

MATEMATIKA II

11.6.2008.

1. (a) Odredite i skicirajte domenu funkcije $f(x, y) = \sqrt{y-x} \operatorname{Arctg} \frac{1}{y-x}$.
 (b) Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$.
2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y \cdot x^{y-1} dx + x^y \ln x dy = 0$ uz uvjet $y(1) = 1$.
3. Zadan je integral:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_{\sin \phi}^{2 \sin \phi} f(r, \phi) r dr.$$

 (a) Skicirajte područje integracije
 (b) Izračunajte površinu područja integracije
4. Odredite volumen tijela u 1. oktantu omeđenog plohami
 $2z = y^2, x^2 + y^2 = 4$ i koordinatnim ravninama. Skicirajte tijelo.
5. Izračunajte $\int_{\Gamma} xy ds$ ako je Γ dio presječnice ploha $x^2 + y^2 = 1, z = y$ koji se nalazi u prvom oktantu.
6. Primjenom teorema o divergenciji izračunajte tok vektorskog polja $\vec{d}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + 3y \vec{j} - 2xz \vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koju čine dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 1$) s ravninom $z = 1$ orijentiranu u smjeru vanjskih normala.

RJEŠENJA

1. a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\};$ b) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{y-x}} \arctan \frac{1}{y-x} - \frac{\sqrt{y-x}}{(y-x)^2 + 1}.$
2. $y \ln x = 0.$
3. $\frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$
4. $\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$
6. $5\pi.$