0.1 Lokalni ekstremi

Baviti ćemo se jednostavnosti radi samo funkcijama dvije varijable.

Neka je u nastavku $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija, te $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Definicija. Funkcija f ima *lokalni minimum* u točki (x_0, y_0), ako postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ oko točke (x_0, y_0) takav da je

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in U.$$

Funkcija f ima *lokalni maksimum* u točki (x_0, y_0), ako postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ oko točke (x_0, y_0) takav da je

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in U.$$

Lokalni ekstrem je lokalni minimum ili lokalni maksimum.

Funkcija f ima *globalni minimum* (ili kraće *minimum*) u točki (x_0, y_0), ako vrijedi

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in \Omega.$$

Funkcija f ima *globalni maksimum* (ili kraće *maksimum*) u točki (x_0, y_0), ako vrijedi

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in \Omega.$$

Globalni ekstrem (ili kraće *ekstrem*) je globalni minimum ili globalni maksimum.

Uočite da je svaki globalni minimum (maksimum, ekstrem) ujedno i lokalni minimum (maksimum, ekstrem), ali ne i obratno.

Točka (x_0, y_0) je *stacionarna točka* za funkciju f, ako vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Teorem. *Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada je (x_0, y_0) stacionarna točka za funkciju f.*

Prethodnim teoremom služimo se da pronađemo lokalne ekstreme funkcije f. Prvo pronađemo sve stacionarne točke (njih je lakše pronaći nego lokalne ekstreme), pa zatim među njima moramo odrediti koje su lokalni minimumi, koje su lokalni maksimumi, ako koje nijedno od toga. To ćemo moći odrediti pomoću parcijalnih derivacija drugog reda.

Definicija. Matricu

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

nazivamo *Hesseovom matricom* funkcije f. *Hessijan* funkcije f je determinanta njene Hesseove matrice.

Neka je sada (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f, te radi lakšeg označavanja uvedimo oznake:

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Sada je $\det H(x_0, y_0) = AC - B^2$.

Karakter stacionarne točke možda možemo iščitati iz sljedećeg teorema.

Teorem. *Uz oznake kao prije, vrijede sljedeće tvrdnje:*

- *Ako je $AC - B^2 > 0$ i $A > 0$, tada f ima lokalni minimum u (x_0, y_0).*
- *Ako je $AC - B^2 > 0$ i $A < 0$, tada f ima lokalni maksimum u (x_0, y_0).*
- *Ako je $AC - B^2 < 0$, tada f nema lokalni ekstrem u (x_0, y_0), tj. (x_0, y_0) je tzv.* sedlasta točka.

Napomena. Ukoliko je $A = 0$ ili $AC - B^2 = 0$, tada na prethodno opisani način ne možemo ništa zaključiti o karakteru stacionarne točke (x_0, y_0). U tom slučaju je potrebno koristiti druga, kompliciranija sredstva u koja se nećemo upuštati.

Zadatak 0.1. Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

(b) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2y + y$

(c) $f(x,y) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 1$

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

(e) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x^2}{y} + y$

(f) $f(x,y) = x + \dfrac{y^2}{2x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{5}{2x}$.

Rješenje:

(a) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 & = 0 \\ x + 2y - 1 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Dakle, imamo samo jednu stacionarnu točku $T = (1,0)$. Provjerimo da li se radi o lokalnom ekstremu, te ako da, o kojem:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 1$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2.$$

Vidimo da je $AC - B^2 = 3 > 0$ i $A = 2 > 0$, pa zaključujemo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T = (1,0)$.

(b) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} 6x^2 - 6xy = 6x(x-y) & = 0 \\ 2y - 3x^2 + 1 & = 0. \end{cases}$$

Prvu od gornje dvije jednadžbe rješavamo po slučajevima:

- Za $x = 0$ imamo $2y - 1 = 0$, tj. $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$.

- Za $x - y = 0$ imamo $x = y$ i $2y - 3y^2 + 1 = 0$, iz čega dobijemo točke $T_2 = (1,1)$ i $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Od dobivene tri stacionarne točke za svaku posebno ispitivamo karakter. Izračunajmo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

(i) Za točku $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$ imamo $A = 3$, $B = 0$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = 6 > 0$ i $A = 3 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$.

(ii) Za točku $T_2 = (1,1)$ imamo $A = 6$, $B = -6$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = -24 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_2 = (1,1)$, nego je ta točka sedlasta.

(iii) Za točku $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ imamo $A = -2$, $B = 2$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = -8 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, nego je ta točka sedlasta.

(c) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} 3x^2 + x + 4y - 4 & = 0 \\ 4x + 4y - 4 & = 0. \end{cases}$$

Nakon što gornje jednadžbe oduzmemo, dobijemo $3x(x-1) = 0$, odnosno $x = 0, 1$. Stacionarne točke su $T_1 = (0,1)$ i $T_2 = (1,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4.$$

(i) Za točku $T_1 = (0,1)$ imamo $A = 1$, $B = 4$ i $C = 4$. Jer je $AC - B^2 = -12 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_1 = (0,1)$, nego je ta točka sedlasta.

(ii) Za točku $T_2 = (1,0)$ imamo $A = 7$, $B = 4$ i $C = 4$. Jer je $AC - B^2 = 12 > 0$ i $A = 7 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_2 = (1,0)$.

(d)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 & = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 & = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2} = \sqrt{x} = 2y - 6.$$

Iz toga lako dobijemo jedinu stacionarnu točku $T = (4, 4)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{4\sqrt{x}^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$
$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{8} > 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -2, \quad AC - B^2 = \frac{3}{16} > 0.$$

Dakle, f ima lokalni maksimum u točki $T = (4, 4)$.

(e)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{8}{x^2} + \frac{2x}{y} &= 0 \\ -\frac{x^2}{y^2} + 1 &= 0. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x^2 = y^2$, pa imamo dva slučaja:

- Slučaj $x = y$ daje
$$-\frac{8}{x^2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$
Dobili smo stacionarne točke $T_1 = (2, 2)$ i $T_2 = (-2, -2)$.
- Slučaj $x = -y$ daje
$$-\frac{8}{y^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4,$$
što nema realnih rješenja.

Parcijalne derivacije drugog reda su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3} + \frac{2}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}.$$

(i) Za točku $T_1 = (2, 2)$ imamo $A = 3$, $B = -1$ i $C = 1$. Jer je $AC - B^2 = 2 > 0$ i $A = 3 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (2, 2)$.

(ii) Za točku $T_2 = (-2, -2)$ imamo $A = -3$, $B = 1$ i $C = -1$. Jer je $AC - B^2 = 2 > 0$ i $A = -3 < 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni maksimum u točki $T_2 = (-2, -2)$.

(f)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{2x}{y} - \frac{5}{2x^2} &= 0 \\ \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} &= 0. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x^3 = y^3$, tj. $x = y$. Zatim iz prve jednadžbe slijedi:

$$1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Dakle, imamo dvije stacionarne točke $T_1 = (1, 1)$ i $T_2 = (-1, -1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} + \frac{2}{y} + \frac{5}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{y^3}.$$

(i) Za točku $T_1 = (1, 1)$ imamo $A = 8$, $B = -3$ i $C = 3$. Jer je $AC - B^2 = 15 > 0$ i $A = 8 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (1, 1)$.

(ii) Za točku $T_2 = (-1, -1)$ imamo $A = -8$, $B = 3$ i $C = -3$. Jer je $AC - B^2 = 15 > 0$ i $A = -8 < 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni maksimum u točki $T_2 = (-1, -1)$.

□

Zadatak 0.2. Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 4x - 1$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - 2y + 7$

(d) $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y)$.

Rješenje: Zadaća □

0.1.1 Uvjetni ekstremi

U ovom podjeljku opisati ćemo kako se mogu pronaći *uvjetni ekstremi* zadane funkcije f, tj. globalni ekstremi funkcije f na skupu točaka koji zadovoljavaju zadani uvjet $g(x, y) = 0$.

U tu svrhu definiramo *Lagrangeovu funkciju* formulom:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorem. *Ako f ima uvjetni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada postoji $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0) = 0.$$

Prethodni teorem daje samo nužne uvjete za uvjetne ekstreme. Dakle, prvo rješavamo sustav:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x, y) & = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Da bi od svih rješenja tog sustava prepoznali minimume i maksimume, te razlučili globalne od samo lokalnih, moramo se najčešće koristiti nekakvim geometrijskim razmatranjima. Ukoliko je skup točaka zadan uvjetom $g(x, y) = 0$ ograničen, koristan je i sljedeći teorem.

Teorem. *Neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom skupu ima točku globalnog minimuma i točku globalnog maksimuma*

Dakle, ukoliko je skup točaka zadan uvjetom $g(x, y) = 0$ ograničen, poredamo sva rješenja (x, y) sustava (1) i gledamo vrijednosti of f u tim točkama. Točke s najmanjom i najvećom vrijednosću su uvjetni ekstremi (redom minimum i maksimum).

Napomena. Ukoliko uvjet $g(x, y) = 0$ možemo napisati eksplicitno u obliku $y = h(x)$, tada uvjetne ekstreme od f dobijemo gledajući ekstreme kompozicije $f(x, h(x))$, što je funkcija jedne varijable.

Zadatak 0.3. Nađite ekstrem funkcije $f(x, y) = xy$, uz uvjet $x + y = 1$.

Rješenje: Stavimo $g(x, y) = x + y - 1$ (jer želimo da uvjet bude $g(x, y) = 0$). Uvodimo funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda x + \lambda y - \lambda,$$

te rješavamo sustav (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x, y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \lambda & = 0 \\ x + \lambda & = 0 \\ x + y & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\lambda \\ x = -\lambda \\ -\lambda - \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle, točka $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je jedini kandidat za uvjetni ekstrem.

No, iz geometrijskih razloga je jasno da postoji globalni maksimum funkcije f na pravcu $y = -x + 1$. Stoga je $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ traženi uvjetni ekstrem, i to maksimum. Maksimalna vrijednost funkcije f koja se postiže uz uvjet $x + y = 1$ je $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Drugi način: Uvjet $x + y = 1$ možemo napisati eksplicitno kao $y = -x + 1$. Sada tražimo ekstreme funkcije jedne varijable

$$f(x, -x + 1) = x(-x + 1) = -x^2 + x.$$

Možemo pomoću derivacija odrediti tok te funkcije i globalni ekstrem, ali možemo i uočiti da se radi o paraboli koja očito ima globalni maksimum u tjemenu $x = \frac{1}{2}$. Dakle, traženi uvjetni ekstrem (i to maksimum) funkcije f je u točki $T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. $\square$

Zadatak 0.4. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = -5x + 12y + 7$, uz uvjet $x^2 + y^2 = 4$ (odnosno maksimum funkcije f na kružnici oko ishodišta polumjera 2).

Rješenje: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $F(x, y, \lambda) = -5x + 12y + 7 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 + 2\lambda x &= 0 \\ 12 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2\lambda} \\ y = -\frac{6}{\lambda} \\ \frac{25}{4\lambda^2} + \frac{144}{4\lambda^2} = 4 \ \Rightarrow \ \lambda = \pm\frac{13}{4}. \end{cases}$$

Dobili smo dvije točke kao kandidate za uvjetne ekstreme: $T_1 = \left(\frac{10}{13}, -\frac{24}{13}\right)$ i $T_2 = \left(-\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$. Izračunamo $f(T_1) = -19$ i $f(T_2) = 33$, pa vidimo da su obje T_1 i T_2 uvjetni ekstremi; T_1 je minimum, a T_2 maksimum. $\square$

Zadatak 0.5. Odredite točke na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ koje su najbliže točki $T_0 = (0, 4)$.

Rješenje: Udaljenost do točke $T_0 = (0, 4)$ je funkcija koja svakoj točki ravnine $T = (x, y)$ pridruži broj

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}.$$

Tražimo minimum te funkcije, uz uvjet da se točka T nalazi na zadanoj hiperboli, odnosno $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

$$F(x,y,\lambda) = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \lambda x^2 - \lambda y^2 - \lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} + 2\lambda x & = 0 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} -2\lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} \\ \frac{y-4}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} - 2\lambda y & = 0 \Rightarrow \frac{y-4+y}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} = 0 \\ x^2 - y^2 & = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = 2,\ x = \pm\sqrt{1+2^2} = \pm\sqrt{5}.$$

Za slučaj $x = 0$ dobijemo $-y^2 = 1$, što nema realnih rješenja. Dakle, kandidati za uvjetne ekstreme su $T_1 = (\sqrt{5}, 2)$ i $T_2 = (-\sqrt{5}, 2)$.

Iz geometrijskih razloga vidimo da ne postoji maksimum (jer postoje točke na danoj hiperboli po volji daleko od T_0), te da mora postojati minimum. Jer je $f(T_1) = 3 = f(T_2)$, zaključujemo da su obje T_1 i T_2 uvjetni ekstremi, i to minimumi, dakle točke hiperbole najbliže točki T_0 (udaljene su za 3). □

Zadatak 0.6. Na krivulji $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti do ishodišta najmanji, te za koje je najveći.

Rješenje: Tražimo minimum funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ (kvadrat udaljenosti točke (x,y) do $(0,0)$), uz uvjet $g(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$.

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 3\lambda x^2 + 2\lambda xy + 3\lambda y^2 - 8\lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6\lambda x + 2\lambda y & = 0 \\ 2y + 2\lambda x + 6\lambda y & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+3\lambda)x + \lambda y & = 0 \\ \lambda x + (1+3\lambda)y & = 0 \\ g(x,y) & = 0. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s $-\lambda$, drugu s $(1+3\lambda)$, te ih zbrojimo. Dobijemo:

$$0 = -\lambda^2 y + (1+3\lambda)^2 y = (1+2\lambda)(1+4\lambda)y.$$

- Za $1 + 2\lambda = 0$ imamo $\lambda = -\frac{1}{2}$, te $\left(1 - \frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}y = 0$, odnosno $x = -y$. Tu zadnju jednakost uvrstimo u uvjet $g(x,y) = 0$, i dobijemo:

  $$3x^2 - 2x^2 + 3x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

  Kandidati za uvjetne ekstreme su $T_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ i $T_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- Za $1 + 4\lambda = 0$ imamo $\lambda = -\frac{1}{4}$, te $\left(1 - \frac{3}{4}\right)x - \frac{1}{4}y = 0$, odnosno $x = y$. Tu zadnju jednakost uvrstimo u uvjet $g(x,y) = 0$, i dobijemo:

  $$3x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

  Kandidati za uvjetne ekstreme su $T_3 = (1,1)$ i $T_4 = (-1,-1)$.

- Za $y = 0$ u uvjetu $g(x,y) = 0$ dobijemo $x^2 = \frac{8}{3}$, tj. $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Dakle, imamo još dva kandidata za uvjetne ekstreme: $T_5 = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}, 0\right)$ i $T_6 = \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, 0\right)$.

Lako izračunamo $f(T_1) = f(T_2) = 4$, $f(T_3) = f(T_4) = 2$ i $f(T_5) = f(T_6) = \frac{8}{3}$, pa vidimo da f ima maksimum u T_1 i T_2, a minimum u T_3 i T_4 na zadanoj krivulji (minimum i maksimum postoje, jer je krivulja rotirana elipsa). Točke T_5 i T_6 nisu uvjetni ekstremi. $\square$

Zadatak 0.7. Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3$ uz uvjet

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Rješenje: Zadaća. $\square$

Zadatak 0.8. Na pravcu $Ax+By+C = 0$ odredite točku najbližu ishodištu.

Rješenje: Zadaća. $\square$