5.2 Krivuljni integrali druge vrste

Neka je $\vec{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$ orijentirana krivulja, a $\vec{r}([a,b], \vec{\Gamma})$ njena parametrizacija ($\vec{r}$: $[a, b] \to \vec{\Gamma}$). Kad integriramo vektorsko polje $\vec{a} : \vec{\Gamma} \to X_0(E)$ po krivulji $\vec{\Gamma}$, uobičajeno ga zapišemo po komponentama $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ($a_x, a_y, a_z : \vec{\Gamma} \to \mathbb{R}$).
Parametrizaciju krivulje slično pišemo kao $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$.

Krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja $\vec{a}$ po krivulji $\vec{\Gamma}$, u oznaci $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$ ili $\int_{\vec{\Gamma}} a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$, računa se po sljedećoj formuli

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{a} \cdot \vec{r}\,' dt,$$

gdje je s $\vec{r}\,'$ označena derivacija $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, odnosno po formuli

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b (a_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)$$
$$+ a_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t))dt.$$

Ako integriramo vektorsko polje $\vec{a}$: $\vec{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2 \to X_0(E)$ definirano na krivulji u ravnini, analogno pišemo $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ (a_x, a_y: $\vec{\Gamma} \to \mathbb{R}$) te računamo

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b (a_x(x(t), y(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t))y'(t))\, dt.$$

Zadatak 5.15. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$ po luku parabole $y = x^2$ od točke $A(0, 0)$ do točke $B(1, 1)$, ako je $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$.

Rješenje: Budući da je parabola zadana funkcijskom ovisnošću o x, lako je parametriziramo na sljedeći način:

$$x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$$
$$y(t) = t^2 \Rightarrow y'(t) = 2t,$$

pri čemu je $t \in [0,1]$ (očitavamo iz x-koordinata točaka A i B). Zadano vektorsko polje ima komponente $a_x(x,y) = y^2, a_y(x,y) = x^2$. Sada lako računamo integral

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}} y^2\, dx + x^2\, dy = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t) dt = \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

□

Zadatak 5.16. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} z\, dx + x\, dy + y\, dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ zadana parametrizacijom $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3, t \in [0,1]$.

Rješenje: Budući da nam je parametrizacija već dana, moramo samo izračunati derivacije:

$$\begin{aligned} x(t) = t &\Rightarrow x'(t) = 1 \\ y(t) = t^2 &\Rightarrow y'(t) = 2t \\ z(t) = t^3 &\Rightarrow z'(t) = 3t^2. \end{aligned}$$

Računamo integral

$$\int_{\vec{\Gamma}} z\, dx + x\, dy + y\, dz = \int_0^1 \left(t^3 \cdot 1 + t \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2 \right) dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} \right) \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{91}{60}.$$

□

Zadatak 5.17. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} -yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ luk helikoidne spirale zadane parametrizacijom $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t,\ t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje: Računamo derivacije

$$\begin{aligned} x(t) = \cos t &\Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) = \sin t &\Rightarrow y'(t) = \cos t \\ z(t) = t &\Rightarrow z'(t) = 1, \end{aligned}$$

a zatim i integral

$$
\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} -yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cdot t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot t\cdot\cos t+\cos t\cdot\sin t\cdot 1)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(t\sin^2 t + t\cos^2 t + \sin t\cos t\big)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt = \left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4\pi^2}{2}-\frac{1}{4}(\cos 4\pi-\cos 0) = 2\pi^2.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 5.18. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy - y\,dx$, ako je $\vec{\Gamma}$ zadana parametrizacijom

$$
x(t)=\frac{3t}{1+t^3},\; y(t)=\frac{3t^2}{1+t^3},\;\; t\in[0,1].
$$

Rješenje: Računamo derivacije

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{3\cdot(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2} \\
y'(t) &= \frac{6t\cdot(1+t^3)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2},
\end{aligned}
$$

te integral

$$
\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy - y\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{3t}{1+t^3}\cdot\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}-\frac{3t^2}{1+t^3}\cdot\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{18t^2-9t^5-9t^2+18t^5}{(1+t^3)^3}\,dt = \int_0^1 \frac{9t^2+9t^5}{(1+t^3)^3}\,dt \\
&= 9\int_0^1 \frac{t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = 9\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \left\{\begin{array}{c} u=1+t^3 \\ du=3t^2dt \\ 0\mapsto 1, 1\mapsto 2\end{array}\right\} \\
&= 3\int_1^2 \frac{du}{u^2} = 3\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2 = 3\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

□

Često je potrebno parametrizirati spojnicu dviju točaka u prostoru. Neka su to točke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$. Već znamo da pravac kroz A i B ima (kanonsku) jednadžbu

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

Lako dobivamo i parametarsku jednadžbu pravca

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{array}\right\} \text{parametarska jednadžba pravca}$$

Sada je za parametrizaciju spojnice A i B potrebno još samo primijetiti da se uvrštavanjem $t = 0$ dobiva točka $A(x_1, y_1, z_1)$, a uvrštavanjem $t = 1$ točka $B(x_2, y_2, z_2)$. Dakle, parametrizacija spojnice je

$$\begin{array}{l} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \\ t \in [0, 1] \end{array}$$

Zadatak 5.19. Izračunajte $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} y\,dx + (x + z)\,dy + (2z + y)\,dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ spojnica točaka $A(1, 0, 1)$ i $B(0, 2, 2)$.

Rješenje: Parametrizirajmo $\vec{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t(0 - 1) = 1 - t \Rightarrow x'(t) = -1 \\ y(t) &= 0 + t(2 - 0) = 2t \Rightarrow y'(t) = 2 \\ z(t) &= 1 + t(2 - 1) = 1 + t \Rightarrow z'(t) = 1 \\ & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Zadani integral je onda jednak

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2t \cdot (-1) + (1 - t + 1 + t) \cdot 2 + (2 + 2t + 2t) \cdot 1)\,dt \\ &= \int_0^1 (-2t + 4 + 2 + 4t)dt = \int_0^1 (2t + 6)dt = (t^2 + 6t)\Big|_0^1 = 7 \end{aligned}$$

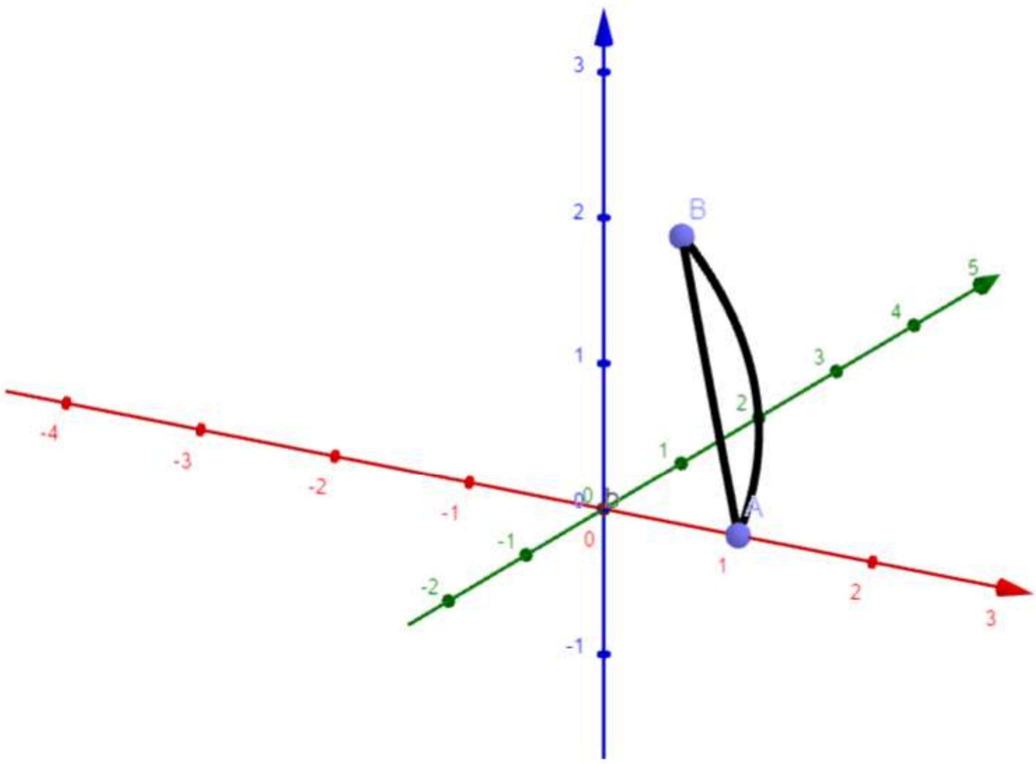
$\square$

Zadatak 5.20. Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

ako je $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$, gdje je $\vec{\Gamma}_1$ luk helikoidne spirale $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$ za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a $\vec{\Gamma}_2$ je spojnica točaka $A(0, 1, \frac{\pi}{2})$ i $B(1, 0, 0)$. Skicirajte krivulju.

Rješenje: Budući da je $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$ vrijedi



Slika 5.5: Krivulja $\vec{\Gamma}$

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Parametrizacija krivulje $\vec{\Gamma}_1$ je dana sa:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) &= \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t \\ z(t) &= t \Rightarrow z'(t) = 1 \\ & t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Odredimo

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t + 3)(-\sin t) + (\sin t - 1)\cos t + (2t+2)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos t - 3\sin t + \sin t \cos t - \cos t + 2t + 2)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\sin t - \cos t + 2t + 2)\mathrm{d}t = (3\cos t - \sin t + t^2 + 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (3 \cdot 0 - 1 + \frac{\pi^2}{4} + \pi) - (3 \cdot 1 - 0 + 0) = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4.$$

Napišimo parametrizaciju spojnice $\vec{\Gamma}_2$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 + t(1-0) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ y(t) &= 1 + t(0-1) = 1 - t \Rightarrow y'(t) = -1 \\ z(t) &= \frac{\pi}{2} + t(0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t \Rightarrow z'(t) = -\frac{\pi}{2} \\ & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Sada računamo:

$$\int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_2} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 [(t+3) \cdot 1 + (1 - t - 1) \cdot (-1) + (\pi - \pi t + 2) \cdot \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \Big(2t + 3 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}t - \pi\Big)\mathrm{d}t = \Big(t^2 + 3t - \frac{\pi^2}{2}t + \frac{\pi^2}{2}\frac{t^2}{2} - \pi t\Big)\Big|_0^1$$

$$= 1 + 3 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \pi = -\frac{\pi^2}{4} - \pi + 4.$$

Rješenje zadatka je:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4 - \frac{\pi^2}{4} - \pi + 4 = 0.$$

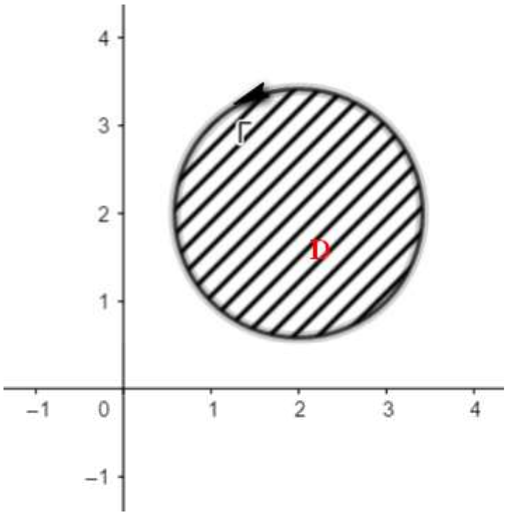
□

Greenov teorem

Neka je $\vec{\Gamma}$ zatvorena pozitivno orjentirana krivulja koja omeđuje područje D u ravnini. Tada za dovoljno glatke funkcije $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\int_{\vec{\Gamma}} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Gornju jednakost zovemo Greenov teorem ili Greenova formula.



Slika 5.6: Greenov teorem

Zadatak 5.21. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$$

ako je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirana kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje: Znamo da:

$$M(x,y) = x + y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$
$$N(x,y) = y - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Sada je prema Greenovom teoremu:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \iint_D (-1-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2P(D) = -2\pi.$$

$\square$

Zadatak 5.22. Pomoću Greenove formule izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} y^3\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$. Skicirajte lik D i krivulju $\vec{\Gamma}$.

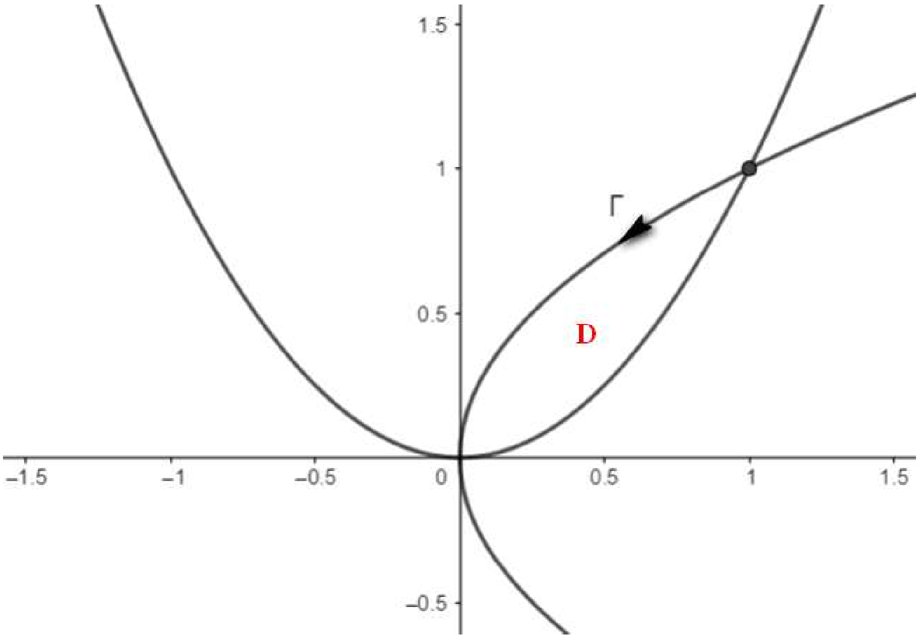
Rješenje: Budući da

$$M(x,y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$$
$$N(x,y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y^2$$

prema Greenovoj formuli vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} y^3\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y = \iint_D (y^2 - 3y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D (-2y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2)\mathrm{d}y$$
$$= -2\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^6\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\right) = -\frac{6}{35}.$$

$\square$



Slika 5.7: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i lik D

Zadatak 5.23. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y,$$

gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirani trokut s vrhovima $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,3)$. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i trokut D.

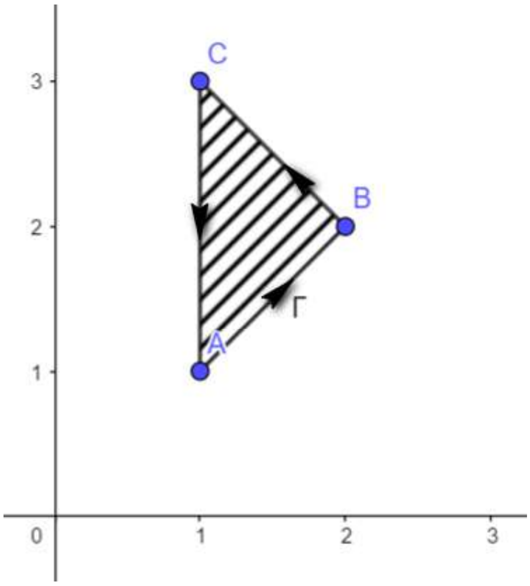
Rješenje:

Stranica $\overline{AB}$ trokuta D leži na pravcu $y=x$, a stranica $\overline{BC}$ na pravcu $y=-x+4$. Također vrijedi

$$M(x,y) = 2x^2+2y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4y$$
$$N(x,y) = (x+y)^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2(x+y).$$

Sada računamo

$$\int_{\vec{\Gamma}} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y = \iint_D (2x+2y-4y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Slika 5.8: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i trokut D

$$= 2\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{-x+4} (x-y)\mathrm{d}y = 2\int_1^2 \Big(xy - \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_x^{-x+4}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 \Big[x(-x+4) - \frac{(-x+4)^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 \Big(-x^2 + 4x - \frac{x^2-8x+16}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 (-2x^2+8x-8)\mathrm{d}x = 4\int_1^2 (-x^2+4x-4)\mathrm{d}x = \Big(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\Big)\Big|_1^2$$

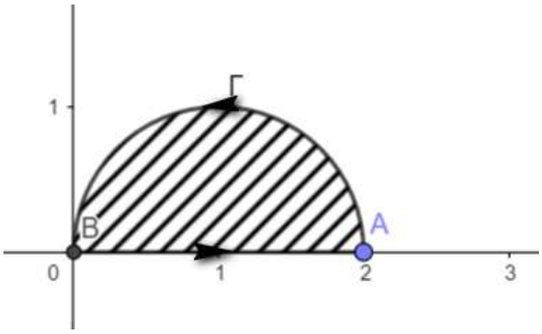
$$= 4\Big[(-\frac{8}{3}+8-8\Big) - \Big(-\frac{1}{3}+2-4\Big)\Big] = 4\Big(-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+2\Big) = -\frac{4}{3}.$$

□

Zadatak 5.24. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - y^2 + x)\mathrm{d}x + e^x \cos y\,\mathrm{d}y,$$

ako je $\vec{\Gamma}$ dio kružnice $x^2+y^2=2x$ od točke $A(2,0)$ do točke $B(0,0)$ i dio pravca $y=0$ između točki B i A. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i područje D.



Slika 5.9: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i područje D

Rješenje: Područje D opisujemo u polarnim koordinatama na sljedeći način:

$$D \cdots \quad \begin{aligned} &0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ &0 \leq r \leq 2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Naime, skup D je smješten u 1.kvadrant, a jednadžba kružnice u polarnim koordinatama glasi $r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 2\cos\varphi$. Odredimo sada parcijalne derivacije komponenti polja:

$$\begin{aligned} M(x,y) &= e^x \sin y - y^2 + x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2y \\ N(x,y) &= e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y. \end{aligned}$$

Sada računamo integral:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - y^2 + x)\mathrm{d}x + e^x \cos y \,\mathrm{d}y, = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned} &= 2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{16}{3}\Big(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\Big(0 + \frac{1}{4}\Big) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 5.25. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - 2y)\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 2)\mathrm{d}y,$$

ako je $\vec{\Gamma}$ dio kružnice $x^2 + y^2 = ax$ $(a \geq 0)$ od točke $A(a, 0)$ do točke $B(0, 0)$ i dio pravca $y = 0$ između točki B i A. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i područje D.

Rješenje: Zadaća $\left(\frac{a^2\pi}{4}\right)$. $\square$

Krivuljni integral 2. vrste potencijalnog vektorskog polja

Vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno ako je

$$\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

za neko skalarno polje φ. Skalarno polje φ zovemo potencijal od $\vec{a}$. Također znamo da je vektorsko polje potencijalno ako i samo ako vrijedi $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Formula za određivanje potencijala potencijalnog vektorskog polja se može pronaći u poglavlju 'Skalarna i vektorska polja'.

Za krivuljni integral 2. vrste potencijalnog polja vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem. *Neka je $\vec{\Gamma}$ orijentirana krivulja od A do B i $\vec{a}$ potencijalno vektorsko polje s potencijalom φ. Tada je*

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Iz gornjeg teorema neposredno slijedi:

a) integral potencijalnog polja ne ovisi o putu integracije, već samo o početnoj i završnoj točki,

b) integral potencijalnog polja po zatvorenoj krivulji je jednak nuli.

Zadatak 5.26. Odredite $\int_{\vec{\Gamma}} (y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$, gdje je $\vec{\Gamma}$ krivulja zadana parametrizacijom $x(t) = e^{\sin t}\cos t$, $y(t) = e^{\cos t}\sin t$ i $z(t) = t^t$ za $t \in [\pi, 2\pi]$.

Rješenje: Ako u parametrizaciju krivulje $\vec{\Gamma}$ uvrstimo donju granicu intervala $t = \pi$ dobijemo početnu točku krivulje $A(-1, 0, \pi^{\pi})$, a ako uvrstimo gornju granicu intervala $t = 2\pi$ dolazimo do krajnje točke na krivulji $B(1, 0, (2\pi)^{2\pi})$.

Ranije smo izračunali (pogledajte poglavlje 'Skalarna i vektorska polja') potencijal polja iz integrala: $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Sada prema gornjoj tvrdnji možemo izračunati integral:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z = \varphi(B) - \varphi(A) = (2\pi)^{2\pi} - \pi^{\pi}.$$

□

Zadatak 5.27. Riješite zadatak neposredno prije potpoglavlja 'Greenov teorem' pomoću potencijala.

Zadatak 5.28. Odredite $\int_{(0,0,0)}^{(0,\pi,1)} \mathrm{d}x + (1 + z\cos(yz))\mathrm{d}y + y\cos(yz)\mathrm{d}z$.

Rješenje: Zadaća (π). □