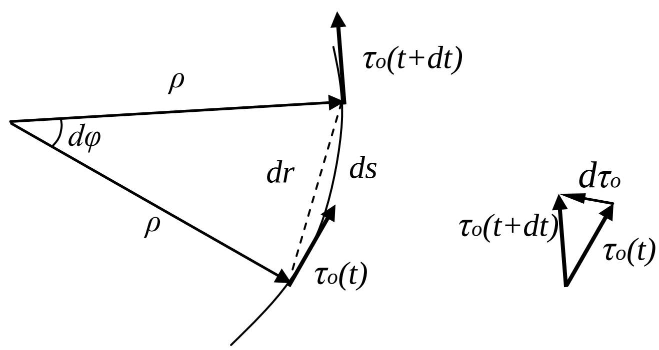
Ukupno ubrzanje odrediti će se iz derivacije vektorske funkcije brzine po vremenu, pri čemu treba uvažavati da funkcija brzine mijenja veličinu i orijentaciju u vremenu dakle primjenjujemo pravilo derivacije produkta:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v(t)\cdot\vec{\tau}_0)=\frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}_0+v\cdot\frac{d\vec{\tau}_0}{dt}$$

Prvi pribrojnik je razumljiv: skalarna funkcija ubrzanja po trajektoriji množi se jediničnim vektorom tangente. U drugom se pribrojniku pojavljuje derivacija jediničnog vektora po vremenu, dakle novi vektor.

Ovdje ćemo pojasniti neformalni izvod derivacije jediničnog vektora tangente na krivulju u prostoru. Zamislimo da smo sve jedinične vektore tangenti u raznim točkama krivulje dakle u raznim trenutcima nanijeli iz istog ishodišta: njihovi vrhovi određuju točke na krivulji koja leži na površini kugle jediničnog radijusa. Iz definicije derivacije zaljučujemo da derivacija jediničnog vektora u bilo kojem trenutku mora tangirati tu krivulju, dakle mora biti okomita na pripadni jedinični vektor tangente u promatranom trenutku. To znači da će derivacija jediničnog vektora tangente imati smjer normale.

Iz Matematike znamo da se u svakoj točki krivulje može odrediti pripadni radijus zakrivljenosti i da je vektor normale u nekoj točki krivulje usmjeren prema centru zakrivljenosti trajektorije u promatranoj točki. To ćemo prikazati na slijedećem crtežu:



Ako odaberemo dvije po volji bliske točke na trajektoriji koje pripadaju trenutku t i trenutku t+dt i odredimo tangente na trajektoriju u svakoj točki, traženu derivaciju možemo odrediti iz promjene prirasta tangente u beskonačno kratkom intervalu vremena. Kod glatkih krivulja je i funkcija radijusa zakrivljenosti glatka pa vrijedi pretpostavka da će se pripadni radijusi u promatranim točkama vrlo malo razlikovati. Za ovo razmatranje može se uzeti da su zbog infinitezimalnog pomaka po trajektoriji radijusi jednaki, tako da sa pripadnom tetivom dr čine jednakokračan trokut. Baza trokuta je tetiva dr čija se duljina, zbog blizine točaka, može izjednačiti s duljinom luka trajektorije ds.

Prirast jediničnog vektora tangente $\vec{\tau}_0$ je razlika vektora $\vec{\tau}_0(t+dt)$ i vektora $\vec{\tau}_0(t)$ označena na skici s $d\vec{\tau}_0$. Trokut u kojemu je baza $d\vec{\tau}_0$ sličan je jednakokračnom trokutu kojemu je baza tetiva dr, pa se može postaviti omjer

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{|d\vec{\tau}_0|}{|\vec{\tau}_0|}.$$

Iz crteža vidimo da je vektor $d\vec{\tau}_0$ usmjeren prema središtu zakrivljenosti, dakle paralelan je s normalom na krivulju. Ako s $\vec{n}_0$ označimo jedinični vektor normale onda je vektor $d\vec{\tau}_0$ određen izrazom:

$$d\vec{\tau}_0 = \frac{ds}{\rho}\cdot\vec{n}_0,$$

dakle derivacija jediničnog vektora $\vec{\tau}_0$ po vremenu jednaka je:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{ds}{dt\cdot\rho}\cdot\vec{n}_0 = \frac{v}{\rho}\cdot\vec{n}_0.$$

Derivacija jediničnog vektora tangente na trajektoriju jednaka je omjeru brzine gibanja po trajektoriji i radijusa zakrivljenosti, a usmjerena je okomito na tangentu, dakle isto kao normala na trajektoriju. Ako se ovaj izraz uvrsti u drugi pribrojnik vektorske funkcije ubrzanja, dobije se ukupno ubrzanje čestice čije je gibanje zadano na prirodni način:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}_0 = a_T \cdot \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}_0 .$$

Pri tome su a_T i v skalarne funkcije ubrzanja gibanja po trajektoriji i brzine gibanja po trajektoriji. Vidimo da u općem slučaju gibanja po trajektoriji vektor ubrzanja ima dvije međusobno okomite komponente: tangencijalnu i normalnu, što se može zapisati kao:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n .$$

Apsolutni iznos ubrzanja ¨po trajektoriji¨ a_T jednak je samo apsolutnom iznosu tangencijalne komponente ubrzanja, dakle iznosu jednog dijela ubrzanja a ne iznosu ukupnog vektora ubrzanja.

Radijus zakrivljenosti trajektorije izražen kinematičkim elementima

Ako izraz za vektorsku funkciju ubrzanja, iskazan pomoću funkcija tangencijalne i normalne komponente

$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}_0 ,$$

od naprijed vektorski pomnožimo s vektorom brzine $\vec{v}$,

$$\vec{v} \times \vec{a} = a_T \cdot (\vec{v} \times \vec{\tau}_0) + \frac{v^2}{\rho} \cdot (\vec{v} \times \vec{n}_0)$$

prvi pribrojnik iščezava jer sadrži vektorski produkt kolinearnih vektora. Da bi odredili veličinu radijusa promatramo apsolutne iznose lijeve i desne strane jednadžbe. Kako je $\vec{n}_0$ jedinični vektor okomit na vektor brzine $\vec{v}$, modul njihovog vektorskog produkta jednak je apsolutnom iznosu brzine v, odnosno

$$|\vec{v} \times \vec{n}_0| = |\vec{v}| = |v| = v ,$$

dakle slijedi:

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \frac{v^3}{\rho}, \quad \text{ili} \quad \rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|},$$

Ovim izrazom radijus zakrivljenosti u bilo kojoj točki trajektorije iskazan je pomoću vektora brzine i vektora ubrzanja u toj točki.

Nakon zamjene vektorskih funkcija brzine i ubrzanja i razvoja vektorskog produkta radijus zakrivljenosti trajektorije može se iskazati i pomoću koordinata vektora brzine i ubrzanja

$$\rho = \frac{\left(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(v_y \cdot a_z - v_z \cdot a_y\right)^2 + \left(v_z \cdot a_x - v_x \cdot a_z\right)^2 + \left(v_x \cdot a_y - v_y \cdot a_x\right)^2}} \, .$$

Prijelaz iz kartezijevog sustava na prirodni način zadavanja gibanja

Za zadani parametarski zakon gibanja u kartezijevom sustavu *x(t), y(t), z(t)* mogu se odrediti derivacije funkcija po vremenu $\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)$.

Prirasti koordinata koji odgovaraju prirastu vremena *dt* su:

$$dx = \dot{x} \cdot dt, \qquad dy = \dot{y} \cdot dt, \qquad dz = \dot{z} \cdot dt \, .$$

Iz prirasta koordinata određuje se prirast prijeđenog puta po trajektoriji odnosno odgovarajuća duljina luka:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt \, .$$

Funkcija prijeđenog puta po trajektoriji, odnosno skalarna funkcija zakona gibanja, određuje se integracijom prirasta *ds*:

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt \, .$$

Ovaj je izraz razumljiv, iako bi formalno bilo korektnije u podintegralnoj funkciji uvesti drugu varijablu za vrijeme, npr. $t = \vartheta$:

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2} \, d\vartheta \, .$$

Jednostavno se uočava da je podintegralna funkcija jednaka brzini gibanja čestice po trajektoriji *v(t)*, što je u skladu sa definicijom brzine ako je gibanje zadano na prirodni način.

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, dt = \int_0^t \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} \, dt = \int_0^t v(t) \, dt$$

Diferencijalne i integralne relacije u kinematici

Zadan je vektor brzine $\vec{v}(t)$.

Iz brzine se na poznati način može odrediti ubrzanje. Za određivanje vektorske funkcije zakona gibanja $\vec{r}(t)$, potrebno je osim brzine poznavati i položaj čestice za neki zadani trenutak t_1, odnosno $\vec{r}(t_1)$. Formalno gledano to može biti bilo koji trenutak. U mnogim praktičnim zadacima pokušava se proračunati gibanje promatranog objekta uz poznavanje početnog položaja, pa se taj potrebni podatak obično naziva početni uvjet. Iz definicije vektora brzine

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

slijedi:

$$d\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot dt,$$

te se funkcija zakona gibanja $\vec{r}(t)$ može odrediti integriranjem

$$\int d\vec{r} = \int \vec{v}(t) \cdot dt + \vec{C},$$

odnosno

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + \vec{C} = \vec{f}(t) + \vec{C}.$$

Za određivanje vektora $\vec{C}$ potreban je podatak o položaju čestice u nekom konkretnom trenutku t_1, dakle $\vec{r}(t_1)$, te slijedi:

$$\vec{C} = \vec{r}(t_1) - \vec{f}(t_1)$$

Ako je poznat položaj čestice $\vec{r}(t_1)$ u nekom trenutku t_1, tada položaj za neki odabrani trenutak t_2 možemo odrediti i pomoću određenog integrala:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt,$$

$$\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt,$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\, dt.$$

Ako se odabere promjenjiva gornja granica, dobije se tražena vektorska funkcija zakona gibanja $\vec{r}(t)$ iskazana pomoću određenog integrala, što je formalno puno jednostavnije: $\underline{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \vec{v}(t)\, dt}$.

Zadan je vektor ubrzanja $\vec{a}(t)$

Postupak određivanja brzine iz ubrzanja analogan je određivanju funkcije radijvektora iz funkcije brzina, ali je potreban i podatak o brzini u nekom trenutku.

$$\vec{v}(t)=\int \vec{a}(t)dt+\vec{C}_1 = \vec{p}(t)+\vec{C}_1$$

Za određivanje vektorske konstante $\vec{C}_1$ treba poznavati podatke o vektoru brzine u nekom trenutku, npr $\vec{v}(t_1)$, pa slijedi:

$$\vec{C}_1=\vec{v}\,(t_1)-\vec{p}(t_1)\,.$$

Određivanje zakona gibanja iz tako dobivne funkcije brzine je već objašnjeno, a u općem obliku glasi:

$$\vec{r}(t)=\int \left[\,\int \vec{a}(t)dt\,\right]dt+\vec{C}_1\,t+\vec{C}_2 = \vec{w}(t)+\vec{C}_1\,t+\vec{C}_2\,.$$

Ako je vektor $\vec{C}_1$ već određen, za preostalu vektorsku konstantu $\vec{C}_2$ potrebni su podaci o položaju u nekom trenutku $\vec{r}(t_2)$, kao što je već pokazano.

Obje konstante se mogu odrediti i uz poznavanje pogodnih podataka o trajektoriji, odnosno ako su zadani položaji čestice za dva trenutka t_1 i t_2. Potrebno je riješiti nehomogeni sustav linearnih algebarskih jednadžbi s nepoznanicama $\vec{C}_1$ i $\vec{C}_2$:

$$\vec{r}(t_1)=w(t_1)+\vec{C}_1 t_1+\vec{C}_2\ ,$$

$$\vec{r}(t_2)=w(t_2)+\vec{C}_1 t_2+\vec{C}_2\ .$$

Ako je poznat vektor brzine za neki trenutak t_1, i vektor položaja čestice za neki trenutak t_2, tada se, uz primjenu određenog integrala s promjenjivom gornjom granicom, dobiju slijedeći formalno puno jednostavniji i jasniji izrazi za tražene funkcije brzine i zakona gibanja:

$$\underline{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_1)+\int_{t_1}^{t}\vec{a}(t)dt\ ,}$$

$$\underline{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_2) + \int_{t_2}^{t}\vec{v}(t)dt\ ,}$$

ili

$$\underline{\vec{r}(t)=\vec{r}(t_2)+\vec{v}(t_1)\cdot(t-t_2)+\int_{t_2}^{t}\left[\int_{t_1}^{t}\vec{a}(t)dt\right]dt\ .}$$

POSEBNI OBLICI GIBANJA ČESTICE

GIBANJE PO PRAVCU

Opći zakon gibanja

Ako odaberemo kartezijev koordinatni sustav tako da os *x* leži na pravcu po kojem se čestica giba, tada je zakon gibanja u vektorskom obliku

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}\ ,$$

ali možemo napisati i

$$s(t)=x(t)\ .$$

Uz tako odabranu os, umjesto vektorske funkcije dovoljno je promatrati samo skalarnu funkciju zakona gibanja po pravcu (prirodna formulacija gibanja), pa slijedi:

$$v(t)=\frac{ds}{dt},$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

Uočavamo da gibanje po pravcu možemo smatrati posebnim oblikom prirodnog gibanja po trajektoriji sa beskonačno velikim radijusom zakrivljenosti, tako da je $a_n=0$.

Jedinični vektor vektora brzine i vektora ubrzanja leži na zadanom pravcu i orijentiran je u smjeru gibanja zadanog zakonom *s(t)*, pri čemu će se uvažiti promjena orijentacije ako derivacijom funkcija mijenja predznak. Ako su umjesto zakona gibanja zadane druge kinematičke veličine, vrijede svi postupci objašnjeni pri općenitoj vektorskoj formulaciji zakona gibanja, u analognoj skalarnoj formulaciji. Dakle, umjesto gibanja u trodimenzionalnom vektorskom prostoru, promatramo gibanje u jednostavnijem jednodimenzionalnom vektorskom prostoru.

- Ako je zadana je skalarna funkcija brzine *v(t)*:
zakon gibanja po pravcu odrediti će se itegriranjem funkcije brzine, a funkcija ubrzanja deriviranjem funkcije brzine. Za određivanje skalarnog zakona gibanja potreban je podatak o prijeđenom putu u nekom trenutku (sve je analogno postupku pri vektorskoj formulaciji).

$a(t)=\dfrac{dv}{dt}$, i $s(t)=\int v(t)dt+C_1$, ili iz određenog integrala $s(t)=s(t_1)+\int_{t_1}^{t} v(t)dt$.

- Ako je zadana je skalarna funkcija ubrzanja *a(t)*:

Potrebna su dva podatka; brzina u nekom trenutku i prijeđeni put u nekom trenutku iz kojih se odrede integracijske konstante C_1 i C_2 u funkciji brzine i funkciji prijeđenog puta, ili se primjeni jednostavnija formulacija pomoću određenog integrala:

$$v(t)=\int a(t)dt+C_1, \quad s(t)=\int\left(\int a(t)dt\right)dt+C_1t+C_2,$$

ili

$$\underline{v(t)=v(t_1)+\int_{t_1}^{t}a(t)dt}, \quad \underline{s(t)=s(t_1)+\int_{t_1}^{t}v(t)dt}.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje

Brzina čestice tijekom vremena je konstantna.

$$v(t)=const=v_0$$

Ubrzanje identično iščezava za cijelo područje.

$$a(t)\equiv 0$$

$$s(t)=v_0\cdot t+C_1.$$

Za određivanje konstante u zakonu gibanja potreban je podatak o prijeđenom putu. Ako je za $t=0$ poznat rubni uvjet s_0 onda izraz glasi

$$s(t)=v_0\cdot t+s_0.$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

Ubrzanje čestice tijekom vremena je konstantno

$$a(t)=const=a_0$$

$$v(t)=a_0\cdot t+C_1, \qquad s(t)=\frac{a_0\cdot t^2}{2}+C_1\cdot t+C_2.$$

Za određivanje vrijednosti konstanti potrebna su dva podatka.

Ako su za $t=0$ poznati rubni uvjeti $s(t)=s_0$ i $v(t)=v_0$, onda izrazi za brzinu i ubrzanje glase:

$$v(t)=a_0\cdot t+v_0, \qquad s(t)=\frac{a_0\cdot t^2}{2}+v_0\cdot t+s_0.$$

Ako su zadana dva podatka o položaju na pravcu: $s(t_1)$, $s(t_2)$, treba integracijske konstante C_1 i C_2 odrediti iz odgovarajućeg sustava nehomogenih linearnih algebarskih jednadžbi:

$$C_1\cdot t_1+C_2=s(t_1)-\frac{a_0\cdot t_1^2}{2}$$

$$C_1\cdot t_2+C_2=s(t_2)-\frac{a_0\cdot t_2^2}{2}$$

Harmonijsko gibanje

Važan slučaj pravocrtnog gibanja kod kojeg je ubrzanje proporcionalno negativno uzetom prijeđenom putu.

$$a = -k^2 \cdot x\,,$$

odnosno:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x\,.$$

Konstanta je uzeta kao kvadrat osnovne konstante jer se tako dobivaju pregledniji izrazi. Treba riješiti običnu linearnu homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima. Rješenje je poznato iz kolegija matematika:

$$x = A \cdot \cos kt + B \cdot \sin kt\,,$$

$$\dot{x} = -A \cdot k \cdot \sin kt + B \cdot k \cos kt\,,$$

$$\ddot{x} = -A \cdot k^2 \cdot \cos kt - B \cdot k^2 \cdot \sin kt$$

Pri tome su A i B integracijske konstante, a za njihovo određivanje potrebna su dva podatka. Standardno promatra se slučaj kada je za $t = 0$, zadano $x(t) = x_0$, i $v(t) = \dot{x} = v_0$. Nakon uvrštavanja u gornje izraze i rješavanja dobiju se konstante:

$$A = x_0 \quad \text{i} \quad B = \frac{v_0}{k}\,.$$

Izraz za položaj na pravcu u tom slučaju glasi:

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{v_0}{k} \cdot \sin kt\,.$$

Rješenje se može izraziti i samo pomoću jedne trigonometrijske funkcije, npr sinusa. Izraz će se iz osnovnog rješenja izvesti tako da se dosadašnje konstante A i B prikažu pomoću dvije nove konstante D i α.

$$A = D \cdot \sin\alpha, \quad B = D \cdot \cos\alpha$$

Nakon uvrštavanja u osnovni izraz za *x(t)*, dobiva se

$$x = D \cdot \sin\alpha \cdot \cos kt + D \cdot \cos\alpha \cdot \sin kt$$

Gornji izraz se može napisati pomoću sinusa od zbroja dvaju kuteva:

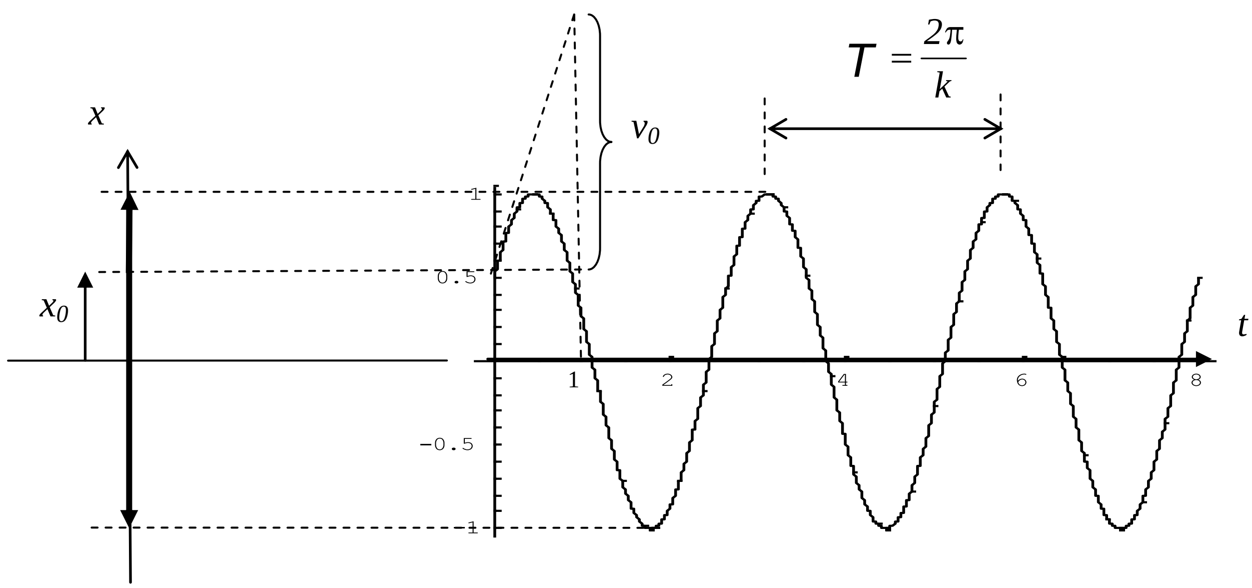
$$x = D \cdot \sin(\alpha + kt)$$

Konstanta D naziva se amplituda oscilacija, a kut α naziva se pomak u fazi. Za ranije obrađeni specijalni slučaj sa zadanim početnim pomakom x_0 i početnom brzinom v_0 za trenutak $t=0$, nove konstante D i α odrediti će se iz jednadžbi:

$$x_0 = D \cdot \sin\alpha \,,$$
$$\frac{v_0}{k} = D \cdot \cos\alpha \,.$$

Kvadriranjem i zbrajanjem gornjih izraza dobiva se konstanta D, a dijeljenjem gornjih izraza dobiva se izraz za $tg\,\alpha$, odnosno i za kut α.

$$D = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2$$
$$\alpha = arctg\,\frac{k \cdot x_0}{v_0}\,.$$



Kao što iz crteža vidimo harmonijsko gibanje je učestalo gibanje koje se periodično ponavlja samo po jednom omeđenom dijelu pravca. Takvo gibanje nazivamo oscilacijsko gibanje ili oscilacije. Vrijeme potrebno da čestica prođe jedan ciklus gibanja, odnosno da se vrati u istu točku pravca i giba se opet u istom smjeru, naziva se period gibanja, ili period oscilacija.

Geometrijska interpretacija diferencijalnih i integralnih odnosa kod gibanja po pravcu

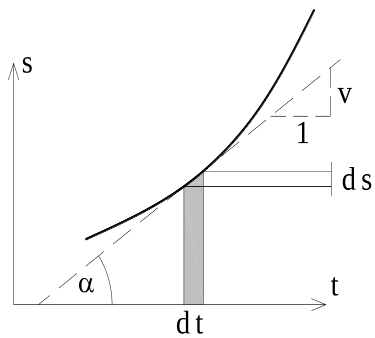
Geometrijski odnosi promatraju se u pravokutnom koordinatnom sustavu, argument je vrijeme.

DIFERENCIJALNI ODNOSI:

Zadana je skalarna funkcija zakona gibanja *s(t)*, odnosno funkcija prijeđenog puta u vremenu. Znamo da zakon brzine odredimo derivacijom zakona gibanja

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad .$$

Iz Matematike znamo da derivacijom neke funkcije *f(t)* dobijemo funkciju kojom je određen nagib tangente na grafu funkcije *f(t)*.



Na crtežu vidimo da je na taj način određen nagib tangente u promatranoj točki funkcije $s(t_1)$.

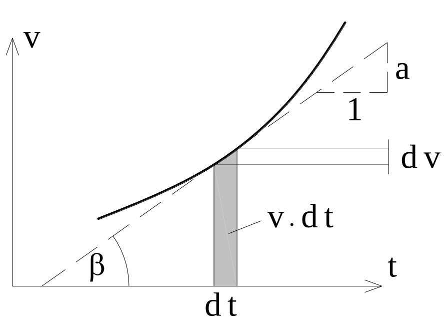
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_1} = tg\alpha_{t=t_1} = v(t_1)$$

Tangens nagiba tangente u točki funkcije $s(t_1)$ u nekom trenutku t_1, jednak je brzini u istom trenutku $v(t_1)$.

Zadana je skalarna funkcija brzine u vremenu *v(t)*. Znamo da se derivacijom funkcije brzine definira funkcija ubrzanja.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad .$$

Tangens nagiba tangente u promatranoj točki funkcije $v(t_1)$, jednak je ubrzanju u istom trenutku t_1.

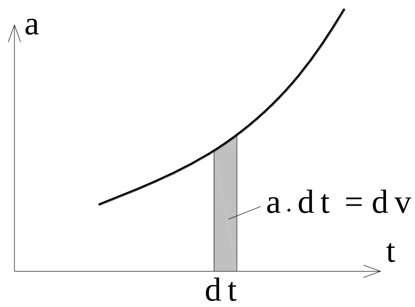


$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_1} = tg\beta_{t=t_1} = a(t_1)$$

Element površine ispod grafa funkcije *v(t)*, unutar intervala *dt* jednak je prirastu zakona gibanja:

$$v \cdot dt = ds$$

Za funkciju ubrzanja *a(t)* nagib tangente u ovom prikazu ne interpretira se, iako i ta veličina ima primjenu u tehnici.

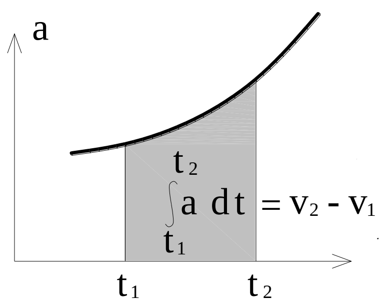


Element površine ispod grafa funkcije ubrzanja *a(t)* jednak je prirastu brzine unutar tog intervala vremena:

$$a \cdot dt = dv$$

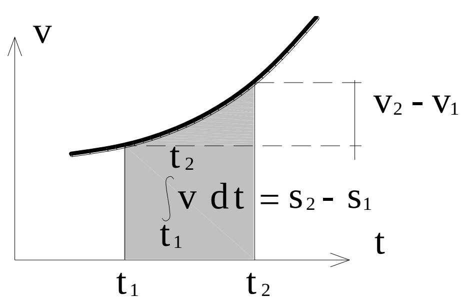
INTEGRALNI ODNOSI:

Iz matematike znamo da je određeni integral neke funkcije jednak površini ispod integrirane funkcije unutar područja određenog granicama integracije.



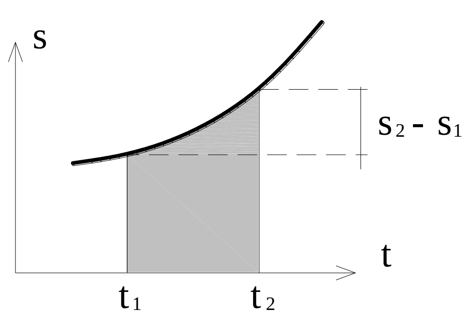
$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v_2 - v_1$$

Površina ispod grafa funkcije ubrzanja unutar intervala vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ jednaka je razlici brzina v_2-v_1, koje pripadaju trenutku t_2 i trenutku t_1, odnosno prirastu brzine u tom intervalu vremena.



$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s_2 - s_1$$

Površina ispod grafa funkcije brzine unutar intervala vremena $\Delta t = t_2 - t_1$ jednaka je razlici s_2 - s_1, dakle razlici prijeđenog puta za vrijeme t_2 i vrijeme t_1, a to je put prijeđen u intervalu vremena $\Delta t = t_2 - t_1$.



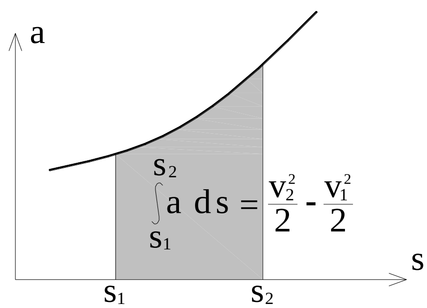
Pri integriranju se uvažavaju uobičajena matematička pravila, dakle integral unutar područja pozitivne funkcije rezultira prirastom, odnosno pribraja se vrijednosti u trenutku t_1, a integral negativne funkcije odbija se od vrijednosti u trenutku t_1.

Geometrijski odnosi mogu se primjeniti na kinematičke funkcije i ako argument nije vrijeme.

Neka je zadana funkcija promjene ubrzanja u ovisnosti prijeđenog puta po pravcu *a(s)*, argument je prijeđeni put u pravokutnom koordinatnom sustavu. Svakom prijeđenom putu uvijek se može pridružiti pripadno vrijeme, brzina i ubrzanje. Vrijede uobičajene zakonitosti za gibanje po pravcu, dakle:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \; ds = v\,dt \text{ , i } \quad a = \frac{dv}{dt}$$

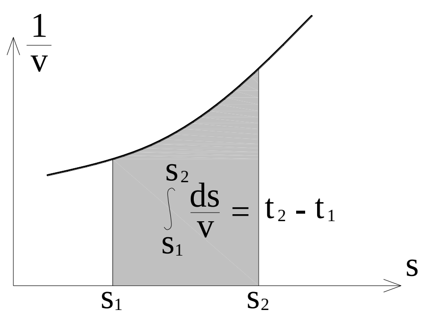
Integral funkcije *a(s)* unutar nekog intervala prijeđenog puta možemo uz navedene zakonitosti prikazati na slijedeći način:



$$\int_{s_1}^{s_2} a \cdot ds = \int_1^2 \frac{dv}{dt} v\,dt = \int_1^2 v\,dv = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

Površina ispod grafa funkcije ubrzanja u intervalu od s_1 do s_2, jednaka je prirastu funkcije $\frac{v^2}{2}$ u intervalu gibanja od jedne do druge točke na pravcu.

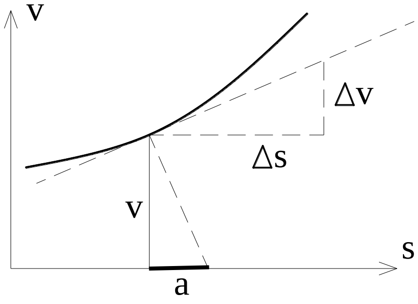
Neka je zadana funkcija recipročne brzine $\frac{1}{v}$ u ovisnosti prijeđenog puta s, tada je



$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds = \int_1^2 \frac{v\,dt}{v} = \int_1^2 dt = t_2 - t_1$$

površina ispod grafa funkcije unutar intervala od s_1 do s_2 jednaka vremenu $\Delta t = t_2 - t_1$ za koje čestica prijeđe put od jedne do druge točke na pravcu.

Neka je zadana funkcija promjene brzine u ovisnosti prijeđenog puta *v(s)* i koristi se geometrijska interpretacija diferencijalnih odnosa.



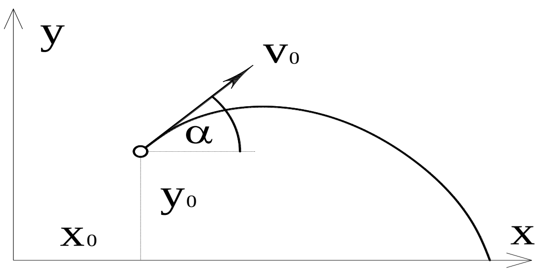
Postavimo tangentu i normalu u nekoj točki funkcije $v(s_1)$. Trokuti na crtežu su slični. Iz geometrijskog značenja derivacije i sličnosti trokuta proizlazi da je odsječak na apscisi *s* jednak ubrzanju *a* u tom trenutku.

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{dv}{ds} = \frac{a \cdot dt}{v \cdot dt} = \frac{a}{v} \qquad \rightarrow \; a = v\,\frac{dv}{ds} = v \cdot tg\alpha$$

KOSI HITAC

Kosi hitac je primjer idealiziranog gibanja čestice u vertikalnoj ravnini uz postojanje gravitacijskog polja. Gibanje ćemo promatrati u desnom koordinatnom sustavu x, y. Od gravitacije potječe konstantno ubrzanje čiji je vektor usmjeren suprotno od pozitivno orijentirane osi y, svi otpori gibanju se zanemaruju (idealizacija).

Zadano je ubrzanje $a_x = 0$, $a_y = -g$, zadane su koordinate čestice u početnom trenutku x_0, y_0, i početna brzina v_0, čiji je vektor određen orjentiranim kutem α koji se mjeri od pozitivno orijentirane osi x. Koordinate vektora početne brzine su prema tome:



$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\,\alpha, \quad v_{0y} = v_0 \cdot sin\,\alpha$$

U ovom slučaju pogodno je odrediti parametarske funkcije brzine i zakona gibanja u dvodimenzionalnom kartezijevom prostoru. U skladu s navedenim općim zakonitostima, ako x koordinata ubrzanja iščezava, x koordinata brzine je konstanta, a x koordinata prijeđenog puta je linearna funkcija vremena. Dakle iz

$$a_x = 0,$$

slijedi

$$v_x(t) = v_0 \cdot cos\,\alpha = const.,$$

odnosno:

$$x(t) = (v_0 \cdot cos\,\alpha) \cdot t + x_0 \ .$$

Analogno, integriranjem funkcija u y smjeru po vremenu, iz konstantnog ubrzanja dobije se linearna funkcija y koordinate brzine, i kvadratna funkcija y koordinate prijeđenog puta

$$a_y = -g,$$

slijedi:

$$v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot sin\,\alpha,$$

odnosno:

$$y(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + (v_0 \cdot sin\,\alpha) \cdot t + y_0 \, .$$

I pri rješavanju jednostavnih zadataka korisno je provjeriti svaki izraz inverznom operacijom; u ovom slučaju korišteno je integriranje, pa bi deriviranjem puta trebalo dobiti brzinu i deriviranjem brzine ubrzanje. Treba dakako provjeriti da li su zadovoljeni dodatni uvjeti iz kojih su određene konstante, u ovom slučaju to su početni uvjeti.

Za određivanje analitičkog izraza funkcije trajektorije treba, kako je već u općem slučaju gibanja rečeno, iz izraza za komponente prijeđenog puta eliminirati vrijeme, npr. izraziti t iz x koordinate:

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cdot cos\,\alpha} \quad ,$$

te uvrstiti u izraz za y koordinatu:

$$y(x) = -\frac{g \cdot (x - x_0)^2}{2 \cdot (v_0 \cdot cos\,\alpha)^2} + tg\alpha \cdot (x - x_0) + y_0 \,.$$

Vidimo da je trajektorija kvadratna parabola.

Ako je zadan oblik podloge, može se odrediti u kojoj će točki čestica dotaknuti podlogu. Horizontalna udaljenost te točke od početnog položaja x_0 naziva se domet. U najjednostavnijem slučaju je podloga horizontalna i os x leži na podlozi, pa će problem određivanja dometa voditi na određivanje nul-točke parabole, što ovdje nećemo izvoditi. U slučaju kose podloge traži se x koordinata točke koja se istovremeno nalazi na paraboli i na pravcu kojim je definiran položaj podloge, dakle treba odrediti točku presjeka pravca i parabole.

Može se postaviti i zadatak određivanja najviše točke putanje. Zadatak vodi na određivanje maksimuma parabole što je također poznato i ovdje se neće izvoditi. Drugi pristup je određivanje trenutka u kojem čestica prolazi kroz najvišu točku putanje t_M. U toj točki vertikalna komponenta brzine isčezava jer je tangenta na trajektoriju u toj točki horizontalna. Isto tako, očito je da se u tom trenutku mijenja predznak y komponente brzine i čestica se počinje spuštati.

Iz $v_y(t_M) = 0$, slijedi: $\quad t_M = \dfrac{v_0 \cdot sin\,\alpha}{g}$,

pa se maksimum visine dobiva uvrštavanjem u $y(t)$:

$$y_M = y(t_M) = \frac{(v_0 \cdot sin\,\alpha)^2}{2 \cdot g} + y_0$$

Nadalje u zadacima se može tražiti određivanja kuta kod kojeg se uz zadanu brzinu postiže najveći doseg. Ovdje ćemo problem riješiti samo za najjednostavniji slučaj: podloga je ravna i na njoj leži os x, a početna točka je ishodište koordinatnog sustava, dakle: $x_0 = 0,\; y_0 = 0$. U tom slučaju trajektorija je simetrična u odnosu na paralelu s osi y koja prolazi kroz najvišu točku, pa će domet biti jednak dvostrukoj x koordinati najviše točke

$$x_D = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha \cdot \sin\alpha .$$

Nakon trigonometrijske transformacije (umnožak sinusa i cosinusa jednak je polovini sinusa dvostrukog kuta) određen je doseg kao funkcija kuta:

$$x_D = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{sin(2\alpha)}{2}, \text{ tj. } x_D = \frac{v_0^2}{g}\cdot sin(2\alpha).$$

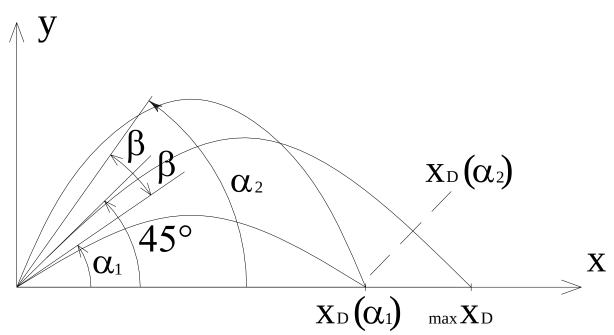
Kut pri kojem je doseg maksimalan odredi se odredi se prema poznatom pravilu za ekstrem funkcije u matematici. Dakle, derivaciju x_D po α izjednači se sa nulom i dobije se da maksimalnom dosegu odgovara kut $\alpha = 45^0$. Za taj kut slijedi da je veličina maksimalnog dosega

$$_{MAX}x_D = \frac{v_0^2}{g}.$$

Može se postaviti i pitanje kuta koji odgavara zadanom dosegu, koji dakako mora biti manji od maksimalnog. Kut mora zadovoljiti jednadžbu dosega u kojoj je sada poznata veličina x_D:
Jednadžbu zadovoljavaju dva kuta:

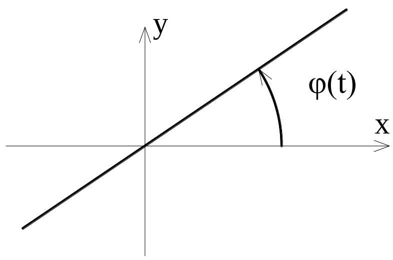
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}arcsin\frac{x_D \cdot g}{v_0^2} \text{ i } \alpha_2 = 90^0 - \alpha_1 .$$

Ako se uvede $\beta = 45^0 - \alpha_1$, onda se može napisati: $\alpha_{1,2} = 45^0 \pm \beta$. Isti doseg će se postići s početnim kutom koji je za određeni iznos veći od $45°$, odnosno za isti iznos manji od $45°$.



ROTACIJA PRAVCA U RAVNINI

Za izvođenje složenijih vrsta gibanja pogodno je zasebno proučiti rotaciju pravca u ravnini oko nepomične točke. Položaj pravca će se odrediti orijentiranim kutem φ koji je skalarna funkcija vremena: $\varphi = \varphi(t)$. Postoji potpuna analogija između rotacije pravca oko točke i gibanja točke po pravcu.



Kutna brzina je promjena kuta u vremenu, označavati će se s ω, i ima dimenziju *radijan u sekundi: r/s*.

Prosječna kutna brzina za neki interval vremena:

$$\omega(t_1,t_2) = \frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Trenutna kutna brzina:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t} = \dot{\varphi}.$$

Kutno ubrzanje je promjena trenutne kutne brzine u vremenu, označavati će se s ε, ima dimenziju *radijan u sekundi na kvadrat,* dakle r/s^2.

Prosječno kutno ubrzanje za neki interval vremena:

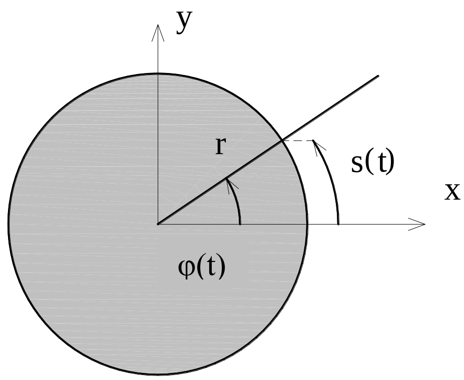
$$\varepsilon(t_1,t_2) = \frac{\omega(t_2)-\omega(t_1)}{t_2-t_1}$$

Trenutno kutno ubrzanje:

$$\varepsilon(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega(t+\Delta t)-\omega(t)}{\Delta t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Diferencijalni i integralni odnosi funkcije kuta $\varphi(t)$, kutne brzine i kutnog ubrzanja i njihova grafička interpretacija analogni su onima koji su prikazani za gibanje točke po pravcu.

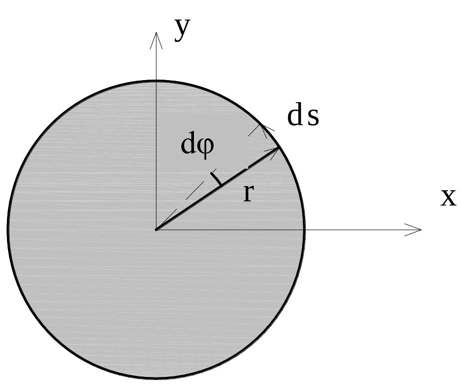
Putanja točke koja se nalazi na rotirajućem pravcu



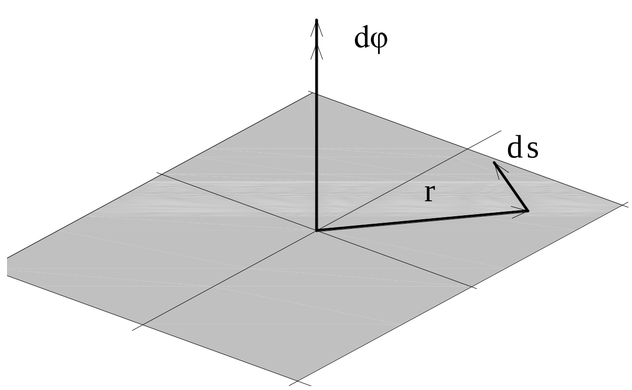
Trajektorija je očito kružnica. Kako je kut u radijanima jednak omjeru pripadne duljine luka i radijusa, slijedi da se put točke po trajektoriji može iskazati pomoću duljine luka pripadnog kuta

$$s(t) = r \cdot \varphi(t).$$

Infinitezimalni prirast puta *ds* leži na tangenti na trajektoriju. Pogodno je da se prirast puta uvede kao infinitezimalni vektor.



Pripadni infinitezimalni kut $d\varphi$ također se može shvatiti kao vektor paralelan s osi rotacije, usmjeren prema ¨pravilu desne ruke¨ (ili pravilu desnog vijka). Uz $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{k}$, vektorski prirast puta može se izraziti pomoću vektorskog produkta prirasta kuta i vektora položaja točke na kružnici

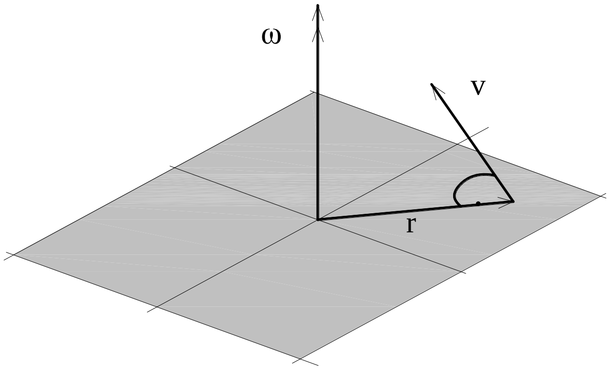


$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,.$$

Iz vektora infinitezimalnog prirasta kuta slijedi i vektor kutne brzine koji je također paralelan s osi rotacije:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Iz vektora infinitezimalnog prirasta puta dobiti će se i vektor brzine iskazan pomoću vektora kutne brzine i vektora položaja točke na kružnici:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Da bi postavili općenitu vezu između kutne brzine i brzine gibanja čestice po kružnici možemo primjeniti općeniti postupak derivacije po vremenu za vektor konstantnog modula *r* i promjenjivog smjera φ*(t)* pokazan u uvodnom dijelu:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{d\vec{b}_0}{dt} = r \cdot \omega \cdot \vec{\tau}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r} \ .$$

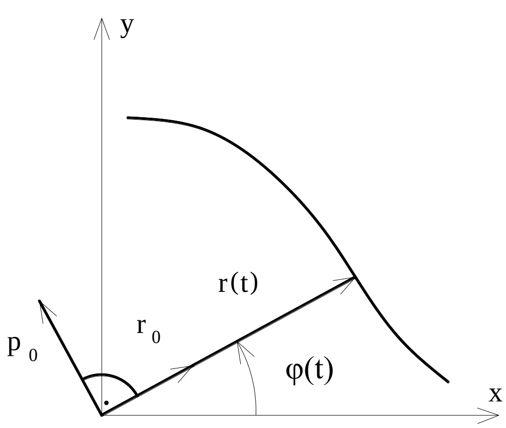
Ubrzanje se odredi iz derivacije vektora brzine po vremenu:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Gibanje čestice u ravnini zadano u polarnim koordinatama

Gibanje je definirano s dvije skalarne funkcije $r(t)$ i $\varphi(t)$. Vektor položaja čestice u ravnini može se izraziti u obliku:

$$\vec{r}(t) = r(t) \cdot \vec{r}_0 \left[\varphi(t) \right]$$



Brzina će se odrediti iz derivacije vektora položaja po pravilima za derivaciju produkta. Kut nagiba vektora položaja funkcija je vremena, pa će se jedinični vektor označavati s $\vec{r}_0(t)$ ili skraćeno $\vec{r}_0$.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \dot{\vec{r}}_0 = \dot{r} \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \omega \cdot \vec{p}_0$$

Pokazano je da je derivacija jediničnog vektora koji mijenja kut nagiba, jednaka umnošku jediničnog vektora zarotiranog za $+90^0$ (na crtežu označen s $\vec{p}_0$) i derivacije kuta, dakle kutne brzine.

Ubrzanje se izvodi deriviranjem vektora brzine. Pri tome će se i derivacija jediničnog vektora $\vec{p}_0$ odrediti na već pokazani način, dakle jedinični vektor će se pomnožiti sa kutnom brzinom i zarotirati za $+90^0$, što znači da će rezultat biti vektor orijentiran u smjeru $-\vec{r}_0$.

$$\dot{\vec{p}}_0 = \omega \cdot (-\vec{r}_0)$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \cdot \vec{r}_0 + \dot{r} \cdot \dot{\vec{r}}_0 + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{p}_0 + r \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{p}_0 + r \cdot \omega \cdot \dot{\vec{p}}_0$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \cdot \vec{r}_0 + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{p}_0 + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{p}_0 + r \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{p}_0 + r \cdot \omega \cdot \omega \cdot (-\vec{r}_0)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \cdot \omega^2) \cdot \vec{r}_0 + (2 \cdot \dot{r} \cdot \omega + r \cdot \varepsilon) \cdot \vec{p}_0$$

Dobivena su dva pribrojnika za koje se uvode posebni nazivi:

- radijalno ubrzanje, u smjeru $\vec{r}_0$
- tangencijalno ubrzanje, u smjeru okomitom na $\vec{r}_0$, (na crtežu je označeno s $\vec{p}_0$)

Svaki pribrojnik sastoji se od dva doprinosa čiji se nazivi odnose na složeno gibanje:

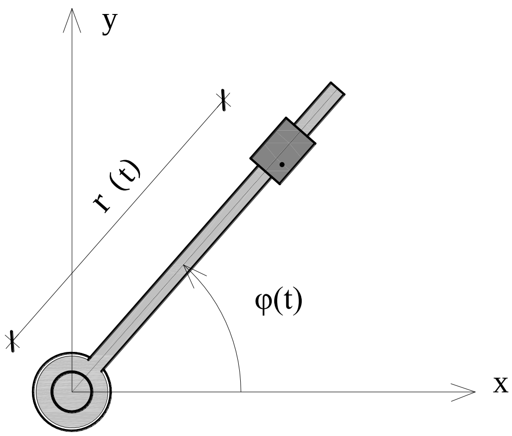
- relativno ubrzanje: $\vec{a}_r = \ddot{r} \cdot \vec{r}_0$
- prijenosno normalno ubrzanje (centripetalno): $\vec{a}_c = -r \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_0$
- prijenosno tangencijalno ubrzanje: $\vec{a}_{pt} = r \cdot \varepsilon \cdot \vec{p}_0$
- Coriolisovo ubrzanje: $\vec{a}_{cor} = 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{p}_0$

Za *r(t)=r=const* trajektorija gibanja postaje kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, a iz prikazanih funkcija za brzinu i ubrzanje dobiju se već poznate funkcije brzine i ubrzanja za gibanje čestice po kružnici

$$\vec{v} = r \cdot \omega \cdot \vec{p}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = -r \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \varepsilon \cdot \vec{p}_0 = \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

Za primjer gibanja koje možemo opisati u polarnom sustavu analizirati će se sustav prikazan na slijedećoj slici. Promatra se ravna vodilica (štap) koja se u odnosu na nepomičnu ravninu *x-y* giba rotirajući oko osi *z*. Na vodilici je prsten koji može klizati po vodilici, dakle giba se translacijski po vodilici. Ako pretpostavimo da je poprečni presjek vodilice dovoljno mali tada je položaj točke na prstenu određen vrhom radijvektora $\vec{r}(t)$ u polarnom koordinatnom sustavu, odnosno brzinu i ubrzanje možemo odrediti prema prikazanom izvodu.



Gibanje prstena možemo analizirati superpozicijom komponente rotacije i translacije, tako da promatramo gibanje točke na prstenu koja leži u ravnini postavljenoj kroz os rotacije i vodilicu:

- Ako vodilica ne rotira, a prsten se giba po vodilici, točka se giba po pravcu vodilice i brzina točke će biti $\dot{r} \cdot \vec{r}_0$.
- Ako vodilica rotira, a prsten miruje u odnosu na vodilicu, točka se giba po kružnici radijusa r i brzina točke će biti $r \cdot \omega \cdot \vec{p}_0$.
- Ako vodilica rotira a istovremeno se prsten giba po vodilici, ukupna brzina prstena u odnosu na nepomičnu podlogu jednaka je vektorskom zbroju brzina dobivenih za opisana zasebna gibanja:

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \omega \cdot \vec{p}_0 .$$

Na isti način može se analizirati i ubrzanja od utjecaja rotacije i translacije, ali je potrebno dodati i Coriolisovo ubrzanje:

- Ako vodilica ne rotira, a prsten se giba po vodilici, ubrzanje točke će biti jednako ubrzanju po pravcu $\ddot{r} \cdot \vec{r}_0$.
- Ako vodilica rotira, a prsten miruje u odnosu na vodilicu, točka će imati normalno i tangencijalno ubrzanje od komponente rotacije $-r \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_0 + r \cdot \varepsilon \cdot \vec{p}_0$.
- Ako vodilica rotira a prsten se istovremeno giba po vodilici, ukupno ubrzanje prstena u odnosu na podlogu jednako je vektorskom zbroju ubrzanja dobivenih za opisana zasebna gibanja i vektora Coriolisovog ubrzanja koje je u ovom slučaju određeno izrazom $2 \cdot \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{p}_0$, tako da je ukupno ubrzanje:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \cdot \omega^2) \cdot \vec{r}_0 + (2 \cdot \dot{r} \cdot \omega + r \cdot \varepsilon) \cdot \vec{p}_0 .$$