MATEMATIKA II 3. kolokvij 11.06.2008. A

1. Dano je vektorsko polje $\vec{a}(x,y,z) = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$. Pokažite da je polje potencijalno i odredite njegov potencijal $f(x,y,z)$. (3 boda)
2. Izračunajte $\int_\Gamma (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy + xy\,dz$ gdje je Γ dio pravca koji spaja točke $A(1,0,1)$ i $B(2,1,3)$ orijentiran od A prema B. (4 boda)
3. Izračunajte $\int\int_\Sigma dS$, ako je Σ dio plohe stošca $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji iz njega isjeca cilindar $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Skicirajte Σ. (5 bodova)

RJEŠENJE:

1. $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0} \;\Rightarrow$ polje je potencijalno; $f(x,y,z) = -xyz + C$.
2. 7.
3. $\sqrt{2}\pi$.

MATEMATIKA II 3. kolokvij 11.06.2008. B

1. Zadano je skalarno polje $f(x,y,z) = \dfrac{3x}{yz}$, vektor $\vec{s} = -\dfrac{1}{3}\,\vec{i} + \dfrac{2}{3}\,\vec{j} + \dfrac{2}{3}\,\vec{k}$ i točka $T(1,1,1)$. Odredite usmjerenu derivaciju skalarnog polja $f(x,y,z)$ u smjeru vektora $\vec{s}$ u točki T. (3 boda)
2. Izračunajte $\int_\Gamma (x+y)\,ds$ gdje je Γ dio presječne krivulje paraboličnog cilindra $z = 1 - x^2$ i ravnine $y = 0$ od točke $A(0,0,1)$ do $B(1,0,0)$. Skicirajte. (4 boda)
3. Pomoću teorema o divergenciji izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + (x+1)z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju čine dijelovi ploha $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ i $z = 2$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala. Skicirajte plohu. (5 bodova)

RJEŠENJE:

1. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}\right)_{T(1,1,1)} = -5.$
2. $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{12}.$
3. 18π.

MATEMATIKA II **3. kolokvij** **11.06.2008.** C

1. Zadano je skalarno polje $u(x, y, z) = 2xz + 2yz + z^2 - 4z$ i točka $A(2, 1, 1)$. (3 boda)

   a) Izračunajte $(grad\ u)_A$

   b) Odredite skup točaka u prostoru u kojima je $grad\ u$ okomit na os z.

2. Izračunajte pomoću Greenove formule $\int_\Gamma y^3 dx + xy^2 dy$ gdje je Γ pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$. (4 boda)

3. Izračunajte $\int\int_\Sigma \vec{a} d\vec{S}$ ako je $\vec{a} = z\vec{k}$, a Σ je dio paraboloida $z = x^2 + y^2$ ispod ravnine $z = 1$ orijentiran tako da $\vec{n}$ čini tupi kut s $\vec{k}$. (5 bodova)

RJEŠENJE:

1. a) $(grad\, u)_{A(2,1,1)} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$; b) $x + y + z = 2$.

2. $-\dfrac{6}{35}$

3. $-\dfrac{\pi}{2}$