

MATEMATIKA 3, Kolokvij 15.12.2014. A

1. (10+8 bodova)

- (a) Teška homogena žica mase 2 i duljine 12 horizontalno je napeta utegom mase 5 na lijevom kraju i nalazi se u homogenom sredstvu elastičnosti $20g$ (g je gravitacijska konstanta). Odredite ravnotežni položaj žice ako je desni kraj slobodan.
- (b) Uz koje uvjete i pretpostavke je izvedena valna jednačina za oscilacije žice? Gdje se ti uvjeti primjenjuju?

2. (14+8 bodova)

- (a) Riješite problem slobodnih oscilacija homogenog štapa duljine 2, gustoće 1, površine poprečnog presjeka 2, modula elastičnosti 4 i momenta inercije 2 čiji su krajevi homogeni zglobovi uz početne uvjete

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x).$$

Koliki je progib na sredini štapa nakon 20 sekundi?

- (b) Napišite i objasnite zakon ponašanja za problem vođenja topline kroz štap. Koji član u jednačini dobivamo pomoću zakona ponašanja?

3. (12+8 bodova)

- (a) Odredite ravnotežni oblik kružne membrane Ω polumjera $R_2 = 2$ s rupom polumjera $R_1 = 1$ ako je dan rubni uvjet $u|_{\partial\Omega} = \sin 2\varphi$.
- (b) Ako Dirichletov problem za Poissonovu jednačinu ima rješenje, koliko rješenja ima? Iz čega to slijedi i kako?