Matematika 2

Vježbe 2018/2019.

1. lipnja 2021.

Predgovor

Ova skripta prati auditorne vježbe iz kolegija Matematika 2 koje se drže u ljetnom semestru od ak. god. 2017/2018. na Građevinskom fakultetu u Zagrebu.

Skripta nikako nije zamjena za vježbe (pohađanje kojih je obavezno), već služi studentima kao pomoć za lakše praćenje nastave. U njoj se nalaze i poneki sadržaji koji ne ulaze u ispitno gradivo (npr. zadaci i odjeljci koji su označeni sa $*$). Skripta se nalazi u repozitoriju na web-stranici kolegija:

http://www.grad.unizg.hr/predmet/mat2_a

Molimo vas da uočene greške (ili ako sumnjate da se radi o grešci), sugestije i primjedbe javite na tatjana.manger@grad.unizg.hr.

Sadržaj

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednadžbe

U ovom poglavlju dajemo neke metode rješavanja *običnih diferencijalnih jednadžbi.* To su jednadžbe oblika

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

gdje je y nepoznata funkcija u varijabli x. *Red* jednadžbe jest najveći $n \in \mathbb{N}$ takav da se u jednadžbi javlja n-ta derivacija nepoznate funkcije.

1.1 Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

1.1.1 Jednadžbe sa separiranim varijablama

Jednadžbe sa separiranim varijablama su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y).$$

One se rješavaju direktnim svođenjem na integrale:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pri tome treba posebno provjeriti *singularne slučajeve*, tj. one funkcije y za koje je $g(y) = 0$.

Zadatak 1.1. Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \cos x$ koje zadovoljava uvjet $y(0) = 1$.

Rješenje: Tražena funkcija y je primitivna funkcija od $\cos x$, dakle mora biti $y = \sin x + C$ za neki $C \in \mathbb{R}$. Ako uvrstimo zadani uvjet, dobijemo $1 = \sin 0 + C$, odnosno $C = 1$. Dakle, rješenje je $y = \sin x + 1$. $\square$

Zadatak 1.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = y$.

Rješenje: Funkcija $y = 0$ je očito jedno rješenje jednadžbe, pa pronađimo ne-nul rješenja. Jednadžbu podjelimo s y pod pretpostavkom $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = x + C.$$

Na zadnju jednakost djelujemo s eksponencijalnom funkcijom, i dobijemo:

$$|y| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x$$
$$y = \begin{cases} e^C \cdot e^x & : \; y > 0, \\ -e^C \cdot e^x & : \; y < 0. \end{cases}$$

Jer je e^C također konstanta, možemo za tu novu konstantu i dalje koristiti oznaku C (no uočimo da je ovaj "novi" C strogo pozitivan). Dakle, naše rješenje ima oblik

$$y = \pm C e^x, \quad C > 0$$

odnosno

$$y = \quad C e^x, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pridodamo li tome trivijalno rješenje $y = 0$ (koje se dobije za $C = 0$ iz gornjeg retka) s početka razmatranja, slijedi konačno rješenje:

$$y = \quad C e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Napomena. U rješavanju ćemo uglavnom preskakati razmatranja kao u zadatku 1.2: pisat ćemo ln bez prethodne apsolutne vrijednosti, znajući da će nam varijacije konstante C pokriti preostale slučajeve.

Zadatak 1.3. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y' = 1 + y^2$

(b) $x^2y^2y' + 1 = y$

(c) $3y^2y' + 16x = 2xy^3$

(d) $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x^2yy' + y^2 = 2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

(f) $\dfrac{2-e^x}{\sin^2 y} y' = 3e^x \operatorname{ctg} y$

(g) $y' = e^{x-y}$

(h) $y' = \dfrac{xy^2 - y^2 + x - 1}{x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2}$.

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + y^2 \\ \frac{1}{1+y^2} dy &= 1 \cdot dx \\ \int \frac{1}{1+y^2} dy &= \int dx \\ \operatorname{arctg} y &= x + C \\ y &= \operatorname{tg}(x + C). \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y-1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{y-1} dy = \frac{1}{x^2} dx, \quad \text{za } y \neq 1$$

$$\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y-1} + y + 1 \right) dy = \int \frac{1}{x^2} dx.$$

Nakon što izračunamo gornje integrale, dobijemo implicitno zadano opće rješenje:

$$\ln(y-1) + \frac{y^2}{2} + y = -\frac{1}{x} + C.$$

Uvrstimo li funkciju $y = 1$ u zadanu polaznu jednadžbu, dobijemo $x^2 \cdot 1^2 \cdot 0 + 1 = 1$, tj. $1 = 1$, pa zaključujemo da je i $y = 1$ također rješenje jednadžbe.

(c)

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{2y^3 - 16}{3y^2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{3y^2}{2y^3 - 16} dy}_{t=y^3} = \int x dx, \quad \text{za } y \neq 2$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^3 - 8) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Big/ \cdot 2$$

$$\ln(y^3 - 8) = x^2 + C.$$

Singularni slučaj $y = 2$ je također rješenje, jer uvrštavanjem u jednadžbu dobijemo $16x = 16x$. Sva rješenja možemo napisati eksplicitno:

$$y^3 - 8 = e^{x^2 + C} = Ce^{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{Ce^{x^2} + 8}$$

(uočimo da za $C = 0$ dobijemo upravo singularni slučaj).

(d)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \int y dy = \underbrace{\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx}_{t=e^x}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Iz uvjeta $y(0) = 1$ slijedi $\frac{1^2}{2} = \ln(1 + e^0) + C$, pa je $C = \frac{1}{2} - \ln 2$. Rješenje jednadžbe je

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

(e)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{2-y^2}{y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{y}{2-y^2} dy}_{t=2-y^2} = \int \frac{1}{2x^2} dx, \quad \text{za } y \neq \pm\sqrt{2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(2-y^2) = -\frac{1}{2x} + C \quad \Big/ \cdot (-2)$$

$$\ln(2-y^2) = \frac{1}{x} + C.$$

Singularni slučajevi također zadovoljavaju jednadžbu. Rješenje je

$$y = \pm\sqrt{2 - Ce^{\frac{1}{x}}},$$

a iz zadanog uvjeta vidimo da ispred korjena treba ići minus:

$$-1 = -\sqrt{2 - Ce^1} \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{e}.$$

Rješenje je $y = -\sqrt{2 - e^{\frac{1}{x}-1}}$.

(f)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^x}{2-e^x} \cdot \operatorname{ctg} y \cdot \sin^2 y \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} y \cdot \sin^2 y}}_{t=\operatorname{ctg} y} = \underbrace{\int \frac{3e^x}{2-e^x} dx}_{u=2-e^x}$$

$$-\ln \operatorname{ctg} y = -3\ln(2-e^x) + C$$

$$\ln \operatorname{ctg} y = \ln\left((2-e^x)^3\right) + C$$

$$\operatorname{ctg} y = C(2-e^x)^3$$

$$y = \operatorname{arcctg}(C(2-e^x)^3).$$

Singularni slučajevi $y = (k + \frac{1}{2}) \cdot \pi$ (za $k \in \mathbb{Z}$) također zadovoljavaju početnu jednadžbu.

(g)

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^y dy = e^x dx$$

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

$$e^y = e^x + C$$

$$y = \ln(e^x + C).$$

(h)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y^2 + (x-1)}{x^2(y+1) - 2x(y+1) + 2(y+1)} = \frac{(x-1)(y^2+1)}{(x^2-2x+2)(y+1)}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{y+1}{y^2+1} dy &= \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx \\
\int \frac{y}{y^2+1} dy + \int \frac{1}{y^2+1} dy &= \underbrace{\int \frac{x-1}{(x-1)^2+1} dx}_{t=(x-1)^2+1} \\
\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \operatorname{arctg} y &= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + C \\
\ln(y^2+1) + 2\operatorname{arctg} y &= \ln(x^2-2x+2) + C \\
(y^2+1)e^{2\operatorname{arctg} y} &= C(x^2-2x+2).
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.4. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $\begin{cases} yy' = \cos(2x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y + yx^2} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = x^2y^2 + x^2 - y^2 - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

(d) $x^2y' - \cos(2y) = 1$

(e) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} \cdot y' = e^{x^2-y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y' = y \ln y \cdot \cos x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \end{cases}$

(g) $e^{2x - \cos y} = y' \cdot \sin y$.

Rješenje: Zadaća. □

U nastavku ovog pododjeljka su dane neke primjene diferencijalnih jednadžbi u matematičkom modeliranju.

Zadatak 1.5. Tijelo se za 20 minuta ohladi sa $100°C$ na $60°C$. Nakon koliko će se vremena to tijelo ohladiti na $30°C$, ako je temperatura zraka koji ga okružuje konstantna i jednaka $20°C$.

Napomena. Brzina kojom tijelo mijenja temperaturu proporcionalna je razlici temperature tijela i temperature zraka koji ga okružuje.

Rješenje: Neka je t vrijeme u minutama, a $T(t)$ temperatura tog tijela u trenutku t. Prema prethodnoj napomeni, vrijedi jednadžba:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20),$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti.

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T-20} &= \int k dt \\ \ln(T-20) &= kt + C \\ T &= Ce^{kt} + 20. \end{aligned}$$

Iz uvjeta $T(0) = 100$ i $T(20) = 60$ dobijemo $C = 80$ i $e^k = \frac{1}{\sqrt[20]{2}}$. Sada tražimo t za koji vrijedi $80 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[20]{2}}\right)^t + 20 = 30$, a taj je $t = 60$. □

Zadatak 1.6. U izoliranu populaciju od 1000 zdravih jedinki određene vrste doselila se jedinka sa zaraznom bolešću nepoznatog podrijetla. Brzina širenja zaraze u populaciji proporcionalna je produktu broja zdravih i broja zaraženih jedinki. Ukoliko je nakon 2 dana broj zaraženih dosegao 1% cjelokupne populacije, odredite postotak zaraženih jedinki nakon 10 dana. (Pretpostavljamo da je ukupna populacija u promatranom razdoblju konstantna.)

Rješenje: Označimo populaciju $P = 1001$ i $Z(t) =$ broj zaraženih u danu t.

$$\begin{aligned}
\frac{dZ}{dt} = k \cdot Z \cdot (P - Z) \;\Rightarrow\; \int \frac{dZ}{Z(P-Z)} &= k \int dt \\
\frac{1}{P} \int \frac{\mathrm{d}Z}{Z} + \frac{1}{P} \int \frac{\mathrm{d}Z}{P - Z} &= kt + C \\
\ln \frac{Z}{P - Z} &= Pkt + C \\
\frac{Z}{P - Z} &= Ce^{Pkt} \\
Z &= \frac{PCe^{Pkt}}{1 + Ce^{Pkt}}.
\end{aligned}$$

Početni podaci $Z(0) = 1$ i $Z(2) = \frac{P}{100}$ daju $C = \frac{1}{P-1}$ i $e^{2Pk} = \frac{P-1}{99}$. Traži se

$$\begin{aligned}
\frac{Z(10)}{P} &= \frac{Ce^{10Pk}}{1 + Ce^{10Pk}} \cdot \frac{P-1}{P-1} = \frac{(e^{2Pk})^5}{P - 1 + (e^{2Pk})^5} = \frac{(\frac{P-1}{99})^5}{P - 1 + (\frac{P-1}{99})^5} \\
&= \frac{(\frac{1000}{99})^5}{1000 + (\frac{1000}{99})^5} \\
&\approx 99\%.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 1.7. Odredite sve glatke krivulje u ravnini koje imaju svojstvo da im tangenta u svakoj točki prolazi kroz ishodište.

Rješenje: Neka je $y(x)$ takva krivulja. Jednadžba tangente s diralištem $(x_0, y(x_0))$ glasi:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Uvjet da ona prolazi ishodištem glasi:

$$0 - y(x_0) = y'(x_0)(0 - x_0) \;\Rightarrow\; y(x_0) = x_0 \cdot y'(x_0).$$

Kako to treba vrijediti za sve točke x_0, dobijemo diferencijalnu jednadžbu (pišemo sada x umjesto x_0):

$$y = xy' \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$$

Dakle, jedine takve krivulje su pravci kroz ishodište. □

Zadatak 1.8. Odredite sve glatke krivulje u ravnini koje imaju svojstvo da im normala u svakoj točki prolazi kroz ishodište.

Rješenje: Neka je $y(x)$ takva krivulja. Jednadžba normale s diralištem $(x_0, y(x_0))$ glasi:

$$y - y(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Uvjet da ona prolazi ishodištem glasi:

$$0 - y(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)}(0 - x_0) \;\Rightarrow\; y(x_0) = -\frac{x_0}{y'(x_0)}.$$

Kako to treba vrijediti za sve točke x_0, dobijemo diferencijalnu jednadžbu:

$$y = -\frac{x}{y'} \quad \Rightarrow \quad y\,dy = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C.$$

Dakle, jedine takve krivulje su kružnice sa središtem u ishodištu. □

Zadatak* 1.9. Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $3y^2y' + 16x = 2xy^3$ koje je ograničeno za $x \to +\infty$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
3y^2\frac{dy}{dx} = 2x(y^3 - 8) \;\Rightarrow\; \underbrace{\int \frac{3y^2}{y^3 - 8}dy}_{t=y^3} &= \int 2xdx \\
\ln(y^3 - 8) &= x^2 + C \\
y^3 &= Ce^{x^2} + 8.
\end{aligned}$$

Ako je $C \neq 0$ i $x \to +\infty$, tada i $Ce^{x^2} + 8 \to +\infty$, stoga funkcija y ne može biti ograničena. Zaključujemo da je $C = 0$, pa je jedino odgovarajuće rješenje $y = 2$. □

1.1.2 Linearne jednadžbe prvog reda

Linearne jednadžbe prvog reda su jednadžbe oblika

$$y' + f(x) \cdot y = g(x). \tag{1.1}$$

Rješavamo ih tako da prvo riješimo pripadnu *homogenu* jednadžbu:

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -f(x)y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$
$$\Rightarrow\; y = Ce^{-\int f(x)dx}.$$

Zatim tražimo rješenje polazne jednadžbe u obliku $y = C(x)e^{-\int f(x)dx}$ za neku funkciju $C(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= y' + f(x)y \\ &= C'(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x)) + f(x) \cdot C(x)e^{-\int f(x)dx} \\ &= C'(x)e^{-\int f(x)dx} \\ &\Rightarrow\; C'(x) = g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \\ &\Rightarrow\; C(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx} dx. \end{aligned}$$

Dakle, rješenje linearne jednadžbe prvog reda (1.1) je:

$$y = e^{-\int f(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)\, dx + C \right], \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Zadatak 1.10. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y' + y\cos x = \sin(2x)$

(b) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(c) $(x^2+1)y' + 2xy = \dfrac{1}{x^2+1}$

(d) $xy' - (x+1)y = e^x$.

Rješenje: Koristimo formulu (1.2).

(a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin(2x)$, $\int f(x)dx = \sin x$,

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\sin x}\left[\int e^{\sin x}\sin(2x)dx + C\right] \\
&= e^{-\sin x}\left[2\underbrace{\int e^{\sin x}\sin x\cos x\, dx}_{t=\sin x} + C\right] \\
&= e^{-\sin x}\left[2\underbrace{\int t\cdot e^t\, dt}_{u=t,\ dv=e^t dt} + C\right] \\
&= e^{-\sin x}(2(t-1)e^t + C) \\
&= 2\sin x - 2 + C\cdot e^{-\sin x}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y'\cos x + y\sin x = 1 \quad &\Big/ : \cos x \\
y' + y\,\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x} \quad &\Rightarrow\ f(x) = \mathrm{tg}\, x,\ g(x) = \frac{1}{\cos x} \\
\int f(x)dx = \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}_{t=\cos x} &= -\ln\cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= e^{\ln\cos x}\left[\int e^{-\ln\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}dx + C\right] \\
&= \cos x\left[\int\frac{1}{\cos^2 x}dx + C\right] \\
&= \cos x\cdot(\mathrm{tg}\, x + C) \\
&= \sin x + C\cos x.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(x^2+1)y' + 2xy = \frac{1}{x^2+1} \quad &\Big/ : (x^2+1) \\
y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{(x^2+1)^2} \quad &\Rightarrow\ f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \\
\int f(x)dx = \underbrace{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}_{t=x^2+1} &= \ln(x^2+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln(x^2+1)} \left[\int e^{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2+1} \left[\int \frac{1}{x^2+1} + C \right] \\ &= \frac{\operatorname{arctg} x + C}{x^2+1}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} xy' - (x+1)y = e^x \quad / : x \\ y' - \frac{x+1}{x} y = \frac{e^x}{x} \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{x+1}{x},\; g(x) = \frac{e^x}{x} \\ \int f(x)dx = -\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -x - \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{x+\ln x} \left[\int e^{-x-\ln x} \cdot \frac{e^x}{x} dx + C \right] \\ &= xe^x \left[\int \frac{1}{x^2} dx + C \right] \\ &= xe^x \left(-\frac{1}{x} + C \right) \\ &= Cxe^x - e^x. \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.11. Kugla mase m puštena je da padne na zemlju. Na nju djeluje gravitacija, i otpor zraka za kojeg pretpostavljamo da je proporcionalan brzini. Izvedite formulu za brzinu kugle.

Rješenje: Označimo sa $v(t)$ brzinu kugle u trenutku t. Tada je $v'(t)$ ubrzanje kugle u trenutku t. Po 2. Newtonovom zakonu, ukupna sila koja djeluje na tijelo jednaka je produktu mase i ubrzanja. Dakle,

$$m \cdot v'(t) = \underbrace{m \cdot g}_{\text{gravitacija}} - \underbrace{k \cdot v(t)}_{otporzraka} \quad \Rightarrow \quad v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g.$$

$$\begin{aligned} v(t) &\overset{(1.2)}{=} e^{-\int \frac{k}{m} dt} \cdot \left[\int e^{\int \frac{k}{m} dt} \cdot g \, dt + C \right] \\ &= e^{-\frac{k}{m} t} \cdot \left[\frac{gm}{k} \cdot e^{\frac{k}{m} t} + C \right] \\ &= Ce^{-\frac{k}{m} t} + \frac{gm}{k}. \end{aligned}$$

Ukoliko je kugla krenula iz mirovanja, imamo početni uvjet $v(0) = 0$, pomoću kojeg možemo dobiti C:

$$0 = v(0) = C \cdot e^0 + \frac{gm}{k} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{k} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Uočite da je brzina asimptotski ograničena s konstantom $\frac{gm}{k}$ (skicirajte $v - t$ graf). □

Zadatak 1.12. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $\begin{cases} y' - y = e^{3x} \\ y(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$

(b) $(x-1)y' + yx = e^{-x}$

(c) $(2x+1)y' = 4x + 2y$

(d) $(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$.

Rješenje: Zadaća. □

1.1.3 Neke supstitucije*

Ponekad diferencijalne jednadžbe možemo pogodnim supstitucijama svesti na neki pogodni oblik, npr. na jednadžbu sa separiranim varijablama. Takve su npr. jednadžbe oblika

$$y' = f(Ax + By + C),$$

za konstante $A, B, C \in \mathbb{R}$ i $A, B \neq 0$. Uvedimo novu varijablu

$$z = Ax + By + C.$$

Vrijedi:

$$\frac{dz}{dx} = A + B \cdot \frac{dy}{dx} = A + B \cdot f(z).$$

Dobivena jednažba $\frac{dz}{dx} = A + B \cdot f(z)$ ima separirane varijable, pa je možemo riješiti integriranjem:

$$\int \frac{dz}{A + B \cdot f(z)} = x.$$

Na kraju je potrebno rješenje prikazati u originalnim varijablama x i y.

Zadatak* 1.13. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $(x+y)^2 \cdot y' = 9$

(b) $\begin{cases} y' = \sqrt{4x+2y+1} \\ y(2) = 0. \end{cases}$

Rješenje:

(a) Supstitucija je u ovom slučaju $z = x + y$, $z' = 1 + y'$. Dobijemo jednadžbu

$$\begin{aligned} z^2 \cdot (z' - 1) &= 9 \\ z^2 \cdot z' &= 9 + z^2 \\ \int \underbrace{\frac{z^2}{z^2+9}}_{=1-\frac{9}{z^2+9}} \, dz &= \int dx \\ z - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{3}\right) &= x + C. \end{aligned}$$

Uvrstimo nazad početne varijable ($z = x + y$):

$$\begin{aligned} x + y - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{3}\right) &= x + C \\ y - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{3}\right) &= C. \end{aligned}$$

(b) Supstitucija je $z = 4x + 2y + 1$, $z' = 4 + 2y'$, pa je $y' = \dfrac{z'-4}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{z'-4}{2} = \sqrt{z} \ \Rightarrow \ z' &= 2\sqrt{z} + 4 \\ \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{z}+2} dz}_{t^2=z} &= \int 2dx \\ 2\sqrt{z} - 4\ln(\sqrt{z}+2) &= 2x + C \\ 2\sqrt{4x+2y+1} - 4\ln(\sqrt{4x+2y+1}+2) &= 2x + C. \end{aligned}$$

Iz zadanog uvjeta imamo $2\sqrt{9} - 4\ln(\sqrt{9}+2) = 8 + C$, iz čega vidimo da je $C = -2 - 4\ln 5$. Konačno rješenje je

$$2\sqrt{4x+2y+1} - 4\ln(\sqrt{4x+2y+1}+2) = 2x - 2 - 4\ln 5.$$

$\square$

Zadatak* 1.14. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y' - y = 2x - 3$

(b) $y' = (x - y)^2 + 1$

(c) $\begin{cases} (x + 2y) \cdot y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(d) $y' = (Ax + By + C)^2$, $A, B, C > 0$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

Jednadžbe koje možemo zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

također možemo pogodnom supstitucijom svesti na separirane varijable. U literaturi se takve jednažbe zovu homogene, no nemaju direkne veze s linearnim homogenim jednadžbama. Rješavamo ih supstitucijom $u = \frac{y}{x}$. Vrijedi $ux = y$, pa je

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{dy}{dx} = f(u).$$

Dobili smo jednadžbu $\frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u$ koja ima separirane varijable:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Na kraju je potrebno rješenje prikazati u originalnim varijablama x i y.

Zadatak* 1.15. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

(b) $y' = \dfrac{2xy - y^2}{x^2}$

(c) $xy' = y + \dfrac{x^2}{y}\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}$

(d) $\begin{cases} \left(y' - \dfrac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(e) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

(f) $2xy\, dx - (x^2 + y^2)dy = 0.$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} \qquad \left(u = \frac{y}{x},\ y' = xu' + u\right) \\ xu' + u &= u + \operatorname{tg} u \\ \int \frac{du}{\operatorname{tg} u} &= \int \frac{1}{x} dx, \quad \text{za } \operatorname{tg} u \neq 0 \\ \ln \sin u &= \ln x + C \\ \sin u &= Cx. \end{aligned}$$

Nakon vraćanja "starih" varijabli ($u = \frac{y}{x}$) dobijemo opće rješenje:

$$\sin \frac{y}{x} = Cx.$$

Singularni slučaj kada je $\operatorname{tg} u = 0$ se provjeri posebno:

$$\operatorname{tg} u = 0 \ \Rightarrow\ \sin u = 0 \ \Rightarrow\ u = k\pi \ \Rightarrow\ y = k\pi x.$$

Funkcije $y = k\pi x$ za $k \in \mathbb{Z}$ također zadovoljavaju jednadžbu.

(b)

$$
\begin{aligned}
y' &= 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \left(u = \frac{y}{x},\ y' = xu' + u\right)\\
xu' + u &= 2u - u^2\\
xu' &= u(1-u)\\
\int \frac{du}{u(1-u)} &= \int \frac{dx}{x}, \quad \text{za } u \neq 0, 1\\
\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du &= \int \frac{dx}{x}\\
\ln u &= \ln x + \ln(1-u) + C\\
u &= Cx(1-u)\\
\frac{y}{x} &= Cx(1 - \frac{y}{x})\\
y &= Cx(x-y)\\
y &= \frac{Cx^2}{Cx+1}.
\end{aligned}
$$

Za $u = 0$ i $u = 1$, odnosno $y = 0$ i $y = x$ također dobijemo rješenja.

(c)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \left(u = \frac{y}{x},\ y' = xu' + u\right)\\
xu' + u &= u + \frac{1}{u}\sqrt{1-u^2}\\
\underbrace{\int \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}}}_{t=1-u^2} &= \int \frac{dx}{x}, \quad \text{za } u \neq \pm 1\\
-\sqrt{1-u^2} &= \ln x + C\\
\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} &= -\ln x + C.
\end{aligned}
$$

Singularni slučajevi $y = \pm x$ su također rješenja.

(d) Standardna supstitucija $u = \frac{y}{x}$, $y' = xu' + u$ daje:

$$
\begin{aligned}
(xu' + u - u)\operatorname{arctg} u &= 1 \\
\underbrace{\int \operatorname{arctg} u\, du}_{p=\operatorname{arctg} u,\ dr=du} &= \int \frac{1}{x} dx \\
u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) &= \ln x + C \\
\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) &= \ln x + C.
\end{aligned}
$$

Uvjet $y(1) = 0$ daje $0 - 0 = 0 + C$, pa je $C = 0$.

(e)

$$
\begin{aligned}
(x+y)dx + (y-x)dy = 0 \ &\Rightarrow\ (x-y)dy = (x+y)dx \\
&\Rightarrow\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}\ \frac{:x}{:x} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u = \frac{y}{x}\ \Rightarrow\ xu' + u &= \frac{1+u}{1-u} \\
xu' &= \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u} \\
\int \frac{1-u}{1+u^2} du &= \int \frac{1}{x} dx \\
\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) &= \ln x + C.
\end{aligned}
$$

Zamjenom $u = \frac{y}{x}$ dobivamo rješenje:

$$
\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + C.
$$

(f)

$$
y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\ \frac{:x^2}{:x^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
u = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ xu' + u &= \frac{2u}{1+u^2} \\
xu' &= \frac{2u}{1+u^2} - u = \frac{u-u^3}{1+u^2} \\
\int \frac{1+u^2}{u(1-u)(1+u)} du &= \int \frac{1}{x} dx, \quad \text{za } u \neq 0, \pm 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right) du &= \int \frac{1}{x} dx \\
\ln u - \ln(1-u) - \ln(1+u) &= \ln x + C \\
\frac{u}{(1-u^2)} &= Cx \\
\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} &= Cx \\
y &= C(x^2-y^2).
\end{aligned}
$$

Singularni slučajevi $y = 0$, $y = x$ i $y = -x$ također daju rješenja jednadžbe.

□

Zadatak* 1.16. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

(c) $(y + \sqrt{xy})\, dx - x\, dy = 0$

(d) $(y^2 - x^2)\, dy = 2xy\, dx.$

Rješenje: Zadaća. □

1.1.4 Egzaktne jednadžbe*

Neka je zadana diferencijalna jednadžba u obliku

$$f_1(x,y)\, dx + f_2(x,y)\, dy = 0. \tag{1.3}$$

Sjetimo se da je $y' = \frac{dy}{dx}$, pa jednadžbu možemo zapisati i u obliku

$$f_1(x,y) + f_2(x,y)y' = 0. \tag{1.4}$$

Kažemo da je jednadžba (1.3) *egzaktna*, ako postoji funkcija $F(x,y)$ klase C^1 za koju vrijedi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2. \tag{1.5}$$

Ekvivalentno je reći da vrijedi $\operatorname{grad} F = (f_1, f_2)$, odnosno da je vektorsko polje (f_1, f_2) je potencijalno.

Izračunajmo u tom slučaju derivaciju kompozicije $F(x, y(x))$:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \cdot y'(x) \overset{(1.5)}{=} f_1(x,y) + f_2(x,y)y' \overset{(1.4)}{=} 0.$$

Dakle, mora biti

$$F(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

što nam daje rješenje egzaktne jednadžbe (1.3).

U sljedećem teoremu dajemo kriterij egzaktnosti koji je jednostavan za provjeru.

Teorem. *Neka su f_1 i f_2 funkcije definirane na otvorenom i povezanom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ koji je "bez rupa". Jednadžba $f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0$ je egzaktna ako i samo ako vrijedi uvjet*

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{1.6}$$

Ostaje još pitanje, jednom kad smo provjerili da je jednadžba egzaktna, kako naći funkciju F? Trebaju vrijediti jednakosti (1.5), pa integrirajmo prvu od njih po varijabli x. Dobijemo

$$F(x,y) = \int f_1(x,y)\,dx + \varphi(y),$$

gdje je φ funkcija koja ovisi samo o y (dolazi kao konstanta integracije po varijabli x). Gornju jednakost deriviramo po varijabli y, pa dobijemo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int f_1(x,y)\,dx + \varphi'(y) = \int \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dx + \varphi'(y).$$

Iz prethodnog retka i druge jednakosti u (1.5) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\varphi'(y) = f_2(x,y) - \int \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dx \\
&\Rightarrow \varphi(y) = \int f_2(x,y)\,dy - \iint \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy \\
&\Rightarrow F(x,y) = \int f_1(x,y)\,dx + \int f_2(x,y)\,dy - \iint \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Zadatak* 1.17. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $(2x+3x^2y)\,dx + (x^3-3y^2)\,dy = 0$

(b) $(y^2-x^2)\,dy = 2xy\,dx$

(c) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\,dx - \sqrt{x^2-y}\,dy = 0.$

Rješenje:

(a) U ovom slučaju je $f_1(x,y) = 2x+3x^2y$ i $f_2(x,y) = x^3-3y^2$. Provjerimo da je jednadžba egzaktna:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y) = 3x^2 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2) = 3x^2,
\end{aligned}$$

dakle vrijedi jednakost (1.6), pa je prema teoremu jednadžba egzaktna. Sada tražimo funkciju $F(x,y)$ za koju vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x+3x^2y \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x^3-3y^2.
\end{aligned}$$

Prvu jednakost integriramo po x, pa dobijemo

$$F(x,y) = \int (2x+3x^2y)\,dx = x^2+x^3y+\varphi(y),$$

te zatim deriviranjem po y slijedi:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+x^3y+\varphi(y)) = x^3+\varphi'(y).$$

Stoga imamo:

$$\begin{aligned} x^3 + \varphi'(y) &= x^3 - 3y^2 \\ \varphi'(y) &= -3y^2 \\ \varphi(y) &= -y^3 + C \\ F(x,y) &= x^2 + x^3 y - y^3 + C. \end{aligned}$$

Rješenje zadane jednadžbe je $F(x,y) = C$, odnosno

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

(b) Zadana jednadžba je egzaktna, jer je

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2) = -2x = \frac{\partial}{\partial y}(-2xy).$$

Sada tražimo funkciju za koju vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -2xy \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= y^2 - x^2. \end{aligned}$$

Prvu jednakost integriramo po x, pa dobijemo

$$F(x,y) = \int (-2xy)\,dx = -x^2 y + \varphi(y),$$

te zatim deriviranjem po y slijedi:

$$\begin{aligned} -x^2 + \varphi'(y) &= \frac{\partial F}{\partial y} = y^2 - x^2 \\ \varphi'(y) &= y^2 \\ \varphi(y) &= \frac{y^3}{3} + C \\ F(x,y) &= -x^2 y + \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Rješenje jednadžbe je

$$-x^2 y + \frac{y^3}{3} = C.$$

Zadana jednadžba je također i homogena (vidite zadatak 1.16(d)).

(c) Jednadžba je egzaktna, jer je:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\right)=\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{x^2-y}\right).$$

Sada tražimo funkciju za koju vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=-\sqrt{x^2-y}.\end{aligned}$$

Prvu jednakost integriramo po x, pa dobijemo

$$F(x,y)=\int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\,dx=x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}+\varphi(y),$$

te zatim deriviranjem po y slijedi:

$$\begin{aligned}-\sqrt{x^2-y}+\varphi'(y)&=\frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}\\ \varphi'(y)&=0\\ \varphi(y)&=C\\ F(x,y)&=x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

Rješenje jednadžbe je

$$x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}=C.$$

□

Zadatak* 1.18. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $(2-9xy^2)x\,dx+(4y^2-6x^3)y\,dy=0$

(b) $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}\,dy=0$

(c) $(1+y^2\sin(2x))\,dx=2y\cos^2(x)\,dy$.

Rješenje: Zadaća. □

Napomena. U slučaju kada jednadžba oblika (1.3) nije egzaktna, ponekad ju možemo pomnožiti s precizno odabranom funkcijom $\mu(x,y)$ tako da ekvivalentna novonastala jednadžba

$$\mu(x,y)f_1(x,y)\,dx + \mu(x,y)f_2(x,y)\,dy = 0$$

bude egzaktna, te ju stoga možemo riješiti u tom obliku. Funkciju $\mu(x,y)$ koja na taj način "popravlja" situaciju zovemo *Eulerov multiplikator*. Primjerice, jednadžba

$$(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$$

nije egzaktna, jer je $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + x) = 2y$ i $\dfrac{\partial}{\partial x}y = 0$. Međutim, ukoliko jednadžbu pomnožimo s funkcijom $\mu(x,y) = e^{2x}$, dobijemo

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}\,dx + ye^{2x}\,dy = 0.$$

Uočimo da je dobivena jednadžba sada egzaktna, jer je

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((x^2 + y^2 + x)e^{2x}\right) = 2ye^{2x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{2x}\right),$$

pa ju lako rješimo na prethodno opisani način. Postoje određene metode pomoću kojih se u nekoj situaciji ako postoji može "pogoditi" Eulerov multiplikator, ali se ovdje u to nećemo upuštati.

1.2 Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

Baviti ćemo se jednostavnosti radi samo jednadžbama drugog reda, iako metode ovdje izložene funkcioniraju i u slučaju višeg reda.

1.2.1 Linearne jednadžbe drugog reda

Linearna jednadžba drugog reda je jednadžba oblika

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x).$$

Kažemo da je jednadžba *homogena* ukoliko je $f(x) = 0$ (u suprotnom je *nehomogena*), te da se radi o jednadžbi *s konstantnim koeficijentima* ukoliko su $p(x)$ i $q(x)$ konstatne funkcije.

Linearne homogene jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima

Prvo ćemo dati recept za rješavanje linearnih homogenih jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima, tj. jednadžbi oblika

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Toj jednadžbi pridružujemo njenu *karakterističnu jednadžbu*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

kvadratnu jednadžbu u nepoznanici λ. Neka su λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe. Dogodit će se jedna od sljedeće tri mogućnosti:

- Ako je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada je opće rješenje jednadžbe (1.7) dano formulom
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- Ako je $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tada je opće rješenje jednadžbe (1.7) dano formulom
$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
- Ukoliko su rješenja karakteristične jednadžbe kompleksno-konjugirana, tj. $\lambda_1 = a + bi$ i $\lambda_2 = a - bi$ za $a, b \in \mathbb{R}$, tada je opće rješenje jednadžbe (1.7) dano formulom
$$y = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.19. Provjerite da su gornjim formulama u sva tri slučaja zaista dana rješenja jednadžbe (1.7).

Rješenje: Zadaća. $\square$

Zadatak 1.20. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(c) $y'' - 2y' + y = 0.$

Rješenje:

(a) Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Iz uvjeta $y(0) = 2$ dobijemo $C_1 + C_2 = 2$, a iz $y'(0) = 0$ slijedi

$$0 = \left(-C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}\right)\big|_{x=0} = -C_1 + 2C_2.$$

Iz tih jednadžbi dobijemo $C_1 = \frac{4}{3}$ i $C_2 = \frac{2}{3}$, pa je traženo rješenje jednako $y = \frac{4}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x}$.

(b) Karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 4 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = C_1 e^{0x}\cos(2x) + C_2 e^{0x}\sin(2x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x).$$

Iz uvjeta $y(0) = 0$ dobijemo $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$, tj. $C_1 = 0$, a iz $y'(0) = 1$ slijedi $1 = 2C_2\cos(2x)\big|_{x=0} = 2C_2$, pa je $C_2 = \frac{1}{2}$. Traženo rješenje je stoga $y = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

(c) Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, pa je opće rješenje zadane jednadžbe

$$y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}.$$

$\square$

Linearne nehomogene jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima

Sada rješavamo općenite linearne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima, tj. jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad p, q \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Funkciju $f(x)$ zovemo *funkcijom smetnje*. Neka je y_P bilo koje rješenje jednadžbe (1.8) (zvat ćemo ga *partikularnim rješenjem*), te neka je y_H opće rješenje pripadne homogene jednadžbe $y'' + py' + qy = 0$. Opće rješenje jednadžbe (1.8) je dano s

$$y = y_H + y_P.$$

Prethodno smo opisali kako naći y_H, no kako naći y_P? U nastavku su nabrojani neki posebni slučajevi u kojima možemo pogoditi y_p. Neka su opet λ_1 i λ_2 rješenja karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

- Ako je funkcija smetnje oblika $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, gdje je P_n neki polinom stupnja n:

  (a) ako je $\lambda_1 \neq a$ i $\lambda_2 \neq a$, tada partikularno rješenje tražimo u obliku

  $$y_P = Q_n(x)e^{ax},$$

  (b) ako je $\lambda_1 = a$ i $\lambda_2 \neq a$ (ili $\lambda_1 \neq a$ i $\lambda_2 = a$), tada partikularno rješenje tražimo u obliku

  $$y_P = x \cdot Q_n(x)e^{ax},$$

  (c) ako je $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, tada partikularno rješenje tražimo u obliku

  $$y_P = x^2 \cdot Q_n(x)e^{ax},$$

  gdje je u sva tri slučaja Q_n neki polinom stupnja n.

- Ako je funkcija smetnje oblika $f(x) = P_n(x)\cos(bx) + R_m(x)\sin(bx)$, gdje je P_n neki polinom stupnja n i R_m neki polinom stupnja m:

  (a) ako je $\lambda_{1,2} \neq \pm bi$, tada partikularno rješenje tražimo u obliku

  $$y_P = S_k(x)\cos(bx) + T_k(x)\sin(bx),$$

  (b) ako je $\lambda_{1,2} = \pm bi$, tada partikularno rješenje tražimo u obliku

  $$y_P = x\left(S_k(x)\cos(bx) + T_k(x)\sin(bx)\right),$$

gdje su u oba slučaja S_k i T_k neki polinomi stupnja $k = \max\{n, m\}$.

Napomena. Gornji kriteriji se mogu objediniti i iskazati u generalnijoj varijanti: ako je funkcija smetnje oblika

$$f(x) = e^{ax} \left[P(x) \cos(bx) + Q(x) \sin(bx) \right],$$

gdje su polinomi P i Q stupnja manjeg ili jednakog od k, tada jednadžba (1.8) ima partikularno rješenje oblika

$$y_P = x^m e^{ax} \left[S(x) \cos(bx) + T(x) \sin(bx) \right],$$

gdje je m kratnost broja $a + bi$ kao nultočke pripadne karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (ako nije nultočka $m = 0$, inače je 1 ili 2), te gdje su S i T neki polinomi stupnja k.

Ukoliko funkcija smetnje ima oblik $f = f_1 + f_2$, te ako funkcijama smetnje f_1 i f_2 odgovaraju redom partikularna rješenja y_{P_1} i y_{P_2}, tada će nam funkcija $y_p = y_{P_1} + y_{P_2}$ biti partikularno rješenje koje odgovara funkciji smetnje f. Ovo svojstvo linearnih diferencijalnih jednadžbi naziva se *načelo superpozicije.*

Zadatak 1.21. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y'' - y' - 12y = x + 1$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^x$

(c) $\begin{cases} y'' - y' = 1 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 2 \end{cases}$

(d) $y'' - y' = xe^x$

(e) $y'' - y' = \cos x$

(f) $y'' - y' = 1 + \cos x$

(g) $y'' + y = x^2$.

Rješenje:

(a) Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - y' - 12y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 4$, pa je opće rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}.$$

Trebamo sada naći jedno partikularno rješenje. Zadana funkcija smetnje $f(x) = x+1$ ima oblik $P_n(x)e^{ax}$ za $P_n(x) = x+1$ (polinom stupnja $n = 1$) i $a = 0$. Očito $a = 0$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, pa partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_P = Q_1(x)e^{0x} = Q_1(x).$$

Jer je $Q_1(x)$ polinom prvog stupnja, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_P = Ax + B,$$

za neke konstatne A i B koje moramo odrediti. Njih odredimo tako da uvrstimo y_P u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}(Ax+B)'' - (Ax+B)' - 12(Ax+B) &= x+1\\ 0 - A - 12Ax - 12B &= x+1\\ -12Ax + (-A-12B) &= 1x+1,\end{aligned}$$

iz čega vidimo da mora biti $\begin{cases}-12A &= 1\\ -A-12B &= 1\end{cases}$, tj. imamo $A = -\frac{1}{12}$ i $B = -\frac{11}{144}$. Dobili smo $y_P = -\frac{1}{12}x - \frac{11}{144}$, pa je opće rješenje polazne jednadžbe jednako:

$$y = y_H + y_P = \underbrace{C_1e^{-3x} + C_2e^{4x}}_{y_H} \underbrace{-\frac{1}{12}x - \frac{11}{144}}_{y_P}.$$

(b) Vrijedi $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 2 \;\Rightarrow\; y_H = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Jer $f(x) = e^x$ ima oblik $P_n(x)e^{ax}$ za $P_n(x) = 1$, $n = 0$ i $a = 1 \neq \lambda_{1,2}$, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = Q_0(x)e^{1x}$, gdje je Q_0 polinom stupnja 0, dakle konstanta. Stoga u jednadžbu uvrštavamo $y_P = Ae^x$ da bi našli konstantu A. Dobijemo $Ae^x - 4Ae^x + 4Ae^x = e^x$, iz čega slijedi $A = 1$. Opće rješenje polazne jednadžbe je stoga:

$$y = y_H + y_P = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + e^x.$$

(c) Vrijedi $\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; y_H = C_1 + C_2e^x$. Jer $f(x) = 1$ ima oblik $P_n(x)e^{ax}$ za $P_n(x) = 1$, $n = 0$ i $a = 0$, te $a = \lambda_1$ i $a \neq \lambda_2$, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = xQ_0(x)e^{0x}$, gdje je Q_0 polinom stupnja 0, dakle konstanta. Stoga u jednadžbu uvrštavamo $y_P = Ax$ da bi našli konstantu A. Dobijemo $0 - A = 1$, iz čega slijedi $A = -1$. Opće rješenje polazne jednadžbe je stoga:

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2e^x - x.$$

Uvjet $y(0) = 0$ daje $C_1 + C_2 = 0$, dok uvjet $y'(0) = 2$ daje $C_2 = 3$. Traženo rješenje je $y = -3 + 3e^x - x$.

(d) Vrijedi $\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; y_H = C_1 + C_2 e^x$. Jer $f(x) = xe^x$ ima oblik $P_n(x)e^{ax}$ za $P_n(x) = x$, $n = 1$ i $a = 1$, te $a \neq \lambda_1$ i $a = \lambda_2$, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = xQ_1(x)e^{1x}$, gdje je Q_1 polinom stupnja 1, dakle $Q_1(x) = Ax + B$ za neke konstante A i B. Partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = (Ax^2 + Bx)\,e^x$:

$$\underbrace{(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x}_{y_P''} - \underbrace{(Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x}_{y_P'} = xe^x$$

$$\begin{aligned}(2Ax + 2A + B)e^x &= xe^x\\ 2Ax + 2A + B &= x,\end{aligned}$$

iz čega slijedi $\begin{cases} 2A & = 1 \\ 2A + B & = 0 \end{cases}$, tj. $A = \frac{1}{2}$ i $B = -1$. Opće rješenje je:

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^x.$$

(e) Vrijedi $\lambda^2 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 \;\Rightarrow\; y_H = C_1 + C_2 e^x$. Jer $f(x) = \cos x$ ima oblik $P_n(x)\cos(bx) + R_m(x)\sin(bx)$ za $P_n(x) = 1$ i $R_m(x) = 0$, $n = m = 0$ i $b = 1$, te $\lambda_{1,2} \neq \pm bi$, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = S_0(x)\cos(bx) + T_0(x)\sin(bx)$, gdje su $S_0(x)$ i $T_0(x)$ konstante. Dakle, u početnu jednadžbu uvrštavamo $y_P = A\cos x + B\sin x$:

$$\underbrace{(-A\cos x - B\sin x)}_{y_P''} - \underbrace{(-A\sin x + B\cos x)}_{y_P'} = \cos x$$

$$(-A - B)\cos x + (-B + A)\sin x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x,$$

iz čega slijedi $-A - B = 1$ i $-B + A = 0$, tj. $A = B = -\frac{1}{2}$. Opće rješenje početne jednadžbe je:

$$y = y_H + y_P = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

(f) U ovom slučaju nam je funkcija smetnje $f(x) = 1 + \cos x$ zbroj dvije funkcije $f_1(x) = 1$ i $f_2(x) = \cos x$ takve da možemo odrediti partikularno rješenje y_{P_1} za $y'' - y' = f_1(x)$ i partikularno rješenje y_{P_2} za

$y'' - y' = f_2(x)$. Partikularno rješenje za zbroj $f_1(x) + f_2(x)$ će biti upravo zbroj partikularnih rješenja $y_{P_1} + y_{P_2}$ pojedinačnih pribrojnika. Stoga je opće rješenje zadane jednadžbe:

$$y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} = C_1 + C_2 e^x - x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

(y_H, y_{P_1} i y_{P_2} smo izračunali u prethodnim zadacima.)

(g) $\lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i \;\Rightarrow\; y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Jer $f(x) = x^2$ ima oblik $P_n(x)e^{ax}$ za $P_n(x) = x^2$, $n = 2$ i $a = 0 \neq \lambda_{1,2}$, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_P = Q_2(x)e^{0x}$, gdje je Q_2 polinom stupnja 2, dakle $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Uvrštavanjem y_P u jednadžbu dobijemo:

$$\begin{aligned} \underbrace{2A}_{y_P''} + \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_P} &= x^2 \\ Ax^2 + Bx + 2A + C &= x^2, \end{aligned}$$

pa zaključujemo $A = 1$, $B = 0$ i $C = -2$. Stoga je opće rješenje dano formulom:

$$y = y_H + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

□

Zadatak 1.22. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $\begin{cases} y'' - 8y' + 12y = 1 \\ y(0) = -\frac{1}{12},\; y'(0) = 4 \end{cases}$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

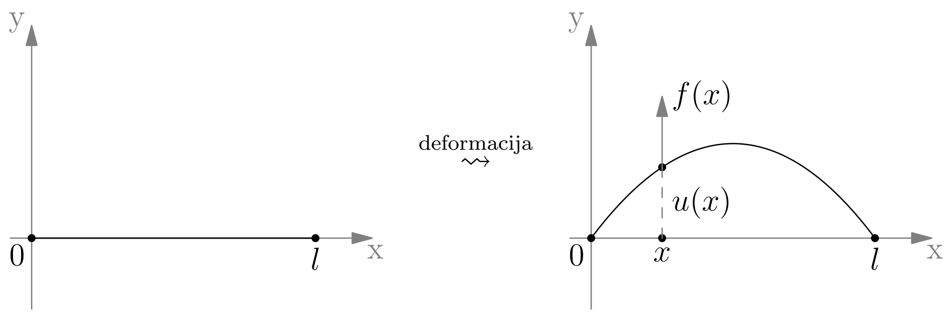
(c) $y'' + 9y = 3\sin(3x)$

(d) $y'' - 9y = xe^{3x} + x\cos(3x) - 3.$

Rješenje: Zadaća. □

Ravnoteža žice

Promatramo ravnotežni položaj tanke žice na koju djeluje vanjska sila. Nedeformirani položaj žice opisujemo segmentom $[0, l]$ na x-osi. Neka je $f(x)$ vertikalna komponenta gustoće vanjske sile (sile po jedinici duljine) u točki $x \in [0, l]$. Zbog utjecaja vanjske sile, žica se deformira; označimo sa $u(x)$ progib žice u točki $x \in [0, l]$.



Uvedimo sljedeće oznake i pretpostavke:

- Napetost žice p (horizontalna komponenta sile) je konstantna.
- Žica se nalazi u homogenom sredstvu koje ima konstantan koeficijent elastičnosti q.
- Rubni uvjeti: oba kraja žice su pričvršćena na visini 0.

Pokaže se da tada ravnotežni položaj žice $u(x)$ zadovoljava sljedeću linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} &-pu''(x) + qu(x) = f(x), \qquad x \in [0, l], \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Izvod ove jednadžbe (uz dodatne pretpostavke malih progiba i malih deformacija) može se vidjeti u [5].

Zadatak 1.23. Teška žica mase $m = 2$, duljine $l = 12$, te napetosti $p = 50$, nalazi se u homogenom sredstvu koeficijenta elastičnosti $q = 200$, te se deformira pod utjecajem vlastite težine. Odredite joj ravnotežni položaj, ako su joj oba kraja pričvršćena.

Rješenje: Gustoća vanjske sile je u ovom slučaju $f(x) = -\frac{mg}{l} = -\frac{2 \cdot 10}{12} = -\frac{5}{3}$. Negativan predznak stoji iz razloga što sila teža ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{j}$. Jednadžba (1.9) glasi:

$$-50u'' + 200u = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad u'' - 4u = \frac{1}{30}$$
$$\lambda^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 2 \;\Rightarrow\; u_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku konstante $u_P = A$. Uvrštavajući je u jednadžbu, dobivamo $-4A = \frac{1}{30}$, tj. $u_P = -\frac{1}{120}$. Dakle,

$$u = u_H + u_P = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{120}.$$

Iz rubnih uvjeta dobivamo linearan sustav $2x2$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = \frac{1}{120} \\ C_1 e^{24} + C_2 e^{-24} & = \frac{1}{120}, \end{cases}$$

čije je rješenje $C_1 = \frac{1}{120(1+e^{24})}$, $C_2 = \frac{e^{24}}{120(1+e^{24})} = \frac{1}{120(1+e^{-24})}$, pa je

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{e^{2x}}{120(1+e^{24})} + \frac{e^{-2x}}{120(1+e^{-24})} - \frac{1}{120} \\ &= \frac{1}{120} \cdot \frac{\mathrm{ch}(2x) + \mathrm{ch}(2x-24)}{\mathrm{ch}(24)+1} - \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.24. Odredite ravnotežni položaj žice duljine $l = 4\pi$, zanemarive mase, napetosti $p = 1$, koja se nalazi u homogenom sredstvu koeficijenta elastičnosti $q = 9$, ako su joj oba kraja pričvršćena, te je gustoća vanjske sile dana formulom $f(x) = 13\sin(2x) + 13\cos(2x)$

Rješenje:

$$-u'' + 9u = 13\sin(2x) + 13\cos(2x) \;\Rightarrow\; u'' - 9u = -13\sin(2x) - 13\cos(2x)$$
$$\lambda^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 3 \;\Rightarrow\; u_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$u_P = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Uvrštavajući ga u jednadžbu, te sortirajući koeficijente uz $\sin(2x)$ i $\cos(2x)$, dobijemo $-13A = -13$ i $-13B = -13$, tj. $A = B = 1$. Dakle,

$$u = u_H + u_P = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \sin(2x) + \cos(2x).$$

Iz rubnih uvjeta dobivamo linearan sustav 2×2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = -1 \\ C_1 e^{12\pi} + C_2 e^{-12\pi} & = -\sin(8\pi) - \cos(8\pi) = -1, \end{cases}$$

čije je rješenje $C_1 = \frac{-1}{e^{12\pi}+1}$, $C_2 = \frac{-1}{e^{-12\pi}+1}$, pa je

$$u(x) = -\frac{e^{3x}}{e^{12\pi}+1} - \frac{e^{-3x}}{e^{-12\pi}+1} + \sin(2x) + \cos(2x).$$

□

Metoda varijacije konstanti za određivanje partikularnog rješenja*

U slučajevima kada funkcija smetnje nije odgovarajućeg oblika, možemo ponekad doći do općeg rješenja jednadžbe (1.8) na sljedeći način. Neka rješenje pripadne homogene jednadžbe ima oblik

$$y_H = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Posebno, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su rješenja pripadne homogene jednadžbe. Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) \tag{1.10}$$

za neke funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ koje moramo odrediti. Nakon deriviranja dobijemo:

$$y' = C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x) + \underbrace{C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x)}.$$

Želimo odabrati takve funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ da vrijedi uvjet

$$C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0. \tag{1.11}$$

Ostaje nam $y' = C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x)$, pa nakon još jednog deriviranja dobijemo:

$$y'' = C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x) + \underbrace{C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x)}.$$

Želimo odabrati takve funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ da vrijedi još i uvjet

$$C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \tag{1.12}$$

Ako uspijemo naći $C_1(x)$ i $C_2(x)$ takve da vrijede uvjeti (1.11) i (1.12), tada tvrdimo da je formulom (1.10) dano rješenje jednadžbe (1.8):

$$\begin{aligned}
y'' + py' + qy = {} & \underbrace{C_1(x) \cdot y_1''(x) + C_2(x) \cdot y_2''(x) + f(x)}_{y''} \\
& + p \cdot \underbrace{(C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x))}_{y'} \\
& + q \cdot \underbrace{(C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x))}_{y} \\
= {} & \quad C_1(x) \cdot \underbrace{(y_1''(x) + p \cdot y_1'(x) + q \cdot y_1(x))}_{0} \\
& + C_2(x) \cdot \underbrace{(y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x))}_{0} + f(x) \\
= {} & f(x).
\end{aligned}$$

Rezimirajmo kako funkcionira metoda varijacije konstanti za jednadžbu (1.8):

- Prvo nađemo opće rješenje pripadne homogene jednadžbe u obliku $y_H = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$.
- Zatim nađemo funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ koje zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) & = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) & = f(x). \end{cases} \tag{1.13}$$

- Opće rješenje polazne jednadžbe je $y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$.

Zadatak* 1.25. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

(b) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Rješenje:

(a) Rješenje pripadne homogene jednadžbe je $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Sustav (1.13) u ovom slučaju je:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x & = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x & = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo sa $\cos x$, drugu sa $\sin x$, te ih oduzmemo. Dobijemo:

$$\begin{aligned}
C_1' \cos^2 x + C_1' \sin^2 x &= -1 \\
C_1' \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} &= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1' &= -1 \;\Rightarrow\; C_1 = -x + D_1 \\
C_2' &= \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \;\Rightarrow\; C_2 = \ln \sin x + D_2.
\end{aligned}$$

Opće rješenje zadane jednadžbe je:

$$\begin{aligned}
y &= (-x + D_1)\cos x + (\ln \sin x + D_2)\sin x \\
&= D_1 \cos x + D_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln \sin x.
\end{aligned}$$

(b) Rješenje pripadne homogene jednadžbe je $y_H = C_1 + C_2 e^x$. Sustav (1.13) u ovom slučaju je

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^x &= 0 \\ \qquad C_2' e^x &= \dfrac{e^x}{1+e^x}, \end{cases}$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \underbrace{\int \frac{1}{1+e^x} dx}_{t=1+e^x} = \int \frac{dt}{t(t-1)} = x - \ln(1+e^x) + D_2 \\
C_1 &= -\underbrace{\int \frac{e^x}{1+e^x} dx}_{t=e^x} = -\int \frac{dt}{t+1} = -\ln(1+e^x) + D_1.
\end{aligned}$$

Opće rješenje zadane jednadžbe je:

$$\begin{aligned}
y &= (-\ln(1+e^x) + D_1) + (x - \ln(1+e^x) + D_2)e^x \\
&= D_1 + D_2 e^x + x e^x - \ln(1+e^x) - e^x \ln(1+e^x).
\end{aligned}$$

□

Zadatak* 1.26. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

(b) $y'' + 4y = \operatorname{ctg}(2x)$.

Rješenje: Zadaća. □

1.2.2 Snižavanje reda*

Neke jednadžbe višeg reda možemo pogodnim supstitucijama svesti na jednadžbe manjeg reda. Takve su npr. jednadžbe u kojima se ne javlja y, tj. jednadžbe oblika

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Za njih izaberemo supstituciju $p = y'$ (kao funkcije u varijabli x). Tada je $p' = y''$, pa smo time dobili jednadžbu

$$F(x, p, p') = 0$$

koja je prvog reda.

Zadatak* 1.27. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y'' + y'x = 0$

(b) $\begin{cases} y'' + y' = x \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2 \end{cases}$

(c) $y'' = (y')^2$

(d) $xy'' = y' + x \operatorname{ctg} \frac{y'}{x}$.

Rješenje:

(a) Supstitucija $p = y'$, $p' = y''$ daje jednadžbu:

$$p' + px = 0 \overset{\text{separacija varijabli}}{\Rightarrow} \int \frac{dp}{p} = -\int x dx \ \Rightarrow\ p = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \int p(x)dx + C_2 = C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2.$$

(Iako je funkcija $e^{-\frac{x^2}{2}}$ integrabilna, njena primitivna funkcija se ne može zapisati pomoću elementarnih funkcija, pa gornji integral ne možemo eksplicitno izračunati.)

(b) Supstitucija $p = y'$, $p' = y''$ daje jednadžbu:

$$\begin{aligned} p' + p = x \overset{\text{linearna 1. reda}}{\Rightarrow} \quad p &= e^{-\int dx} \left[\int e^{\int dx} x dx + C_1 \right] \\ &= e^{-x}(xe^x - e^x + C_1) \\ &= C_1 e^{-x} + x - 1 \end{aligned}$$

$$y = \int p(x)dx + C_2 = C_1 \int (C_1 e^{-x} + x - 1)dx + C_2 = C_1 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

Iz uvjeta $y(0) = 2$ slijedi $C_1 + C_2 = 2$, a iz uvjeta $y'(0) = -2$ imamo

$$-2 = (-C_1 e^x + x - 1)\Big|_{x=0} = -C_1 - 1.$$

Dakle, $C_1 = C_2 = 1$, pa je traženo rješenje jednako

$$y = e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

(c) Supstitucija $p = y'$, $p' = y''$ daje jednadžbu:

$$\begin{aligned} p' = p^2 \quad \overset{\text{separacija varijabli}}{\Rightarrow} \quad \int \frac{1}{p^2}dp &= \int dx \\ -\frac{1}{p} &= x + C_1 \\ \frac{dy}{dx} = p &= \frac{1}{C_1 - x} \\ \int dy &= \int \frac{1}{C_1 - x}dx \\ y &= C_2 - \ln(C_1 - x). \end{aligned}$$

Singularni slučaj $p = 0 \;\Rightarrow\; y = C$ je očito također rješenje.

(d) Ovaj put supstitucija $p = y'$, $p' = y''$ daje jednadžbu

$$xp' = p + x \operatorname{ctg} \frac{p}{x} \;\Rightarrow\; p' = \frac{p}{x} + \operatorname{ctg} \frac{p}{x},$$

koja je homogena, dakle uvodimo supstituciju $u = \frac{p}{x}$, $p' = u'x + u$:

$$\begin{aligned} u'x + u = u + \operatorname{ctg} u \;\Rightarrow\; \underbrace{\int \operatorname{tg} u \, du}_{t = \cos u} &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\ln\cos u &= \ln x + C_1 \\ u &= \arccos \frac{C_1}{x} \\ p &= x \arccos \frac{C_1}{x}. \end{aligned}$$

Jer je $p = \dfrac{dy}{dx}$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
y &= \underbrace{\int x \arccos \frac{C_1}{x}\, dx}_{t=\frac{1}{x}} = -\underbrace{\int \frac{\arccos(C_1 t)}{t^3} dt}_{f=\arccos(C_1 t),\ dg=\frac{dt}{t^3}} \\
&= \frac{\arccos(C_1 t)}{2t^2} + \frac{C_1}{2} \underbrace{\int \frac{dt}{t^2\sqrt{1 - C_1^2 t^2}}}_{t=\frac{\sin s}{C_1}} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{C_1}{x} + \frac{C_1^2}{2} \int \frac{\cos s\, ds}{\cos^2 s \sqrt{1 - \sin^2 s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{C_1}{x} + \frac{C_1^2}{2} \underbrace{\int \frac{ds}{\cos^2 s}}_{=-\operatorname{ctg} s} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{C_1}{x} - \frac{C_1^2}{2} \operatorname{ctg} \arcsin \frac{C_1}{x} + C_2 \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{C_1}{x} - \frac{C_1}{2} \sqrt{x^2 - C_1^2} + C_2.
\end{aligned}$$

Singularni slučajevi za $\operatorname{ctg} u = 0$, odnosno $y = \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right) \pi x^2 + C$ daju rješenja.

$\square$

Zadatak 1.28. U zadatku 1.11 odredite položaj (visinu) $y(t)$ kugle u trenutku t, ako je kugla poštena s visine y_0.

Rješenje: Zadaća. $\square$

Druga klasa jednadžbi kojima možemo sniziti red su jednadžbe u kojima se ne javlja x, tj. jednadžbe oblika

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Neka p bude funkcija za koju vrijedi $p(y(x)) = y'(x)$ (odnosno $p = y'$, samo što sada gledamo na p kao na funkciju u varijabli y). Tada vrijedi jednakost

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x))$$

(odnosno $y'' = p'p$, gdje je $p' = \frac{dp}{dy}$), i time smo početnu jednadžbu sveli na jednadžbu

$$F(y, p, p'p) = 0$$

po varijabli y i nepoznanici p, koja je prvog reda.

Zadatak* 1.29. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $y'' + y = 0$

(b) $\begin{cases} yy'' + (y')^2 = 0 \\ y(2) = -3,\ y'(1) = 0. \end{cases}$

Rješenje:

(a) Stavimo $p = y'$ i $p'p = y''$, pa dobijemo jednadžbu $p'p + y = 0$ kojoj možemo separirati varijable:

$$\begin{aligned} \int p\,dp &= -\int y\,dy \\ \frac{p^2}{2} &= -\frac{y^2}{2} + C_1 \\ p &= \pm\sqrt{C_1 - y^2}. \end{aligned}$$

Jer je $p = y' = \frac{dy}{dx}$, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \pm\sqrt{C_1 - y^2} \\ \underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}}}_{y=\sqrt{C_1}\sin t} &= \pm\int dx \\ \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{C_1}}\right) &= \pm x + C_2 \\ y &= \sqrt{C_1}\sin(\pm x + C_2) \\ y &= C_1 \sin(x + C_2). \end{aligned}$$

(b) Stavimo $p = y'$ i $p'p = y''$, pa dobijemo jednadžbu $yp'p + p^2 = 0$, tj.

$yp' = -p$ kojoj možemo separirati varijable:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp}{p} &= -\int \frac{dy}{y} \\
\ln p &= -\ln y + C_1 \\
p &= \frac{C_1}{y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{C_1}{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int y\,dy &= C_1 \int dx \\
\frac{y^2}{2} &= C_1 x + C_2 \\
y &= \pm\sqrt{C_1 x + C_2}.
\end{aligned}$$

Iz uvjeta $y(2) = -3$ slijedi $9 = 2C_1 + C_2$, dok iz uvjeta $y'(1) = -\frac{1}{2}$ imamo:

$$0 = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}\bigg|_{x=1} \;\Rightarrow\; C_1 = 0,\; C_2 = 9.$$

Dakle, traženo rješenje je konstantna funkcija $y = -3$.

$\square$

Zadatak* 1.30. Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

(a) $x^2 y'' = (y')^2$

(b) $2xy'' = y' - 1$

(c) $\begin{cases} y''(e^x + 1) + y' = 0 \\ y(0) = 0,\; y'(1) = 2 \end{cases}$

(d) $y'' = 2(y' - 1)\operatorname{ctg} x$

(e) $xy'' = y' - xy'$

(f) $yy'' + (y')^2 = (y')^3$

(g) $y^2 y'' + 2y(y')^2 - y' = 0$

(h) $y'' = 2yy'$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

Poglavlje 2

Funkcije više varijabli

U ovom poglavlju proučavamo funkcije $f\colon S \to \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ za neki prirodan broj n. Takve funkcije zovemo *realne funkcije u n varijabli.* Elemente domene S najčešće označavamo s $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Ukoliko je $n = 2$ ili $n = 3$, elemente domene S označavamo i s (x, y), odnosno (x, y, z).

2.1 Prirodna domena funkcije

Prirodna domena realne funkcije f u n varijabli je skup svih uređenih n-torki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takvih da je vrijednost $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ dobro definirana. Prirodnu domenu funkcije f označavamo s $\mathcal{D}_f$.

Graf funkcije f je skup:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\colon x \in \mathcal{D}_f)\}.$$

Zadatak 2.1. Odredite i skicirajte prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = x \cdot \sqrt{1+y} + y \cdot \sqrt{1+x}$

(b) $f(x, y) = x \cdot \sqrt{9-y^2} + \ln(xy)$

(c) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{1+x-y^2}}$

(d) $f(x, y) = \ln(x \cdot \ln(x-y))$

(e) $f(x, y) = \arccos \dfrac{2x-4y}{x^2+y^2} + \ln \dfrac{x}{y}$

(f) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x^2+y^2}{2x-2y} + \ln(x-y)$

(g) $f(x,y) = \sqrt{9^{x^2+2xy+y^2} - 3^{36-2x^2+4xy-7y^2}}$

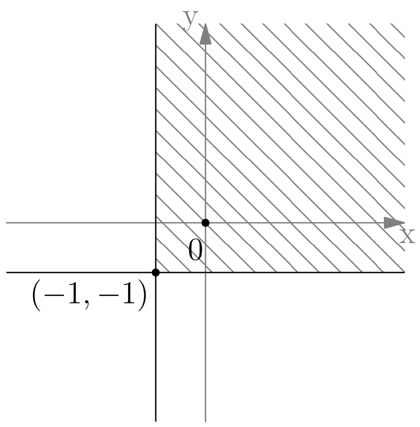
(h) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y} \cdot \ln(x+y)$

(i) $f(x,y) = \sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2-y}$.

Rješenje:

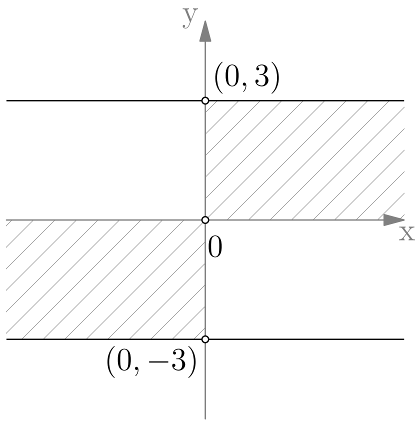
(a) Zbog $\mathcal{D}_{\sqrt{\ }} = [0,+\infty\rangle$ mora vrijediti $1+y \geq 0$ i $1+x \geq 0$, tj. imamo presjek dva uvjeta: $y \geq -1$ i $x \geq -1$. Rješenje je stoga

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x \geq -1, y \geq -1\right\} = [-1,+\infty\rangle \times [-1,+\infty\rangle.$$



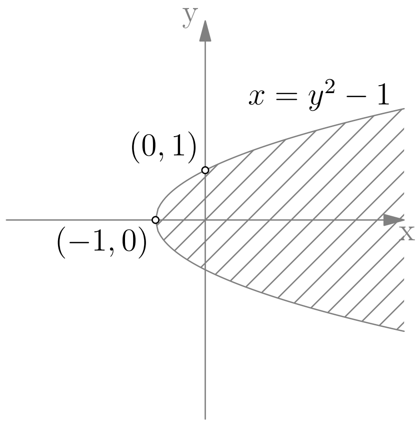
(b) Mora biti $9-y^2 \geq 0$, odnosno $y \in [-3,3]$. Također, zbog $\mathcal{D}_{\ln} = \langle 0,+\infty\rangle$ mora vrijediti $xy > 0$, što znači da su x i y istih predznaka, tj. točka (x,y) se mora nalaziti u prvom ili u trećem kvadrantu, ne uključujući koordinatne osi. Vidimo da je rješenje

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [-3,3],\; xy > 0\right\} \\ &= \langle -\infty,0\rangle \times [-3,0\rangle \bigcup \langle 0,+\infty\rangle \times \langle 0,3].\end{aligned}$$



(c) Vrijedi $\mathcal{D}_{\text{arctg}} = \mathbb{R}$, pa imamo samo uvjete $1+x-y^2 \geq 0$ i $1+x-y^2 \neq 0$, tj. $x > y^2 - 1$ (sjetimo se da je krivulja $x = y^2 - 1$ zapravo parabola). Rješenje je:

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y^2 - 1\right\}.$$



(d) Imamo presjek dva uvjeta:

(i) $x - y > 0$, tj. vrijedi $y < x$.

(ii) $x \ln(x - y) > 0$, pa stoga mora vrijediti jedan od sljedeća dva uvjeta (A) ili (B):

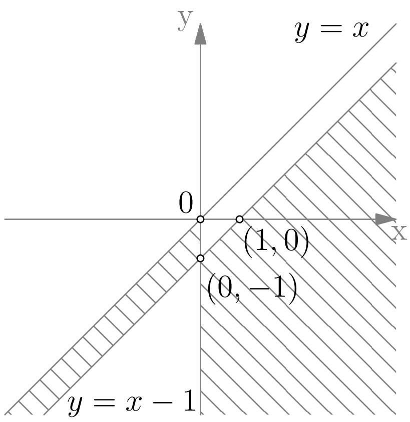
(A) $x > 0$ i $\ln(x - y) > 0$, odnosno $x > 0$ i $x - y > e^0 = 1$. Dakle, mora vrijediti $x > 0$ i $y < x - 1$.

(B) $x < 0$ i $\ln(x - y) < 0$, odnosno $x < 0$ i $x - y < e^0 = 1$. Dakle, mora vrijediti $x < 0$ i $y > x - 1$.

Vodimo računa da riječ "ili" zapravo znači unija skupova koji proizlaze iz navedenih uvjeta (A) i (B).

Rješenje je:

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < x,\ x \ln(x-y) > 0\right\}.$$



(e) Imamo presjek dva uvjeta:

(i) $\frac{x}{y} > 0$, tj. točka (x,y) se mora nalaziti u prvom ili u trećem kvadrantu, ne uključujući koordinatne osi. Usput, uočimo da je naš uvjet $\frac{x}{y} > 0$ ekvivalentan s uvjetom $xy > 0$.

(ii) Zbog $\mathcal{D}_{\text{arccos}} = [-1,1]$ moraju vrijediti nejednakosti

$$-1 \leq \frac{2x-4y}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Uvjet (ii) je ekvivalentan presjeku sljedećih dvaju uvjeta (A) i (B):

(A)

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2x-4y}{x^2+y^2}, \qquad (x^2+y^2 \geq 0) \\ -x^2-y^2 &\leq 2x-4y \\ x^2+2x+1+y^2-4y+4 &\geq 5 \\ (x+1)^2+(y-2)^2 &\geq \sqrt{5}^2. \end{aligned}$$

Dakle, točka (x,y) se nalazi na ili izvan kružnice polumjera $\sqrt{5}$ sa središtem u točki $(-1,2)$.

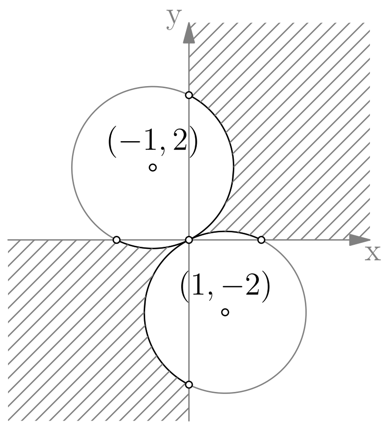
(B)

$$\begin{aligned} \frac{2x-4y}{x^2+y^2} &\leq 1, \qquad (x^2+y^2 \geq 0) \\ 2x-4y &\leq x^2+y^2 \\ x^2-2x+1+y^2+4y+4 &\geq 5 \\ (x-1)^2+(y+2)^2 &\geq \sqrt{5}^2. \end{aligned}$$

Dakle, točka (x, y) se nalazi na ili izvan kružnice polumjera $\sqrt{5}$ sa središtem u točki $(1, -2)$.

Konačno rješenje će biti presjek uvjeta (i), (A) i (B):

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 0,\ (x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 5,$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 5\}.$$



(f) Imamo presjek dva uvjeta:

(i) $x - y > 0$, odnosno $y < x$.

(ii) Zbog $\mathcal{D}_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$ moraju vrijediti nejednakosti

$$-1 \leq \frac{x^2 + y^2}{2x - 2y} \leq 1.$$

Ovaj uvjet je ekvivalentan presjeku sljedećih dvaju uvjeta:

(A)

$$-1 \leq \frac{x^2 + y^2}{2x - 2y}.$$

Ovaj uvjet ne daje nove restrikcije, tj. u našem slučaju vrijedi, jer je $x^2 + y^2 \geq 0$, a iz uvjeta (i) vidimo da je i $2x - 2y > 0$; zato je desna strana gornje nejednakosti nenegativna, pa je veća od -1.

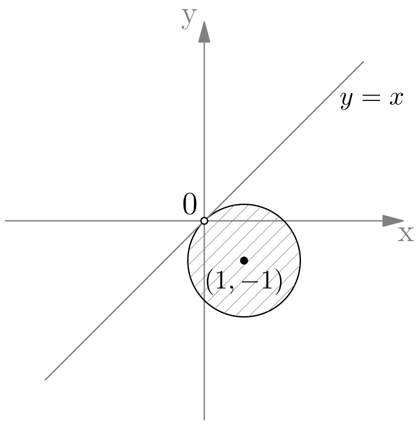
(B)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + y^2}{2x - 2y} &\leq 1, \qquad (2x - 2y \geq 0) \\
x^2 + y^2 &\leq 2x - 2y \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 &\leq 2 \\
(x-1)^2 + (y+1)^2 &\leq \sqrt{2}^2.
\end{aligned}$$

Dakle, točka (x, y) se nalazi na ili unutar kružnice polumjera $\sqrt{2}$ sa središtem u točki $(1, -1)$.

Rješenje će biti presjek uvjeta (i) i (B):

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2,\ y < x\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2\right\} \setminus \{(0, 0)\}.\end{aligned}$$

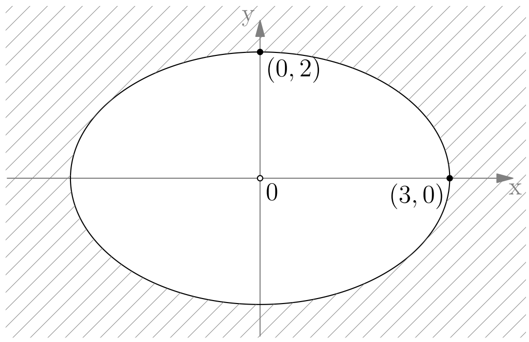


(g)

$$\begin{aligned}9^{x^2+2xy+y^2} - 3^{36-2x^2+4xy-7y^2} &\geq 0 \\ 9^{x^2+2xy+y^2} &\geq 3^{36-2x^2+4xy-7y^2} \\ 3^{2x^2+4xy+2y^2} &\geq 3^{36-2x^2+4xy-7y^2} \qquad / \log_3 \ \text{(rastuća)} \\ 2x^2 + 4xy + 2y^2 &\geq 36 - 2x^2 + 4xy - 7y^2 \\ 4x^2 + 9y^2 &\geq 36 \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} &\geq 1.\end{aligned}$$

Dakle, točka (x, y) leži na rubu ili izvan elipse sa središtem u ishodištu i poluosima duljine 3 i 2:

$$\mathcal{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1\right\}.$$



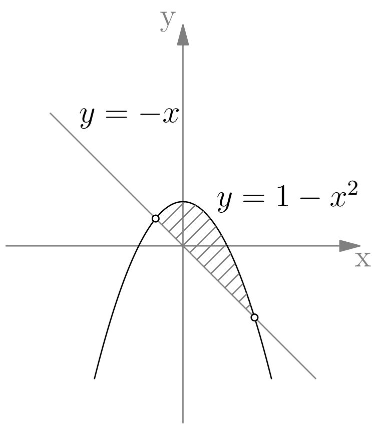
(h) Imamo presjek dva uvjeta:

(i) $x + y > 0$, odnosno $y > -x$.

(ii) $1 - x^2 - y \geq 0$, odnosno $y \leq 1 - x^2$ (sjetimo se da je krivulja $y = 1 - x^2$ zapravo parabola).

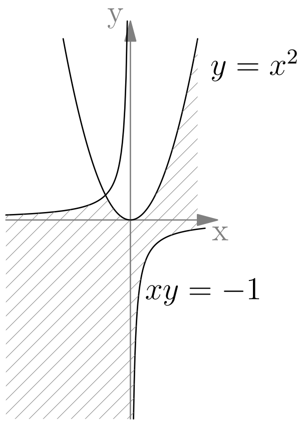
Rješenje je:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x < y \leq 1 - x^2\right\}.$$



(i) Imamo presjek dva uvjeta: $xy+1 \geq 0$ (odnosno $xy \geq -1$), te $x^2-y \geq 0$ (odnosno $y \leq x^2$). Sjetimo se da je krivulja $xy = -1$ zapravo hiperbola. Rješenje je:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \geq -1,\ y \leq x^2\right\}.$$



$\square$

Zadatak 2.2. Odredite i skicirajte prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = \ln(x + y) + \sqrt{1 - y^2}$

(b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{xy}$

(c) $f(x, y) = \ln(1 - y) + \sqrt{x - y^2}$

(d) $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 2x}}$

(e) $f(x, y) = \arccos(x - 2y)$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

2.2 Plohe drugog reda

Ploha je skup svih točaka u $\mathbb{R}^3$ čije koordinate zadovoljavaju zadanu jednadžbu $F(x, y, z) = 0$. Ploha je *drugog reda*, ako je F polinom drugog stupnja u tri varijable, tj. funkcija oblika

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J,$$

gdje su A, B, C, D, E, F, G, H, I, J konstante. U ovom odjeljku ćemo skicirati neke jednostavne plohe (drugog reda).

2.2.1 Rotacijske plohe

Ploha je *rotacijska*, ako se može zadati jednadžbom oblika $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Takvu plohu možemo skicirati na način da prvo u yz-ravnini skiciramo graf funkcije $f(|y|)$, te ga zatim rotiramo oko z-osi.

Zadatak 2.3. Skicirajte sljedeće plohe:

(a) $z = x^2 + y^2$

(b) $z = 2 - x^2 - y^2$

(c) $z^2 = x^2 + y^2$

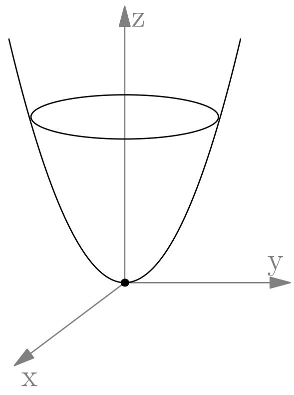
(d) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

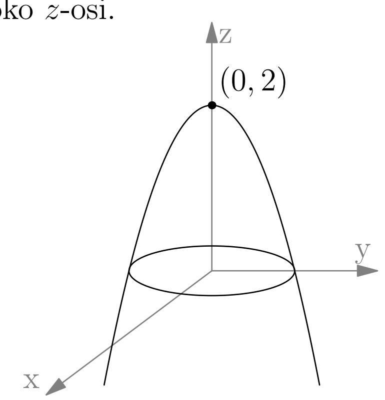
(Prve dvije plohe su *kružni paraboloidi*, a druge dvije *kružni stošci*. Zadnja nije ploha drugog reda).

Rješenje:

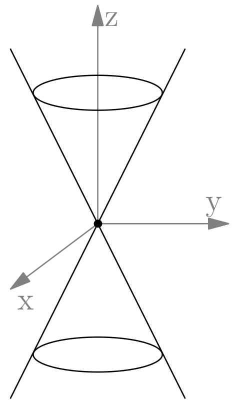
(a) U yz-ravnini skiciramo parabolu $z = y^2$, koju zatim rotiramo oko z-osi.



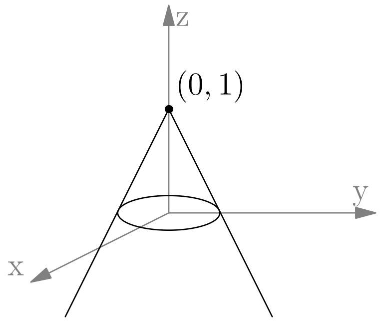
(b) Zadana ploha je očito rotacijska, jer je možemo zadati i jednadžbom $z = 2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2$. U yz-ravnini skiciramo parabolu $z = 2 - y^2$, koju zatim rotiramo oko z-osi.



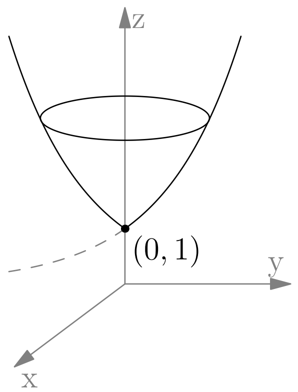
(c) U yz-ravnini ($x = 0$) imamo $z^2 = y^2$, odnosno $z = \pm y$. Da bi skicirali traženu plohu, oba ta pravca rotiramo oko z-osi. Uočimo da se ovdje zapravo radi o uniji dvije rotacijske plohe: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.



(d) U yz-ravnini skiciramo graf funkcije $z = 1 - |y|$, kojeg zatim rotiramo oko z-osi.



(e) U yz-ravnini skiciramo graf funkcije $z = e^{|y|}$, kojeg zatim rotiramo oko z-osi.



$\square$

Napomena. Plohe zadane jednadžbom oblika $y = f(\sqrt{x^2 + z^2})$ (odnosno jednadžbom oblika $x = f(\sqrt{y^2 + z^2})$) su također rotacijske. Skiciraju se tako da se u yz-ravnini skicira graf funkcije $f(|z|)$, koji se potom rotira oko y-osi (odnosno tako da se u xy-ravnini skicira graf funkcije $f(|y|)$, koji se potom rotira oko x-osi).

2.2.2 Cilindrične plohe

Ploha je *cilindrična*, ako se može zadati jednadžbom oblika $F(x, y) = 0$. Takvu plohu možemo skicirati na način da prvo u xy-ravnini skiciramo krivulju $F(x, y) = 0$, te nju zatim translatiramo duž z-osi.

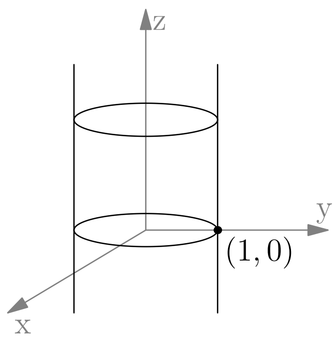
Zadatak 2.4. Skicirajte sljedeće plohe:

(a) $x^2 + y^2 = 1$

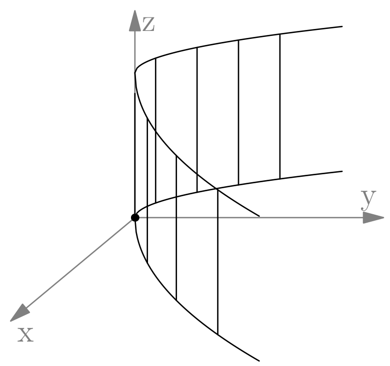
(b) $y = x^2$.

Rješenje:

(a) U xy-ravnini skiciramo kružnicu $x^2 + y^2 = 1$, koju zatim translatiramo duž z-osi. Dobijemo obostrano neograničeni kružni valjak.



(b) U xy-ravnini skiciramo parabolu $y = x^2$, koju zatim translatiramo duž z-osi.



□

Napomena. Plohe zadane jednadžbom oblika $F(x, z) = 0$ (odnosno jednadžbom oblika $F(y, z) = 0$)) su također cilindične. Skiciraju se tako da se u xz-ravnini skicira krivulja $F(x, z) = 0$, koju potom translatiramo duž y-osi (odnosno tako da se u yz-ravnini skicira krivulja $F(y, z) = 0$, koju potom translatiramo duž x-osi).

Zadatak 2.5. Skicirajte tijela omeđena plohama:

(a) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = 2$

(b) $z = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $y = x^2 + z^2$ i $y = 4 - \sqrt{x^2 + z^2}$

(d) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ i $z = 3$

(e) $z = 2 - y^2$, $z = y^2$, $x = 0$ i $x = 4$.

Rješenje: Zadaća. □

Napomena. Dodatne plohe drugog reda možete vidjeti na sljedećem linku:

http://www.grad.unizg.hr/_download/repository/Plohe_drugog_reda.pdf

2.3 Parcijalne derivacije

Definicija. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren podskup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Parcijalna derivacija od f po varijabli x u točki* (x_0, y_0) je sljedeći limes (ako postoji):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Parcijalna derivacija od f po varijabli y u točki (x_0, y_0) je sljedeći limes (ako postoji):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Ako funkcija f ima parcijalne derivacije po varijabli x (ili po varijabli y) u svim točkama skupa Ω, onda je dobro definirana funkcija $\frac{\partial f}{\partial x}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (ili $\frac{\partial f}{\partial y}\colon \Omega \to \mathbb{R}$), koju zovemo *parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x* (ili *po varijabli y*).

Ukoliko postoji $\frac{\partial f}{\partial x}$, tada se radi također o funkciji dvije varijable, koja može imati svoje pripadne parcijalne derivacije po varijabli x, odnosno y; ako postoje, označavamo ih redom $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Analogno, koristimo oznake $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ za parcijalne derivacije funkcije $\frac{\partial f}{\partial y}$ po varijablama x i y redom.

Kažemo da su funkcije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ parcijalne derivacije *prvog reda* od f, te funkcije $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parcijalne derivacije *drugog reda* od f. Analogno definiramo parcijalne derivacije od f viših redova.

Kažemo da je funkcija *klase C^k*, ako ima parcijalne derivacije svih redova do uključivo k i one su neprekidne. Kažemo da je funkcija *glatka* ili *klase C^∞*, ako ima neprekidne parcijalne derivacije svih redova. Termin "*dovoljno glatka*" podrazumijeva da postoje i neprekidne su sve parcijalne derivacije koje se javljaju u računu.

Potpuno analogno definiramo parcijalne derivacije funkcija u tri ili više varijabli, te klase C^k.

Teorem (Schwarz)**.** *Neka funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije* *prvog i drugog reda. Tada vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Analogna tvrdnja vrijedi za funkcije u više od dvije varijable. Dakle, parcijalne derivacije funkcije više varijabli možemo uzimati u bilo kojem poretku.

Stoga za funkciju f klase C^2 ne razlikujemo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, te oboje zovemo *mješovitom parcijalnom derivacijom drugog reda.*

Parcijalne derivacije glatke funkcije u pravilu ne računamo po definiciji, nego ju deriviramo kao funkciju jedne varijable (one po kojoj uzimamo parcijalnu derivaciju), a prema svim ostalim varijablama se ponašamo kao da su konstante.

Zadatak 2.6. Izračunajte parcijalne derivacije prvog i drugog reda sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = x^2 y$

(b) $f(x, y) = \cos \dfrac{x}{y}$

(c) $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{z}$

(d) $f(x, y, z) = z^{xy}$. Odredite i $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,2,e)}$.

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = y \cdot 2x = 2xy \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) = x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = x^2 \cdot 1 = x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = 2y \cdot 1 = 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2x \cdot 1 = 2x
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = 0.$$

Kada deriviramo po varijabli y, prema x^2 se ponašamo kao da je konstanta i zato je $\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = 0$ (jer je derivacija konstante 0).

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\frac{x}{y}\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos\frac{x}{y}\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right)$$
$$= -\frac{-1}{y^2} \cdot \sin\frac{x}{y} - \frac{1}{y} \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\right)$$
$$= \frac{-2x}{y^3} \cdot \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{2x}{y^3}\sin\frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^4}\cos\frac{x}{y}.$$

(c) Vrijedi $f(x, y, z) = \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) = \frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) = \frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x+y}{z}\right) = -\frac{x+y}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{z^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -\frac{1}{z^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x+y}{z^2}\right) = \frac{2x+2y}{z^3}.$$

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{xy}\right) = z^{xy} \cdot \ln z \cdot y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z^{xy}\right) = z^{xy} \cdot \ln z \cdot x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{xy}\right) = xy \cdot z^{xy-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{xy} \cdot \ln z \cdot y\right) = z^{xy} \cdot \ln^2 z \cdot y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(z^{xy} \cdot \ln z \cdot y\right)$$
$$= z^{xy} \cdot \ln z \cdot x \cdot \ln z \cdot y + z^{xy} \cdot \ln z = z^{xy} \cdot \ln^2 z \cdot xy + z^{xy} \cdot \ln z$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{xy} \cdot \ln z \cdot y\right)$$
$$= xy \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z \cdot y + z^{xy} \cdot \frac{1}{z} \cdot y = xy^2 \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z + y \cdot z^{xy-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z^{xy} \cdot \ln^2 z \cdot xy + z^{xy} \cdot \ln z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(z^{xy} \cdot \ln z \cdot x\right) = z^{xy} \cdot \ln^2 z \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{xy} \cdot \ln z \cdot x\right) =$$

$$= xy \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z \cdot x + z^{xy} \cdot \frac{1}{z} \cdot x = x^2 y \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z + x \cdot z^{xy-1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,2,e)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2,e) = e^2 \cdot \ln^2 e \cdot 2 + e^2 \cdot \ln e = 3e^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = xy^2 \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z + y \cdot z^{xy-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \overset{\text{Schwarzov teorem}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x^2 y \cdot z^{xy-1} \cdot \ln z + x \cdot z^{xy-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(xy \cdot z^{xy-1}\right) = xy(xy-1)z^{xy-2}.$$

□

Zadatak 2.7. Neka je $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ za

$$f(x,y) = y\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Rješenje: Računamo prvo prvu parcijalnu derivaciju po x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(\sqrt{x^2+y^2})\right) &= y \cdot \varphi'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ &= y \cdot \varphi'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x \\ &= \frac{xy\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Sad računamo prvu parcijalnu derivaciju po y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\varphi(\sqrt{x^2+y^2})\right) &= \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) + y\cdot\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &= \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) + y\cdot\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y\\ &= \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{y^2\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.8. Neka je $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$ glatka funkcija definirana na otvorenom intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$, i stavimo

$$z(x,y) = \frac{4x}{\varphi(x-y^2)-x-y^2}.$$

Pokažite da vrijedi jednakost:

$$2x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 2z + z^2.$$

Rješenje: Izračunat ćemo posebno lijevu i posebno desnu stranu gornje jednakosti i pokazati da su one jednake.

Računamo prvo parcijalne derivacije prvog reda funkcije z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{4\cdot(\varphi(x-y^2)-x-y^2) - 4x\cdot(\varphi'(x-y^2)\cdot 1 - 1 + 0)}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\\ &= \frac{4\cdot\varphi(x-y^2) - 4x\cdot\varphi'(x-y^2) - 4y^2}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-4x\cdot(\varphi'(x-y^2)\cdot(-2y) - 0 - 2y)}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\\ &= \frac{8xy\cdot\varphi'(x-y^2) + 8xy}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}.\end{aligned}$$

Zatim ih uvrstimo u lijevu stranu tražene jednakosti da bi dobili:

$$\begin{aligned}2x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} &= 2x\cdot\frac{4\cdot\varphi(x-y^2) - 4x\cdot\varphi'(x-y^2) - 4y^2}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\\ &\quad + \frac{x}{y}\cdot\frac{8xy\cdot\varphi'(x-y^2)+8xy}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\\ &= \frac{8x\cdot\varphi(x-2y) - 8xy^2 + 8x^2}{(\varphi(x-y^2)-x-y^2)^2}\end{aligned}$$

Konačno, desnu stranu tražene jednakosti možemo raspisati kao

$$
\begin{aligned}
2z + z^2 &= \frac{8x}{\varphi(x-y^2) - x - y^2} + \frac{16x^2}{\left(\varphi(x-y^2) - x - y^2\right)^2} \\
&= \frac{8x \cdot \varphi(x-y^2) - 8x^2 - 8xy^2 + 16x^2}{\left(\varphi(x-y^2) - x - y^2\right)^2} \\
&= \frac{8x \cdot \varphi(x-y^2) - 8xy^2 + 8x^2}{\left(\varphi(x-y^2) - x - y^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi tražena jednakost. □

Zadatak 2.9. Neka je $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, i stavimo

$$
z(x,y) = xy + \frac{y}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}}.
$$

Pokažite da je funkcija z rješenje sljedeće parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$
x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.
$$

Rješenje: Opet prvo računamo parcijalne derivacije prvog reda funkcije z.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= y + \frac{-y \cdot \left(\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} - \frac{1}{y}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} = y + \frac{\frac{y^2}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + 1}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= x + \frac{1 \cdot \left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right) - y \cdot \left(\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - \frac{-x}{y^2}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} \\
&= x + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} = x + \frac{1}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}} - \frac{\frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u lijevu stranu jednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= xy + \frac{\frac{y^2}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} + \underbrace{xy + \frac{y}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}}}_{z} - \frac{\frac{y^2}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y}\right)^2} \\
&= xy + z.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi tražena jednakost. □

Zadatak 2.10. Neka je $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, i stavimo

$$z(x,y) = \frac{y}{1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}.$$

Pokažite da vrijedi jednakost:

$$(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

Rješenje: Računamo parcijalne derivacije prvog reda funkcije z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y}\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1\cdot\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right) - y\cdot\left(\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{-2x^2}{2y^3}\right)\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} \\
&= \frac{1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right) - \varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right) + \frac{x^2}{y^2}\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} \\
&= \frac{-\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right) + \frac{x^2}{y^2}\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} + \frac{1}{1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u lijevu stranu jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{x^3}{y}\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right) + xy\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} \\
&\quad + \frac{-xy\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right) + \frac{x^3}{y}\cdot\varphi'\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)}{\left(1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)\right)^2} \\
&\quad + \frac{xy}{1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)} \\
&= x\cdot\frac{y}{1+\varphi\left(\ln y + \frac{x^2}{2y^2}\right)} = xz.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi tražena jednakost. $\square$

2.3.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.11. Dokažite da je funkcija $f(x,y) = (x-y)\cdot\varphi((x-y)^2)$ rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Rješenje: Kako i u prethodnim zadacima potrebno je prvo izračunati parcijalne derivacije prvog reda funkcije f. Zatim je te parcijalne derivacije potrebno zbrojiti i uvjeriti se da je njihov zbroj 0. $\square$

Zadatak 2.12. Odredite parcijalne derivacije prvog i drugog reda sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y) = x\sqrt{y-x}$

(b) $f(x,y) = \ln\dfrac{x-y}{x+y}$

(c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2-x^2)$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

Zadatak 2.13. Odredite parcijalne derivacije prvog reda sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x\cdot\ln(x-y)\right)$

(b) $f(x,y) = \cos^2(y^2-x^2)$

Rješenje: Zadaća. $\square$

Zadatak 2.14. Neka je $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ glatka funkcija definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Odredite parcijalne derivacije prvog reda sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y) = \varphi(y^2-x^2)$

(b) $f(x,y) = x + \varphi(x^2+y^2)$

(c) $f(x,y) = y + \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(d) $f(x,y) = xy\cdot\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

2.4 Teorem o implicitno zadanoj funkciji

Od interesa je pitanje može li se neka zadana jednadžba $F(x,y)=0$ riješiti po varijabli y. Odgovor na to daje sljedeći teorem.

Teorem (o implicitno zadanoj funkciji)**.** *Neka je funkcija F klase C^1 definirana na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, te $(x_0,y_0) \in \Omega$ točka za koju vrijede uvjeti:*

$$F(x_0,y_0)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Tada postoji otvoreni interval I oko točke x_0 i jedinstvena neprekidna funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f(x_0)=y_0$ i

$$F(x,f(x))=0, \quad \forall x \in I.$$

Štoviše, funkcija f je klase C^1 i vrijedi formula:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}, \quad \forall x \in I. \tag{2.1}$$

Dakle, lokalno oko točke (x_0,y_0) za koju je $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ možemo rješiti jednadžbu $F(x,y)=0$ po varijabli y, tj. zapisati je u obliku $y=f(x)$ kao funkciju od x (mada je često u praksi teško doći do takve funkcije f).

Zadatak 2.15. Provjerite da se jednadžbom $x^y = y^x$ može zadati funkcija $y=f(x)$ lokalno oko točke $x_0=1$. Izračunajte $y'(1)$.

Rješenje: Jednadžbu $x^y=y^x$ ne možemo riješiti po y poznatim algebarskim manipulacijama. Stavimo $F(x,y)=x^y-y^x$. Potrebno je provjeriti pretpostavke teorema o implicitno zadanoj funkciji, za točku $(x_0,y_0)=(1,y_0)$. Zbog uvjeta $F(x_0,y_0)=0$, odnosno $1^{y_0}=y_0^1$ moramo staviti $y_0=1$. Funkcija F je očito klase C^1. Računamo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = \left(x^y \cdot \ln x - x \cdot y^{x-1}\right)\Big|_{(1,1)} = 0 - 1^0 = -1 \neq 0.$$

Prema teoremu o implicitno zadanoj funkciji, jednadžbom $x^y=y^x$ može se zadati funkcija $y=f(x)$ lokalno oko točke $x_0=1$. Prema formuli (2.1), vrijedi

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{y\cdot x^{y-1} - y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - x \cdot y^{x-1}}\Big|_{(1,1)} = -\frac{1-0}{0-1} = 1.$$

□

Zadatak 2.16. (a) Provjerite da se jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$ može zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Izračunajte $y'(0)$.

(b) Može li se istom jednadžbom zadati funkcija $y = f(x)$ lokalno oko točke $(x_0, y_0) = (1, 0)$?

Rješenje:

(a) U ovom slučaju nema potrebe koristiti teorem o implicitno zadanoj funkciji, budući da možemo direktno izvući $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Odlučiti ćemo se za $y = -\sqrt{1 - x^2}$, jer mora biti $y(x_0) = y_0$, tj. $y(0) = -1$. Vrijedi:

$$y'(0) = -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\bigg|_{x=0} = 0.$$

(b) Stavimo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vrijedi

$$F(1, 0) = 0, \quad \text{ali} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 2y\bigg|_{(1,0)} = 0,$$

pa nam teorem o implicitno zadanoj funkciji ne daje odgovor. Međutim, jasno je da se radi o kružnici radijusa 1, pa iz vertikalnog testa slijedi da nema tražene funkcije $y = f(x)$ oko točke $(1, 0)$.

□

2.5 Tangencijalna ravnina na plohu

Neka je ploha zadana jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0.$$

Neka je točka $T = (x_0, y_0, z_0)$ na plohi, dakle $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.
Tangencijalna ravnina na plohu u točki $T = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina π_T s normalom $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$. Dakle, tangencijalna ravnina π_T ima jednadžbu

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{2.2}$$

Napomena. Uočimo da je gornjom jednadžbom ravnina π_T dobro definirana ako i samo ako je barem jedna parcijalna derivacija $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ ili $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ različita od nule. U suprotnom, jednadžba (2.2) postaje $0 = 0$. Ukoliko za točku (x_0, y_0, z_0) plohe vrijedi $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$, tada tu točku zovemo *singularnom točkom* dane plohe. U singularnim točkama plohe nije dobro definirana tangencijalna ravnina. Primjerice, zajednički vrh stožaca iz zadatka 2.3(c) je singularna točka te plohe (i to jedina). Točku plohe koja nije singularna zovemo *regularnom* ili *nesingularnom.*

Napomena. Pokazuje se da tangencijalna ravnina plohe ne ovisi o izboru jednadžbe kojom je ploha zadana.

Pretpostavimo sada da je ploha dana eksplicitno formulom

$$z = f(x, y),$$

odnosno, ploha je graf funkcije dviju varijabli. Iz gornje jednadžbe (2.2) lako se izvodi jednadžba za tangencijalnu ravninu u točki (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$. (Ista ploha je zadana jednadžbom $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$.)

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu zadanu eksplicitno formulom $z = f(x, y)$ u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ glasi:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{2.3}$$

Napomena. Uočimo iz prethodnog da ploha zadana eksplicitno formulom $z = f(x, y)$ nema singularnih točaka.

Zadatak 2.17. Odredimo tangencijalnu ravninu na plohu $z = x^2 + y^2$ u točkama

a) A(0,0)

b) B(1,1).

Rješenje: Ploha je zadana eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$ za $f(x, y) = x^2 + y^2$. Želimo iskoristiti formulu (2.3), pa računamo parcijalne derivacije te funkcije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Za a) dio, primijetimo da je $z_0 = f(0, 0) = 0$. U parcijalne derivacije uvrštavamo $A(0, 0)$ i dobivamo

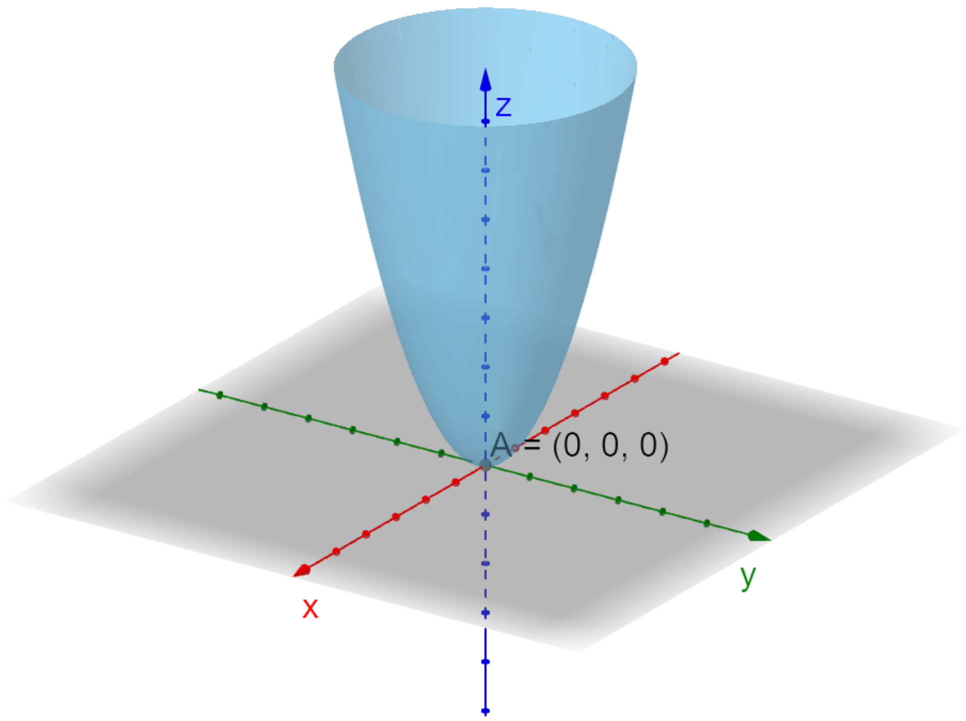
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Prema (2.3), tražena tangencijalna ravnina π_A ima jednadžbu $z = 0$. Ova tangencijalna ravnina prikazana je na Slici 2.1.

Za b) dio, računamo $z_0 = f(1, 1) = 2$ i

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2$$

i dobivamo tangencijalnu ravninu $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, tj. nakon sređivanja $\pi_B \ldots 2x + 2y - z - 2 = 0$. □



Slika 2.1: Tangencijalna ravnina na graf funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ u točki $A(0,0)$

Zadatak 2.18. Odredite tangencijalnu ravninu na plohu

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y}\,\ln(x+y)$$

u točki $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z_0\right)$.

Rješenje: Ploha je dana sa $z = f(x,y)$ za $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y}\,\ln(x+y)$, $z_0 = f(x_0, y_0) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Želimo iskoristiti formulu (2.3), pa u tu svrhu izračunajmo sljedeće parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y}} \cdot \ln(x+y) + \sqrt{1-x^2-y} \cdot \frac{1}{x+y} \\
&= -\frac{x \cdot \ln(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{\sqrt{1-x^2-y}}{x+y} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2-y}} \cdot \ln(x+y) + \sqrt{1-x^2-y} \cdot \frac{1}{x+y} \\
&= -\frac{\ln(x+y)}{2\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{\sqrt{1-x^2-y}}{x+y} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sada iz formule (2.3) slijedi da je π_T dana jednadžbom

$$z - 0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right),$$

odnosno

$$x + y - 2z - 1 = 0.$$

□

Zadatak 2.19. Odredite tangencijalnu ravninu na plohu

$$z = xy$$

koja je okomita na pravac $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na plohu $z = xy$ u točki $T = (x_0, y_0, x_0 y_0)$. Stavimo $f(x, y) = xy$. Očito je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = x_0,$$

pa zato π_T ima jednadžbu

$$z - x_0 y_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0),$$

odnosno

$$y_0x + x_0y - z - x_0y_0 = 0.$$

Uvjet da je ravnina okomita na pravac ekvivalentan je uvjetu da je vektor normale te ravnine proporcionalan sa vektorom smjera tog pravca. Stoga za traženu ravninu mora vrijediti

$$\frac{y_0}{2} = \frac{x_0}{1} = \frac{-1}{-2},$$

iz čega vidimo da je $x_0 = \frac{1}{2}$ i $y_0 = 1$. Rješenje je:

$$x + \frac{1}{2}y - z - \frac{1}{2} = 0.$$

□

Zadatak 2.20. Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu

$$x^4 + 2y^4 - 16z^4 - 2 = 0$$

koje su paralelne s ravninom $8x + 2y - 16z - 3 = 0$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na zadanu plohu $F(x, y, z) = 0$, gdje je $F(x, y, z) = x^4 + 2y^4 - 16z^4 - 2$, u točki $T = (x_0, y_0, z_0)$ te plohe. Ploha je zadana implicitno, pa trebamo koristiti formulu (2.2). Izračunajmo parcijalne derivacije od F u točki T:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(T) = 4x_0^3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(T) = 8y_0^3, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(T) = -64z_0^3.$$

Sada iz formule (2.2) vidimo da ravnina π_T ima jednadžbu:

$$\begin{gathered}
4x_0^3(x - x_0) + 8y_0^3(y - y_0) - 64z_0^3(z - z_0) = 0 \\
4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 4x_0^4 - 8y_0^4 + 64z_0^4 = 0 \\
4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 4\left(x_0^4 + 2y_0^4 - 16z_0^4\right) = 0.
\end{gathered}$$

Jer je točka T na plohi, njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu te plohe, tj. vrijedi $x_0^4 + 2y_0^4 - 16z_0^4 - 2 = 0$. Zato ravnina π_T ima jednostavniju jednadžbu:

$$\begin{gathered}
4x_0^3x + 8y_0^3y - 64z_0^3z - 8 = 0 \qquad / : 4 \\
x_0^3x + 2y_0^3y - 16z_0^3z - 2 = 0. \qquad (2.4)
\end{gathered}$$

Sada tražimo za koje sve točke $T = (x_0, y_0, z_o)$ te plohe će ravnina zadana s (2.4) biti paralelna s ravninom $8x + 2y - 16z - 3 = 0$. Ravnine su paralelne ako i samo ako su im vektori normale proporcionalni, stoga mora biti

$$\frac{x_0^3}{8} = \frac{2y_0^3}{2} = \frac{-16z_0^3}{-16} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0^3}{8} = y_0^3 = z_0^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{2} = y_0 = z_0.$$

Osim gornjega uvjeta, tražena točka T mora zadovoljavati i jednadžbu plohe:

$$x_0^4 + 2\left(\frac{x_0}{2}\right)^4 - 16\left(\frac{x_0}{2}\right)^4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm 2.$$

Dakle, dobili smo dvije točke $T_1 = (2, 1, 1)$ i $T_2 = (-2, -1, -1)$, a s time kao rješenje i dvije tražene tangencijalne ravnine

$$\begin{aligned}
\pi_{T_1}: &\quad 8x + 2y - 16z - 2 = 0 \\
\pi_{T_2}: &\quad -8x - 2y + 16z - 2 = 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\pi_{T_1}: &\quad 4x + y - 8z - 1 = 0 \\
\pi_{T_2}: &\quad 4x + y - 8z + 1 = 0.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.21. Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu

$$z = 2xy$$

koje prolaze točkom $(1, 0, -4)$, a okomite su na ravninu $x = y$.

Rješenje: Odredimo prvo opći oblik tangencijalne ravnine na zadanu plohu $z = f(x, y)$, gdje je $f(x, y) = 2xy$, u točki $T = (x_0, y_0, 2x_0y_0)$. Ploha je zadana eksplicitno, pa možemo koristiti formulu (2.3). Izračunajmo parcijalne derivacije od f u točki T:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = 2y_0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(T) = 2x_0.$$

Sada iz formule (2.3) vidimo da ravnina π_T ima jednadžbu:

$$\begin{aligned}
z - 2x_0y_0 &= 2y_0(x - x_0) + 2x_0(y - y_0) \\
2y_0x + 2x_0y - z - 2x_0y_0 &= 0. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Tražimo točku oblika $T = (x_0, y_0, 2x_0y_0)$ za koju će ravnina π_T dana s (2.5) zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:

- Ravnina π_T je okomita na ravninu $x = y$, tj. $x - y = 0$. Odnosno, njihovi vektori normale međusobno su ortogonalni:

$$0 = (2y_0, 2x_0, -1) \cdot (1, -1, 0) = 2y_0 - 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0.$$

  Stoga jednadžba ravnine π_T uz taj uvjet ima jednostavniji oblik:

$$2x_0x + 2x_0y - z - 2x_0^2 = 0.$$

- Točka $(1, 0, -4)$ se nalazi na ravnini π_T, iz čega slijedi:

$$2x_0 + 4 - 2x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1, 2.$$

Dakle, dobili smo dvije točke $T_1 = (-1, -1, 2)$ i $T_2 = (2, 2, 8)$, a s time kao rješenje i dvije tražene tangencijalne ravnine

$$\begin{aligned} \pi_{T_1} : &\quad 2x + 2y + z + 2 = 0 \\ \pi_{T_2} : &\quad 4x + 4y - z - 8 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.22. (a) Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $3xy + z^2 = 4$ u točki $(1, 1, 1)$.

(b) Odredite tangencijalnu ravninu na plohu $x^2y^2 + y - z + 1 = 0$ u točki $(0, 0, 1)$.

(c) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ koje su paralelne s ravninom $x + 4y + 6z = 5$.

(d) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $z^2 = x + y$ koje su okomite na pravac $x = y = z$.

(e) Odredite sve tangencijalne ravnine na plohu $xyz = 1$ koje prolaze točkom $(1, 0, 0)$ i okomite su na ravninu $y - 3z = 17$.

Rješenje: Zadaća. $\square$

Zadatak* 2.23. Dokažite da je tangencijalna ravnina na ravninu opet ta ista ravnina, u bilo kojoj njenoj točki.

Rješenje: Zadaća. $\square$

2.6 Lokalni ekstremi

Baviti ćemo se jednostavnosti radi samo funkcijama dvije varijable.

Neka je u nastavku $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dovoljno glatka funkcija, te $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Definicija. Funkcija f ima *lokalni minimum* u točki (x_0, y_0), ako postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ oko točke (x_0, y_0) takav da je

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in U.$$

Funkcija f ima *lokalni maksimum* u točki (x_0, y_0), ako postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ oko točke (x_0, y_0) takav da je

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in U.$$

Lokalni ekstrem je lokalni minimum ili lokalni maksimum.

Funkcija f ima *globalni minimum* (ili kraće *minimum*) u točki (x_0, y_0), ako vrijedi

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in \Omega.$$

Funkcija f ima *globalni maksimum* (ili kraće *maksimum*) u točki (x_0, y_0), ako vrijedi

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \text{za sve } (x, y) \in \Omega.$$

Globalni ekstrem (ili kraće *ekstrem*) je globalni minimum ili globalni maksimum.

Uočite da je svaki globalni minimum (maksimum, ekstrem) ujedno i lokalni minimum (maksimum, ekstrem), ali ne i obratno.

Točka (x_0, y_0) je *stacionarna točka* za funkciju f, ako vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Teorem. *Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada je (x_0, y_0) stacionarna točka za funkciju f.*

Prethodnim teoremom služimo se da pronađemo lokalne ekstreme funkcije f. Prvo pronađemo sve stacionarne točke (njih je lakše pronaći nego lokalne ekstreme), pa zatim među njima moramo odrediti koje su lokalni minimumi, koje su lokalni maksimumi, a koje nijedno od toga. To ćemo moći odrediti pomoću parcijalnih derivacija drugog reda.

Definicija. Matricu

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

nazivamo *Hesseovom matricom* funkcije f. *Hessijan* funkcije f je determinanta njene Hesseove matrice.

Neka je sada (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f, te radi lakšeg označavanja uvedimo oznake:

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Sada je $\det H(x_0, y_0) = AC - B^2$.

Karakter stacionarne točke možda možemo iščitati iz sljedećeg teorema.

Teorem. *Uz oznake kao prije, vrijede sljedeće tvrdnje:*

- *Ako je $AC - B^2 > 0$ i $A > 0$, tada f ima lokalni minimum u (x_0, y_0).*
- *Ako je $AC - B^2 > 0$ i $A < 0$, tada f ima lokalni maksimum u (x_0, y_0).*
- *Ako je $AC - B^2 < 0$, tada f nema lokalni ekstrem u (x_0, y_0), tj. (x_0, y_0) je tzv.* sedlasta točka.

Napomena. Ukoliko je $A = 0$ ili $AC - B^2 = 0$, tada na prethodno opisani način ne možemo ništa zaključiti o karakteru stacionarne točke (x_0, y_0). U tom slučaju je potrebno koristiti druga, kompliciranija sredstva u koja se nećemo upuštati.

Zadatak 2.24. Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

(b) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 - 3x^2y + y$

(c) $f(x,y) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 4xy + 2y^2 - 4x - 4y + 1$

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

(e) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x^2}{y} + y$

(f) $f(x,y) = x + \dfrac{y^2}{2x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{5}{2x}$.

Rješenje:

(a) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 & = 0 \\ x + 2y - 1 & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Dakle, imamo samo jednu stacionarnu točku $T = (1, 0)$. Provjerimo da li se radi o lokalnom ekstremu, te ako da, o kojem:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 1 \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2. \end{aligned}$$

Vidimo da je $AC - B^2 = 3 > 0$ i $A = 2 > 0$, pa zaključujemo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T = (1, 0)$.

(b) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} 6x^2 - 6xy = 6x(x-y) & = 0 \\ 2y - 3x^2 + 1 & = 0. \end{cases}$$

Prvu od gornje dvije jednadžbe rješavamo po slučajevima:

- Za $x = 0$ imamo $2y + 1 = 0$, tj. $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$.
- Za $x - y = 0$ imamo $x = y$ i $2y - 3y^2 + 1 = 0$, iz čega dobijemo točke $T_2 = (1, 1)$ i $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Od dobivene tri stacionarne točke za svaku posebno ispitujemo karakter. Izračunajmo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

(i) Za točku $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$ imamo $A = 3$, $B = 0$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = 6 > 0$ i $A = 3 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (0, -\frac{1}{2})$.

(ii) Za točku $T_2 = (1, 1)$ imamo $A = 6$, $B = -6$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = -24 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_2 = (1, 1)$, nego je ta točka sedlasta.

(iii) Za točku $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ imamo $A = -2$, $B = 2$ i $C = 2$. Jer je $AC - B^2 = -8 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, nego je ta točka sedlasta.

(c) Tražimo prvo stacionarne točke, koje dobijemo iz jednadžbi:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{cases} 3x^2 + x + 4y - 4 & = 0 \\ 4x + 4y - 4 & = 0. \end{cases}$$

Nakon što gornje jednadžbe oduzmemo, dobijemo $3x(x - 1) = 0$, odnosno $x = 0, 1$. Stacionarne točke su $T_1 = (0, 1)$ i $T_2 = (1, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4.$$

(i) Za točku $T_1 = (0, 1)$ imamo $A = 1$, $B = 4$ i $C = 4$. Jer je $AC - B^2 = -12 < 0$, vidimo da funkcija f nema lokalni ekstrem u točki $T_1 = (0, 1)$, nego je ta točka sedlasta.

(ii) Za točku $T_2 = (1, 0)$ imamo $A = 7$, $B = 4$ i $C = 4$. Jer je $AC - B^2 = 12 > 0$ i $A = 7 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_2 = (1, 0)$.

(d)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 & = 0 \\ \sqrt{x} - 2y + 6 & = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2} = \sqrt{x} = 2y - 6.$$

Iz toga lako dobijemo jedinu stacionarnu točku $T = (4, 4)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y}{4\sqrt{x}^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{8} < 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -2, \quad AC - B^2 = \frac{3}{16} > 0.$$

Dakle, f ima lokalni maksimum u točki $T = (4, 4)$.

(e)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{8}{x^2} + \frac{2x}{y} & = 0 \\ -\frac{x^2}{y^2} + 1 & = 0. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x^2 = y^2$, pa imamo dva slučaja:

- Slučaj $x = y$ daje

$$-\frac{8}{x^2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

  Dobili smo stacionarne točke $T_1 = (2, 2)$ i $T_2 = (-2, -2)$.

- Slučaj $x = -y$ daje

$$-\frac{8}{x^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4,$$

  što nema realnih rješenja.

Parcijalne derivacije drugog reda su:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3} + \frac{2}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}.$$

(i) Za točku $T_1 = (2, 2)$ imamo $A = 3$, $B = -1$ i $C = 1$. Jer je $AC - B^2 = 2 > 0$ i $A = 3 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (2, 2)$.

(ii) Za točku $T_2 = (-2, -2)$ imamo $A = -3$, $B = 1$ i $C = -1$. Jer je $AC - B^2 = 2 > 0$ i $A = -3 < 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni maksimum u točki $T_2 = (-2, -2)$.

(f)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{2x}{y} - \frac{5}{2x^2} & = 0 \\ \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} & = 0. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x^3 = y^3$, tj. $x = y$. Zatim iz prve jednadžbe slijedi:

$$1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Dakle, imamo dvije stacionarne točke $T_1 = (1, 1)$ i $T_2 = (-1, -1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} + \frac{2}{y} + \frac{5}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{x^2} - \frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{y^3}.$$

(i) Za točku $T_1 = (1, 1)$ imamo $A = 8$, $B = -3$ i $C = 3$. Jer je $AC - B^2 = 15 > 0$ i $A = 8 > 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni minimum u točki $T_1 = (1, 1)$.

(ii) Za točku $T_2 = (-1, -1)$ imamo $A = -8$, $B = 3$ i $C = -3$. Jer je $AC - B^2 = 15 > 0$ i $A = -8 < 0$, vidimo da funkcija f ima lokalni maksimum u točki $T_2 = (-1, -1)$.

□

Zadatak 2.25. Odredite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

(a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 4x - 1$

(c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - 2y + 7$

(d) $f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y)$.

Rješenje: Zadaća □

2.6.1 Uvjetni ekstremi

U ovom podjeljku opisati ćemo kako se mogu pronaći *uvjetni ekstremi* zadane funkcije f, tj. globalni ekstremi funkcije f na skupu točaka koji zadovoljavaju zadani uvjet $g(x, y) = 0$.

U tu svrhu definiramo *Lagrangeovu funkciju* formulom:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorem. *Ako f ima uvjetni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada postoji $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0) = 0.$$

Prethodni teorem daje samo nužne uvjete za uvjetne ekstreme. Dakle, prvo rješavamo sustav:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x, y) & = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Da bi od svih rješenja tog sustava prepoznali minimume i maksimume, te razlučili globalne od samo lokalnih, moramo se najčešće koristiti nekakvim geometrijskim razmatranjima. Ukoliko je skup točaka zadan uvjetom $g(x, y) = 0$ ograničen, koristan je i sljedeći teorem.

Teorem. *Neprekidna funkcija na zatvorenom i ograničenom skupu ima točku globalnog minimuma i točku globalnog maksimuma*

Dakle, ukoliko je skup točaka zadan uvjetom $g(x, y) = 0$ ograničen, poredamo sva rješenja (x, y) sustava (2.6) i gledamo vrijednosti of f u tim točkama. Točke s najmanjom i najvećom vrijednosću su uvjetni ekstremi (redom minimum i maksimum).

Napomena. Ukoliko uvjet $g(x, y) = 0$ možemo napisati eksplicitno u obliku $y = h(x)$, tada uvjetne ekstreme od f dobijemo gledajući ekstreme kompozicije $f(x, h(x))$, što je funkcija jedne varijable.

Zadatak 2.26. Nađite ekstrem funkcije $f(x, y) = xy$, uz uvjet $x + y = 1$.

Rješenje: Stavimo $g(x, y) = x + y - 1$ (jer želimo da uvjet bude $g(x, y) = 0$). Uvodimo funkciju

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda x + \lambda y - \lambda,$$

te rješavamo sustav (2.6):

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x, y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \lambda & = 0 \\ x + \lambda & = 0 \\ x + y & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\lambda \\ x = -\lambda \\ -\lambda - \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dakle, točka $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je jedini kandidat za uvjetni ekstrem.

No, iz geometrijskih razloga je jasno da postoji globalni maksimum funkcije f na pravcu $y = -x + 1$. Stoga je $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ traženi uvjetni ekstrem, i to maksimum. Maksimalna vrijednost funkcije f koja se postiže uz uvjet $x + y = 1$ je $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Drugi način: Uvjet $x + y = 1$ možemo napisati eksplicitno kao $y = -x + 1$. Sada tražimo ekstreme funkcije jedne varijable

$$f(x, -x + 1) = x(-x + 1) = -x^2 + x.$$

Možemo pomoću derivacija odrediti tok te funkcije i globalni ekstrem, ali možemo i uočiti da se radi o paraboli koja očito ima globalni maksimum u tjemenu $x = \frac{1}{2}$. Dakle, traženi uvjetni ekstrem (i to maksimum) funkcije f je u točki $T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. □

Zadatak 2.27. Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = -5x + 12y + 7$, uz uvjet $x^2 + y^2 = 4$ (odnosno maksimum funkcije f na kružnici oko ishodišta polumjera 2).

Rješenje: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $F(x, y, \lambda) = -5x + 12y + 7 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 + 2\lambda x & = 0 \\ 12 + 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2\lambda} \\ y = -\frac{6}{\lambda} \\ \frac{25}{4\lambda^2} + \frac{144}{4\lambda^2} = 4 \ \Rightarrow \ \lambda = \pm\frac{13}{4}. \end{cases}$$

Dobili smo dvije točke kao kandidate za uvjetne ekstreme: $T_1 = \left(\frac{10}{13}, -\frac{24}{13}\right)$ i $T_2 = \left(-\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$. Izračunamo $f(T_1) = -19$ i $f(T_2) = 33$, pa vidimo da su obje T_1 i T_2 uvjetni ekstremi; T_1 je minimum, a T_2 maksimum. $\square$

Zadatak 2.28. Odredite točke na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ koje su najbliže točki $T_0 = (0, 4)$.

Rješenje: Udaljenost do točke $T_0 = (0, 4)$ je funkcija koja svakoj točki ravnine $T = (x, y)$ pridruži broj

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}.$$

Tražimo minimum te funkcije, uz uvjet da se točka T nalazi na zadanoj hiperboli, odnosno $g(x, y) = x^2 - y^2 - 1$.

$$F(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2} + \lambda x^2 - \lambda y^2 - \lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} + 2\lambda x & = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} -2\lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} \\ \frac{y-4}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} - 2\lambda y & = 0 \Rightarrow \frac{y-4+y}{\sqrt{x^2+(y-4)^2}} = 0 \\ x^2 - y^2 & = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = 2, \ x = \pm\sqrt{1 + 2^2} = \pm\sqrt{5}.$$

Za slučaj $x = 0$ dobijemo $-y^2 = 1$, što nema realnih rješenja. Dakle, kandidati za uvjetne ekstreme su $T_1 = (\sqrt{5}, 2)$ i $T_2 = (-\sqrt{5}, 2)$.

Iz geometrijskih razloga vidimo da ne postoji maksimum (jer postoje točke na danoj hiperboli po volji daleko od T_0), te da mora postojati minimum. Jer je $f(T_1) = 3 = f(T_2)$, zaključujemo da su obje T_1 i T_2 uvjetni ekstremi, i to minimumi, dakle točke hiperbole najbliže točki T_0 (udaljene su za 3). $\square$

Zadatak 2.29. Na krivulji $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ odredite točke za koje je kvadrat udaljenosti do ishodišta najmanji, te za koje je najveći.

Rješenje: Tražimo minimum funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ (kvadrat udaljenosti točke (x,y) do $(0,0)$), uz uvjet $g(x,y)=3x^2+2xy+3y^2-8=0$.

$$F(x,y)=x^2+y^2+3\lambda x^2+2\lambda xy+3\lambda y^2-8\lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+6\lambda x+2\lambda y &= 0 \\ 2y+2\lambda x+6\lambda y &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+3\lambda)x+\lambda y &= 0 \\ \lambda x+(1+3\lambda)y &= 0 \\ g(x,y) &= 0. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s $-\lambda$, drugu s $(1+3\lambda)$, te ih zbrojimo. Dobijemo:

$$0=-\lambda^2 y+(1+3\lambda)^2 y=(1+2\lambda)(1+4\lambda)y.$$

- Za $1+2\lambda=0$ imamo $\lambda=-\frac{1}{2}$, te $\left(1-\frac{3}{2}\right)x-\frac{1}{2}y=0$, odnosno $x=-y$. Tu zadnju jednakost uvrstimo u uvjet $g(x,y)=0$, i dobijemo:

  $$3x^2-2x^2+3x^2=8 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}.$$

  Kandidati za uvjetne ekstreme su $T_1=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ i $T_2=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

- Za $1+4\lambda=0$ imamo $\lambda=-\frac{1}{4}$, te $\left(1-\frac{3}{4}\right)x-\frac{1}{4}y=0$, odnosno $x=y$. Tu zadnju jednakost uvrstimo u uvjet $g(x,y)=0$, i dobijemo:

  $$3x^2+2x^2+3x^2=8 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1.$$

  Kandidati za uvjetne ekstreme su $T_3=(1,1)$ i $T_4=(-1,-1)$.

- Za $y=0$ u uvjetu $g(x,y)=0$ dobijemo $x^2=\frac{8}{3}$, tj. $x=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Dakle, imamo još dva kandidata za uvjetne ekstreme: $T_5=\left(\sqrt{\frac{8}{3}},0\right)$ i $T_6=\left(-\sqrt{\frac{8}{3}},0\right)$.

Lako izračunamo $f(T_1)=f(T_2)=4$, $f(T_3)=f(T_4)=2$ i $f(T_5)=f(T_6)=\frac{8}{3}$, pa vidimo da f ima maksimum u T_1 i T_2, a minimum u T_3 i T_4 na zadanoj krivulji (minimum i maksimum postoje, jer je krivulja rotirana elipsa). Točke T_5 i T_6 nisu uvjetni ekstremi. □

Zadatak 2.30. Odredite ekstreme funkcije $f(x,y)=x^3$ uz uvjet

$$x^2+4y^2=4.$$

Rješenje: Zadaća. □

Zadatak 2.31. Na pravcu $Ax+By+C=0$ odredite točku najbližu ishodištu.

Rješenje: Zadaća. □

Poglavlje 3

Višestruki integrali

Definiciju višestrukih integrala nećemo ovdje dati, budući da nije jednostavna, te jer se višestruki integrali u praksi nikad ne računaju po definiciji. Skica definicije se može vidjeti u [4].

3.1 Dvostruki integrali

Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ *integrabilna* na $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ako postoji integral $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ i on je konačan. U nastavku je dan pregled svojstava koje se koriste prilikom računanja dvostrukih integrala.

- Ako je f neprekidna na ograničenom i zatvorenom skupu D, tada je f integrabilna na D. Ako je f neprekidna i ograničena na skupu D koji ima konačnu površinu, tada je također f integrabilna na D.
- *Linearnost*: Ako su f i g integrabilne na D i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je funkcija $\alpha f + \beta g$ također integrabilna na D, te vrijedi formula

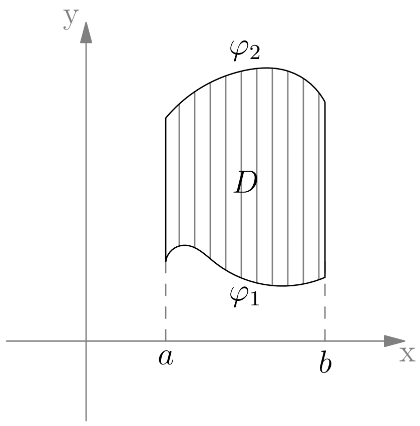
$$\iint\limits_D \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right)\,dx\,dy = \\ = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

- *Aditivnost po području integracije*: Neka je f integrabilna na skupu D, te neka je $D = D_1 \cup D_2$, pri čemu presjek $D_1 \cap D_2$ ima površinu nula (npr. prazan skup, ili “jednodimenzionalan” skup). Tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

- *Fubinijev teorem*: Ako skup D ima oblik

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\big\}$$

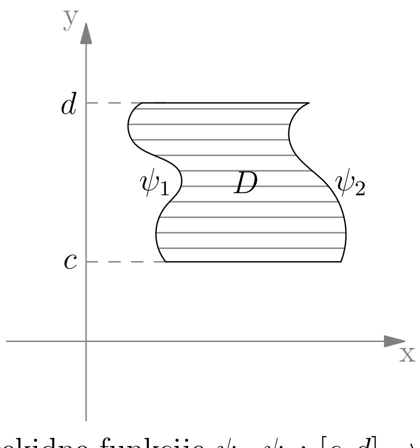


za neke $a, b \in \mathbb{R}$ i neprekidne funkcije $\varphi_1, \varphi_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{3.1}$$

Ako skup D ima oblik

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\big\}$$



za neke $c, d \in \mathbb{R}$ i neprekidne funkcije $\psi_1, \psi_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$, tada je

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{3.2}$$

- Ako je D zatvoren i ograničen skup, tada je njegova površina jednaka integralu $\iint\limits_D 1\,dx\,dy$.

Formule (3.1) i (3.2) služe da se dvostruki integrali svedu na dva jednostruka.

Napomena. Integral oblika $\int_A^B \int_C^D f(x,y)\,dx\,dy$ se može zapisati i kao

$$\int_A^B dy \int_C^D f(x,y)\,dx,$$

tj. u stilu "diferencijal pokraj svojih granica". U ovoj skripti nećemo tako pisati, nego ćemo redovito diferencijale sortirati "na kraju". Zapisi su međutim potpuno ekvivalentni, te su samo stvar dogovora.

Zadatak 3.1. Izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 + 2y\right) dx\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr\,d\varphi$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\cos x}^{0} (1-x)\,dy\,dx.$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 \left(x^2+2y\right) dxdy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^2+2y\right) dx\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2xy\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y - 0\right) dy \\
&= \left(\frac{y}{3} + y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3} + 4 - 0 = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_{a\sin\varphi}^{a} r\,drd\varphi &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr\right)d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{r=a\sin\varphi}^{r=a}\right)d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2\sin^2\varphi}{2}\right)d\varphi\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi\\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{2\pi}{2}+0-0-0\right)\\
&= \frac{a^2\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx = \int_0^1\underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right)}_{\substack{y=\sqrt{1-x^2}\cdot\sin t\\ dy=\sqrt{1-x^2}\cdot\cos t\,dt\\ y=\sqrt{1-x^2}\ \Rightarrow\ t=\frac{\pi}{2}\\ y=0\ \Rightarrow\ t=0}}dx$$

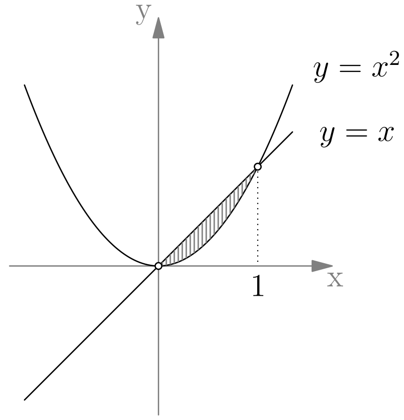
$$\begin{aligned}
&= \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-x^2)-(1-x^2)\sin^2 t)}\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\cos t\,dt\right)dx\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x^2)\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt\right)dx\\
&= \int_0^1(1-x^2)\underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\right)}_{\cos^2 t=\frac{1+\cos(2t)}{2}}dx = \int_0^1(1-x^2)\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}dx\\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx = \frac{\pi}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

(d) Zadaća.

$\square$

Zadatak 3.2. Izračunajte $\iint_D \sin x \, dx \, dy$, ako je D skup ograničen krivuljama $y = x$ i $y = x^2$. Skicirajte D.

Rješenje: Nađemo presjek krivulja ($x = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$), te skiciramo D:



$$\iint_D \sin x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sin x \, dy \, dx = \int_0^1 (y \sin x) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x \sin x \, dx}_{u=x,\, dv=\sin x dx} - \underbrace{\int_0^1 x^2 \sin x \, dx}_{u=x^2,\, dv=\sin x dx} = \ldots$$

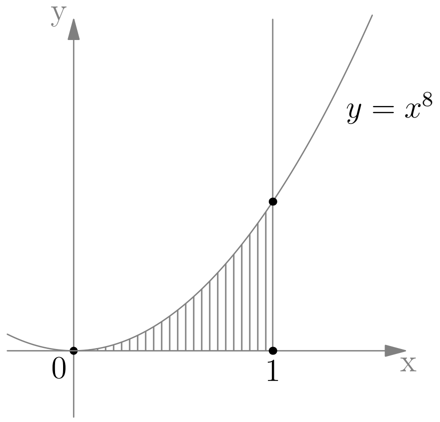
$$= (-x \cos x + \sin x)\Big|_0^1 - (-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)\Big|_0^1$$

$$= -\sin 1 - 2 \cos 1 + 2.$$

$\square$

Zadatak 3.3. Izračunajte integral $\displaystyle\iint_D e^{y/x^5} \, dx \, dy$, ako je područje integracije D ograničeno krivuljom $y = x^8$ i pravcima $x = 1$ i $y = 0$. Skicirajte D.

Rješenje: Skiciramo područje integracije:



$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^8\right\}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{y/x^5}\,dxdy &= \int_0^1 \underbrace{\int_0^{x^8} e^{y/x^5}\,dy}_{t=y/x^5,\ dt=dy/x^5}\,dx = \int_0^1 \left(x^5 \int_0^{x^3} e^t\,dt\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^5 e^t \Big|_{t=0}^{x^3}\right) dx = \int_0^1 x^5(e^{x^3}-1)dx \\
&= \underbrace{\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx}_{t=x^3,\ dt=3x^2dx} - \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^1 te^t dt}_{u=t,\ dv=e^t dt} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}\left(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(e-e+1) - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.4. Skicirajte područje integracije i promijenite poredak varijabli u integralu:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)\,dx\,dy$

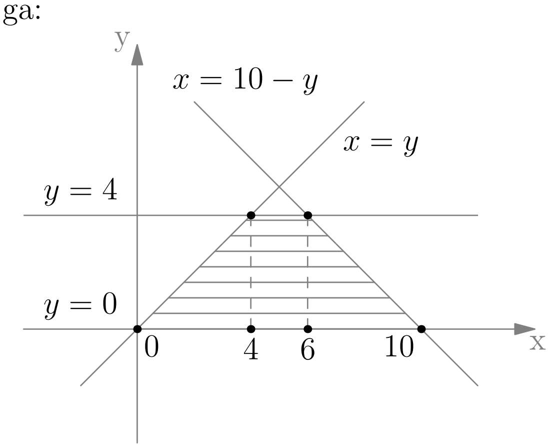
(b) $\displaystyle\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx.$

Rješenje:

(a) Područje integracije je

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq 4,\ y \leq x \leq 10 - y\right\}.$$

Skicirajmo ga:



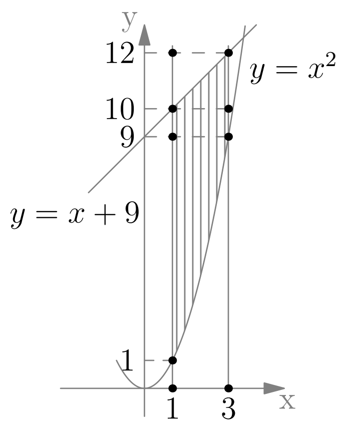
Možemo sada koristeći aditivnost integrala po području integracije sa skice očitati da se zadani integral može zapisati i u obliku

$$\int_0^4 \int_0^x f(x, y)\, dydx + \int_4^6 \int_0^4 f(x, y)\, dydx + \int_6^{10} \int_0^{10-x} f(x, y)\, dydx.$$

(b) Područje integracije je

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 3,\ x^2 \leq y \leq x + 9\right\}.$$

Skicirajmo ga:



Možemo sada koristeći aditivnost integrala po području integracije sa skice očitati da se zadani integral može zapisati i u obliku

$$\int_1^9 \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dxdy + \int_9^{10} \int_1^3 f(x, y)\, dxdy + \int_{10}^{12} \int_{y-9}^3 f(x, y)\, dxdy.$$

□

Zadatak 3.5. Skicirajte područje integracije i promijenite poredak varijabli u integralu:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x,y)\, dy\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln x}^1 f(x,y)\, dy\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx\, dy$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\, dx\, dy.$

Rješenje: Zadaća. □

Zadatak 3.6. Odredite površinu skupa

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi,\ y = \sin x\right\}.$$

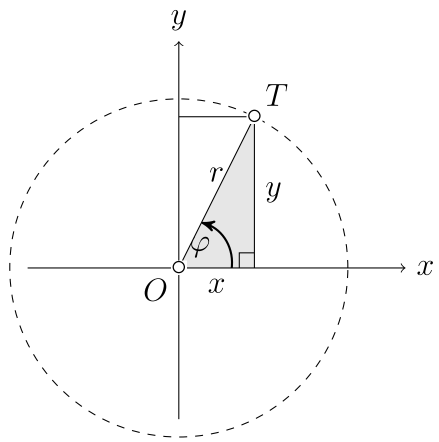
Rješenje: Zadaća. Rješenje: 4. □

Zadatak 3.7. Odredite površinu dijela ravnine omeđenog hiperbolom $y = \frac{1}{x}$ te pravcima $y = x - 2$ i $y = x + 2$.

Rješenje: Zadaća. Rješenje: $4\sqrt{2} + 2\ln(3 + 2\sqrt{2})$. □

3.1.1 Polarni koordinatni sustav

Osim u Kartezijevim koordinatama (x, y), točku T neke ravnine možemo zadati i u *polarnim koordinatama* (r, φ). Varijabla r je definirana kao udaljenost $r = |\vec{OT}| \geq 0$, a varijabla $\varphi = \measuredangle(\vec{i}, \vec{OT})$ je usmjeren kut (dakle gledamo od osi x do spojnice $\vec{OT}$ u smjeru suprotno kazaljci na satu). Kut φ možemo ograničiti na npr. $[0, 2\pi\rangle$, ili $\langle -\pi, \pi]$.

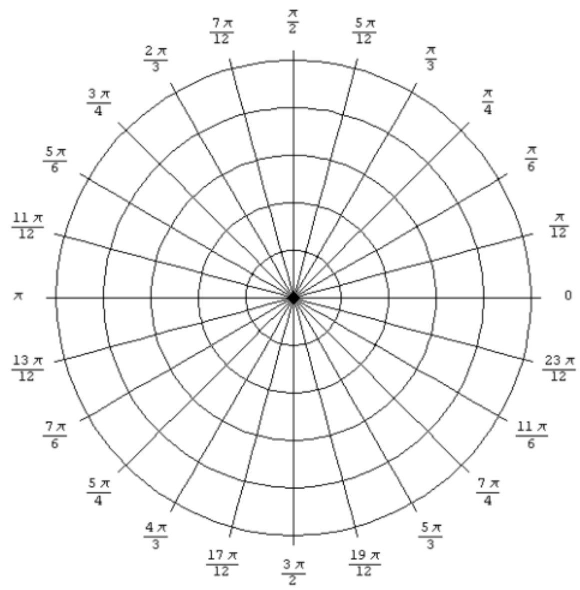


Uočavajući gore istaknuti pravokutni trokut, vidimo relacije za prijelaz iz jednog koordinatnog sustava u drugi:

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad r^2 = x^2 + y^2$$
$$y = r\sin\varphi, \qquad\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Prilikom uzimanja arctg radi računanja kuta φ, treba voditi računa o kvadrantu u kojem se točka nalazi, te o slici funkcije arctg. U I. i IV. kvadrantu (dakle $x > 0$) vrijedi $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Ali npr. točka s Kartezijevim koordinatama $(-1, 1)$ nalazi se u II. kvadrantu i ima $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; međutim $\operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$. Zaključno, u II. i III. kvadrantu (dakle $x < 0$) je $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Istaknimo *koordinatne krivulje* polarnog koordinatnog sustava: r = konstanta su kružnice sa središtem u ishodištu, a φ = konstanta su polupravci iz ishodišta.



Izračunajmo *Jacobijan* za prijelaz iz Kartezijevog u polarni sustav:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Dakle, u ovom slučaju *teorem o zamjeni varijabli* glasi:

$$\iint_{D(x,y)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi,$$

gdje je $D(x,y)$ lik u ravnini opisan u Kartezijevim koordinatama (x,y), a $D(r,\varphi)$ isti taj lik, ali opisan sada u polarnim koordinatama (r,φ). Posebno istaknimo:

$$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi.$$

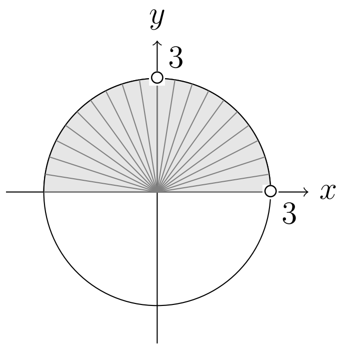
Računanje integrala u polarnom sustavu često se isplati ukoliko je područje integracije "okruglo", tj. ima oblik kružnog isječka. Naime, kružni isječak u polarnom sustavu je ekvivalentan pravokutniku u Kartezijevom sustavu.

Zadatak 3.8. Izračunajte

$$\iint_D \frac{xy}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 1}\,dx\,dy,$$

gdje je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 9,\ y > 0\}$. Skicirajte D.

Rješenje:



$0 \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq r \leq 3$

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{xy}{x^4+y^4+2x^2y^2+1}\,dx\,dy &= \iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2+1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^3 \frac{r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi}{(r^2)^2+1}\cdot r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^3 \underbrace{\frac{r^3\,dr}{r^4+1}}_{t=r^4+1}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_1^{82}\frac{dt}{t}\cdot\underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi}_{s=\sin\varphi} \\
&= \frac{\ln 82}{4}\cdot\int_0^0 s\,ds = 0.
\end{aligned}
$$

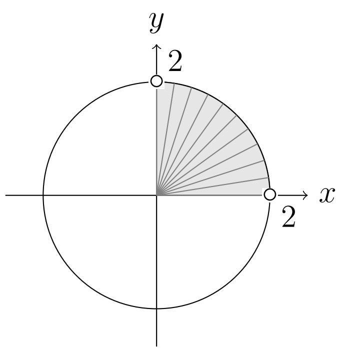
$\square$

Zadatak 3.9. Izračunajte

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2+1}}\,dx\,dy,$$

gdje je $D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2\leq 4,\; x,y>0\big\}$. Skicirajte D.

Rješenje:



$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq 2$

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4+2x^2y^2+1}}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \underbrace{\frac{r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi}{\sqrt{r^4+1}}\cdot r\,dr}_{t=r^4+1}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{17}\frac{dt}{\sqrt{t}}\cdot\underbrace{\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi}_{s=\sin\varphi}$$
$$= \frac{\sqrt{17}-1}{2}\cdot\int_0^1 s\,ds = \frac{\sqrt{17}-1}{4}.$$

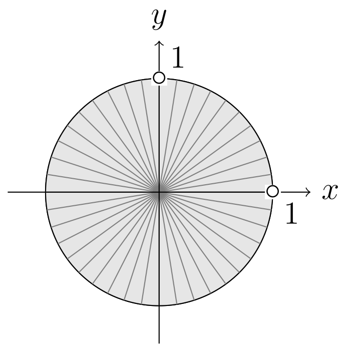
□

Zadatak 3.10. Izračunajte

$$\iint_D x^2y^2\sqrt{(x^2+y^2)^3+1}\,dx\,dy,$$

gdje je $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 1\right\}$. Skicirajte D.

Rješenje:



$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le r \le 1$$

$$\iint_D x^2y^2\sqrt{(x^2+y^2)^3+1}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\cos^2\varphi\cdot\underbrace{\sqrt{r^6+1}\cdot r\,dr}_{t=r^6+1}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{t}\,dt\cdot\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{9}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\varphi)}{8}\,d\varphi$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{36}\pi.$$

U predzadnjem redu smo koristili jednakost

$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi = (\sin\varphi\cos\varphi)^2 = \frac{\sin^2(2\varphi)}{4} = \frac{1-\cos(4\varphi)}{8}.$$

$\square$

Zadatak 3.11. Skicirajte područje integracije sljedećih integrala:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{6\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi,$

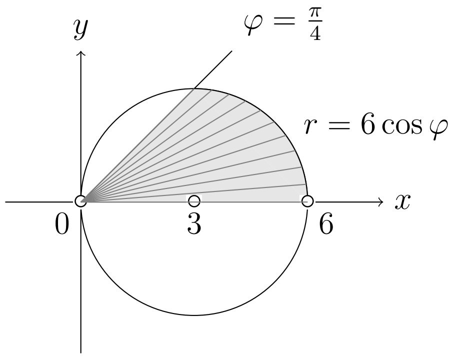
(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi.$

Rješenje:

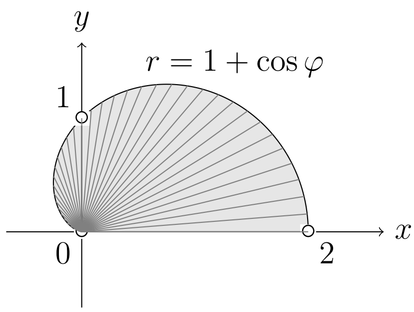
(a) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ i $0 \le r \le 6\cos\varphi$. Gornja granica za r dana je krivuljom

$$r = 6\cos\varphi \;/\cdot r \;\Rightarrow\; r^2 = 6r\cos\varphi \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = 6x$$
$$\text{(nadopunjavanje do potpunog kvadrata)} \;\Rightarrow\; (x-3)^2+y^2 = 9,$$

dakle kružnicom radijusa 3 sa središtem u $(3,0)$.

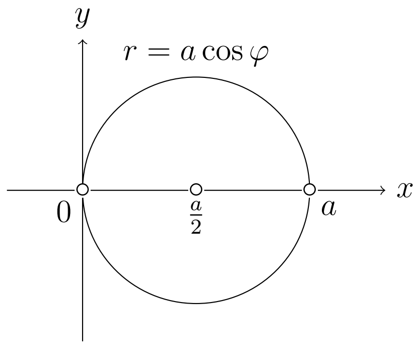


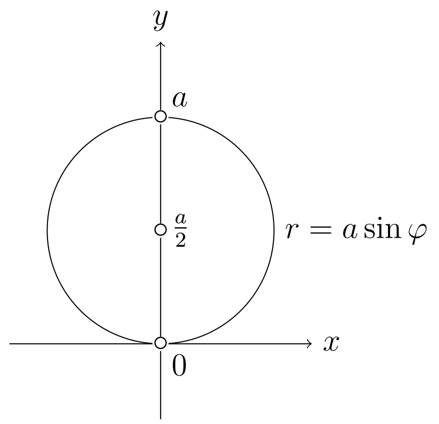
(b) $0 \le \varphi \le \pi$ (I. i II. kvadrant, tj. iznad x-osi), $0 \le r \le 1+\cos\varphi$.



$\square$

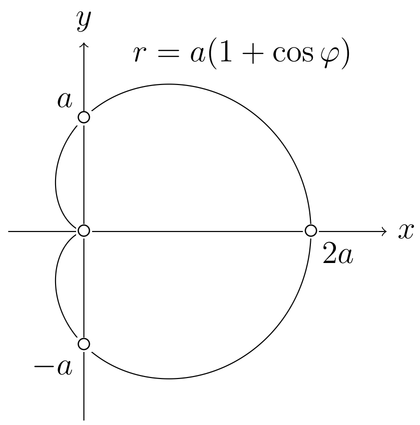
Napomena. Iz prethodnog zadatka vidimo kako se u polarnom sustavu skiciraju sljedeće krivulje:

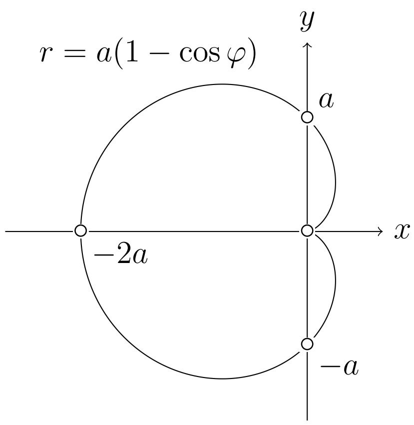


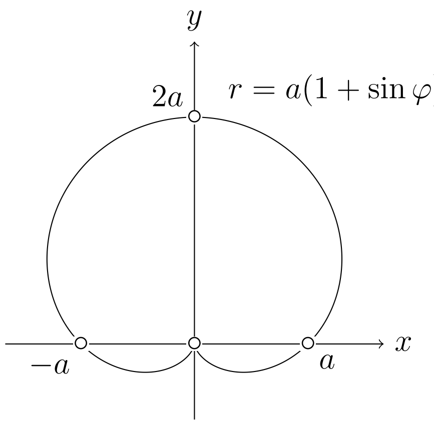


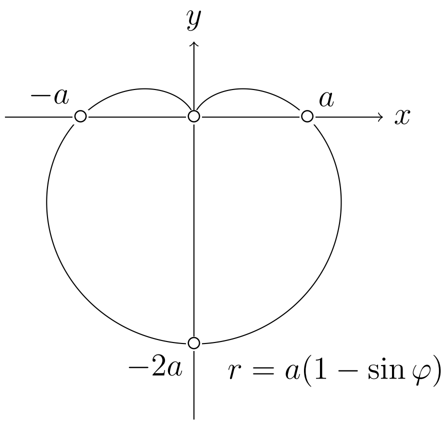
Na gornjim slikama smo pretpostavili da je $a > 0$. Međutim, analogne slike se dobiju lako i u slučaju $a < 0$.

Imamo i tzv. *kardioide* (samo za $a > 0$):









Zadatak 3.12. Izračunajte sljedeće integrale:

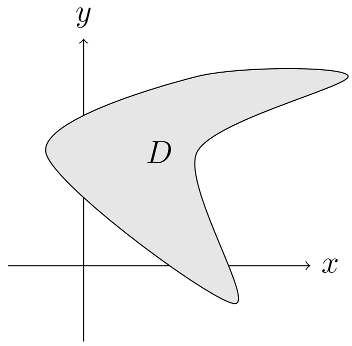
(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^2 (3r - r^2\sin\varphi)\,dr\,d\varphi$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\cos\varphi} (r^2\sin\varphi)\,dr\,d\varphi$,

Rješenje: Zadaća. □

3.1.2 Površina pomoću dvostrukog integrala

Neka je zadan omeđeni lik $D \subseteq \mathbb{R}^2$ u ravnini.

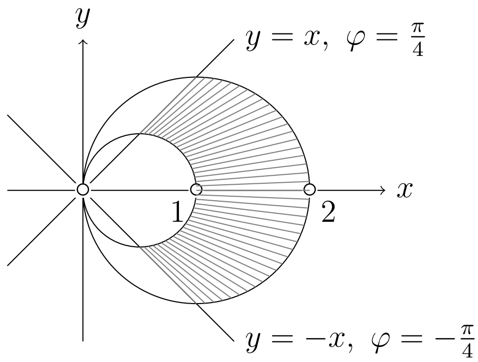


Površinu od D računamo pomoću formula:

$$P(D) = \iint_{D(x,y)} dx\,dy = \iint_{D(r,\varphi)} r\,dr\,d\varphi.$$

Zadatak 3.13. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $y = x$ i $y = -x$. Skicirajte lik.

Rješenje:



unutarnja kružnica: $r = \cos\varphi$

vanjska kružnica: $r = 2\cos\varphi$

$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

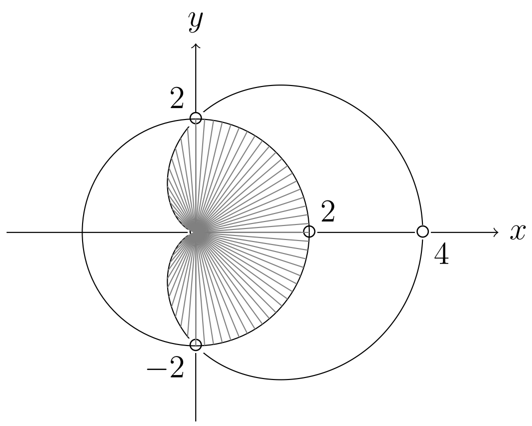
$\cos\varphi \le r \le 2\cos\varphi$

$$\iint_{D(r,\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=\cos\varphi}^{r=2\cos\varphi} d\varphi$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi = \frac{3\pi+6}{8}.$$

□

Zadatak 3.14. Izračunajte površinu lika koji je omeđen krivuljama $x^2+y^2 = 4$ i $r = 2(1+\cos\varphi)$, a nalazi se unutar obje krivulje. Skicirajte lik.

Rješenje:



Dio lika u II. kvadrantu:

$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq r \leq 2(1+\cos\varphi)$

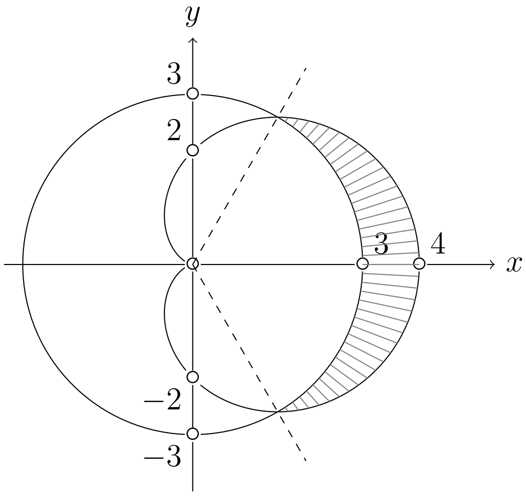
$$P = 2\cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi}_{\text{površina dijela lika u II. kvadrantu}} + \underbrace{2\pi}_{\text{pola kruga}}$$

$$= 2\cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=2(1+\cos\varphi)} d\varphi + 2\pi = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi + 2\pi$$
$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}})\,d\varphi + 2\pi = 5\pi - 8.$$

□

Zadatak 3.15. Izračunajte površinu lika koji je omeđen krivuljama $r = 2(1+\cos\varphi)$ i $r = 3$, te nalazi se unutar prve, a izvan druge krivulje. Skicirajte lik.

Rješenje:



Računamo presjek krivulja:

$$2(1+\cos\varphi) = 3$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Dakle, lik je opisan nejednadžbama:

$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$
$$3 \leq r \leq 2(1+\cos\varphi).$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{3}^{2(1+\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}\Big|_{r=3}^{r=2(1+\cos\varphi)} d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 + 8\cos\varphi + 4\underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}} - 9)\,d\varphi = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi.$$

$\square$

3.1.3 Volumen pomoću dvostrukog integrala

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tijelo u prostoru ograničeno plohom $z = f(x, y)$ odozgo, te plohom $z = g(x, y)$ odozdo. *Volumen* tijela Ω možemo računati pomoću formule

$$V = \iint_D \Big(f(x, y) - g(x, y) \Big) \, dx \, dy,$$

gdje je D ortogonalna projekcija tijela Ω na xy-ravninu.

Zadatak 3.16. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = 8 - x^2 - y^2$ i $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo kružnim paraboloidom $z = 8 - x^2 - y^2$, a odozdo kružnim stošcem $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ (pogledajte sliku 3.1).

Odredimo presjek ploha, a ujedno i projekciju D tijela na xy-ravninu:

$$8 - x^2 - y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uz oznaku $r^2 = x^2 + y^2$, rješavamo kvadratnu jednadžbu $r^2 + 2r - 8 = 0$. Pozitivno rješenje $r = 2$ predstavlja radijus projekcije D tijela na xy-ravninu. Budući da je projekcija D krug sa središtem u ishodištu, volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (8 - x^2 - y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (8 - r^2 - 2r) r \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (8r - r^3 - 2r^2) \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \left(4r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3} \right) \Big|_0^2 \mathrm{d}\varphi \\
&= \left(16 - 4 - \frac{16}{3} \right) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{36 - 16}{3} 2\pi = \frac{40\pi}{3}.
\end{aligned}$$

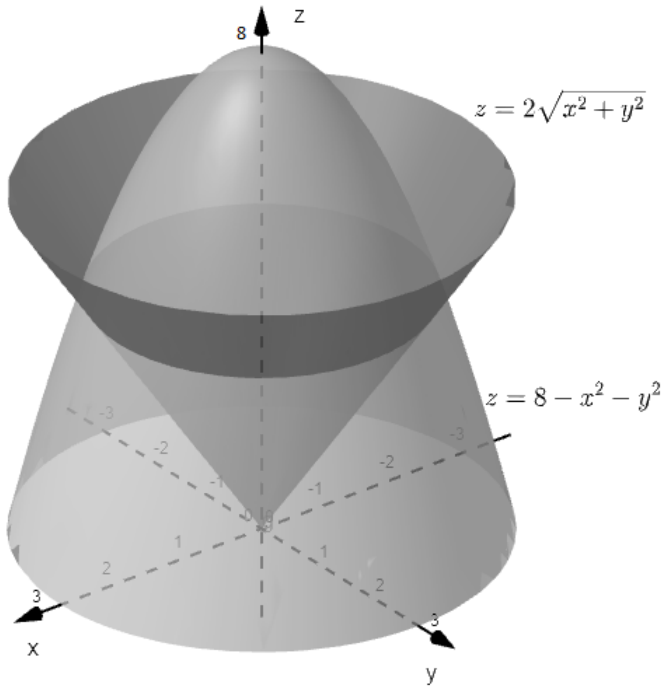
□

Zadatak 3.17. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo sferom radijusa $\sqrt{2}$. Naime, kada kvadriramo jednakost $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ dobijemo da je $z^2 = 2 - x^2 - y^2$, tj. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tijelo je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$ (pogledajte sliku 3.2).

Odredimo presjek ploha, a ujedno i projekciju D tijela na xy-ravninu:

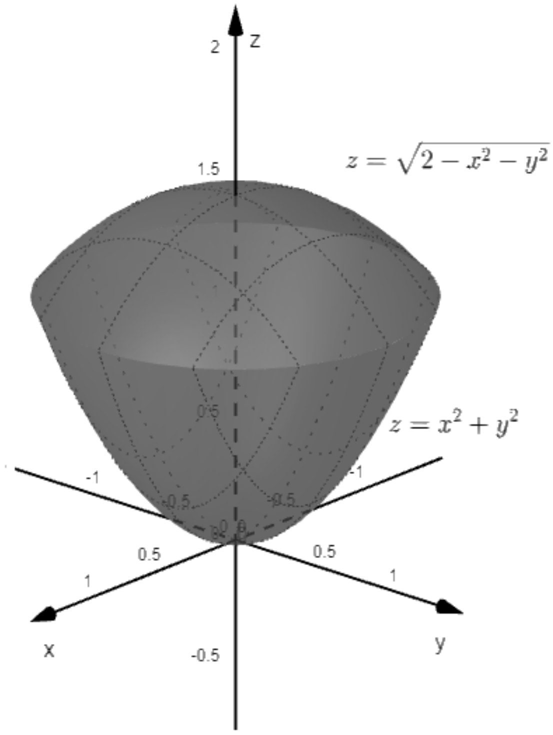
$$x^2 + y^2 = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$



Slika 3.1: Tijelo Ω omeđeno paraboloidom i stošcem

Uz oznaku $r = x^2 + y^2$, rješavamo jednadžbu $r = \sqrt{2-r}$, tj. kvadratnu jednadžbu $r^2 + r - 2 = 0$. Pozitivno rješenje $r = 1$ predstavlja radijus projekcije D tijela na xy-ravninu. Budući da je projekcija D krug sa središtem u ishodištu, volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$V = \iint_D \Big(\sqrt{2-x^2-y^2} - x^2 - y^2\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \Big[\underbrace{\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\mathrm{d}r}_{t=2-r^2,\, dt=-2rdr} - \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r\Big]$$
$$= 2\pi\Big[-\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\Big] = 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^1 - \frac{1}{4}\Big)$$



Slika 3.2: Tijelo Ω omeđeno sferom i paraboloidom

$$= 2\pi\Big(\frac{2\sqrt{2}-1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{8\sqrt{2}-7}{12}2\pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

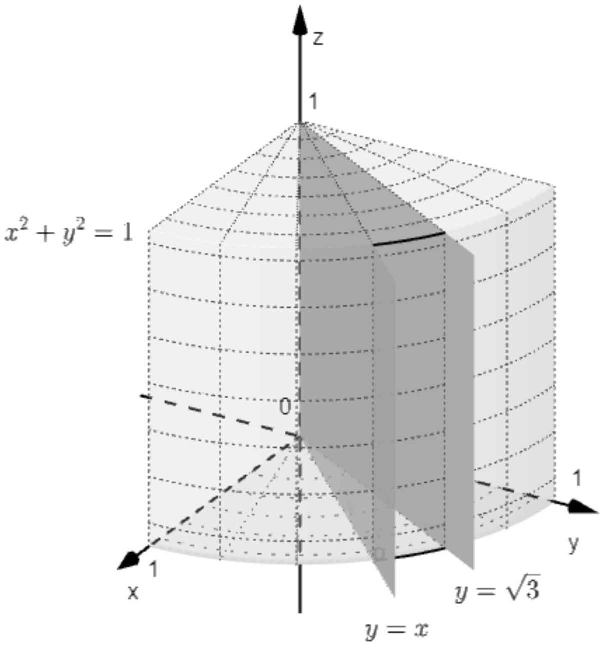
□

Zadatak 3.18. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi u *prvom oktantu* ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), a omeđeno je plohama $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ i $y = \sqrt{3}\,x$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo ravninom $z = 1$, a odozdo ravninom $z = 0$. Bočne stranice tijela su dijelovi okomitih ravnina $y = x$ i $y = \sqrt{3}\,x$ u 1. oktantu, te dio plašta kružnog stošca $x^2 + y^2 = 1$ također u 1. oktantu (pogledajte sliku 3.3).

Projekcija D tijela na xy-ravninu je kružni isječak kruga radijusa 1 sa središtem u ishodištu i to od pravca $y = x$ do pravca $y = \sqrt{3}\,x$. Stoga volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini na sljedeći način:

$$V = \iint_D (1-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\mathrm{d}r$$



Slika 3.3: Tijelo Ω

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

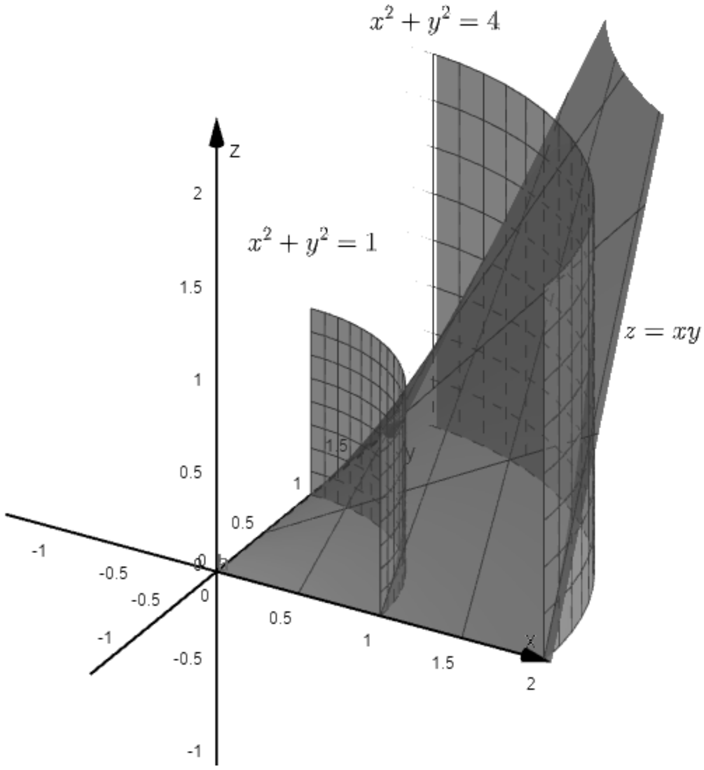
□

Zadatak 3.19. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi u prvom oktantu, a omeđeno je plohama $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ i $z = xy$.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo sedlastom plohom $z = xy$, dok su bočne stranice tijela dijelovi koordinatnih ravnina $x = 0$ i $y = 0$, te dijelovi plašteva kružnih stožaca $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$ (pogledajte sliku 3.4).

Projekcija tijela na xy-ravninu je dio kružnog vijenca između kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$ u 1. kvadrantu. Volumen tijela računamo na sljedeći način:

$$V = \iint_D (xy - 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 r^2 \cos\varphi \sin\varphi \, r\mathrm{d}r$$



Slika 3.4: Tijelo Ω

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_1^2 r^3 \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \frac{r^4}{4}\Big|_1^2 \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{15}{16}\cos(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{15}{16}(-1-1) = \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

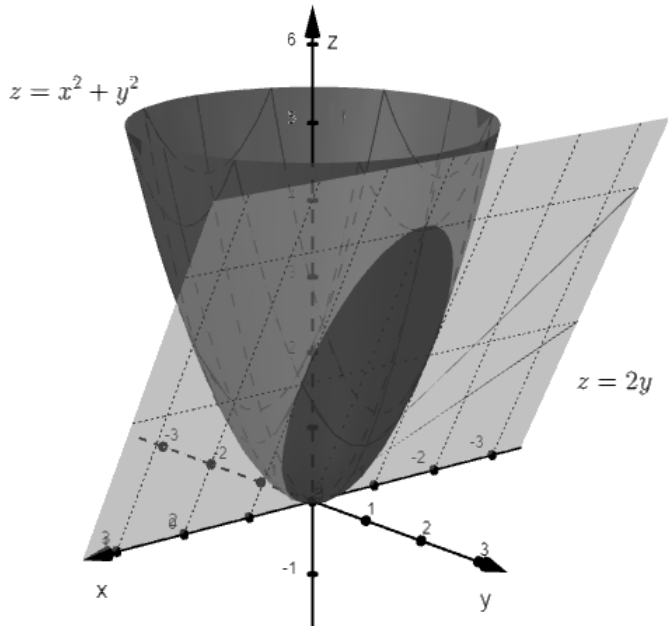
□

Zadatak 3.20. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = 2y$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, a odozgo ravninom $z = 2y$(pogledajte sliku 3.5).

Odredimo presjek paraboloida i ravnine, odnosno projekciju D tijela na xy-ravninu:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$



Slika 3.5: Tijelo omeđeno ravninom i paraboloidom

Budući da jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 2y$ koja omeđuje projekciju D u polarnom koordinatnom sustavu ima oblik $r = 2\sin\varphi$, volumen tijela računamo po formuli:

$$
\begin{aligned}
V = \iint_D (2y - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2r\sin\varphi - r^2)r\,\mathrm{d}r \\
= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2r^2\sin\varphi - r^3)\mathrm{d}r &= \int_0^{\pi} \Big(\frac{2\sin\varphi}{3}r^3 - \frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^{2\sin\varphi} \\
= \int_0^{\pi} \Big(\frac{16}{3}\sin^4\varphi - \frac{16}{4}\sin^4\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\Big)^2\mathrm{d}\varphi &= \frac{4}{3}\frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos(2\varphi) + \cos^2(2\varphi))\mathrm{d}\varphi \\
= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \Big(1 - 2\cos(2\varphi) + \frac{1+\cos(4\varphi)}{2}\Big)\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{3}\Big(\frac{3}{2}\varphi - \sin(2\varphi) + \frac{\sin(4\varphi)}{8}\Big)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{3}\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 3.21. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x + y + 1$ i $z = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Zadaća. ($V = \frac{\pi}{8}$) $\square$

Zadatak 3.22. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = \sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$.

Rješenje: Tijelo je omeđeno odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo rotacijskom plohom $z = \sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$, dok je bočna stranica tijela dio vertikalnog kružnog stošca $x^2 + y^2 = 4$. Odatle je jasno da je projekcija D tijela na xy-ravninu zapravo kružnica sa središtem u ishodištu radijusa $r = 2$. Prema tome, volumen tijela računamo po formuli:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (\sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}} - 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \sqrt{2} e^{3+r} r \,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\sqrt{2}\, e^3 \underbrace{\int_0^2 r e^r \mathrm{d}r}_{u=r,\, dv=e^r dr} = 2\sqrt{2}\pi\, e^3 (re^r - e^r)\Big|_0^2 \\
&= 2\sqrt{2}\,\pi e^3 (2e^2 - e^2 + 1) = 2\sqrt{2}\,\pi (e^5 + e^3).
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadatak 3.23. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$ i $z = y^2$, koje se nalazi u prvom oktantu. Skicirajte tijelo.

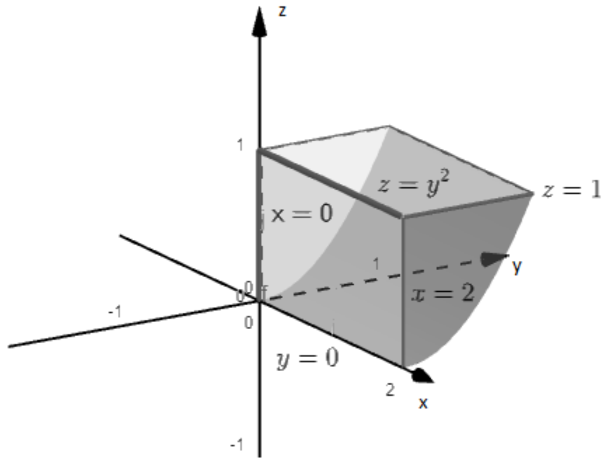
Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo paraboličkim cilindrom $z = y^2$, a odozgo ravninom $z = 1$. Lijeva bocna stranica tijela je dio ravnine $y = 0$, dok su stražnja i prednja stranica tijela omeđene redom ravninama $x = 0$ i $x = 2$(pogledajte sliku 3.6).

Projekcija tijela na xy-ravninu je pravokutnik $[0, 2] \times [0, 1]$, tako da ćemo za računanje volumena tijela koristiti kartezijeve koordinate:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 (1 - y^2)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} \int_0^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadatak 3.24. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = 0$, $y = 3$, $z = 4$ i $z = x^2$. Skicirajte tijelo.



Slika 3.6: Tijelo Ω

Rješenje: Zadaća. ($V = 32$) □

Zadatak 3.25. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = 0$, $y = 2$, $z = x^2$ i $z = 2 - x^2$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo paraboličkim cilindrom $z = x^2$, a odozgo paraboličkim cilindrom $z = 2 - x^2$. Lijeva i desna stranica tijela su omeđene redom ravninama $y = 0$ i $y = 2$ (pogledajte sliku 3.7).

Odredimo projekciju tijela na xy-ravninu:

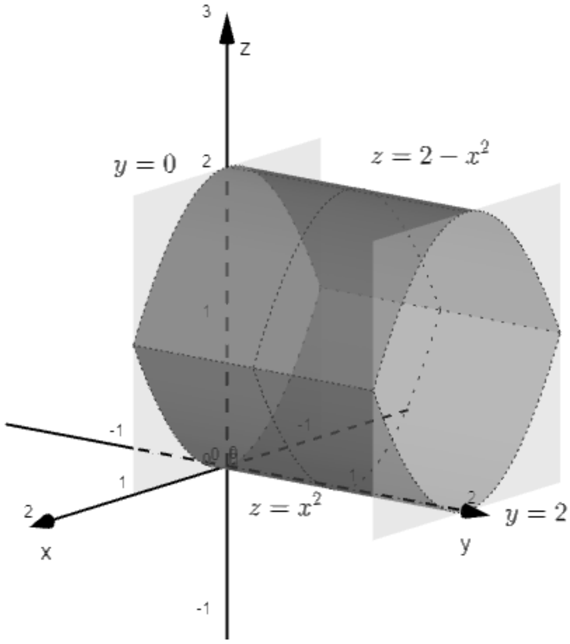
$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ i } x = 1.$$

Prema tome, projekcija tijela na xy-ravninu je pravokutnik $[-1, 1] \times [0, 2]$. Volumen tijela računamo po formuli:

$$V = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{2} (2 - x^2 - x^2)\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big(2x - \frac{2}{3}x^3\Big)\Big|_{-1}^{1} = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\Big) = 4\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

□



Slika 3.7: Tijelo Ω

3.2 Trostruki integrali

Neka je tijelo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ zadano sljedećim uvjetima:

$$\begin{aligned} a \leq x &\leq b, \\ \varphi_1(x) \leq y &\leq \varphi_2(x), \\ \psi_1(x,y) \leq z &\leq \psi_2(x,y), \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdje su a i b konstante, te φ_1, φ_2, ψ_1 i ψ_2 neprekidne funkcije definirane na odgovarajućim domenama. Neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. *Trostruki integral* funkcije f po skupu Ω računamo po formuli:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Napomenimo da za trostruki integral vrijede potpuno analogna svojstva kao za dvostruki, nabrojana na početku odjeljka 3.1, pa ih nećemo opet posebno isticati (ali ćemo ih koristiti).

Nadalje, u (3.3) možemo imati i drugačiji poredak varijabli. Bitno jest da granice prve izabrane varijable budu konstante, a granice ostalih varijabli ovise samo o prethodno izabranim varijablama.

Zadatak 3.26. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx$, te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Područje integracije je

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x-y \right\}.$$

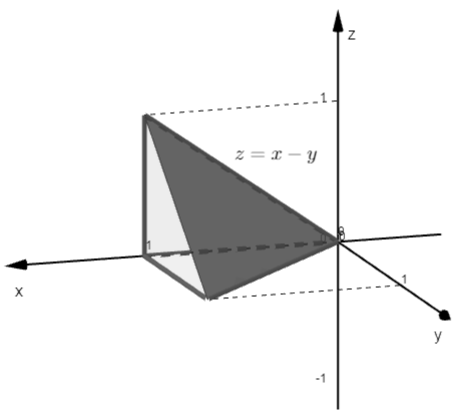
Uočimo da je

$$0 \leq z \leq x - y \Leftrightarrow y \leq y + z \leq x \Leftrightarrow (z \geq 0) \Leftrightarrow y + z \leq x.$$

Dakle, Ω je dio prostora (tetraedar) u prvom oktantu omeđen ravninom $y + z = x$ (pogledajte sliku 3.2).

Računamo pomoću gornje formule:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\,dz\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^x xz\Big|_{z=0}^{z=x-y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x x(x-y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy)\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2 y - x \cdot \frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - \frac{x^3}{2})\,dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



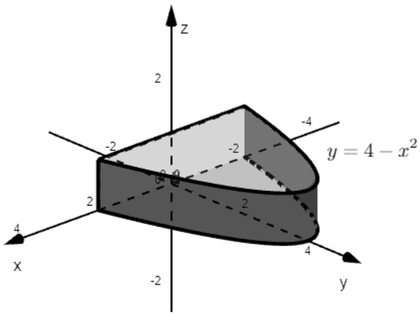
Slika 3.8: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

$\square$

Zadatak 3.27. Skicirajte područje integracije i odredite granice za integral $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, gdje je Ω omeđeno plohama $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $z = 1$ i $z = 0$. Riješite navedeni integral, ako je podintegralna funkcija $f(x,y,z) = xy^2 + z$.

Rješenje: Ploha $y = 4 - x^2$ je parabolički cilindar. Naime, ploha je očito drugog reda i u jednadžbi se pojavljuju samo dvije varijable, dakle radi se o cilindru, a iz jednadžbe se vidi da su vodoravni presjeci parabole.
I sada za $(x,y,z) \in \Omega$ imamo da je $0 \le z \le 1$ i $0 \le y \le 4 - x^2$. Granice za x su točke u kojima parabola $y = 4 - x^2$ u xy-ravnini siječe x-os, tj. točke za koje je $0 = 4 - x^2 \Rightarrow x = \pm 2$. Dakle, $-2 \le x \le 2$ (pogledajte sliku 3.2).

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (xy^2 + z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{0}^{1}(xy^2 + z)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}(xy^2 z + \frac{z^2}{2})\Big|_{z=0}^{z=1}\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}(xy^2 + \frac{1}{2})\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}(x\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}y)\Big|_{y=0}^{y=4-x^2}\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}(x\cdot\frac{(4-x^2)^3}{3} + \frac{1}{2}(4-x^2))\,dx
\end{aligned}$$



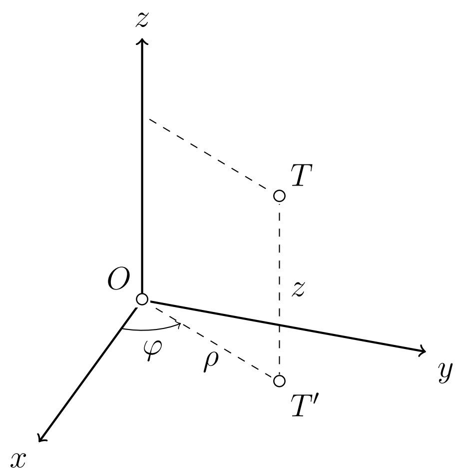
Slika 3.9: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

$$= \underbrace{\int_{-2}^{2} x \cdot \frac{(4-x^2)^3}{3}\,dx}_{=0} + \int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx = (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}$$

Prvi integral je jednak 0 zato što je podintegralna funkcija neparna ($f(-x) = -f(x)$), a područje integracije $[-2,2]$ je simetrično oko 0. Drugi integral se može napisati kao integral po $[0,2]$ pomnožen s 2 jer je podintegralna funkcija parna ($f(-x) = -f(x)$). $\square$

3.2.1 Cilindrični koordinatni sustav

Neka je $T = (x, y, z)$ točka u prostoru, te $T' = (x, y, 0)$ njena projekcija na xy-ravninu. Neka su (ρ, φ) polarne koordinate točke T' u xy-ravnini.



Uređenu trojku (ρ, φ, z) zovemo *cilindričkim koordinatama* točke T. Formule pretvorbe iz cilindričkog u Kartezijev sustav i obratno glase

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi & \qquad \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= \rho\sin\varphi, & \qquad \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

pri čemu varijabla z ostaje ista u oba sustava.

Napomena. Koristimo oznaku $\rho = |\vec{OT'}|$ umjesto r. Razlog je što oznaku r čuvamo za tzv. sferni sustav, gdje će biti $r = |\vec{OT}|$.

Što su *koordinatne plohe* u cilindričkom sustavu? Plohe $\rho =$ konstanta su plaštevi cilindara sa središnjom osi z. Plohe $\varphi =$ konstanta su poluravnine s rubom u z-osi. Plohe $z =$ konstanta su horizontalne ravnine.

Jacobijan prijelaza u cilindričke koordinate iznosi ρ, pa *teorem o zamjeni varijabli* glasi:

$$\iiint_{D(x,y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D(\rho,\varphi,z)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Zadatak 3.28. Skicirajte područje integracije, te prebacite u cilindrički sustav integral

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Riješite integral ako je podintegralna funkcija $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

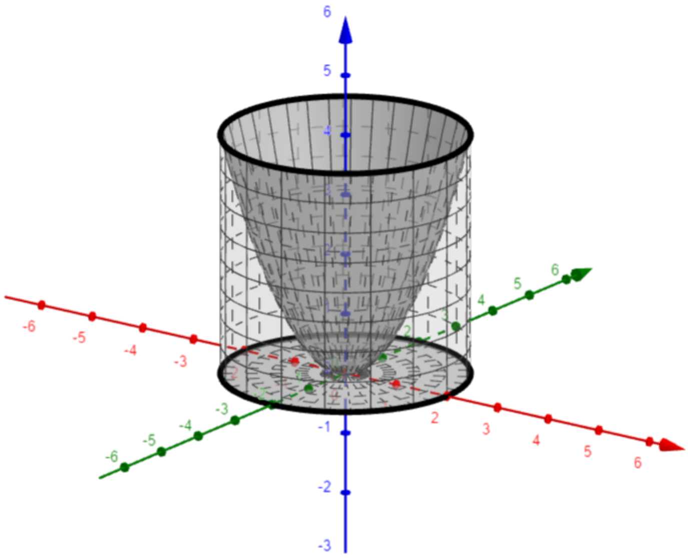
Rješenje: Označimo zadani integral sa I. Imamo:

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow y^2 \leq 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Iz toga slijedi da je područje integracije Ω omeđeno cilindrom $x^2 + y^2 = 4$. Iz $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ slijedi da je područje Ω omeđeno i paraboloidom $z = x^2 + y^2$ te ravninom $z = 0$ (pogledajte sliku 3.2.1).

Ako stavimo $\rho^2 = x^2 + y^2$, slijedi da je $0 \leq \rho \leq 2$. Nadalje, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (jer φ parametrizira kružnicu $x^2 + y^2 = \rho^2$) te $0 \leq z \leq \rho^2$. I sada primjenom gornje formule dobivamo:

$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{0}^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi.$$



Slika 3.10: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Za funkciju $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ imamo

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2} ((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + z)\rho \, dz \, d\varphi \, d\rho \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} (\rho^3 + z\rho) \, dz \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^3 z + \frac{z^2}{2}\rho)\Big|_{z=0}^{z=\rho^2} d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^5 + \frac{1}{2}\rho^5) \, d\rho \, d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^5 \, d\rho \, d\varphi \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{6}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{32}{3} \, d\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot \varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 32\pi
\end{aligned}
$$

□

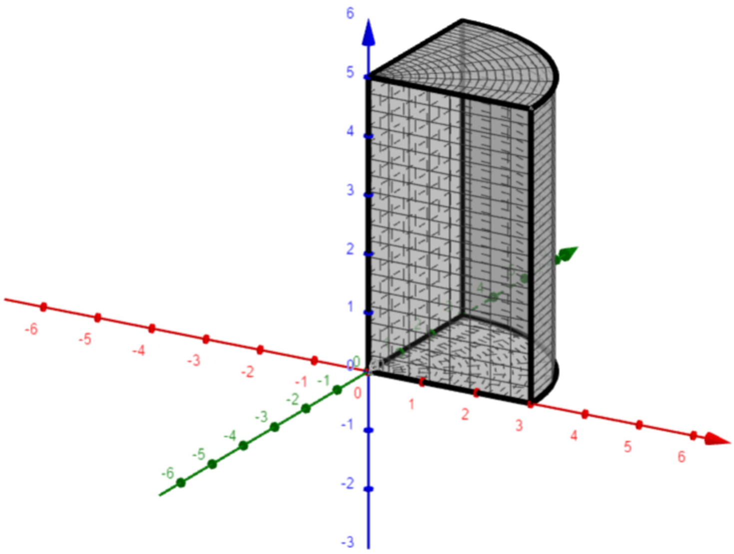
Zadatak 3.29. Izračunajte $\iiint_\Omega y \, dx \, dy \, dz$, ako je Ω tijelo u I. oktantu, omeđeno plohama $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ i $z = 5$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje:

- Direktno u Kartezijevim koordinatama.

  Za $(x,y,z) \in \Omega$ imamo da je $0 \le z \le 5$. Budući da gledamo samo prvi oktant, imamo i $x, y \ge 0$, odakle slijedi da je

$$x^2 + y^2 \le 9 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3, \, 0 \le y \le \sqrt{9 - y^2}.$$



Slika 3.11: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

(Pogledajte sliku 3.2.1.) Računamo:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^5 y\,dz\,dy\,dx = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} yz\Big|_{z=0}^{z=5} dy\,dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 5y\,dy\,dx = 5\int_0^3 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} dx \\
&= \frac{5}{2}\int_0^3 (9-x^2)\,dx = \frac{5}{2}(9x - \frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{5}{2}(9\cdot 3 - \frac{3^3}{3}) = 45
\end{aligned}
$$

- Prelaskom na cilindričke koordinate.

  Ako stavimo $\rho^2 = x^2 + y^2$, onda je $0 \le \rho \le 3$. Još imamo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ zato što φ parametrizira samo četvrtinu kružnice u prvom oktantu te $0 \le z \le 5$. Računamo:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_0^5 \rho\sin\varphi \cdot \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2(\sin\varphi)z\Big|_{z=0}^{5} d\rho\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 5\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi = 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \\
&= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin\varphi\,d\varphi = 45\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 45
\end{aligned}
$$

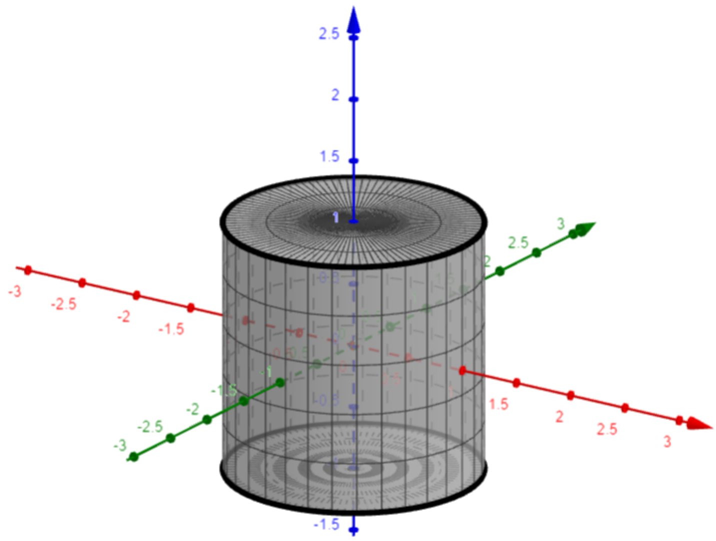
$\square$

Zadatak 3.30. Izračunajte

$$\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z+2}},$$

ako je $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Skup Ω je omeđen cilindrom $x^2+y^2=1$ i ravninama $z=-1$ i $z=1$. Ako stavimo $\rho^2 = x^2+y^2$, onda je $0 \le \rho \le 1$. Još imamo $0 \le \varphi \le 2\pi$ (pogledajte sliku 3.2.1).



Slika 3.12: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2+z+2}}\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z+2}}\,dz}_{t=\rho^2+z+2}\,d\varphi\,d\rho = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2+1}^{\rho^2+3} \rho t^{-\frac{1}{2}}\,dt\,d\rho\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{t=\rho^2+1}^{t=\rho^2+3} d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^1 2\rho(\sqrt{\rho^2+3}-\sqrt{\rho^2+1})\,d\rho}_{t=\rho^2}\,d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1(\sqrt{t+3}-\sqrt{t+1})\,dt\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(\frac{(t+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_{t=0}^{t=1} d\varphi\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(4^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}+1)\,d\varphi = \frac{2}{3}(9-2\sqrt{2}-3\sqrt{3})\cdot\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{4\pi}{3}(9-2\sqrt{2}-3\sqrt{3})
$$

$\square$

Zadatak 3.31. Izračunajte

$$
\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,
$$

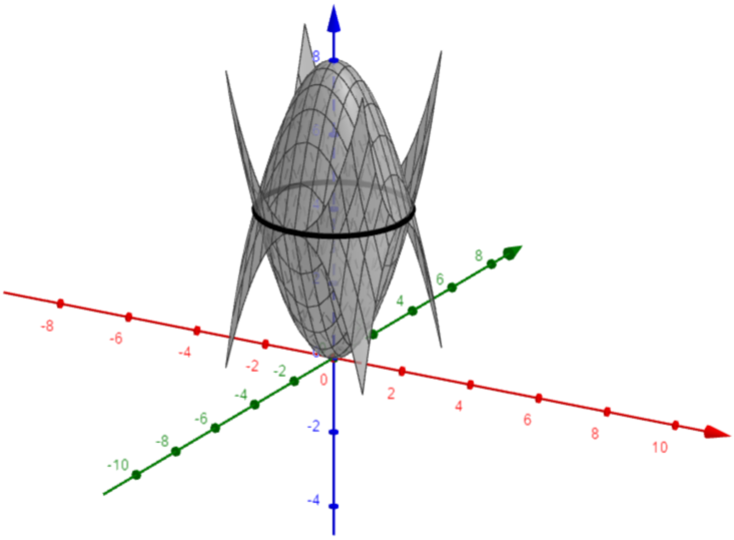
ako je $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2\le z\le 8-x^2-y^2\}$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Područje Ω je omeđeno paraboloidima $z=x^2+y^2$ i $z=8-x^2-y^2$. Presjek tih krivulja dobijemo iz jednadžbe

$$
x^2+y^2 = 8-x^2-y^2 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=8 \Leftrightarrow x^2+y^2=4.
$$

Dakle, presjek je kružnica (pogledajte sliku 3.2.1).

Ako uvedemo cilindrične koordinate, imamo da je $0\le\varphi\le 2\pi$ jer φ mora opisati cijeli krug. Kružnica na presjeku ima najveći polumjer od svih poprečnih kružnica, pa je $0\le\rho\le 2$. Za fiksni ρ, kružnice polumjera ρ su unutar Ω



Slika 3.13: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

samo na visini $\rho^2 \leq z \leq 8-\rho^2$ (zato što je $\rho^2 = x^2+y^2$). Računamo:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^{8-\rho^2} \rho^2\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2 z\Big|_{z=\rho^2}^{z=8-\rho^2} d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\rho^2(8-\rho^2-\rho^2))\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8\rho^2-2\rho^4)\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (8\cdot\frac{\rho^3}{3} - 2\cdot\frac{\rho^5}{5})\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} = \int_0^{2\pi}(8\cdot\frac{8}{3}-2\cdot\frac{32}{5})\, d\varphi = \frac{128}{15}\cdot\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{256\pi}{15}
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 3.32. Izračunajte

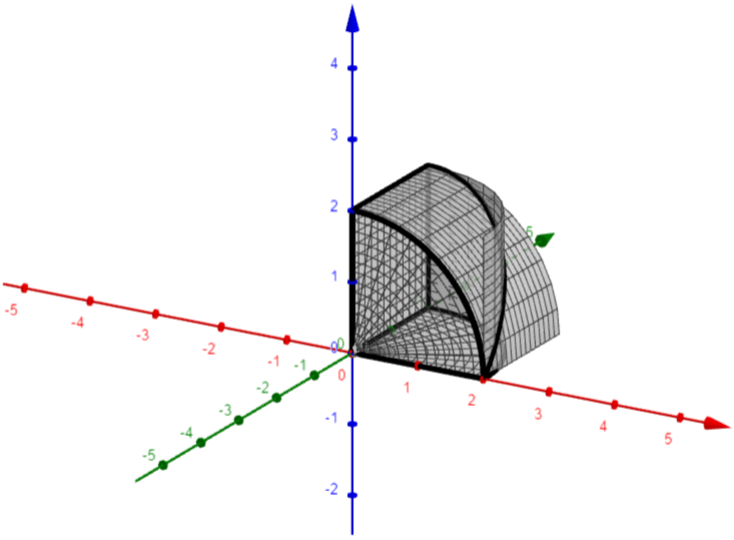
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}\, dz\, dy\, dx,$$

te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Imamo da je

$$y \leq \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 \leq 4-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4.$$

Uočimo da to vrijedi za svaki z. Nadalje, imamo i da je $x^2 + z^2 \leq 4$ za svaki y. Dakle, područje Ω je omeđeno cilindrima $x^2 + y^2 = 4$ (oko z-osi) i $x^2 + z^2 = 4$ (oko y-osi). Zbog $x, y, z \geq 0$ gledamo samo dio u prvom oktantu (pogledajte sliku 3.2.1).



Slika 3.14: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Za cilindrične koordinate granice su $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ jer su vodoravni presjeci četvrtine kružnice, $0 \leq \rho \leq 2$ jer je $\rho^2 = x^2 + y^2$ i $0 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi}$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{4-\rho^2 \cos^2 \varphi}} \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi} \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi} \rho z \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{4-\rho^2 \cos^2 \varphi}} d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (4\rho - \rho^3 \cos^2 \varphi) \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 4\cos^2 \varphi) \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - 4 \cdot \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}) \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 - 2\cos(2\varphi)) \, d\varphi = (6\varphi - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\varphi)) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 3\pi
\end{aligned}
$$

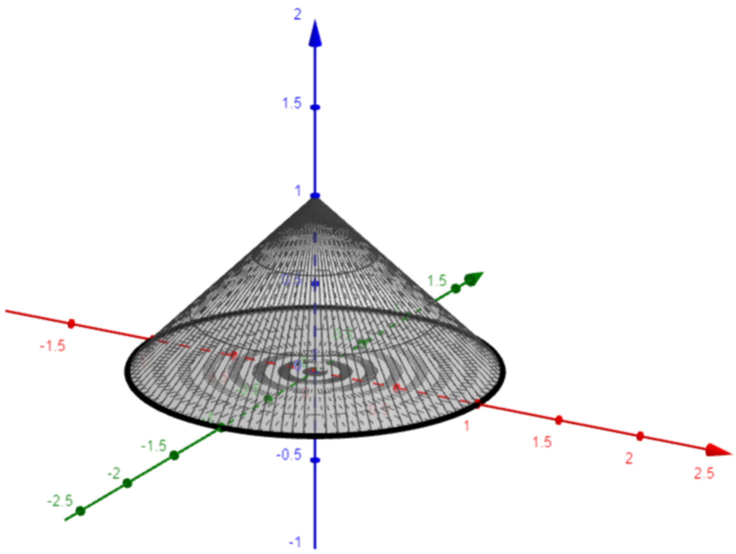
□

Zadatak 3.33. Izračunajte

$$\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je Ω tijelo omeđeno plohama $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = 0$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje:



Slika 3.15: Skup Ω i plohe koje ga omeđuju

Granice za cilindrične koordinate su $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$ i $0 \leq \rho \leq 1 - z$. (Pogledajte sliku 3.2.1.) Računamo:

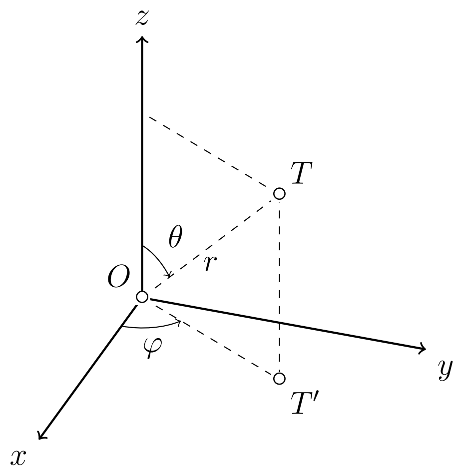
$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\Big|_{\rho=0}^{\rho=1-z} d\varphi\,dz$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-z)^3 \cos\varphi\,d\varphi\,dz = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-z)^3 \sin\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dz = \frac{1}{3}\int_0^1 0\,dz = 0$$

□

3.2.2 Sferni koordinatni sustav

Neka je $T = (x, y, z)$ točka u prostoru, te $T' = (x, y, 0)$ njena projekcija na xy-ravninu. Neka je $\varphi = \measuredangle(\vec{i}, \vec{OT'})$ usmjeren kut kao i prije, te uvedimo oznake:

- $r = |\vec{OT}|$ = udaljenost točke T do ishodišta,
- $\theta = \measuredangle(\vec{k}, \vec{OT})$ = otklon spojnice $\bar{OT}$ od z-osi.



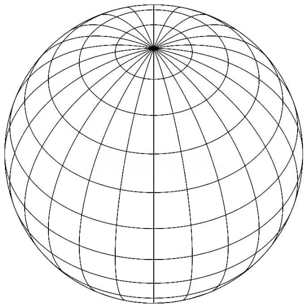
Uređenu trojku (r, θ, φ) zovemo *sfernim koordinatama* točke T. Iz pravokutnog trokuta $\triangle TT'O$ vidimo da je $z = r\cos\theta$ i $\rho = r\sin\theta$, a iz toga pak lako slijede formule pretvorbe iz sfernog u Kartezijev sustav i obratno:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\theta & \qquad r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
y &= r\sin\varphi\sin\theta & \qquad r^2\sin^2\theta &= x^2 + y^2 \\
z &= r\cos\theta, & \qquad \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}.
\end{aligned}
$$

Uočimo da je varijabla θ ograničena na interval $[0, \pi]$. Preciznije,

- $\theta = 0$ imaju točke na pozitivnom dijelu z-osi,
- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ imaju točke iznad xy-ravnine (tj. $z > 0$),
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ imaju točke na xy-ravnini (tj. $z = 0$),
- $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ imaju točke ispod xy-ravnine (tj. $z < 0$),
- $\theta = \pi$ imaju točke na negativnom dijelu z-osi.

Što su *koordinatne plohe* u sfernom sustavu? Plohe $r =$ konstanta su sfere sa središtem u ishodištu. Plohe $\varphi =$ konstanta su poluravnine s rubom u z-osi. Plohe $\theta =$ konstanta su plaštevi jednoplošnih stožaca s vrhom u ishodištu i središnjom osi z. Uočimo da ako fiksiramo sferu sa središtem u ishodištu, i presječemo je sa preostalim koordinatnim plohama, dobijemo sustav meridijana (φ) i paralela (θ):



Zadatak 3.34. Odredite *Jacobijan* prijelaza u sferne koordinate.

Rješenje: Zadaća. Rješenje je $J = r^2 \sin\theta$ (pogledajte u materijale iz predavanja.) $\square$

Prema prethodnom zadatku, *teorem o zamjeni varijabli* u ovom slučaju glasi:

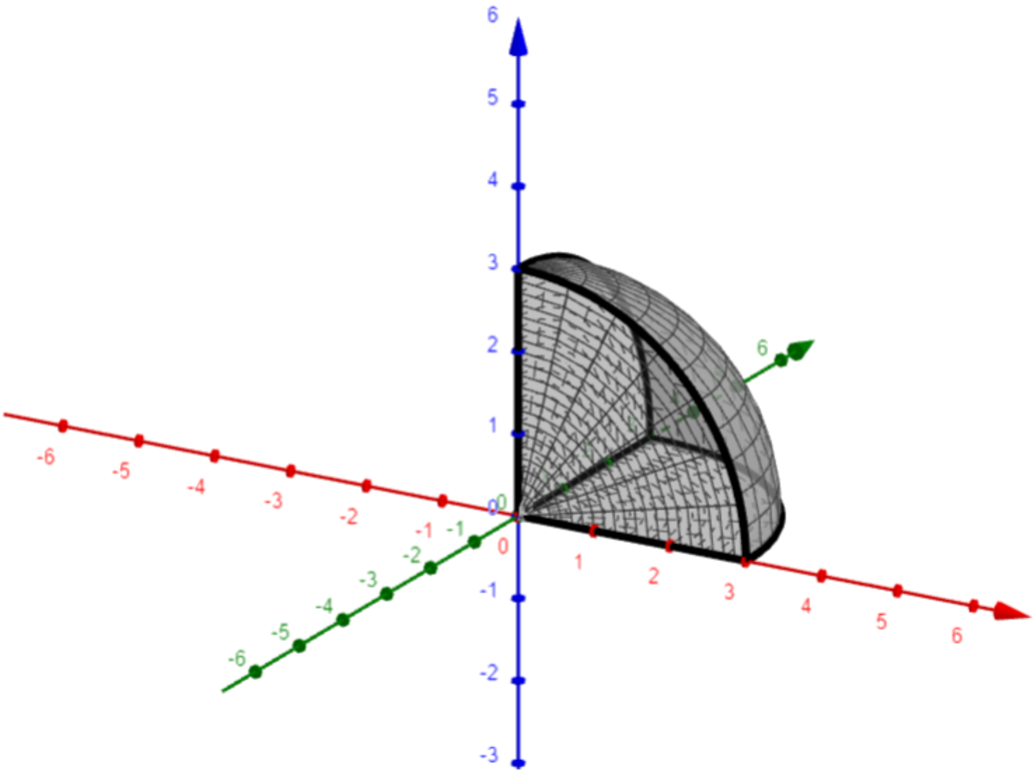
$$\iiint_{D(x,y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint_{D(r,\theta,\varphi)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin = \theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Zadatak 3.35. Skicirajte područje integracije, te prebacite u sferni sustav integral

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Riješite integral ako je podintegralna funkcija $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Rješenje: Budući da je $0 \leq y \leq \sqrt{9-y^2}$ vidimo da projekcija tijela na xy-ravninu zadovoljava nejednakost $x^2+y^2 \leq 9$, tj. da se radi o točkama unutar kruga sa središtem u ishodištu radijusa $r = 3$. Takodjer zbog $0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}$ imamo da za točke tijela vrijedi $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, što znači da se



Slika 3.16: Tijelo Ω

radi o točkama unutar kugle radijusa $r = 3$ sa središtem u ishodištu. Budući da su sve koordinate pozitivne, tijelo predstavlja osminu kugle radijusa $r = 3$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.16).

Prema tome, u sfernim koordinatama gornji integral ima sljedeći zapis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^2 \sin\vartheta f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\mathrm{d}r.$$

Znamo da vrijedi $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ i stoga računamo vrijednost sljedećeg integrala:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^3 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^3 \mathrm{d}r$$

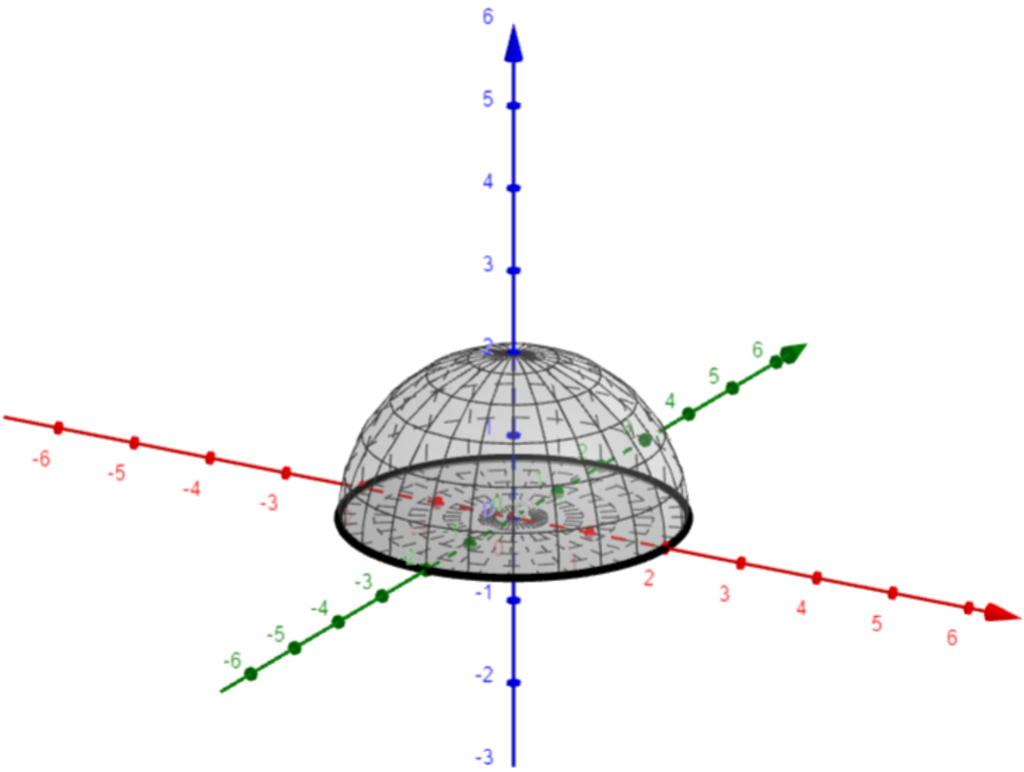
$$= \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}(-0-(-1))\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{8}.$$

$\square$

Zadatak 3.36. Skicirajte područje integracije, prebacite u sferni sustav, te riješite integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi.$$

Rješenje: Očito da je integral zadan u cilindričnim koordinatama. Povežimo cilindrični i sferni koordinatni sustav pomoću kartezijevog sustava. Zbog $0 \le \varphi \le 2\pi$ i $0 \le \rho \le 2$ za točke projekcije tijela na xy-ravninu vrijedi $x^2+y^2 \le 4$, tj. radi se o točkama unutar kruga radijusa $r=2$ sa središtem u ishodištu. Također zbog $0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$ vrijedi $x^2+y^2+z^2=4$, tako da je tijelo gornja polukugla radijusa $r=2$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.17).



Slika 3.17: Tijelo Ω

Znamo da se funcija ρ^3 pod znakom integrala sastoji od Jacobijana ρ i podintegralne funkcije $\rho^2 = x^2+y^2 = r^2\sin^2\vartheta$. Prema tome, zadani integral u sfernim koordinatama ima sljedeći oblik:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^2\sin\vartheta\, r^2\sin^2\vartheta\, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{t=\cos\vartheta,\,dt=-\sin\vartheta\,d\vartheta} \,\frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = 2\pi \int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t\,\frac{32}{5}$$

$$= \frac{64\pi}{5}\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{64\pi}{5}\frac{2}{3} = \frac{128\pi}{15}.$$

□

Zadatak 3.37. Skicirajte područje integracije, prebacite u Kartezijev sustav, te riješite integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^5 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Rješenje: Budući da je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ zaključujemo da je $x, y \ge 0$, tj. da projekcija tijela na xy-ravninu pripada 1. kvadrantu. Također, zbog $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$ zaključujemo da vrijedi $z \ge 0$, tj. da tijelo po kojem integriramo pripada gornjoj poluravnini. Konačno, iz $0 \le r \le 1$ vidimo da je $x^2+y^2+z^2 \le 1$, što znači da je tijelo po kojem integriramo zapravo osmina kugle u 1. oktantu radijusa $r = 1$ (pogledajte sliku 3.18).

Funkcija pod znakom integrala se sastoji od Jacobijana u sfernim koordinatama $J = r^2\sin\vartheta$ i podintegralne funkcije:

$$r^3\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta = r\cos\varphi\sin\vartheta\, r\sin\varphi\sin\vartheta\, r\cos\vartheta = xyz.$$

Sada znamo kako napisati integral u kartezijevim koordinatama:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (xy-x^3y-xy^3)\mathrm{d}y$$

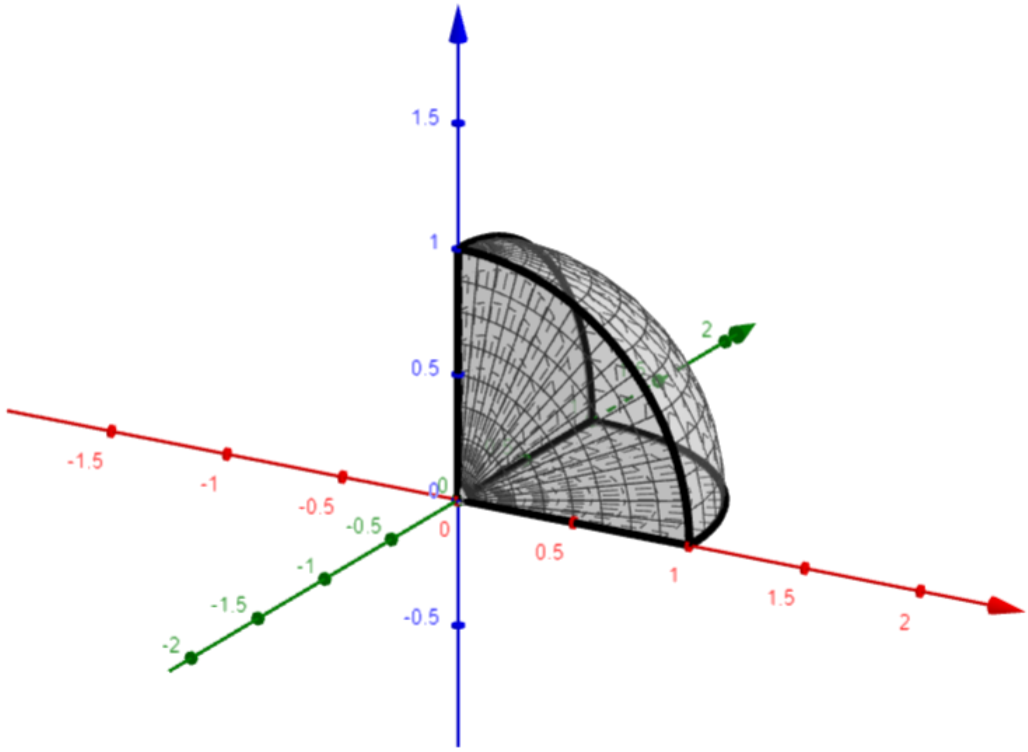
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big((x-x^3)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^4}{4}\Big)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}x(1-x^2)(1-x^2) - \frac{x}{4}(1-x^2)^2\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{4}x(1-x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-2x^2+x^4)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{48}.$$

□



Slika 3.18: Područje integracije

Zadatak 3.38. Izračunajte

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx,$$

te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Budući da vrijedi $-2 \leq x \leq 2$, te

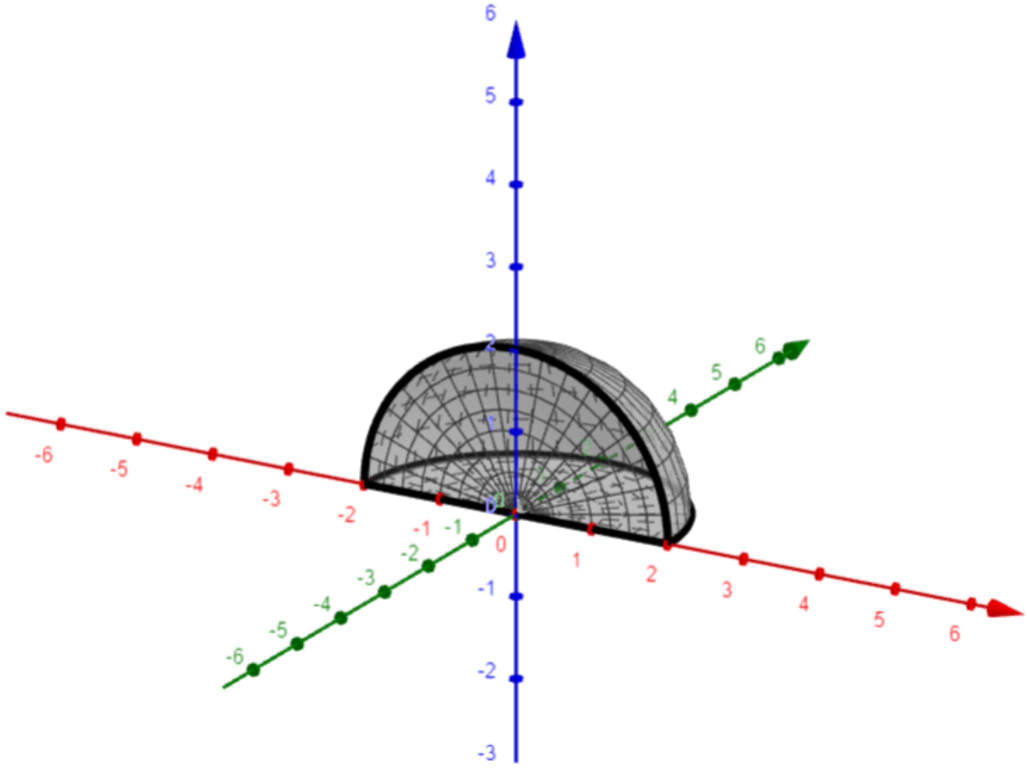
$$0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4 \text{ i}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 4$$

zaključujemo da je tijelo po kojem integriramo desna gornja četvrtina kugle radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu (pogledaje sliku 3.19).

Prema tome, zadani integral ima u sfernim koordinatama sljedeći oblik:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r\, r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^3 \mathrm{d}r$$



Slika 3.19: Područje integracije

$$= \pi(-cos)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 4\pi.$$

$\square$

Zadatak 3.39. Izračunajte

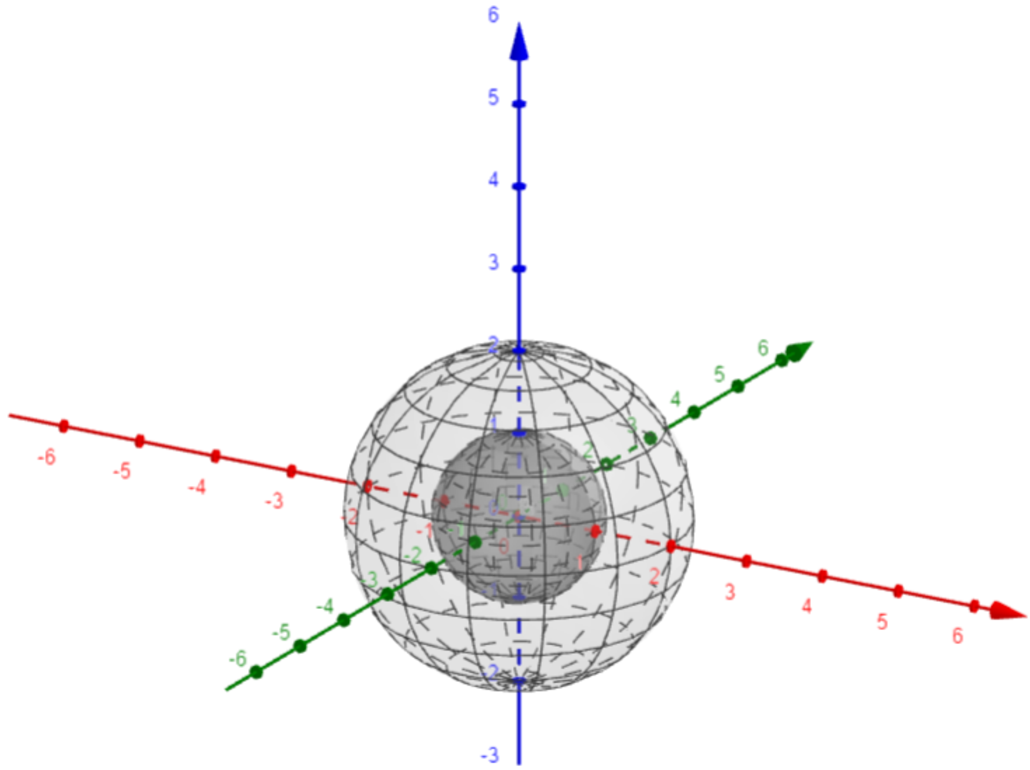
$$\iiint_\Omega r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

gdje je Ω tijelo omeđeno plohama $x^2+y^2+z^2 = 1$ i $x^2+y^2+z^2 = 4$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Tijelo Ω je prostor između kugle radijusa $r = 1$ i kugle radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu (Pogledajte sliku 3.20).

Prema tome, zadani integral pišemo u obliku:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_1^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_1^2 r^2 \mathrm{d}r$$



Slika 3.20: Područje integracije

$$= 2\pi(-\cos\vartheta)\Big|_0^\pi \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3}.$$

□

3.2.3 Neke primjene višestrukih integrala

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđen lik u ravnini, te neka mu je *plošna gustoća* zadana funkcijom $g\colon D \to [0, \infty\rangle$. Dakle, $g(x, y)$ je gustoća lika D u točki $(x, y) \in D$. *Masu* lika D računamo po formuli:

$$m = \iint_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

Statičke momente lika u odnosu na osi x i y, redom, računamo po formulama:

$$M_x = \iint_D y \cdot g(x, y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x \cdot g(x, y)\, dx\, dy.$$

Težište (centar mase) lika je točka (x_T, y_T) čije koordinate računamo po formulama:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \cdot g(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D g(x,y)\, dx\, dy}, \qquad y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \cdot g(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D g(x,y)\, dx\, dy}.$$

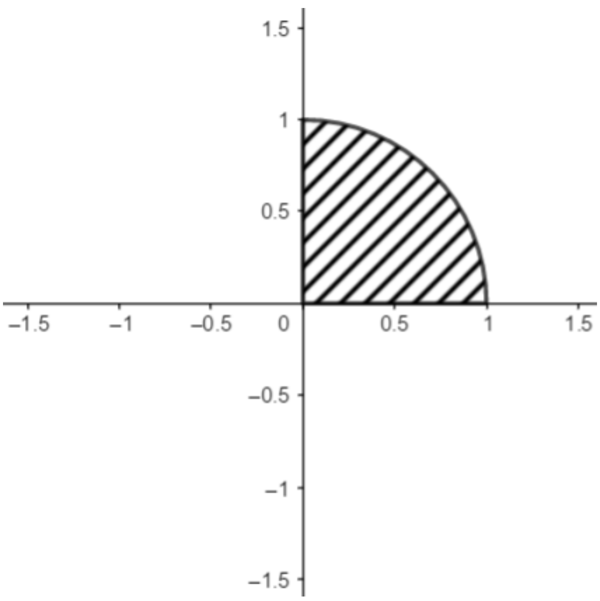
Momente inercije lika u odnosu na osi x, y i ishodište, redom, računamo po formulama:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \cdot g(x,y)\, dx\, dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \cdot g(x,y)\, dx\, dy, \\ I_0 &= \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot g(x,y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

U slučaju homogenog lika možemo pretpostaviti da je $g(x,y) = 1$.

Zadatak 3.40. Odredite težište lika $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, s plošnom gustoćom $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte lik.

Rješenje: Iz definicije lika D vidimo da se radi o četvrtini kruga radijusa $r = 1$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.21).



Slika 3.21: Lik D

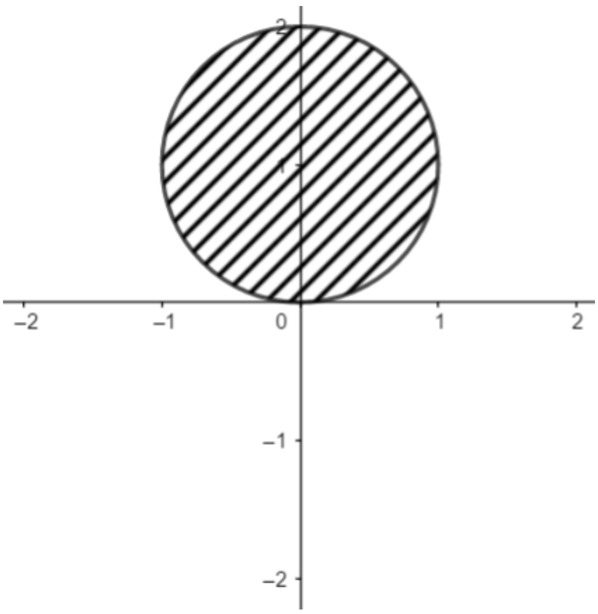
Masu lika ćemo računati pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$m = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\,r\,\mathrm{d}r$$
$$= \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

□

Zadatak 3.41. Odredite težište homogenog lika omeđenog krivuljom $x^2 + (y-1)^2 = 1$, te moment inercije s obzirom na y-os. Skicirajte lik.

Rješenje: Iz jednadžbe kružnice vidimo da je lik zapravo krug radijusa $r = 1$ sa središtem u točki $(0, 1)$ na osi y (pogledajte sliku 3.22).



Slika 3.22: Lik D

Zbog homogenosti lika za očekivati je da će težište lika biti u središtu kruga, što ćemo računski provjeriti. Kružnica koja omeđuje lik ima u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbu oblika $r = 2\sin\varphi$. Odredimo najprije masu lika:

$$m = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = P(D) = \pi.$$

Ovdje smo zbog homogenosti lika uzeli da je gustoća mase jednaka $g(x, y) = 1$. Odredimo sada statički moment obzirom na os y:

$$M_y = \iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\pi} \cos\varphi \, \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \underbrace{\frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{t=\sin\varphi,\, dt=\cos\varphi \mathrm{d}\varphi} = \frac{8}{3}\int_0^{0} t^3 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Dakle, x-koordinata težišta je $x_S = 0$. Nađimo vrijednost statičkog momenta obzirom na os x:

$$\begin{aligned}
M_x = \iint_D y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi} \sin\varphi \, \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \Big(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\Big)\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}\,\pi = \pi.
\end{aligned}$$

Prema tome, y-koordinata težišta je $y_S = \frac{\pi}{\pi} = 1$. To znači da je težište lika doista u središtu kruga, tj. u točki $S(0,1)$.

Odredimo sada moment inercije obzirom na os y:

$$\begin{aligned}
I_y = \iint_D x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^3 \cos^2\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \, \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi} \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi} (\sin^4\varphi - \sin^6\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi = 4\Big(\frac{3\pi}{8} - \frac{5\pi}{16}\Big) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Pogledajmo još kako smo došli do predzadnje jednakosti u gornjem računu. Vrijednost integrala

$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi}{8}$$

smo odredili kada smo računali statički moment M_x obzirom na os x. Odredimo konačno vrijednost sljedećeg integrala:

$$\int_0^{\pi} \sin^6\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big)^3 \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1 - 3\cos 2\varphi + 3\underbrace{\cos^2 2\varphi}_{\frac{1+\cos 4\varphi}{2}} - \underbrace{\cos^3 2\varphi}_{\cos 2\varphi(1-\underbrace{\sin^2 2\varphi}_{t^2})})\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{5}{2}\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi + \frac{3\sin 4\varphi}{8} - 0\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{8}\,\frac{5}{2}\,\pi = \frac{5\pi}{16}.$$

□

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omeđeno tijelo u prostoru, te neka mu je *gustoća* zadana funkcijom $g\colon \Omega \to [0,\infty\rangle$. Dakle, $g(x,y,z)$ je gustoća tijela Ω u točki $(x,y,z) \in \Omega$. *Masu* tijela Ω računamo po formuli:

$$m = \iiint_{\Omega} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Statičke momente tijela u odnosu na ravnine xy, yz i xz, redom, računamo po formulama:

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$M_{xz} = \iiint_{\Omega} y\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Težište (centar mase) tijela je točka (x_T, y_T, z_T) čije koordinate računamo po formulama:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_T = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad z_T = \frac{M_{xy}}{m}.$$

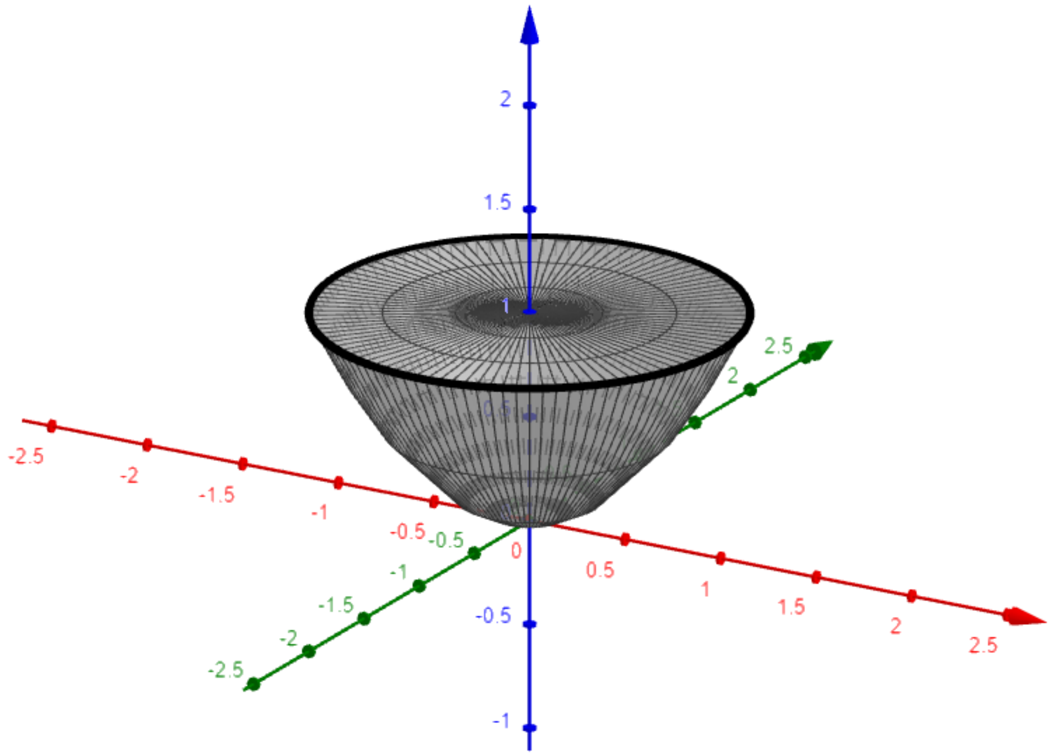
Momente inercije tijela u odnosu na osi x, y i z, redom, računamo po formulama:

$$I_x = \iiint_{\Omega} \big(y^2 + z^2\big)\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$I_y = \iiint_{\Omega} \big(x^2 + z^2\big)\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$I_z = \iiint_{\Omega} \big(x^2 + y^2\big)\cdot g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

U slučaju homogenog tijela možemo pretpostaviti da je $g(x,y,z) = 1$.

Zadatak 3.42. Izračunajte masu tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = 1$, ako mu je gustoća dana formulom $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, a odozgo ravninom $z = 1$ (pogledajte sliku 3.23).



Slika 3.23: Tijelo Ω

Stoga ćemo masu tijela računati pomoću cilindričnih koordinata:

$$m = \iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^1 \rho\,\rho\,\mathrm{d}z$$

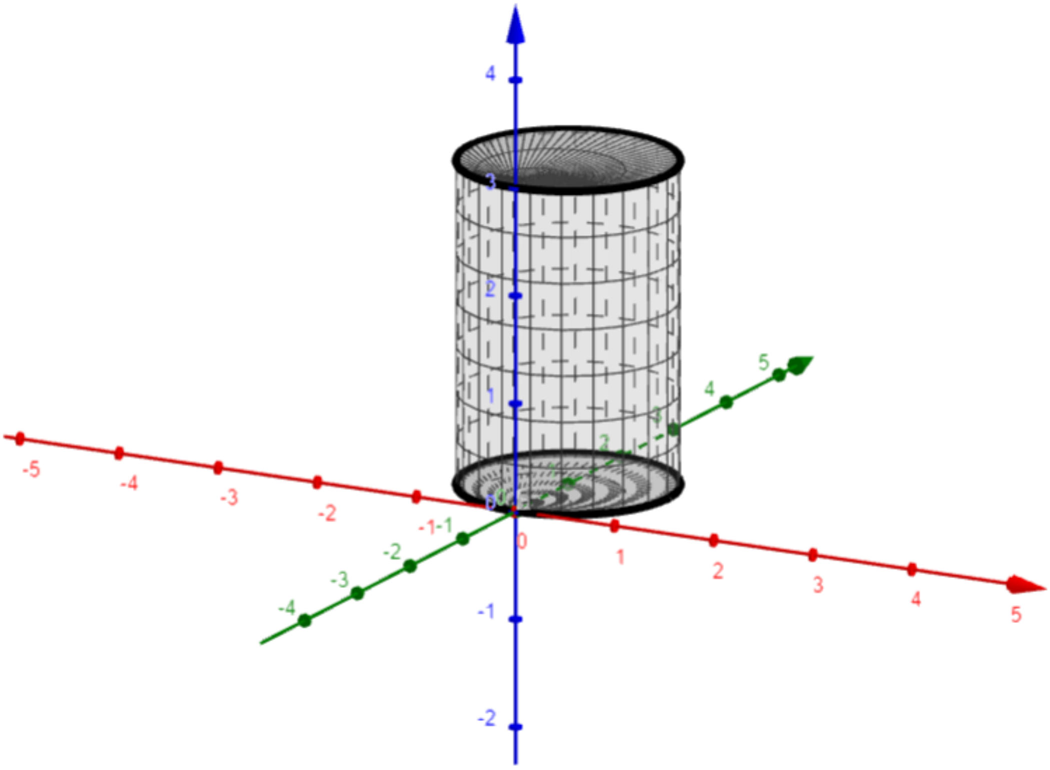
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}.$$

□

Zadatak 3.43. Izračunajte moment inercije s obzirom na z-os tijela omeđenog plohama $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $z = 0$ i $z = 3$, ako mu je gustoća dana formulom $g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je kružni cilindar visine 3 s bazom koja je krug radijusa 1 sa središtem u točki $(0, 1)$ (pogledajte sliku 3.24).



Slika 3.24: Tijelo Ω

Moment inercije tijela obzirom na os z ćemo računati pomoću cilindričnih koordinata:

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint_\Omega (x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^2 \mathrm{d}\rho \int_0^3 \mathrm{d}z = 3\int_0^\pi \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\,\frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8\underbrace{\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{t=\cos\varphi,\ dt=-\sin\varphi d\varphi}
\end{aligned}
$$

$$= 8\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-t^2)}_{parnafunkcija} \,\mathrm{d}t = 8\cdot 2\int_{0}^{1}(1-t^2)\mathrm{d}t$$

$$= 16\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = 16\Big(1-\frac{1}{3}\Big) = \frac{32}{3}.$$

□

Zadatak 3.44. Izračunajte moment inercije homogene kugle $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ s obzirom na z-os.

Rješenje: Tijelo Ω je kugla sa središtem u ishodištu radijusa $r = 2$ i stoga ćemo za računanje momenta inercije u odnosu na os z koristiti sferne koordinate:

$$I_z = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\int_0^2 r^2\sin^2\vartheta\, r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^2 r^4\mathrm{d}r = 2\pi\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^2\underbrace{\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{t=\cos\vartheta,\, dt=-\sin\vartheta d\vartheta}$$

$$= \frac{64\pi}{5}\,\frac{4}{3} = \frac{256\pi}{15}.$$

□

Poglavlje 4

Skalarna i vektorska polja

4.1 Osnovni pojmovi

Neka je Ω područje u $\mathbb{R}^3$. Funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zovemo *skalarnim poljem*, npr. $f(x, y, z) = xy + z$.

Neka je Ω područje u $\mathbb{R}^3$. Funkciju $\vec{a}\colon \Omega \to X_0(E)$ zovemo *vektorskim poljem*.

Dakle, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, gdje su $a_x, a_y, a_z\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Npr. $\vec{a}(x, y, z) = xyz\vec{i} + (x - y)\vec{j} + \vec{k}$. Ovdje je $a_x(x, y, z) = xyz$, $a_y(x, y, z) = x - y$, $a_z(x, y, z) = 1$.

Gradijent skalarnog polja f je vektorsko polje $\operatorname{grad} f\colon \Omega \to X_0(E)$ definirano formulom

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Primjer. Funkciji $f(x, y, z) = xy + z$ odredimo $\operatorname{grad} f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x, \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \Rightarrow \operatorname{grad} f = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$$

Divergencija vektorskog polja $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ je skalarno polje $\operatorname{div} \vec{a}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Primjer. Funkciji $\vec{a} = x^2y\vec{i} + z\vec{j} + z^3\vec{k}$ odredimo $\operatorname{div} \vec{a}$.

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = 2yx, \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0, \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3z^2 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 2xy + 3z^2$$

Zadatak 4.1. Zadano je skalarno polje $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ i točka $T(2, 1, 1)$.

- Izračunajte $(\operatorname{grad} u)|_T$
- Nađite skup točaka u prostoru u kojima je $\operatorname{grad} u$ okomit na os z.

Rješenje:

- $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. Računamo parcijalne derivacije: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$, pa je

$$\operatorname{grad} u = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}, \text{ te je}$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} u)|_{T(2,1,1)} &= (3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1)\vec{i} + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1)\vec{j} + (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1)\vec{k} \\ &= 9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\end{aligned}$$

- $\operatorname{grad} u \perp \vec{k} \Rightarrow \operatorname{grad} u \cdot \vec{k} = 0$. Uvrštavanjem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ dobivamo redom

$$\begin{aligned}(3x^2 - 3yz) \cdot 0 + (3y^2 - 3xz) \cdot 0 + (3z^2 - 3xy) \cdot 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 3z^2 - 3xy = 0 \\ \Leftrightarrow z^2 = xy\end{aligned}$$

pa je rješenje skup $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy\}$.

$\square$

Zadatak 4.2. Izračunajte div $\vec{a}$ u točki $A(1, 1, 1)$, ako je $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + e^x y\vec{j} - \vec{k}$.

Rješenje: $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 4xy + e^x + 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{a}|_{A(1,1,1)} = 4 + e.$ $\square$

Zadatak 4.3. Nađite div $(\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2))$.

Rješenje: $\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2) = 2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$,
$\operatorname{div}\,(2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}) = 2+2+2=6.$ $\square$

Derivacija skalarnog polja f u smjeru (jediničnog) vektora $\vec{u}$ u točki P_0:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\right)\Big|_{P_0} = (\operatorname{grad} f\cdot\vec{u})|_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}u_x+\frac{\partial f}{\partial y}u_y+\frac{\partial f}{\partial z}u_z\right)\Big|_{P_0}.$$

Zadatak 4.4. Zadano je skalarno polje $\varphi(x,y,z)=3x^2-4yz$. vektor $\vec{s}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ i točka $T(3,-2,1)$. Nađite usmjerenu derivaciju skalarnog polja φ u smjeru $\vec{s}$ u točki T.

Rješenje: $\vec{s}$ nije jedinični vektor, pa ga prvo normiramo:

$$\vec{s_0}=\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}),$$

a dalje računamo

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}\right)\Big|_T=(\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{s_0})\Big|_T=\left(\frac{1}{\sqrt{14}}(6x\vec{i}-4z\vec{j}-4y\vec{k})(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})\right)\Big|_T$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}(12x+12z-4y)\Big|_{T(3,-2,1)}=\frac{1}{\sqrt{14}}(12\cdot3+12\cdot1-4\cdot(-2))=\frac{56}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{56\sqrt{14}}{14}=4\sqrt{14}.$$

$\square$

Rotacija vektorskog polja $\vec{a}$ je vektorsko polje $\operatorname{rot}\vec{a}\colon\Omega\to X_0(E)$ definirano formulom

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Primjer. $\vec{a}=xy\vec{i}+z\sin x\vec{k}$, tj. $a_x=xy, a_y=0, a_z=z\sin(x)$

$$\Rightarrow\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ xy&0&z\sin(x)\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(z\sin x)}{\partial y}-\frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(xy)}{\partial z}-\frac{\partial(z\sin x)}{\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial xy}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow\operatorname{rot}\vec{a}=0\vec{i}-z\cos(x)\vec{j}-x\vec{k}=-z\cos(x)\vec{j}-x\vec{k}.$$

Zadatak 4.5. Odredite kut između rotacije vektorskog polja $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ u točkama $A(-1, 2, 3)$ i $B(19, -4, 9)$.

Rješenje:

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix} = (0 - 2z)\vec{i} + (0 - 2x)\vec{j} + (0 - 2y)\vec{k} =$$

$$= -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}$$

$\operatorname{rot} \vec{a}|_{A(-1,2,3)} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = \vec{a_1}$
$\operatorname{rot} \vec{a}|_{B(19,-4,9)} = -18\vec{i} - 38\vec{j} + 8\vec{k} = \vec{b_1}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a_1} \cdot \vec{b_1}}{|\vec{a_1}| \cdot |\vec{b_1}|} = \frac{108 - 76 - 32}{\text{nešto} \neq 0} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

Vektorsko polje $\vec{a}$ je *potencijalno* ako postoji skalarno polje φ takvo da je $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$. φ je *potencijal* od $\vec{a}$, a budući da mora mora vrijediti $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_y$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = a_z$, može se računati kao

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} a_x(t, y, z)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x_0, t, z)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x_0, y_0, t)dt + C,$$

gdje je (x_0, y_0, z_0) bilo koja točka u domeni funkcije.

Karakterizacija potencijalnog polja: vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Vektorsko polje $\vec{a}$ je *solenoidalno* ako postoji vektorsko polje $\vec{b}$ takvo da je $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$.

Karakterizacija solenoidalnog polja: vektorsko polje $\vec{a}$ je solenoidalno $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.

Zadatak 4.6. Dano je vektorsko polje $\vec{A} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$. Pokažite da je polje potencijalno i nađite njegov potencijal $\varphi(x, y, z)$.

Rješenje:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = (1 - 1)\vec{i} + (1 - 1)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{A}$ je potencijalno polje.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} a_x(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} a_y(x_0,t,z)dt + \int_{z_0}^{z} a_z(x_0,y_0,t)dt \\
&= \int_{x_0}^{x}(y+z)dt + \int_{y_0}^{y}(x_0+z)dt + \int_{z_0}^{z}(x_0+y_0)dt \\
&= (y+z)(x-x_0) + (x_0+z)(y-y_0) + (x_0+y_0)(z-z_0)
\end{aligned}
$$

$$
= xy + xz - x_0y - x_0z + x_0y - x_0y_0 + yz - y_0z + x_0z - x_0z_0 + y_0z - y_0z_0 =
$$

$$
= xy + xz + yz - x_0y_0 - x_0z_0 - y_0z_0
$$

$$
= xy + xz + yz + C
$$

Provjera:

$$
\vec{A} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.
$$

□

Zadatak 4.7. Odredite konstante a, b, c tako da polje

$$
\vec{A} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}
$$

bude potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje:

$$
\vec{0} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} =
$$

$$
= (c+1)\vec{i} + (a-4)\vec{j} + (b-2)\vec{k}
$$

$$
\Rightarrow c = -1, a = 4, b = 2
$$

Dakle, $\vec{A} = (x+2y+4z)\vec{i} + (2x-3y-z)\vec{j} + (4x-y+2z)\vec{k}$, a potencijal mu možemo izračunati po formuli, uzimajući pritom $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$:

$$
\varphi(x,y,z) = \int_0^x (t+2y+4z)dt + \int_0^y (-3t-z)dt + \int_0^z 2tdt =
$$

$$
= \frac{x^2}{2} + x(2y+4z) - \frac{3y^2}{2} - zy + z^2 + C
$$

$$
\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz
$$

□

Zadatak 4.8. Ispitajte je li polje $\vec{v} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ solenoidalno.

Rješenje: div $\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$, pa zaključujemo da je polje solenoidalno. $\square$

Zadatak 4.9. Dano je vektorsko polje $\vec{a} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Pokažite da je polje potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje: Treba provjeriti je li $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$, tj. $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$.
Računamo $a_x = 2xy \Rightarrow \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x$, $a_y = x^2 \Rightarrow \frac{\partial a_y}{\partial x} = 2x$, pa je $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, te je $\vec{a}$ potencijalno polje.
Tražimo potencijal, tj. funkciju $u(x,y)$ takvu da je $\operatorname{grad} u = \vec{a}$. Iz $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy \Big/ \displaystyle\int dx$ dobivamo $u(x,y) = x^2y + \varphi(y)$, gdje je φ bilo koja funkcija koja ovisi samo o y.Deriviranjem parcijalno po y dobivamo $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow u(x,y) = x^2y + C$. $\square$

Zadatak 4.10. Odredite funkciju $f(x)$ tako da polje

$$\vec{A}(x,y,z) = f(x)\vec{i} + \frac{2xy}{1+x^2}f(x)\vec{j} - \frac{3z}{1+x^2}\vec{k}$$

bude solenoidalno uz uvjet $f(1) = \frac{3}{2}$.

Rješenje: div $\vec{A} = 0 \Rightarrow f'(x) + \frac{2x}{1+x^2}f(x) - \frac{3}{1+x^2} = 0$, pa treba riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{3}{1+x^2}.$$

Ona je oblika $y' + \widetilde{f}(x)y = g(x)$, tj. to je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda, čije rješenje možemo dobiti pomoću formule

$$y = e^{-\int \widetilde{f}(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int \widetilde{f}(x)dx} \cdot g(x)\, dx + C\right].$$

Izračunajmo prvo

$$\int \widetilde{f}(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2).$$

Sad lako dobivamo da je

$$y = e^{-\ln(1+x^2)} \cdot \left[\int e^{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{3}{1+x^2}\, dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \left[\int 3\, dx + C \right] = \frac{3x+C}{1+x^2}.$$

Konstantu C određujemo iz dodatnog uvjeta $\frac{3}{2} = f(1) = \frac{3+c}{2} \Rightarrow 3 = 3+C \Rightarrow$ $C = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

$\square$

Zadatak 4.11. Pokažite da je polje $\vec{a} = \vec{i} + (1 + z\cos(zy))\vec{j} + (y\cos(zy))\vec{k}$ potencijalno i odredite njegov potencijal.

Rješenje: $\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 1 + z\cos(zy) & y\cos(zy) \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial (y\cos(zy))}{\partial y} - \frac{\partial(1+z\cos(zy))}{\partial z} \right)$

$$= \vec{i}(\cos(zy) - zy\sin(zy) - \cos(zy) + zy\sin(zy)) = \vec{0}$$

pa zaključujemo da je polje potencijalno.
Tražimo potencijal $u(x, y, z)$, tj. funkciju u takvu da je $\operatorname{grad} u = \vec{a}$, odnosno $\frac{\partial u}{\partial x} = a_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = a_y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = a_z$. Iz $\frac{\partial u}{\partial x} = a_x$ integriranjem po dx dobivamo da je

$$u(x, y, z) = x + \varphi(y, z) \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 + \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y} = 1 + z\cos zy \quad \Big/ \int dy$$
$$\Rightarrow \varphi(y, z) = y + \sin(zy) + \varphi_1(z)$$

gdje je $\varphi_1(z)$ bilo koja funkcija koja ovisi samo o z (a ne o x ni o y). Dakle,

$$u(x, y, z) = x + y + \sin(zy) + \varphi_1(z).$$

Preostaje nam iskoristiti uvjet $\frac{\partial u}{\partial z} = a_z$, stoga deriviramo zadnji dobiveni izraz za u parcijalno po z i dobivamo $\frac{\partial u}{\partial z} = y\cos(zy) + \varphi_1'(z) = y\cos(zy) \Rightarrow$ $\varphi_1'(z) = 0 \Rightarrow \varphi_1(z) = C$. Traženi potencijal je dakle

$$u(x, y, z) = x + y + \sin(zy) + C.$$

$\square$

Zadatak 4.12. Pokažite da je ploha $F(x, y, z) = 0$ ravnina ako i samo ako je polje $\operatorname{grad} F$ konstantno.

Zadatak 4.13. Pokažite da je polje $\vec{v} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$, $a, b, c > 0$ potencijalno. Ako je F potencijal tog polja, pokažite da je skup $F(x, y, z) = 0$ elipsoid ili jedna točka.

Poglavlje 5

Krivuljni integrali

Skalarna i vektorska polja integrirat ćemo po krivuljama u prostoru i ravnini. Neka je Γ krivulja u $\mathbb{R}^3$, te neka je njena parametrizacija $([a,b],\vec{r})$. Parametrizaciju ćemo pisati po komponentama: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Integrale skalarnih polja po krivuljama nazivamo krivuljnim integralima prve vrste, a integrale vektorskih polja krivuljnim integralima druge vrste.

5.1 Krivuljni integrali prve vrste

Za funkciju $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, *krivuljni integral prve vrste funkcije f po krivulji Γ* je

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot |r'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \tag{5.1}$$

Krivuljni integral ne ovisi o parametrizaciji.

Ako je Γ krivulja u $\mathbb{R}^2$ s parametrizacijom $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$, a funkcija f definirana na njoj ($f\colon \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), krivuljni integral od f po Γ računamo analogno:

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \tag{5.2}$$

Krivuljni integrali imaju razne primjene, npr. duljina krivulje Γ jednaka je $l(\Gamma) = \int_\Gamma ds$, a masa krivulje Γ s linijskom gustoćom $\rho\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ jednaka je $m(\Gamma) = \int_\Gamma \rho\, ds$.

Zadatak 5.1. Izračunajte $\int_\Gamma (x^2 + 2y^2)\, ds$ ako je Γ kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje: Općenito, kružnicu $x^2 + y^2 = R^2$ parametriziramo kao $x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t$, pri čemu je $t \in [0, 2\pi]$. Ovdje je onda moguća parametrizacija

$$\begin{aligned} x(t) = \cos t &\Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) = \sin t &\Rightarrow y'(t) = \cos t. \end{aligned}$$

Sada računamo integral po formuli 5.2:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (x^2 + 2y^2)\, ds &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 2\sin^2 t) \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 - \cos 2t}{2}\right) dt \\ &= t\Big|_0^{2\pi} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + \pi = 3\pi. \end{aligned}$$

□

Općenitiju kružnicu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ možemo parametrizirati na sličan način:

$$\begin{aligned} x - x_0 = R\cos t &\Rightarrow x(t) = x_0 + R\cos t \\ y - y_0 = R\sin t &\Rightarrow y(t) = y_0 + R\sin t \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Zadatak 5.2. Izračunajte $\int_\Gamma x^4\, ds$, ako je Γ kružnica $x^2 + y^2 = 2y$.

Rješenje: Jednadžba $x^2 + y^2 = 2y$ ekvivalentna je jednadžbi $x^2 + (y-1)^2 = 1$, koja opisuje kružnicu sa središtem u $(0, 1)$ radijusa 1. Nju možemo parametrizirati kao

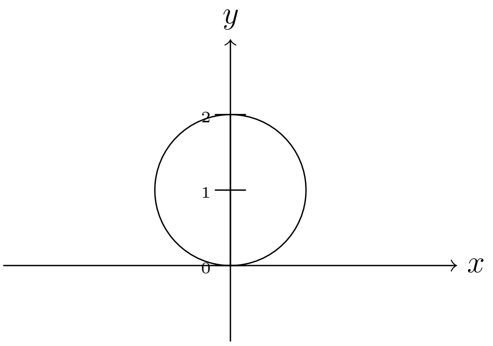
$$\begin{aligned} x(t) = \cos t &\Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) = 1 + \sin t &\Rightarrow y'(t) = \cos t \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Računamo

$$\int_\Gamma x^4\,ds = \int_0^{2\pi} \cos^4 t\cdot\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}}{4}\,dt = \left(\frac{3}{8}t+\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\sin 4t}{32}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{3}{8}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}.$$

□

Osim na ovaj način, kružnicu $x^2+y^2=2y$ mogli smo parametrizirati i u polarnim koordinatama:



Slika 5.1: Kružnica $x^2+y^2=2y$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r^2 = 2r\sin\varphi$$
$$\Rightarrow r = 2\sin\varphi$$

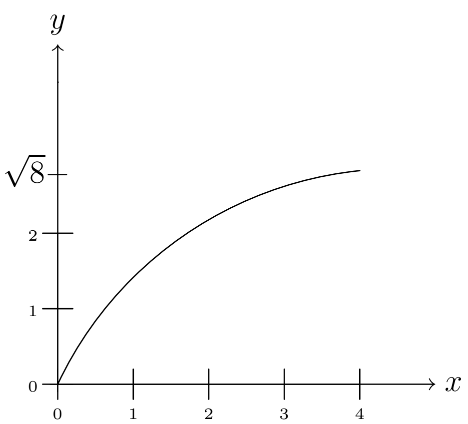
Iz toga dobivamo sljedeću parametrizaciju:

$$x(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = 2\sin^2\varphi$$
$$\varphi\in[0,\pi]$$

Integral u zadatku 5.2 izračunat po ovoj parametrizaciji bit će jednak kao i po onoj korištenoj u rješenju.

Zadatak 5.3. Izračunajte $\int_\Gamma y\,ds$, gdje je Γ luk parabole $x=\frac{y^2}{2}$ od točke $A(0,0)$ do točke $B(4,\sqrt{8})$.

Rješenje:



Slika 5.2: Dio parabole $x=\frac{y^2}{2}$ od $(0,0)$ do $(4,\sqrt{8})$.

$y>0 \Rightarrow y=\sqrt{2x}$ pa lako parametriziramo krivulju Γ:

$$x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$$
$$y(t) = \sqrt{2t} \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2t}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2t}}$$
$$t\in[0,4]$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\,ds &= \int_0^4 \sqrt{2t}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2t}}\,dt = \int_0^4 \sqrt{2t+1}\,dt = \\ &= \left\{\begin{array}{l} u=\sqrt{2t+1} \\ du=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}dt \Rightarrow dt = udu \\ 0\mapsto 1, 4\mapsto 3 \end{array}\right\} = \\ &= \int_1^3 u\cdot u\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^3 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.\end{aligned}$$

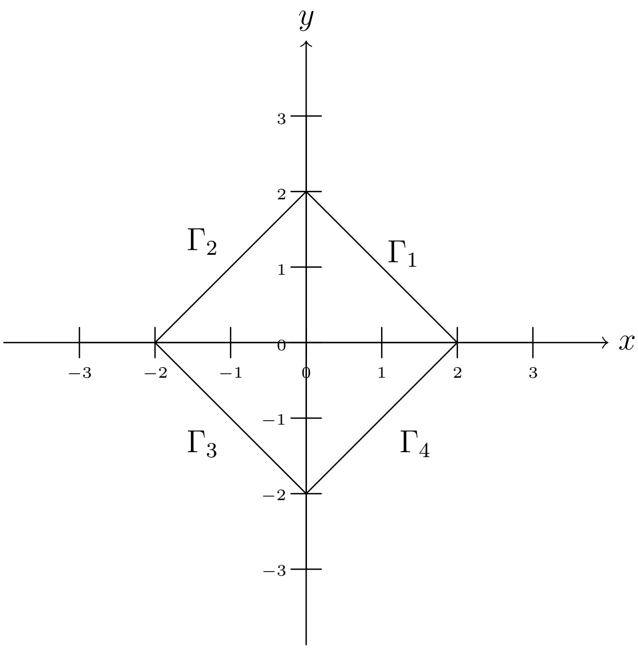
□

Zadatak 5.4. (DZ) Izračunajte $\int_\Gamma \frac{y}{\sqrt{x}}\,ds$, ako je Γ luk polukubne parabole $y^2=\frac{4}{9}x^3$ od točke $A(3,2\sqrt{3})$ do točke $B(8,\frac{32}{3}\sqrt{2})$.

Rješenje: Zadaća ($\frac{2152}{45}$). □

Zadatak 5.5. Izračunajte $\int_\Gamma xy\,ds$, ako je Γ opseg kvadrata $|x|+|y|=2$.

Rješenje:



Slika 5.3: $\Gamma ... |x|+|y|=2$.

Ovisno o predznacima x i y dobivamo 4 dijela kvadrata Γ:
$\Gamma_1 \ldots x\geq 0, y\geq 0$
$\Rightarrow x+y=2$
$\Rightarrow y=2-x$
$\Gamma_2 \ldots x<0, y\geq 0$
$\Rightarrow -x+y=2$
$\Rightarrow y=2+x$
$\Gamma_3 \ldots x<0, y<0$
$\Rightarrow -x-y=2$
$\Rightarrow y=-x-2$
$\Gamma_4 \ldots x\geq 0, y<0$
$\Rightarrow x-y=2$
$\Rightarrow y=x-2$.

$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$
$\Rightarrow \int_\Gamma f\,ds = \int_{\Gamma_1} f\,ds +$

$\int_{\Gamma_2} f\,ds + \int_{\Gamma_3} f\,ds + \int_{\Gamma_4} f\,ds$ budući da je i krivuljni integral prve vrste aditivan po području integracije.

Dakle, potrebno je parametrizirati svaku od 4 stranice kvadrata te po svakoj posebno izračunati zadani integral, a onda to pozbrajati.

Budući da smo odredili jednadžbe svih pravaca na kojima leže stranice kvadrata, parametrizacije lako dobivamo:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \ldots \quad & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = 2 - t \Rightarrow y'(t) = -1 \\ & t \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Sad računamo

$$\int_{\Gamma_1} f\,ds = \int_0^2 t(2-t)\sqrt{1+1}\,dt = \sqrt{2}\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \sqrt{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Analogno dobivamo ostale parametrizacije te računamo po njima:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 \ldots \quad & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = t + 2 \Rightarrow y'(t) = 1 \\ & t \in [-2, 0]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} f\,ds = \int_{-2}^0 t(t+2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^3}{3} + t^2\right)\Big|_{-2}^0 = \sqrt{2}\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 \ldots \quad & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = -t - 2 \Rightarrow y'(t) = -1 \\ & t \in [-2, 0]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f\,ds = \int_{-2}^0 t(-t-2)\sqrt{2}\,dt = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4 \ldots \quad & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = t - 2 \Rightarrow y'(t) = 1 \\ & t \in [0, 2]. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_4} f\,ds = \int_0^2 t(t-2)\sqrt{2}\,dt = -\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

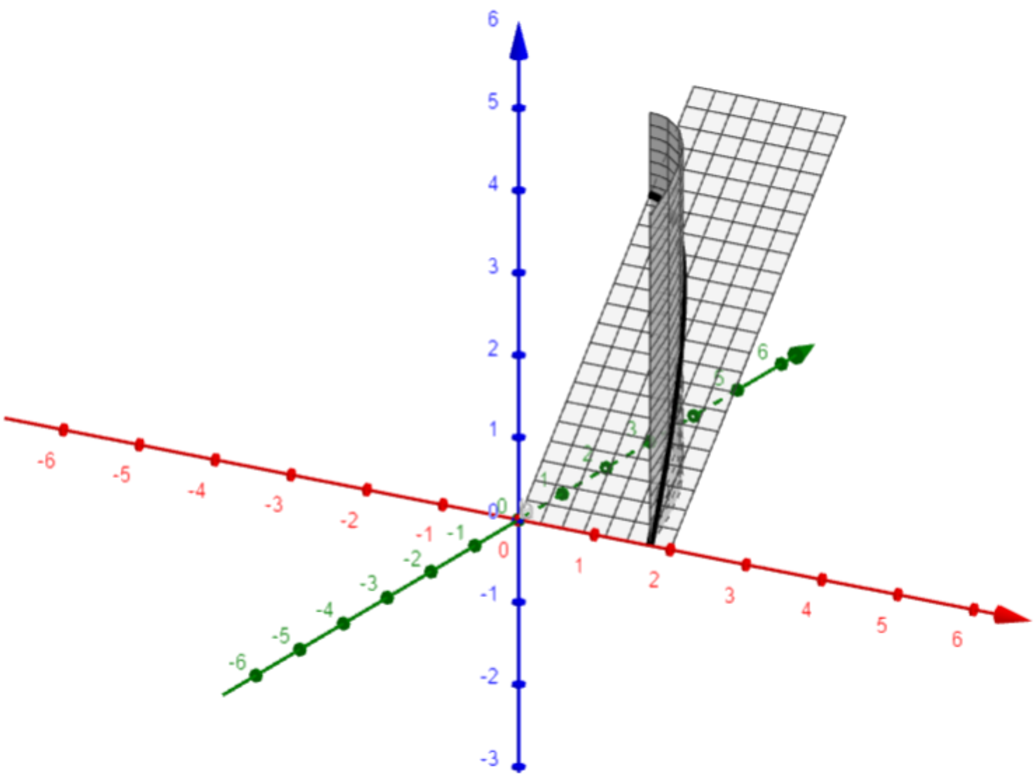
iz čega onda slijedi

$$\int_\Gamma xy\,ds = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = 0.$$

$\square$

Zadatak 5.6. Izračunajte $\int_\Gamma x\,ds$, ako je Γ presječnica ploha $y = 3 - x^2$ i $z = y$ u prvom oktantu. Skicirajte krivulju.

Rješenje: Krivulja Γ je presječnica paraboličkog cilindra $y = 3 - x^2$ i ravnine $z = y$ u 1. oktantu (pogledajte sliku 5.4).



Slika 5.4: Krivulja Γ

Parametrizirajmo krivulju:

$$\Gamma \ldots \quad \begin{aligned} & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = 3 - t^2 \Rightarrow y'(t) = -2t \\ & z(t) = y(t) = 3 - t^2 \Rightarrow z'(t) = -2t \\ & t \in [0, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

Sada računamo

$$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+4t^2+4t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{1+8t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u = 1+8t^2 \\ du = 16t\mathrm{d}t \Rightarrow t\mathrm{d}t = \frac{du}{16} \\ 0 \mapsto 1, \sqrt{3} \mapsto 25 \end{array}\right\} = \frac{1}{16}\int_1^{25} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\left.\frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}}\right|_1^{25}$$

$$= \frac{1}{24}(125-1) = \frac{124}{24} = \frac{31}{6}.$$

□

Zadatak 5.7. Izračunajte $\displaystyle\int_\Gamma \frac{y}{x+3z}\,ds$, ako je Γ luk krivulje $x = t, y = \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, z = \dfrac{t^3}{3}$ od točke $A(0,0,0)$ do $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$.

Rješenje: Zadaća $(\frac{1}{\sqrt{2}})$. □

Zadatak 5.8. Izračunajte duljinu luka kardioide $r = 1+\cos\varphi$.

Rješenje: Kardioidu Γ ćemo parametrizirati pomoću polarnih koordinata:

$$\begin{aligned} \Gamma\ldots \quad & x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \Rightarrow x'(t) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ & y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \Rightarrow y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Duljinu kardioide računamo po formuli:

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{\underbrace{1+\cos\varphi}_{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}}\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi - 2\int_\pi^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\cdot 2\cdot \sin\left.\frac{\varphi}{2}\right|_0^{\pi} - 4\cdot\sin\left.\frac{\varphi}{2}\right|_\pi^{2\pi} = 4 - 4\cdot(0-1) = 4+4 = 8.$$

□

Zadatak 5.9. Izračunajte $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, gdje je Γ helikoida $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$ od $A(1,0,0)$ do $B(0,1,\frac{\pi}{2})$.

Rješenje: Raspišimo parametrizaciju helikoide Γ:

$$\begin{aligned}\Gamma \ldots \quad & x(t) = \cos t \Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ & y(t) = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t \\ & z(t) = t \Rightarrow z'(t) = 1 \\ & t \in [0, \frac{\pi}{2}].\end{aligned}$$

Sada računamo integral:

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+t^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2}\Big(t + \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{24}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{24}(12+\pi^2).$$

□

Zadatak 5.10. Izračunajte duljinu luka krivulje Γ od točke $A(0,0,0)$ do točke $B(3,3,2)$, gdje je Γ presjek $y = \frac{x^2}{3}$ i $z = \frac{2}{9}xy$.

Rješenje: Parametrizirajmo krivulju Γ:

$$\begin{aligned}\Gamma \ldots \quad & x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\ & y(t) = \frac{t^2}{3} \Rightarrow y'(t) = \frac{2}{3}t \\ & z(t) = \frac{2}{9}t \cdot \frac{t^2}{3} = \frac{2t^3}{27} \Rightarrow z'(t) = \frac{2t^2}{9} \\ & t \in [0,3].\end{aligned}$$

Duljina luka krivulje Γ iznosi:

$$l(\Gamma) = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4}\,\mathrm{d}t == \int_0^3 \sqrt{\Big(1 + \frac{2t^2}{9}\Big)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^3 \Big(1 + \frac{2t^2}{9}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big(t + \frac{2t^3}{27}\Big)\Big|_0^3 = 3 + 2 = 5.$$

□

Zadatak 5.11. Izračunajte $\int_\Gamma e^{x+y-z}\,ds$, ako je Γ dio pravca $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ od točke $A(0,1,0)$ do $B(2,3,3)$.

Rješenje: Napišimo parametrizaciju krivulje Γ:

$$\begin{aligned}\Gamma\ldots\quad & x(t)=2t\Rightarrow x'(t)=2\\ & y(t)=1+2t\Rightarrow y'(t)=2\\ & z(t)=3t\Rightarrow z'(t)=3\\ & t\in[0,1].\end{aligned}$$

Sada odredimo integral:

$$\int_\Gamma e^{x+y-z}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 e^{2t+1+2t-3t}\sqrt{4+4+9}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{17}\int_0^1 e^{t+1}\mathrm{d}t=\sqrt{17}e^{t+1}\Big|_0^1=\sqrt{17}(e^2-e).$$

□

Zadatak 5.12. Izračunajte $\int_\Gamma xy\,ds$, ako je Γ dio krivulje nastale presjekom cilindra $x^2+y^2=1$ i ravnine $z=y$ od $A(1,0,0)$ do $B(0,1,1)$.

Rješenje: Parametrizirajmo krivulju Γ:

$$\begin{aligned}\Gamma\ldots\quad & x(t)=\cos t\Rightarrow x'(t)=-\sin t\\ & y(t)=\sin t\Rightarrow y'(t)=\cos t\\ & z(t)=y(t)=\sin t\Rightarrow z'(t)=\cos t\\ & t\in[0,\tfrac{\pi}{2}].\end{aligned}$$

Sada računamo integral:

$$\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u=1+\cos^2 t\\ du=2\cos t(-\sin t)\mathrm{d}t\\ 0\mapsto 2,\ \frac{\pi}{2}\mapsto 1\end{array}\right\}=-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\cdot\frac{u\sqrt{u}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

□

Zadatak 5.13. Izračunajte $\int_\Gamma y\,ds$, ako je Γ dio presječne krivulje paraboloida $z = 6 - x^2 - y^2$ i ravnine $z = 2$ koji se nalazi u prvom oktantu.

Rješenje: Zadaća (4). □

Zadatak 5.14. Izračunajte duljinu i masu žice u obliku logaritamske spirale $r = e^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ od točke $A(1,0)$ do točke $B(e,0)$, ako je linijska gustoća $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

Rješenje: Znamo da je $x^2+y^2 = r^2 = e^{\frac{\varphi}{\pi}}$, što ćemo često koristiti u računima koji slijede. Logaritamsku spiralu Γ ćemo parametrizirati tako da u vezu između Kartezijevih i polarnih koordinata uvrstimo jednadžbu spirale:

$$\Gamma \ldots \quad \begin{aligned} & x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \Rightarrow x(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{2\pi}}\cos\varphi \\ & y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \Rightarrow y(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{2\pi}}\sin\varphi \\ & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Interval parametrizacije slijedi iz činjenice da uvrštavanjem $\varphi = 0$ u parametrizaciju dolazimo do točke A, dok uvrštavajući $\varphi = 2\pi$ stižemo do točke B. Koristeći izvod iz rješenja zadatka u kojem smo računali duljinu kardioide imamo da je:

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 = e^{\frac{\varphi}{\pi}} + \frac{1}{4\pi^2}\cdot e^{\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Odredimo duljinu spirale:

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{\frac{\varphi}{\pi}} + \frac{1}{4\pi^2}\cdot e^{\frac{\varphi}{\pi}}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{\frac{\varphi}{\pi}}}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\varphi}{2\pi}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2\pi}}\cdot e^{\frac{\varphi}{2\pi}}\Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{4\pi^2+1}{4\pi^2}}(e-1) = \sqrt{1+4\pi^2}(e-1). \end{aligned}$$

Sada izračunajmo masu spirale:

$$m = \int_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} e^{\frac{\varphi}{\pi}}\cdot e^{\frac{\varphi}{2\pi}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\varphi}{2\pi}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{\frac{3\varphi}{2\pi}}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{3}\,(e^3-1).$$

□

5.2 Krivuljni integrali druge vrste

Neka je $\vec{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$ orijentirana krivulja, a $\vec{r}([a,b], \vec{\Gamma})$ njena parametrizacija ($\vec{r}$: $[a,b] \to \vec{\Gamma}$). Kad integriramo vektorsko polje $\vec{a} : \vec{\Gamma} \to X_0(E)$ po krivulji $\vec{\Gamma}$, uobičajeno ga zapišemo po komponentama $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ($a_x, a_y, a_z : \vec{\Gamma} \to \mathbb{R}$).
Parametrizaciju krivulje slično pišemo kao $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$.

Krivuljni integral 2. vrste vektorskog polja $\vec{a}$ po krivulji $\vec{\Gamma}$, u oznaci $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$ ili $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$, računa se po sljedećoj formuli

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{a} \cdot \vec{r}\,' dt,$$

gdje je s $\vec{r}\,'$ označena derivacija $\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$, odnosno po formuli

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b (a_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)$$

$$+ a_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t))dt.$$

Ako integriramo vektorsko polje $\vec{a}$: $\vec{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2 \to X_0(E)$ definirano na krivulji u ravnini, analogno pišemo $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ (a_x, a_y: $\vec{\Gamma} \to \mathbb{R}$) te računamo

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_a^b (a_x(x(t), y(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t))y'(t))\, dt.$$

Zadatak 5.15. Izračunajte $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}$ po luku parabole $y = x^2$ od točke $A(0,0)$ do točke $B(1,1)$, ako je $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$.

Rješenje: Budući da je parabola zadana funkcijskom ovisnošću o x, lako je parametriziramo na sljedeći način:

$$x(t) = t \Rightarrow x'(t) = 1$$
$$y(t) = t^2 \Rightarrow y'(t) = 2t,$$

pri čemu je $t \in [0,1]$ (očitavamo iz x-koordinata točaka A i B). Zadano vektorsko polje ima komponente $a_x(x,y) = y^2, a_y(x,y) = x^2$. Sada lako računamo integral

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}} y^2\, dx + x^2\, dy = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + t^2 \cdot 2t) dt = \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

□

Zadatak 5.16. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} z\, dx + x\, dy + y\, dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ zadana parametrizacijom $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3, t \in [0,1]$.

Rješenje: Budući da nam je parametrizacija već dana, moramo samo izračunati derivacije:

$$\begin{aligned} x(t) = t &\Rightarrow x'(t) = 1 \\ y(t) = t^2 &\Rightarrow y'(t) = 2t \\ z(t) = t^3 &\Rightarrow z'(t) = 3t^2. \end{aligned}$$

Računamo integral

$$\int_{\vec{\Gamma}} z\, dx + x\, dy + y\, dz = \int_0^1 \left(t^3 \cdot 1 + t \cdot 2t + t^2 \cdot 3t^2 \right) dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{91}{60}.$$

□

Zadatak 5.17. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} -yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ luk helikoidne spirale zadane parametrizacijom $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Rješenje: Računamo derivacije

$$\begin{aligned} x(t) = \cos t &\Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) = \sin t &\Rightarrow y'(t) = \cos t \\ z(t) = t &\Rightarrow z'(t) = 1, \end{aligned}$$

a zatim i integral

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} -yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cdot t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot t\cdot\cos t+\cos t\cdot\sin t\cdot 1)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} \big(t\sin^2 t+t\cos^2 t+\sin t\cos t\big)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} \left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt = \left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t)\right)\Big|_0^{2\pi}\\
&= \frac{4\pi^2}{2}-\frac{1}{4}(\cos 4\pi-\cos 0) = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 5.18. Izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy-y\,dx$, ako je $\vec{\Gamma}$ zadana parametrizacijom

$$x(t)=\frac{3t}{1+t^3},\ y(t)=\frac{3t^2}{1+t^3},\ \ t\in[0,1].$$

Rješenje: Računamo derivacije

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{3\cdot(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\\
y'(t) &= \frac{6t\cdot(1+t^3)-3t^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2},
\end{aligned}$$

te integral

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\Gamma}} x\,dy-y\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{3t}{1+t^3}\cdot\frac{6t-3t^4}{(1+t^3)^2}-\frac{3t^2}{1+t^3}\cdot\frac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\right)dt\\
&= \int_0^1 \frac{18t^2-9t^5-9t^2+18t^5}{(1+t^3)^3}\,dt = \int_0^1 \frac{9t^2+9t^5}{(1+t^3)^3}\,dt\\
&= 9\int_0^1 \frac{t^2(1+t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = 9\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \left\{\begin{array}{c} u=1+t^3\\ du=3t^2dt\\ 0\mapsto 1, 1\mapsto 2\end{array}\right\}\\
&= 3\int_1^2 \frac{du}{u^2} = 3\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2 = 3\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

Često je potrebno parametrizirati spojnicu dviju točaka u prostoru. Neka su to točke $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$. Već znamo da pravac kroz A i B ima (kanonsku) jednadžbu

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

Lako dobivamo i parametarsku jednadžbu pravca

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{array}\right\} \text{ parametarska jednadžba pravca}$$

Sada je za parametrizaciju spojnice A i B potrebno još samo primijetiti da se uvrštavanjem $t = 0$ dobiva točka $A(x_1, y_1, z_1)$, a uvrštavanjem $t = 1$ točka $B(x_2, y_2, z_2)$. Dakle, parametrizacija spojnice je

$$\begin{array}{l} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \\ t \in [0, 1] \end{array}$$

Zadatak 5.19. Izračunajte $\displaystyle\int_{\vec{\Gamma}} y\,dx + (x + z)\,dy + (2z + y)\,dz$, ako je $\vec{\Gamma}$ spojnica točaka $A(1, 0, 1)$ i $B(0, 2, 2)$.

Rješenje: Parametrizirajmo $\vec{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t(0 - 1) = 1 - t \Rightarrow x'(t) = -1 \\ y(t) &= 0 + t(2 - 0) = 2t \Rightarrow y'(t) = 2 \\ z(t) &= 1 + t(2 - 1) = 1 + t \Rightarrow z'(t) = 1 \\ t &\in [0, 1] \end{aligned}$$

Zadani integral je onda jednak

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2t \cdot (-1) + (1 - t + 1 + t) \cdot 2 + (2 + 2t + 2t) \cdot 1)\,dt \\ &= \int_0^1 (-2t + 4 + 2 + 4t)dt = \int_0^1 (2t + 6)dt = (t^2 + 6t)\Big|_0^1 = 7 \end{aligned}$$

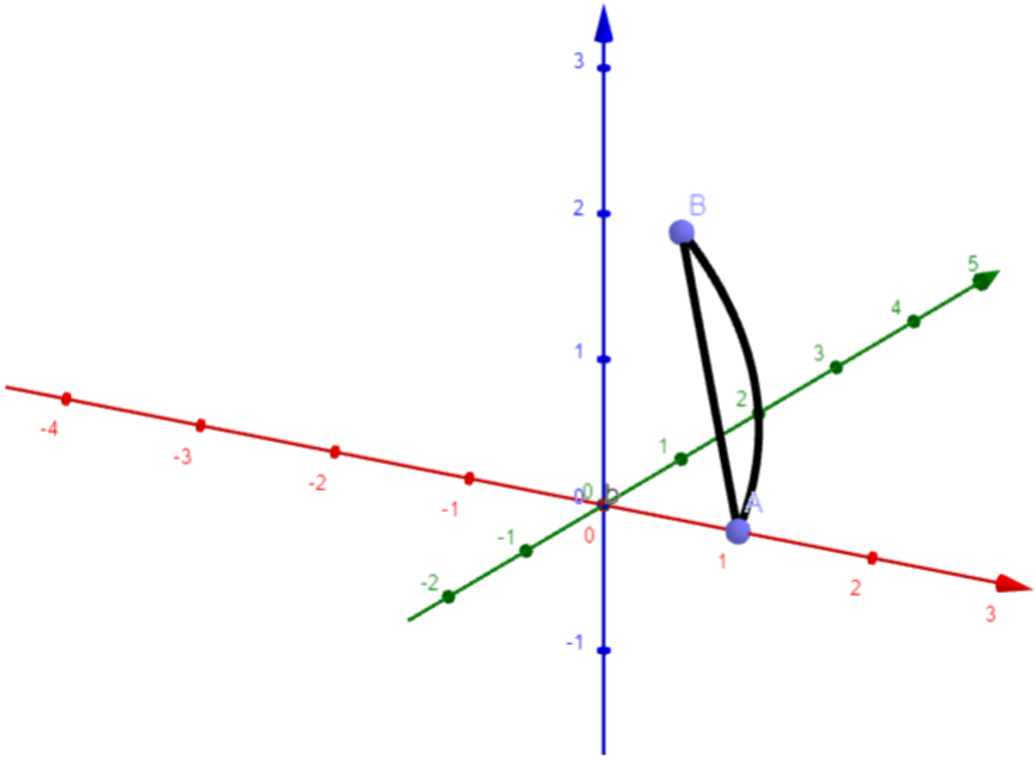
□

Zadatak 5.20. Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

ako je $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$, gdje je $\vec{\Gamma}_1$ luk helikoidne spirale $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$ za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a $\vec{\Gamma}_2$ je spojnica točaka $A(0, 1, \frac{\pi}{2})$ i $B(1, 0, 0)$. Skicirajte krivulju.

Rješenje: Budući da je $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$ vrijedi



Slika 5.5: Krivulja $\vec{\Gamma}$

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Parametrizacija krivulje $\vec{\Gamma}_1$ je dana sa:

$$\begin{aligned}
&x(t) = \cos t \Rightarrow x'(t) = -\sin t \\
&y(t) = \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t \\
&z(t) = t \Rightarrow z'(t) = 1 \\
&\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].
\end{aligned}$$

Odredimo

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_1} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t + 3)(-\sin t) + (\sin t - 1)\cos t + (2t+2)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t\cos t - 3\sin t + \sin t\cos t - \cos t + 2t + 2)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\sin t - \cos t + 2t + 2)\mathrm{d}t = (3\cos t - \sin t + t^2 + 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (3\cdot 0 - 1 + \frac{\pi^2}{4} + \pi) - (3\cdot 1 - 0 + 0) = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4.$$

Napišimo parametrizaciju spojnice $\vec{\Gamma}_2$:

$$\begin{aligned}
&x(t) = 0 + t(1-0) = t \Rightarrow x'(t) = 1 \\
&y(t) = 1 + t(0-1) = 1 - t \Rightarrow y'(t) = -1 \\
&z(t) = \frac{\pi}{2} + t(0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t \Rightarrow z'(t) = -\frac{\pi}{2} \\
&\quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Sada računamo:

$$\int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{\Gamma}_2} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \Big[(t+3)\cdot 1 + (1-t-1)\cdot(-1) + (\pi - \pi t + 2)\cdot\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \Big(2t + 3 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}t - \pi\Big)\mathrm{d}t = \Big(t^2 + 3t - \frac{\pi^2}{2}t + \frac{\pi^2}{2}\frac{t^2}{2} - \pi t\Big)\Big|_0^1$$

$$= 1 + 3 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \pi = -\frac{\pi^2}{4} - \pi + 4.$$

Rješenje zadatka je:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+3)\mathrm{d}x + (y-1)\mathrm{d}y + (2z+2)\mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4 - \frac{\pi^2}{4} - \pi + 4 = 0.$$

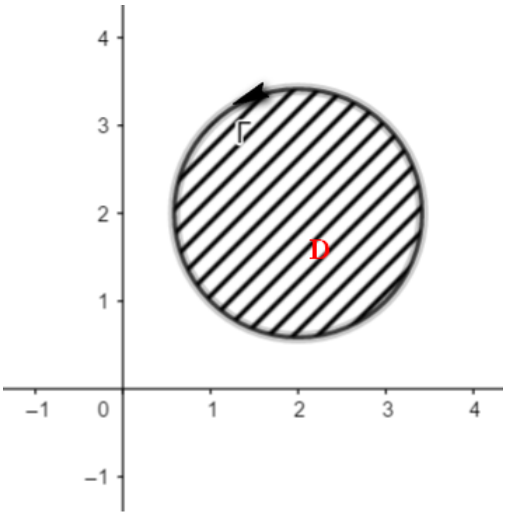
□

Greenov teorem

Neka je $\vec{\Gamma}$ zatvorena pozitivno orjentirana krivulja koja omeđuje područje D u ravnini. Tada za dovoljno glatke funkcije $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\int_{\vec{\Gamma}} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Gornju jednakost zovemo Greenov teorem ili Greenova formula.



Slika 5.6: Greenov teorem

Zadatak 5.21. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$$

ako je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirana kružnica $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje: Znamo da:

$$M(x,y) = x + y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$
$$N(x,y) = y - x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Sada je prema Greenovom teoremu:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (x+y)\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y = \iint_D (-1-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2P(D) = -2\pi.$$

□

Zadatak 5.22. Pomoću Greenove formule izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} y^3\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$. Skicirajte lik D i krivulju $\vec{\Gamma}$.

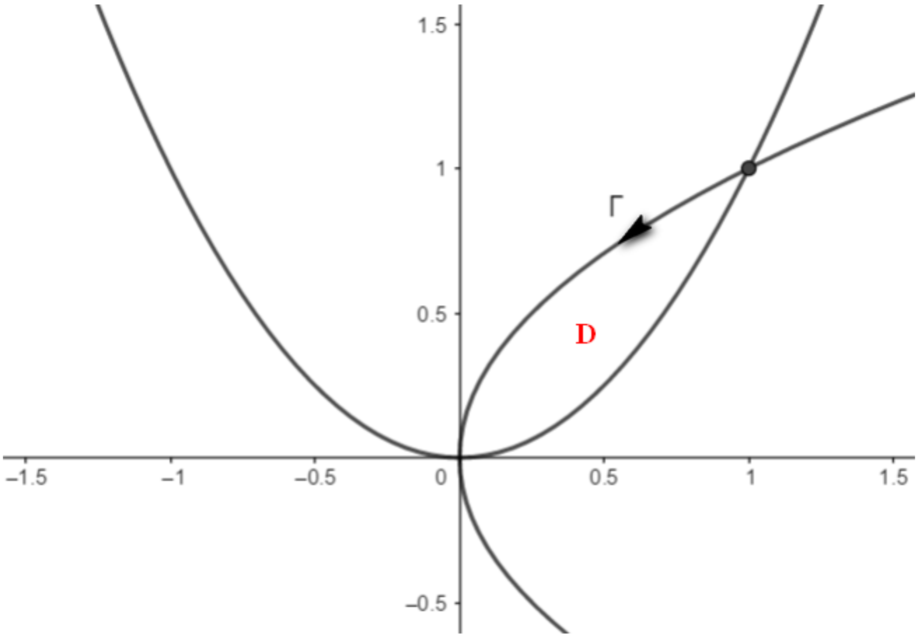
Rješenje: Budući da

$$M(x,y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2$$
$$N(x,y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y^2$$

prema Greenovoj formuli vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} y^3\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y = \iint_D (y^2 - 3y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D (-2y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2)\mathrm{d}y$$
$$= -2\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^6\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\Big(\frac{2}{5} - \frac{1}{7}\Big) = -\frac{6}{35}.$$

□



Slika 5.7: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i lik D

Zadatak 5.23. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y,$$

gdje je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirani trokut s vrhovima $A(1,1)$, $B(2,2)$ i $C(1,3)$. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i trokut D.

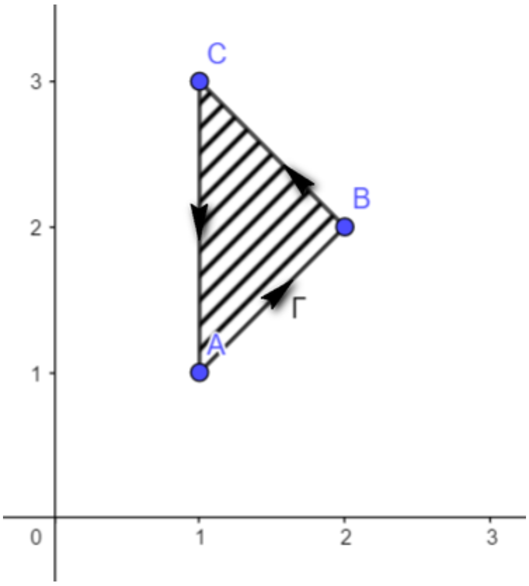
Rješenje:

Stranica $\overline{AB}$ trokuta D leži na pravcu $y = x$, a stranica $\overline{BC}$ na pravcu $y = -x+4$. Također vrijedi

$$M(x,y) = 2x^2+2y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4y$$
$$N(x,y) = (x+y)^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2(x+y).$$

Sada računamo

$$\int_{\vec{\Gamma}} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y = \iint_D (2x+2y-4y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Slika 5.8: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i trokut D

$$= 2\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^{-x+4} (x-y)\mathrm{d}y = 2\int_1^2 \Big(xy - \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_x^{-x+4}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 \Big[x(-x+4) - \frac{(-x+4)^2}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 \Big(-x^2 + 4x - \frac{x^2-8x+16}{2} - x^2 + \frac{x^2}{2}\Big)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_1^2 (-2x^2+8x-8)\mathrm{d}x = 4\int_1^2 (-x^2+4x-4)\mathrm{d}x = 4\Big(\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\Big)\Big|_1^2$$

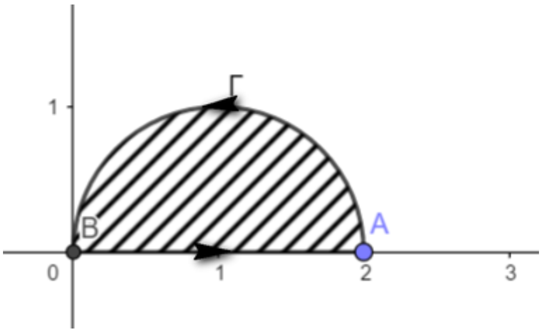
$$= 4\Big[(-\frac{8}{3}+8-8\Big) - \Big(-\frac{1}{3}+2-4\Big)\Big] = 4\Big(-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}+2\Big) = -\frac{4}{3}.$$

□

Zadatak 5.24. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - y^2 + x)\mathrm{d}x + e^x \cos y\,\mathrm{d}y,$$

ako je $\vec{\Gamma}$ dio kružnice $x^2+y^2=2x$ od točke $A(2,0)$ do točke $B(0,0)$ i dio pravca $y=0$ između točaka B i A. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i područje D.



Slika 5.9: Krivulja $\vec{\Gamma}$ i područje D

Rješenje: Područje D opisujemo u polarnim koordinatama na sljedeći način:

$$D \cdots \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq r \leq 2\cos\varphi.$$

Naime, skup D je smješten u 1.kvadrant, a jednadžba kružnice u polarnim koordinatama glasi $r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 2\cos\varphi$. Odredimo sada parcijalne derivacije komponenti polja:

$$M(x,y) = e^x \sin y - y^2 + x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2y$$
$$N(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y.$$

Sada računamo integral:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - y^2 + x)\mathrm{d}x + e^x \cos y\,\mathrm{d}y, = \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 2\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{16}{3}\Big(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\Big(0 + \frac{1}{4}\Big) = \frac{4}{3}.$$

$\square$

Zadatak 5.25. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} (e^x \sin y - 2y)\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 2)\mathrm{d}y,$$

ako je $\vec{\Gamma}$ dio kružnice $x^2 + y^2 = ax$ $(a \geq 0)$ od točke $A(a, 0)$ do točke $B(0, 0)$ i dio pravca $y = 0$ između točaka B i A. Skicirajte krivulju $\vec{\Gamma}$ i područje D.

Rješenje: Zadaća $\left(\frac{a^2\pi}{4}\right)$. □

Krivuljni integral 2. vrste potencijalnog vektorskog polja

Vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno ako je

$$\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

za neko skalarno polje φ. Skalarno polje φ zovemo potencijal od $\vec{a}$. Također znamo da je vektorsko polje potencijalno ako i samo ako vrijedi $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$.

Formula za određivanje potencijala potencijalnog vektorskog polja se može pronaći u poglavlju 'Skalarna i vektorska polja'.

Za krivuljni integral 2. vrste potencijalnog polja vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem. *Neka je $\vec{\Gamma}$ orijentirana krivulja od A do B i $\vec{a}$ potencijalno vektorsko polje s potencijalom φ. Tada je*

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Iz gornjeg teorema neposredno slijedi:

a) integral potencijalnog polja ne ovisi o putu integracije, već samo o početnoj i završnoj točki,

b) integral potencijalnog polja po zatvorenoj krivulji je jednak nuli.

Zadatak 5.26. Odredite $\int_{\vec{\Gamma}} (y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$, gdje je $\vec{\Gamma}$ krivulja zadana parametrizacijom $x(t) = e^{\sin t} \cos t$, $y(t) = e^{\cos t} \sin t$ i $z(t) = t^t$ za $t \in [\pi, 2\pi]$.

Rješenje: Ako u parametrizaciju krivulje $\vec{\Gamma}$ uvrstimo donju granicu intervala $t = \pi$ dobijemo početnu točku krivulje $A(-1, 0, \pi^\pi)$, a ako uvrstimo gornju granicu intervala $t = 2\pi$ dolazimo do krajnje točke na krivulji $B(1, 0, (2\pi)^{2\pi})$.

Ranije smo izračunali (pogledajte poglavlje 'Skalarna i vektorska polja') potencijal polja iz integrala: $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Sada prema gornjoj tvrdnji možemo izračunati integral:

$$\int_{\vec{\Gamma}} (y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z = \varphi(B) - \varphi(A) = (2\pi)^{2\pi} + \pi^\pi.$$

$\square$

Zadatak 5.27. Riješite zadatak neposredno prije potpoglavlja 'Greenov teorem' pomoću potencijala.

Zadatak 5.28. Odredite $\int_{(0,0,0)}^{(0,\pi,1)} \mathrm{d}x + (1 + z\cos(yz))\mathrm{d}y + y\cos(yz)\mathrm{d}z$.

Rješenje: Zadaća (π). $\square$

Poglavlje 6

Plošni integrali

6.1 Plošni integrali prve vrste

Neka je ploha Σ zadana eksplicitnom jednadžbom $z = f(x, y)$ za $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Sigma \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, dovoljno glatka funkcija tri varijable. Plošni integral 1. vrste funkcije F po plohi Σ se računa po formuli:

$$\iint_\Sigma F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je D projekcija plohe Σ na xy-ravninu.

Površina plohe $\Sigma \ldots z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, je dana formulom:

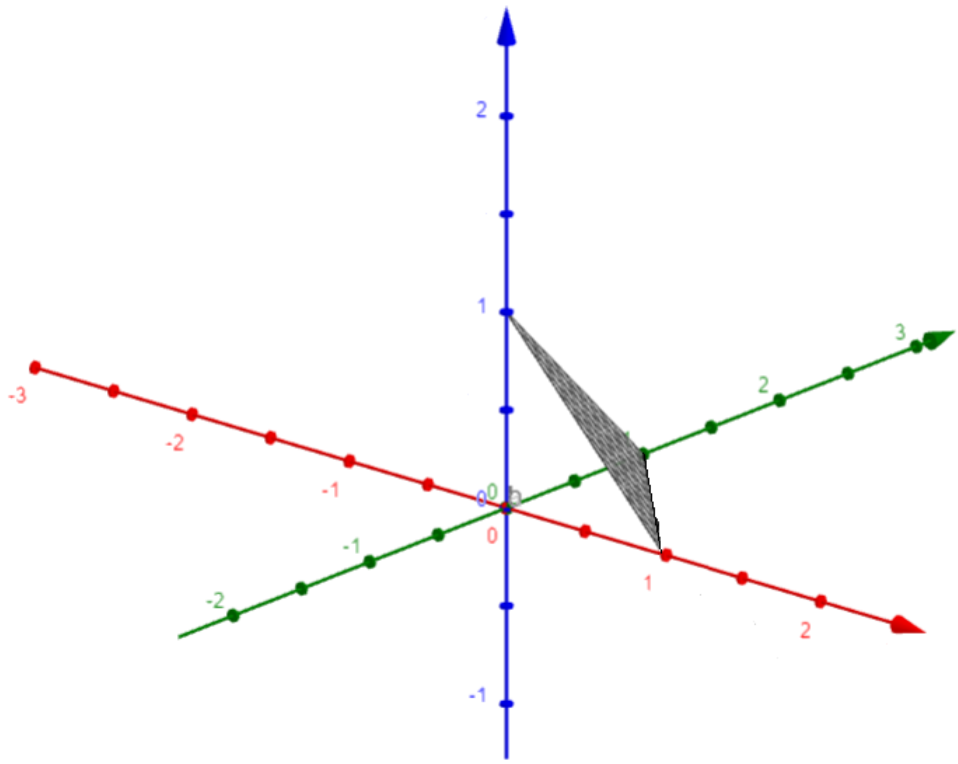
$$P(\Sigma) = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

Ukoliko je ploha Σ okomita na xy-ravninu, njenu jednadžbu ćemo napisati u obliku $\Sigma \ldots y = f(x, z)$, a plošni integral 1. vrste funkcije F po plohi Σ ćemo računati po formuli:

$$\iint_\Sigma F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_D F(x, f(x, z), z)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

gdje je D projekcija plohe Σ na xz-ravninu.

Zadatak 6.1. Izračunajte $\iint_\Sigma \frac{dS}{(1+x+z)^2}$ ako je Σ dio ravnine $x + y + z = 1$ u 1. oktantu. Skicirajte plohu.



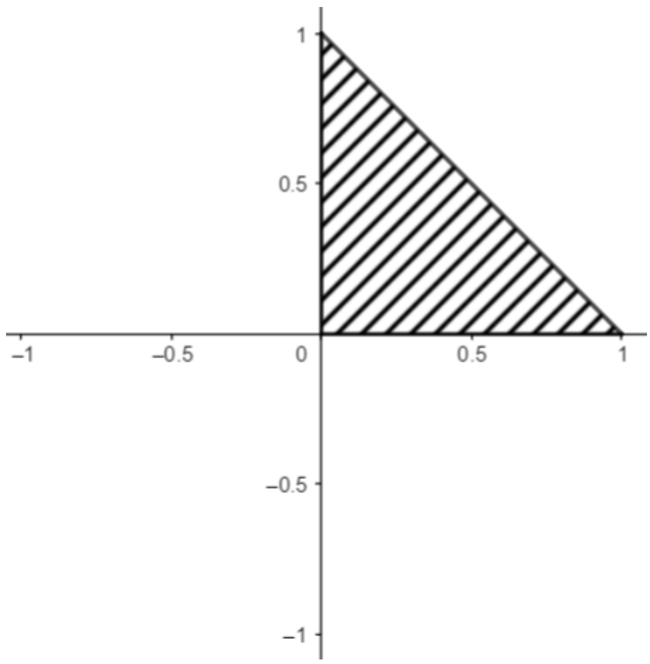
Slika 6.1: Ploha Σ

Rješenje: Napišimo eksplicitnu jednadžbu ravnine:

$$z = f(x,y) = 1 - x - y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -1\,, \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

Projekcija D plohe Σ na xy-ravninu je pravokutan trokut čije katete leže na koordinatnim osima, a hipotenuza na pravcu $y = 1-x$ (pogledajte sliku 6.2). Sada računamo integral:

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+z)^2} &= \iint_D \frac{1}{(1+x+1-x-y)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3}}{(2-y)^2}\,\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{c} t = 2-y\,, \mathrm{d}t = -\mathrm{d}y \\ 0 \mapsto 2, 1-x \mapsto 1+x \end{array} \right\} \\
&= -\sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_2^{1+x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{t}\Big|_2^{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\Big)\mathrm{d}x = \sqrt{3}\Big(\ln|1+x| - \frac{x}{2}\Big)\Big|_0^1
\end{aligned}$$



Slika 6.2: Projekcija D na xy-ravninu

$$= \sqrt{3}\Big(\ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 + 0\Big) = \sqrt{3}\Big(\ln 2 - \frac{1}{2}\Big).$$

□

Zadatak 6.2. Izračunajte $\iint_\Sigma \Big(z + 2x + \frac{4}{3}y\Big)\mathrm{d}S$ ako je Σ dio ravnine $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ u 1. oktantu. Skicirajte plohu.

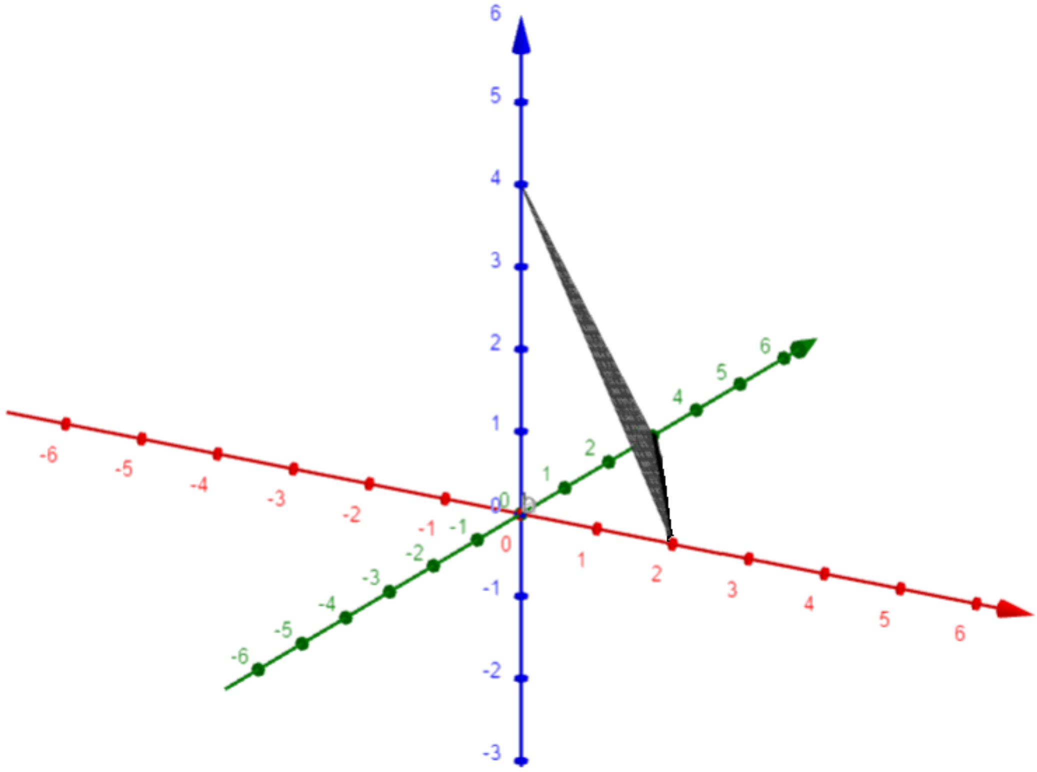
Rješenje: Napišimo eksplicitnu jednadžbu plohe:

$$z = f(x, y) = 4\Big(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\Big) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2\,, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4}{3}.$$

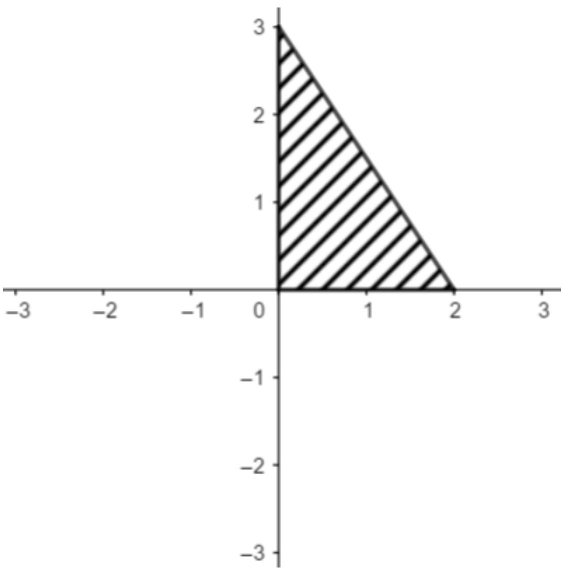
Projekcija D plohe na xy-ravninu je pravokutan trokut s katetama koje leže na koordinatnim osima, a hipotenuza na pravcu $y = 3 - \frac{3}{2}x$ (pogledajte sliku 6.4). Računamo integral:

$$\iint_\Sigma \Big(z + 2x + \frac{4}{3}y\Big)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_D \Big(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y\Big)\sqrt{1 + (-2)^2 + \Big(-\frac{4}{3}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



Slika 6.3: Ploha Σ



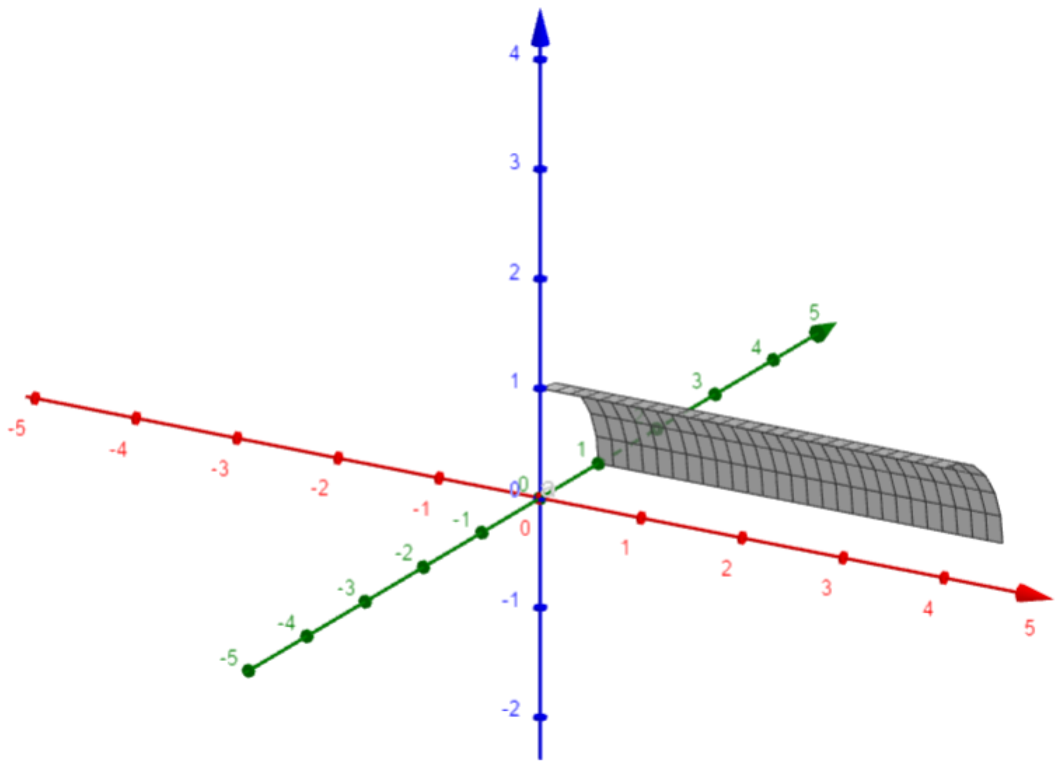
Slika 6.4: Projekcija D na xy-ravninu

$$= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 4\sqrt{5+\frac{16}{9}}\mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 y\Big|_0^{3-\frac{3}{2}x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 \left(3-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{61}}{3}\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^2$$
$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}(6-3) = 4\sqrt{61}.$$

□

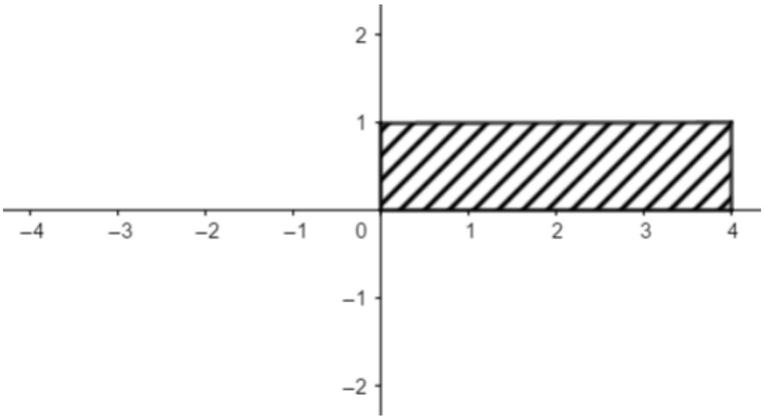
Zadatak 6.3. Izračunajte $\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}S$, gdje je Σ dio plohe $z = \sqrt{1-y^2}$ u 1. oktantu omeđen ravninom $x = 4$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Ploha Σ je dio kružnog cilindra $y^2 + z^2 = 1$. Budući da je:



Slika 6.5: Ploha Σ

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$



Slika 6.6: Projekcija D na xy-ravninu

Projekcija D plohe na xy-ravninu je pravokutnik $[0,4] \times [0,1]$ (pogledajte sliku 6.6). Odredimo vrijednost integrala:

$$\iint_\Sigma y \,\mathrm{d}S = \iint_D y\sqrt{1 + 0 + \frac{y^2}{1-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^4 \mathrm{d}x \int_0^1 y\sqrt{\frac{1}{1-y^2}}\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-y^2\,, \mathrm{d}t = -2y\mathrm{d}y \\ 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 0 \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^4 \mathrm{d}x \int_1^0 -\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^4 \sqrt{t}\Big|_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^4 \mathrm{d}x = 4.$$

□

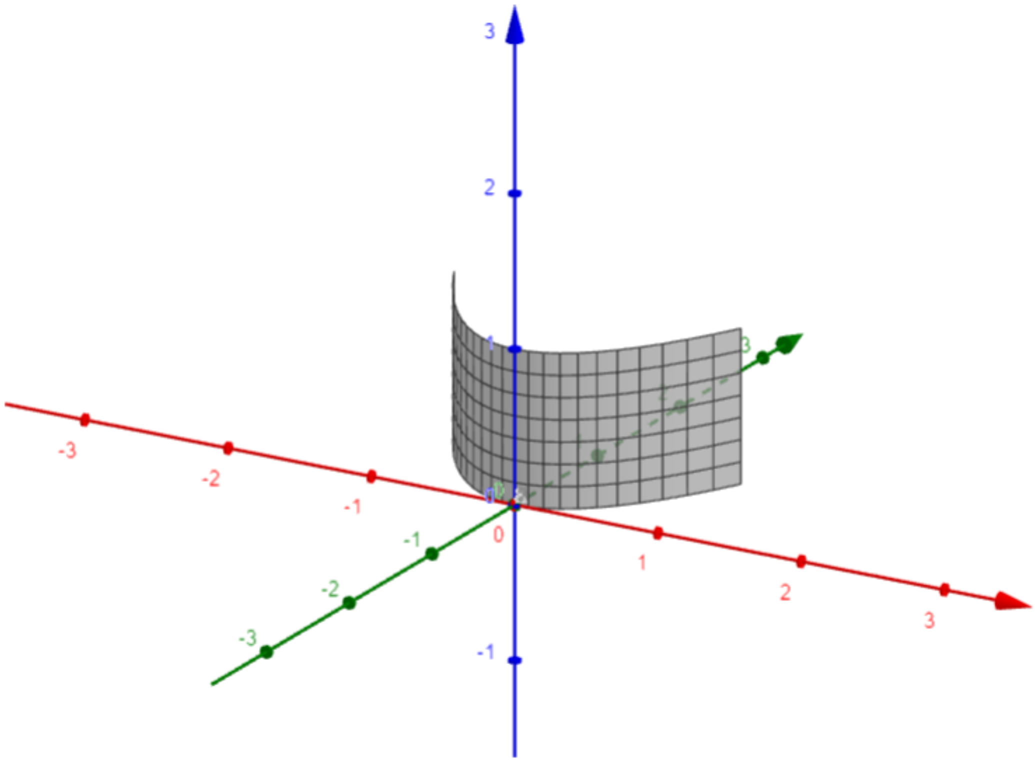
Zadatak 6.4. Izračunajte $\iint_\Sigma xy \,\mathrm{d}S$ ako je Σ dio plohe $y = x^2$ za $y \leq 1$ između ravnina $z = 0$ i $z = 1$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Ploha Σ je okomita na xy-ravninu i stoga ju projiciramo na xz-ravninu. Jednadžba plohe glasi:

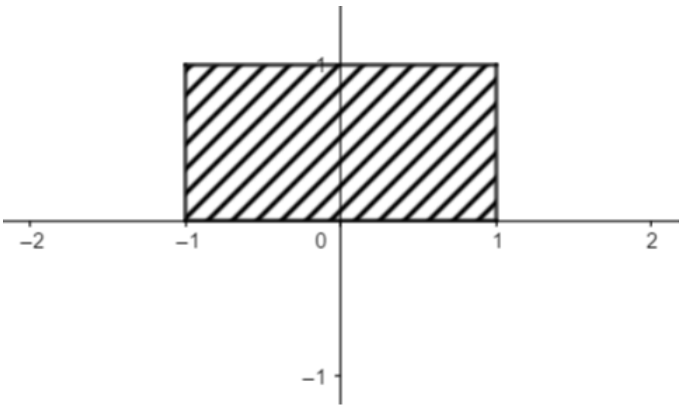
$$y = f(x,z) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Projekcija plohe Σ na xz-ravninu je pravokutnik $[-1,1] \times [0,1]$ (pogledajte sliku 6.8). Izračunajmo integral:

$$\iint_\Sigma xy \,\mathrm{d}S = \iint_D x \cdot x^2 \sqrt{1 + (2x)^2 + 0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Slika 6.7: Ploha Σ



Slika 6.8: Projekcija D na xz-ravninu

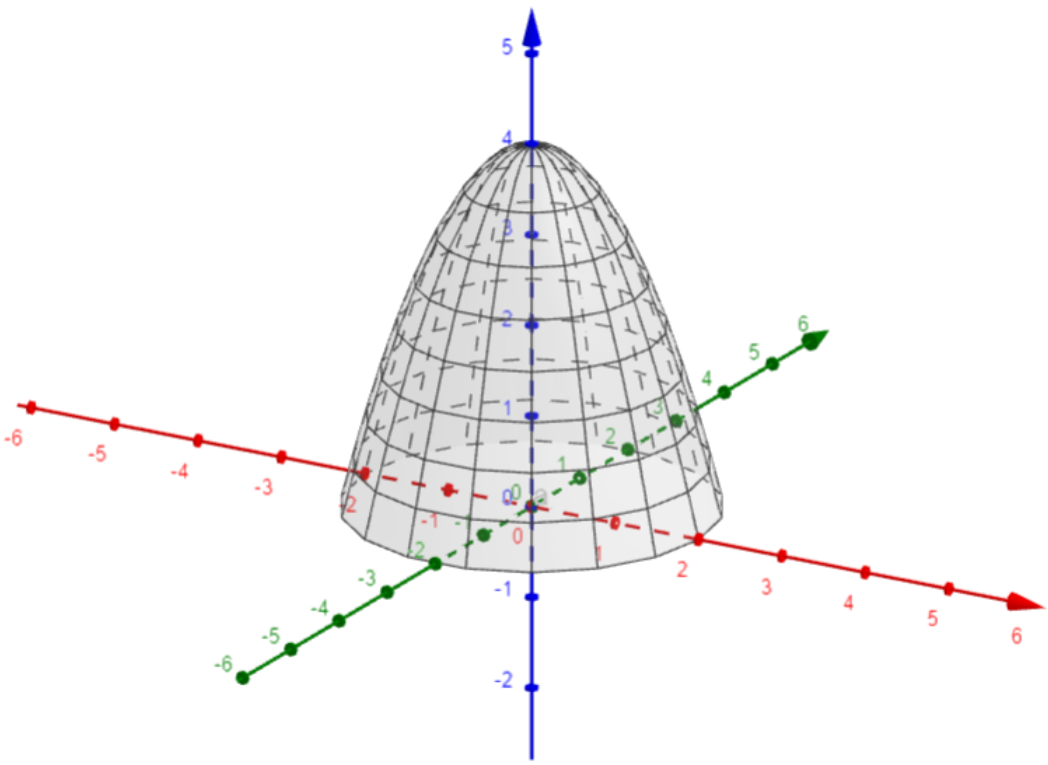
$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$=$ (integral neparne funkcije po simetričnoj domeni) $= 0$.

$\square$

Zadatak 6.5. Izračunajte $\iint_\Sigma \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z}}$ ako je Σ dio rotacionog paraboloida $z = 4 - x^2 - y^2$ iznad ravnine $z = 0$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Vidimo da je:



Slika 6.9: Ploha Σ

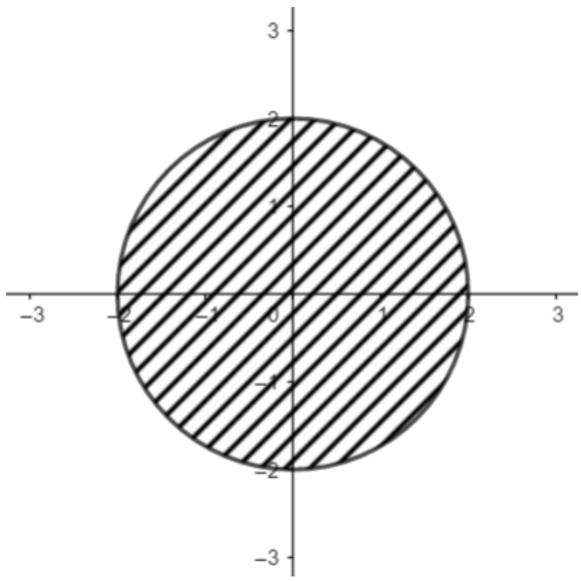
$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.$$

Projekcija D plohe Σ na xy-ravninu je krug sa središtem u ishodištu radijusa $r = 2$ (pogledajte sliku 6.10). Računamo vrijednost integrala:

$$\iint_\Sigma \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z}} = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4-x^2-y^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t = 1+4r^2\,,\mathrm{d}t = 8r\mathrm{d}r \\ 0 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 17 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{17}\frac{1}{8}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$



Slika 6.10: Projekcija D na xy-ravninu

$$= \frac{1}{16} \cdot 2\pi \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{17} = \frac{\pi}{12}(17\sqrt{17} - 1).$$

□

Zadatak 6.6. Izračunajte $\iint_\Sigma z^2 \mathrm{d}S$ po dijelu plohe cilindra $x^2 + z^2 = 1$ koji iz njega isijeca cilindar $x^2 + y^2 = 1$ uz pretpostavku da je $z \geq 0$. Skicirajte plohu.

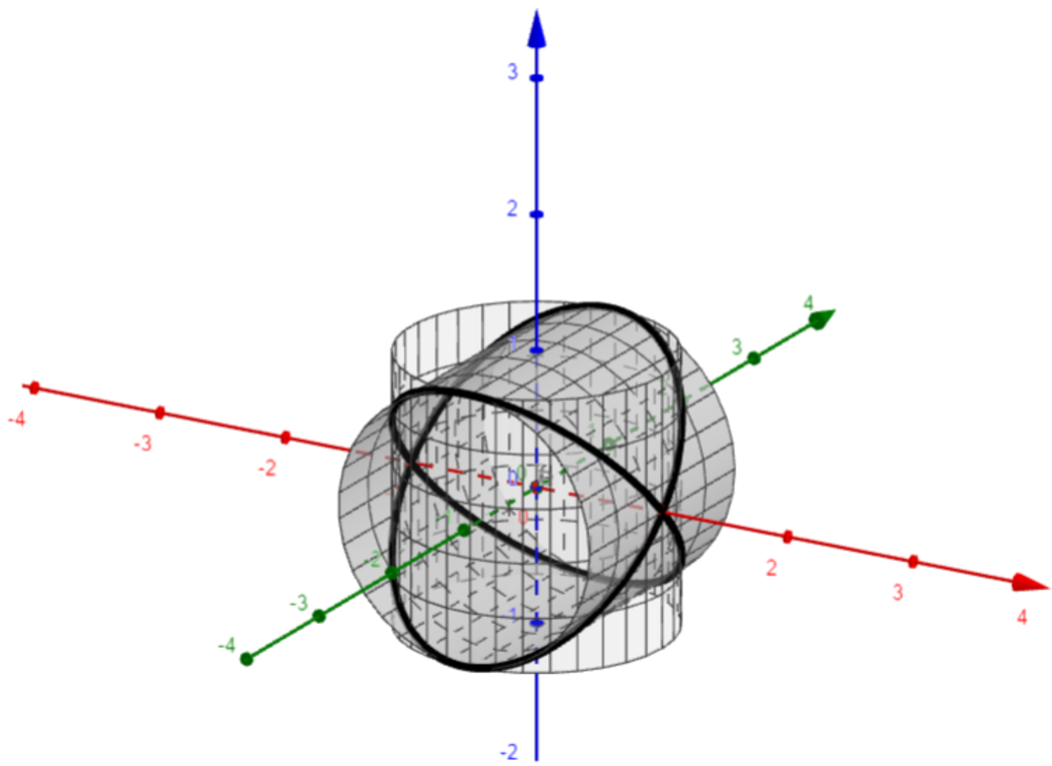
Rješenje: Eksplicitna jednadžba plohe Σ je oblika:

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Projekcija plohe Σ na xy-ravninu je krug sa središtem u ishodištu radijusa $r = 1$ (pogledajte sliku 6.12). Zadani integral računamo u Kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$\iint_\Sigma z^2 \mathrm{d}S = \iint_D (1 - x^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2} + 0}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2)\sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \cdot y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}$$



Slika 6.11: Ploha Σ

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)\mathrm{d}x = 2\Big(x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2\Big(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\Big) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

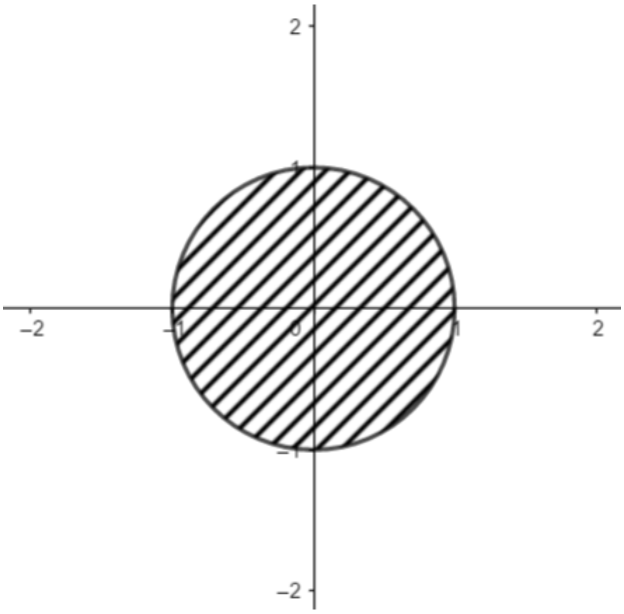
$\square$

Zadatak 6.7. (DZ) Izračunajte površinu dijela plohe $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji iz nje isijeca cilindar $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Kružni cilindar $x^2+(y-1)^2 = 1$ isijeca dio iz stošca $z = \sqrt{x^2+y^2}$, tako da vrijedi:

$$
z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
$$

Projekcija D plohe Σ na xy-ravninu je krug sa središtem u točki $(0,1)$ radijusa $r = 1$, čija jednadžba u polarnim koordinatama ima oblik $r = 2\sin\varphi$ (pogledajte sliku 6.14). Površina plohe Σ se računa na sljedeći način:



Slika 6.12: Projekcija D na xy-ravninu

$$P(\Sigma) = \iint_\Sigma \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r\,\mathrm{d}r$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\Big(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big)\Big|_0^\pi = \pi\sqrt{2}.$$

□

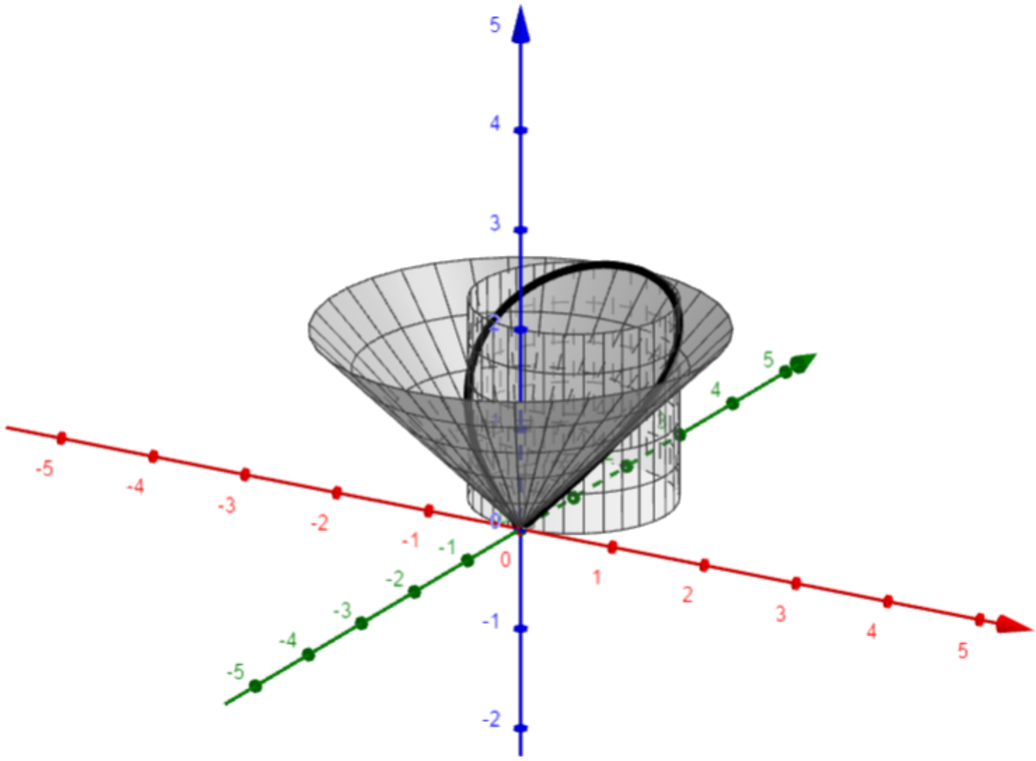
Zadatak 6.8. (DZ) Izračunajte $\iint_\Sigma (xy+yz+xz)\mathrm{d}S$, gdje je Σ dio stožaste plohe $z=\sqrt{x^2+y^2}$ isječen plohom $x^2+y^2=2ax$, $(a\geq 0)$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Budući da je $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ vrijedi:

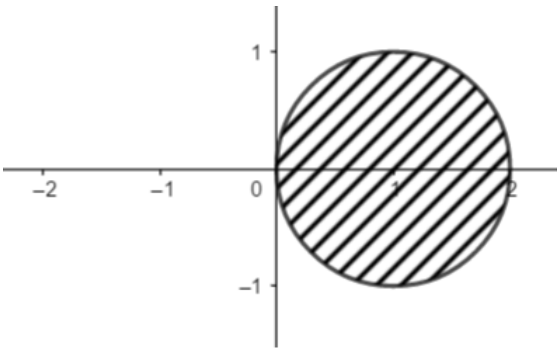
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Također znamo da je:

$$F(x,y,z) = xy+yz+xz = xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2}.$$



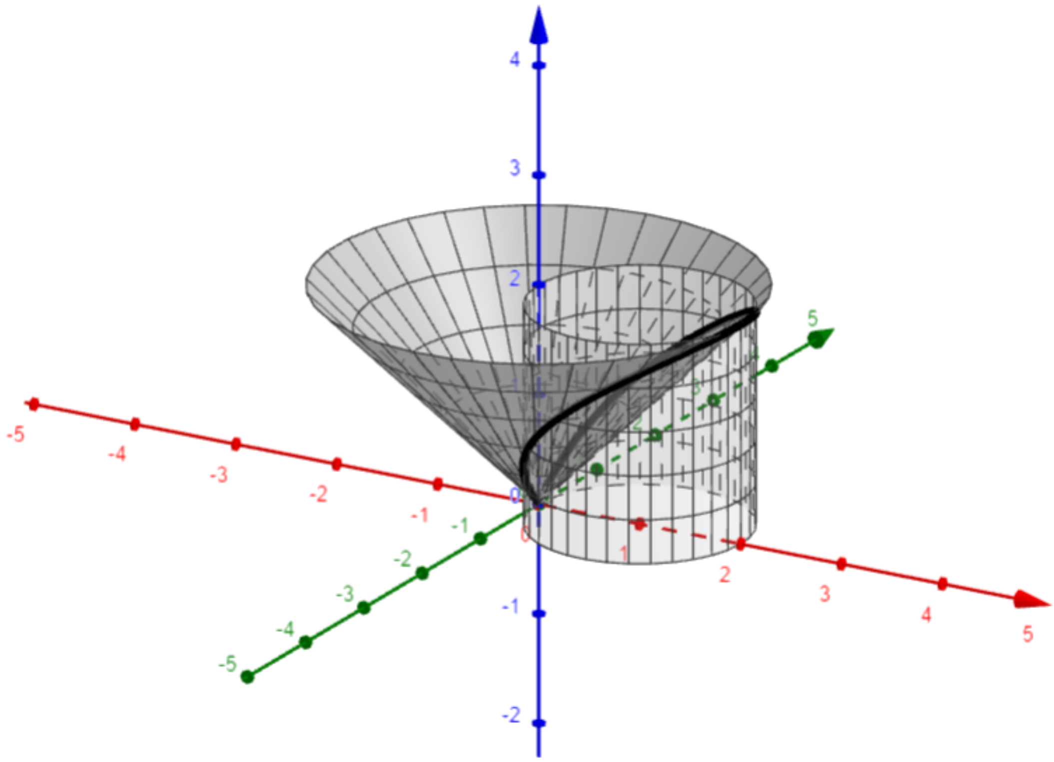
Slika 6.13: Ploha Σ



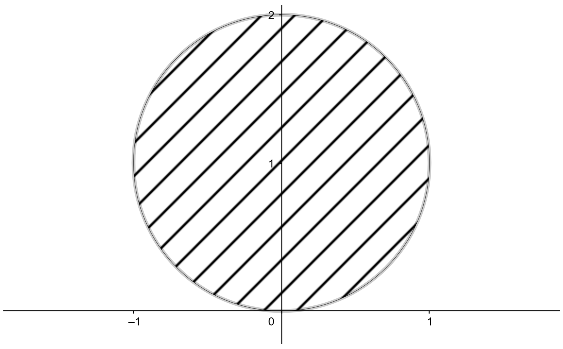
Slika 6.14: Projekcija D na xy-ravninu

Projekcija plohe Σ na xy-ravninu je krug sa središtem u točki $(a, 0)$ radijusa $r = a$, čija jednadžba u polarnim koordinatama ima oblik $r = 2a\cos\varphi$ (pogledajte sliku 6.16 za $a = 1$). Računamo:

$$\iint_\Sigma (xy + yz + xz)\mathrm{d}S$$



Slika 6.15: Ploha Σ



Slika 6.16: Projekcija D na xy-ravninu

$$= \iint_D (xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} (r^2 \sin\varphi \cos\varphi + r^2 \sin\varphi + r^2 \cos\varphi) r\, \mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\cdot \frac{16a^4\cos^4\varphi}{4}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\sqrt{2}a^4\Big[\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi \mathrm{d}\varphi}_{\substack{\text{integral neparne funkcije na} \\ \text{simetričnoj domeni je jednak nuli}}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Big] \\
&= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left\{\begin{array}{l} t = \sin\varphi\,,\mathrm{d}t = \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \\ -\frac{\pi}{2}\mapsto -1,\ \frac{\pi}{2}\mapsto 1 \end{array}\right\} \\
&= 4\sqrt{2}a^4\int_{-1}^{1}(1-t^2)^2\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}a^4\int_0^1(1-t^2)^2\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}a^4\int_0^1(1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t \\
&= 8\sqrt{2}a^4\Big(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\Big)\Big|_0^1 = 8\sqrt{2}a^4\Big(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.9. (DZ) Izračunajte $\iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S$ gdje je Σ dio površine paraboloida $x^2+y^2=2z$ što je isijeca ravnina $z=1$. Skicirajte plohu.

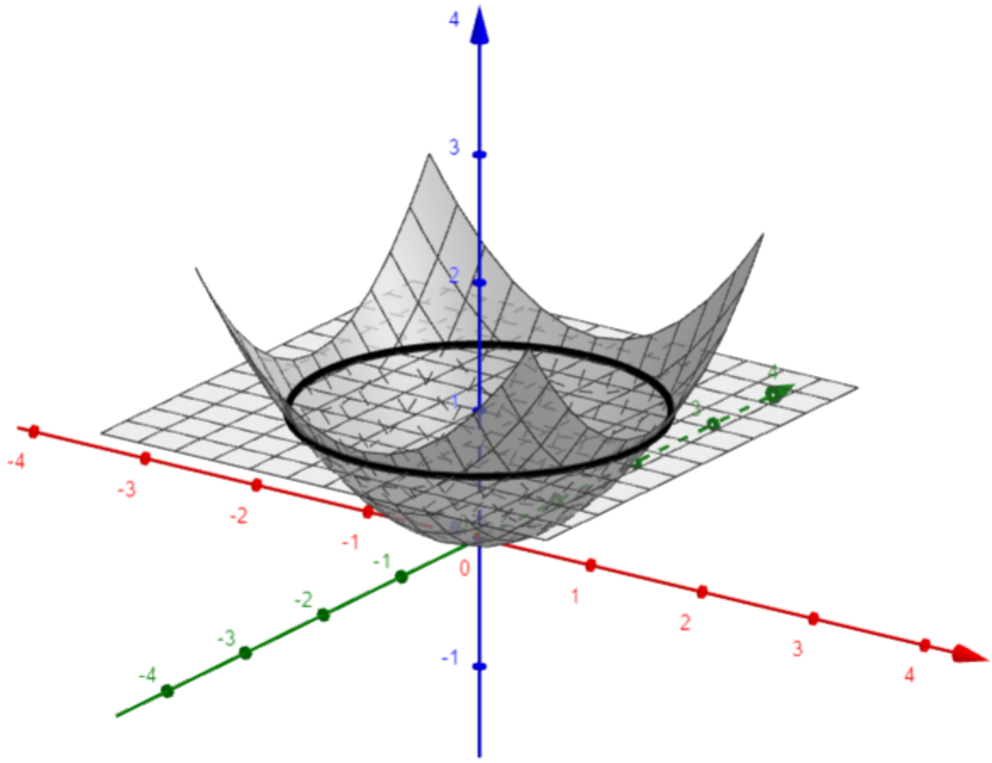
Rješenje: Ploha Σ je zadana jednadžbom:

$$z = f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = y.$$

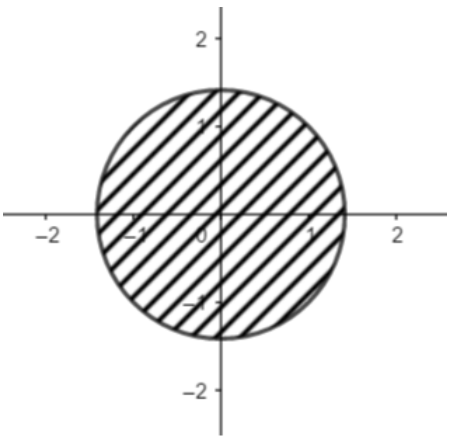
Jednadžba ruba projekcije plohe Σ na xy-ravninu glasi $x^2+y^2=2$, dakle radi se o krugu sa središtem u ishodištu radijusa $r=\sqrt{2}$ (pogledajte sliku 6.18). Odredimo vrijednost integrala:

$$
\begin{aligned}
&\iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r = \left\{\begin{array}{l} t = 1+r^2,\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r \\ 0\mapsto 1,\ \sqrt{2}\mapsto 3 \end{array}\right\} \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^3 (t-1)\sqrt{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \pi\int_1^3 \big(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\big)\mathrm{d}t \\
&= \pi\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^3 = \pi\Big[\frac{2}{5}(9\sqrt{3}-1) - \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)\Big] = \pi\Big(\frac{8\sqrt{3}}{5} + \frac{4}{15}\Big).
\end{aligned}
$$

□



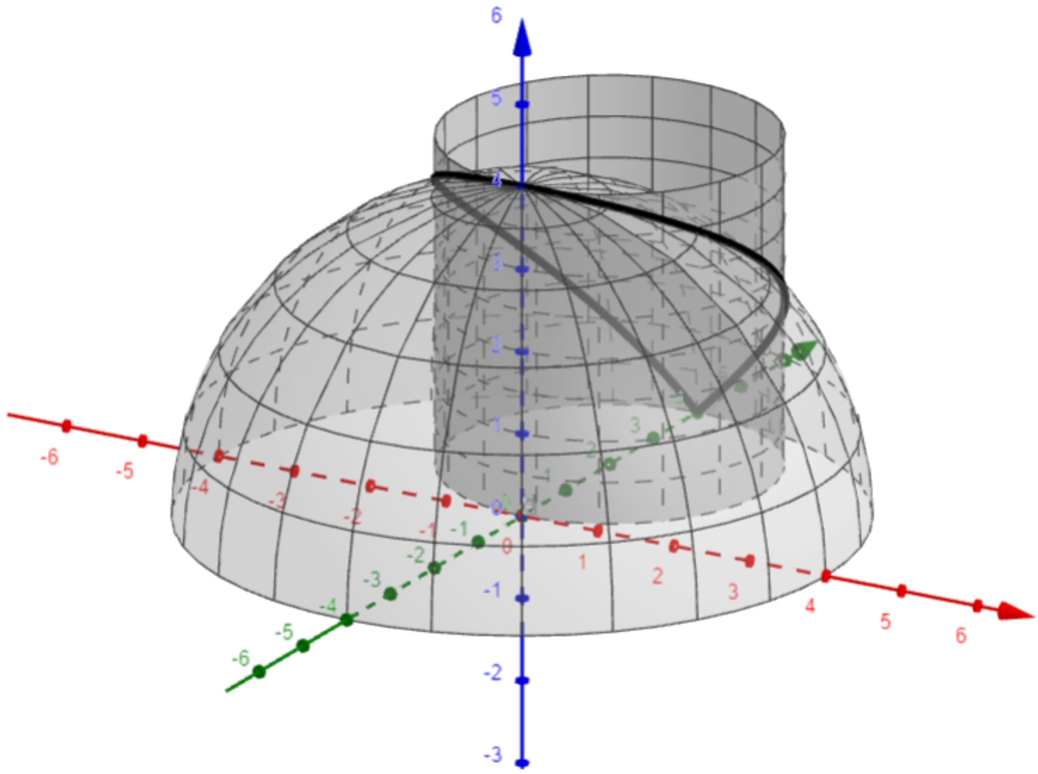
Slika 6.17: Ploha Σ



Slika 6.18: Projekcija D na xy-ravninu

Zadatak 6.10. Odredite površinu dijela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ koju isijeca kružni cilindar $x^2 + y^2 = 4y$ ako je $z \geq 0$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Ploha Σ je zadana eksplicitnom jednadžbom



Slika 6.19: Ploha Σ

$z = f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Prema tome,

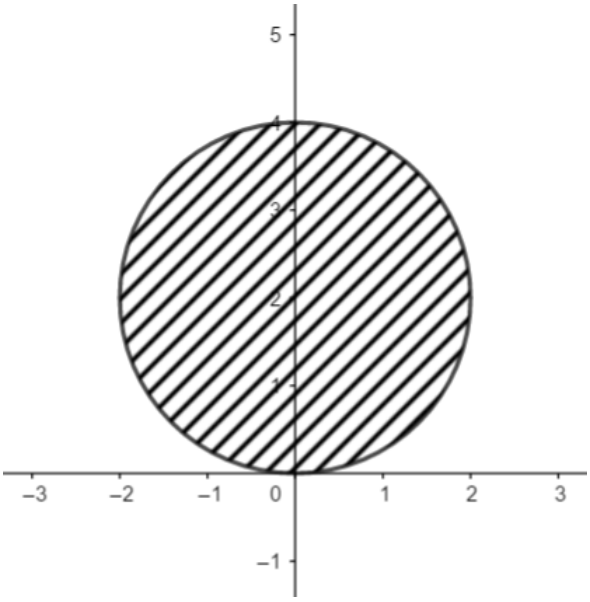
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Projekcija D plohe Σ na xy-ravninu je krug sa središtem u točki $(0, 2)$ radijusa $r = 2$, koja u polarnom koordinatnom sustavu ima jednadžbu oblika $r = 4\sin\varphi$ (pogledajte sliku 6.20). Računamo površinu plohe Σ:

$$P(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 4\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= -4\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \frac{1}{2} \frac{-2r dr}{\sqrt{16 - r^2}}\, \mathrm{d}r = -4\int_0^{\pi} \sqrt{16 - r^2}\Big|_0^{4\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi$$



Slika 6.20: Projekcija D na xy-ravninu

$$= -4\int_0^{\pi} \Big(\sqrt{16 - 16\sin^2\varphi} - 4\Big)\mathrm{d}\varphi = -4\int_0^{\pi} (4|\cos\varphi| - 4)\mathrm{d}\varphi$$

$$= -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos\varphi - 4)\mathrm{d}\varphi = -32(\sin\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -32\Big(1 - \frac{\pi}{2}\Big) = 32\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big).$$

□

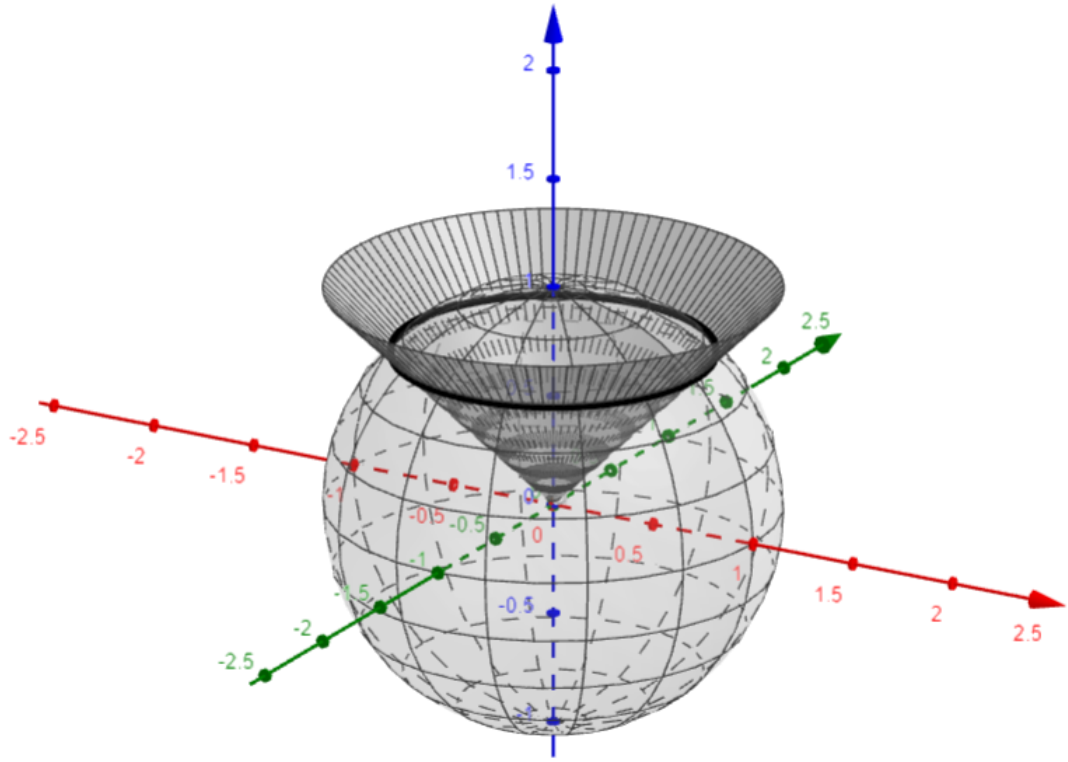
Zadatak 6.11. (DZ) Izračunajte površinu manjeg dijela sfere $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $(a > 0)$ kojeg iz nje isijeca stožac $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Eksplicitna jednadžba plohe Σ ima oblik
$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Stoga je

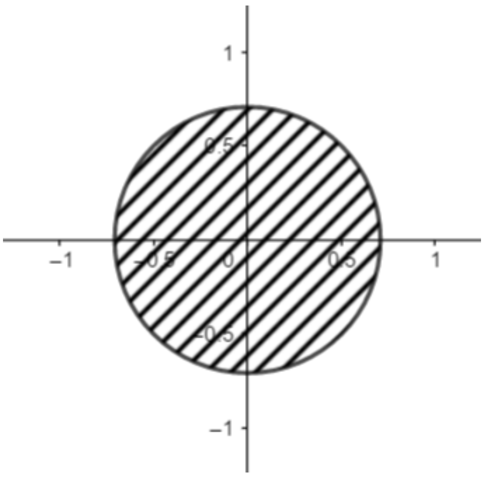
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Projekcija D plohe Σ na xy-ravninu je krug $x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2}$ sa središtem u ishodištu radijusa $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (pogledajte sliku 6.22). Odredimo površinu plohe Σ:

$$P(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$



Slika 6.21: Ploha Σ



Slika 6.22: Projekcija D na xy-ravninu

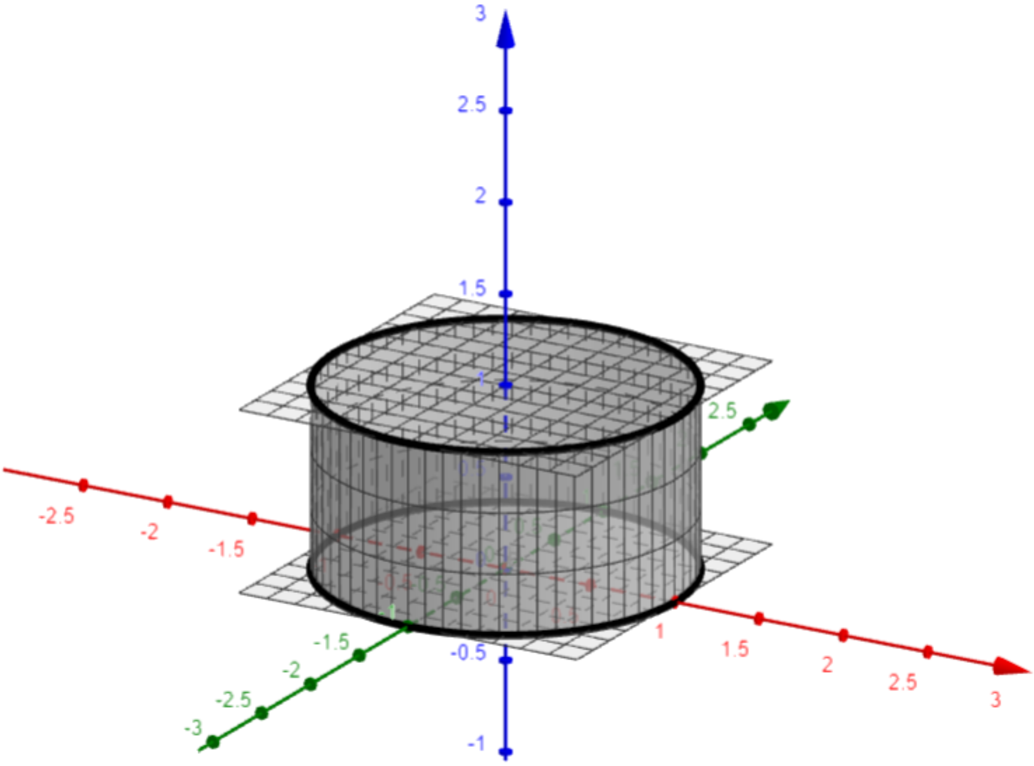
$$= a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, r \, \mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= -a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{-2rdr}{2\sqrt{a^2-r^2}} = -a\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}\varphi \\
&= -2a\pi\Big(\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}-\sqrt{a^2}\Big) = -2a\pi\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}-a\Big) \\
&= 2a^2\pi\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = a^2\pi(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

$\square$

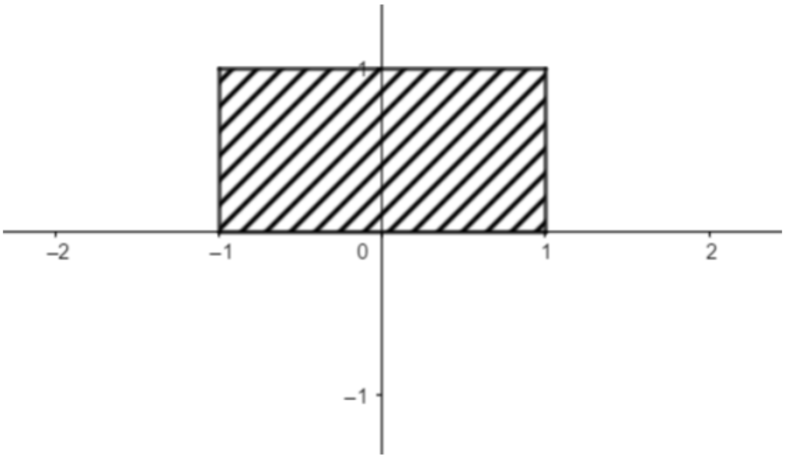
Zadatak 6.12. Izračunajte $\iint_\Sigma (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}S$ ako je Σ dio plašta valjka $x^2+y^2=a^2$, $(a>0)$, omeđen sa $z=0$ i $z=k$, $(k>0)$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Budući da je ploha Σ okomita na xy-ravninu, projiciramo ju na



Slika 6.23: Ploha Σ

xz-ravninu (pogledajte sliku 6.24 za $a=k=1$). Imamo da je $y^2=a^2-x^2$, što znači da plohu moramo podijeliti xz-ravninom na desni komad s jednadžbom $y=f_1(x,z)=\sqrt{a^2-x^2}$ i na lijevi komad koji ima jednadžbu



Slika 6.24: Projekcija D na xz-ravninu

$y = f_2(x,z) = -\sqrt{a^2-x^2}$, a zatim integriramo po svakom dijelu posebno, te zbrojimo rezultate. Parcijalne derivacije funkcija f_1 i f_2 su redom

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \text{te} \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

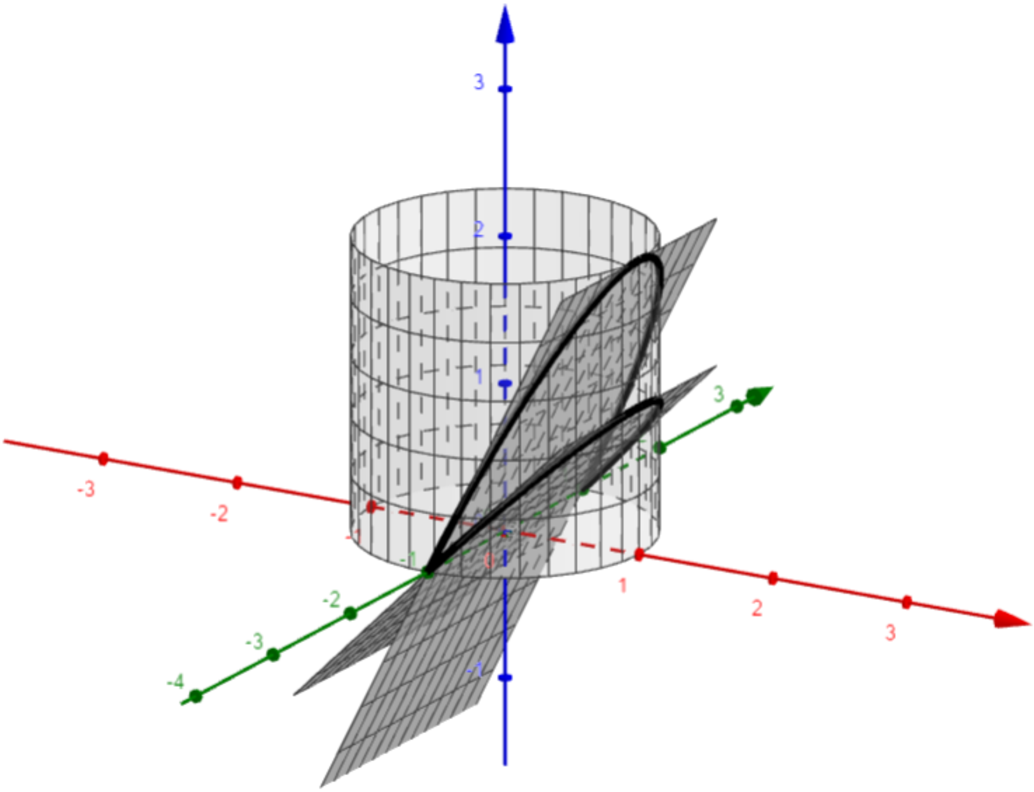
Zajednička projekcija D oba komada plohe na xz-ravninu je pravokutnik $[-a,a]\times[0,k]$. Odredimo:

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma (y+z+\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}S \\
&= \iint_D (\sqrt{a^2-x^2}+z+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&+ \iint_D (-\sqrt{a^2-x^2}+z+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}+0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= \iint_D 2(\sqrt{a^2-x^2}+z)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 2a\int_0^k \mathrm{d}z\int_{-a}^a \Big(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= 2a\int_0^k \Big(x+z\arcsin\frac{x}{a}\Big)\Big|_{-a}^a \mathrm{d}z = 2a\int_0^k \Big[a+z\frac{\pi}{2}-\Big(-a+z\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\Big]\mathrm{d}z \\
&= 2a\int_0^k (2a+z\pi)\mathrm{d}z = 2a\Big(2az+\pi\frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^k \\
&= 2a\Big(2ak+\pi\frac{k^2}{2}\Big) = ak(4a+\pi k).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 6.13. (DZ) Nađite površinu dijela plohe valjka $x^2 + y^2 = R^2$, $(z \geq 0)$, koja se nalazi medju ravninama $z = \alpha x$ i $z = \beta x$ $(\alpha > \beta > 0)$.

Rješenje: Ploha Σ je okomita na xy-ravninu i stoga ju projiciramo na xz-



Slika 6.25: Ploha Σ

ravninu (pogledajte sliku 6.26 za $R = 1$, $\alpha = 2$ i $\beta = 1$). Plohu podijelimo xz-ravninom na lijevi i desni komad čije su jednadžbe redom

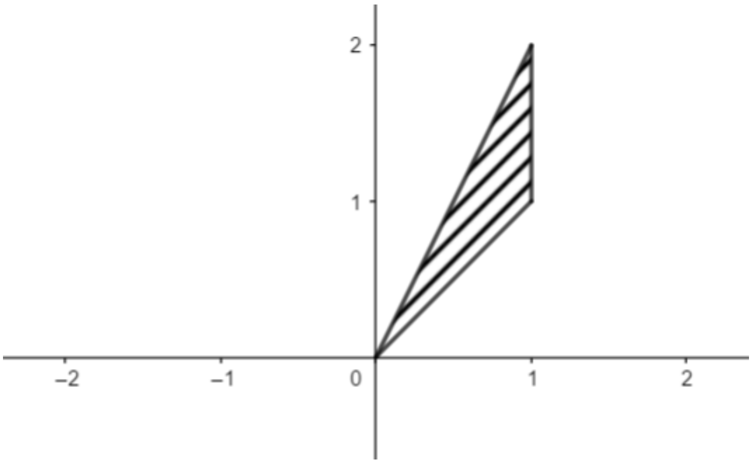
$$\Sigma_1 \ldots y = f_1(x,z) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{i} \quad \Sigma_2 \ldots y = f_2(x,z) = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Parcijalne derivacije funkcija f_1 i f_2 su dane sa

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \text{te} \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

Zajednička projekcija D ploha Σ_1 i Σ_2 na xz-ravninu je dio te ravnine u 1. kvadrantu između pravaca $z = \beta x$ i $z = \alpha x$. Površina plohe Σ je zbroj površina ploha Σ_1 i Σ_2:

$$P(\Sigma) = \iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \mathrm{d}S$$



Slika 6.26: Projekcija D na xz-ravninu

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + 0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + 0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\
&= 2R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 2R \int_0^R \mathrm{d}x \int_{\beta x}^{\alpha x} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}z \\
&= 2R \int_0^R (\alpha x - \beta x) \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2R(\alpha - \beta) \int_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -2R(\alpha - \beta)\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_0^R = 2R^2(\alpha - \beta).
\end{aligned}
$$

$\square$

6.2 Plošni integrali druge vrste

Neka je ploha Σ zadana eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$ za $(x, y) \in D$, gdje je D podskup xy-ravnine. Plohu Σ možemo orijentirati na dva načina:

a) pomoću normale $\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$ koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$,

b) pomoću normale $\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$ koja zatvara tupi kut s vektorom $\vec{k}$.

Plohu orijentiranu na jedan od gornja dva načina označavamo sa $\vec{\Sigma}$.

Neka je $\vec{a} : \vec{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^3 \to X_0(E)$ vektorsko polje:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Plošni integral 2. vrste vektorskog polja $\vec{a}$ po plohi $\vec{\Sigma}$ jednak je:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, \mathrm{d}S = \iint_{D} (\vec{a} \cdot \vec{n})(x, y, f(x, y)) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

gdje je $\vec{n}_0$ jedinični vektor normale na plohu $\vec{\Sigma}$, $\left(\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)$.

Zadatak 6.14. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S}$ ako je $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$, a $\vec{\Sigma} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orijentirana normalom koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$. Skicirajte plohu.

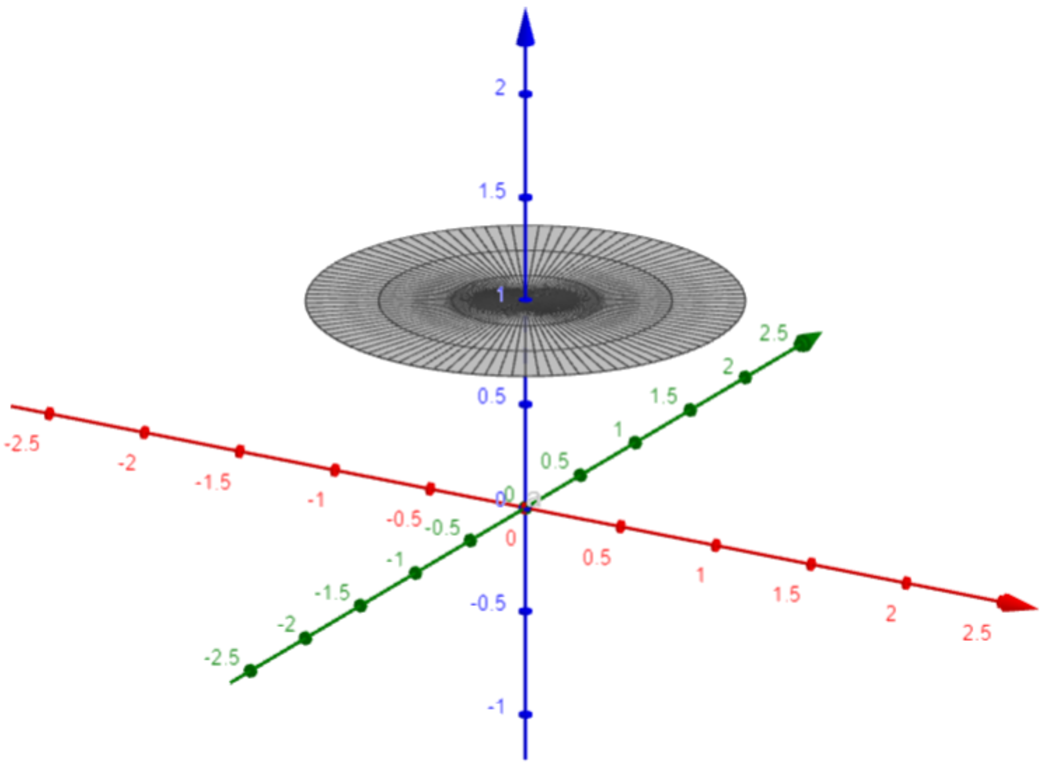
Rješenje: Ploha $\vec{\Sigma}$ je zadana jednadžbom $z = f(x, y) = 1$ (pogledajte sliku 6.27). Projekcija plohe $\vec{\Sigma}$ na xy-ravninu je krug $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, a normala koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$ je vektor $n = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} = \vec{k}$. Odredimo skalarni produkt vektorskog polja $\vec{a}$ i vektora normale $\vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = (x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}) \cdot \vec{k} = z^3 = 1^3 = 1.$$

Sada znamo da je

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{D} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = P(D) = \pi.$$

$\square$



Slika 6.27: Ploha $\vec{\Sigma}$

Zadatak 6.15. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S}$, ako je $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ dio ravnine $x + y + z = 2$ u 1. oktantu orijentiran normalom koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$. Skicirajte plohu.

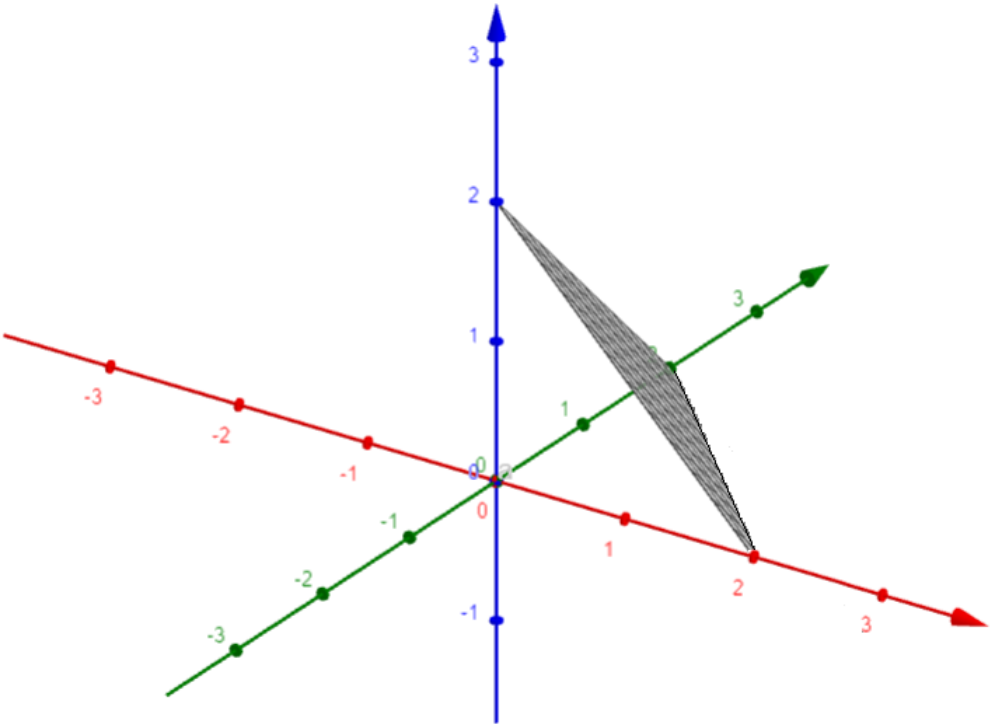
Rješenje: Eksplicitna jednadžba plohe $\vec{\Sigma}$ ima oblik $z = f(x, y) = 2 - x - y$ (pogledajte sliku 6.28) i stoga je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$, tako da je normala na plohu koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$ zadana sa $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Projekcija D plohe na xy-ravninu je pravokutan trokut s katetama na koordinatnim osima i hipotenuzom na pravcu $y = 2 - x$ (pogledajte sliku 6.29). Odredimo skalarni produkt vektorskog polja $\vec{a}$ i vektora normale $\vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = y - x + z = y - x + 2 - x - y = 2 - 2x.$$

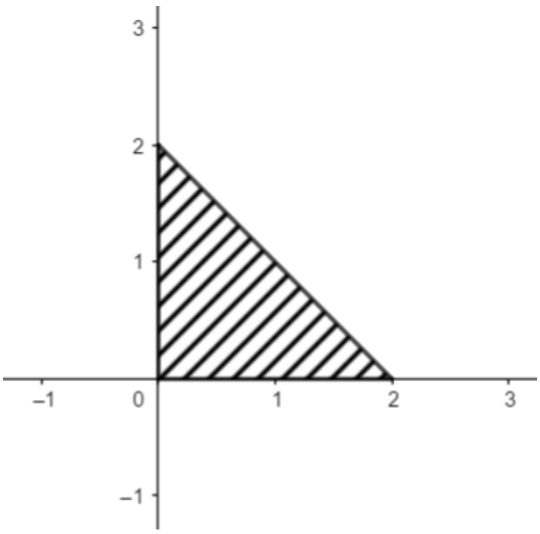
Sada računamo:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (2 - 2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} (2 - 2x)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 (2 - 2x)y\Big|_0^{2-x} \mathrm{d}x = 2\int_0^2 (1 - x)(2 - x)\mathrm{d}x$$



Slika 6.28: Ploha $\vec{\Sigma}$



Slika 6.29: Projekcija D

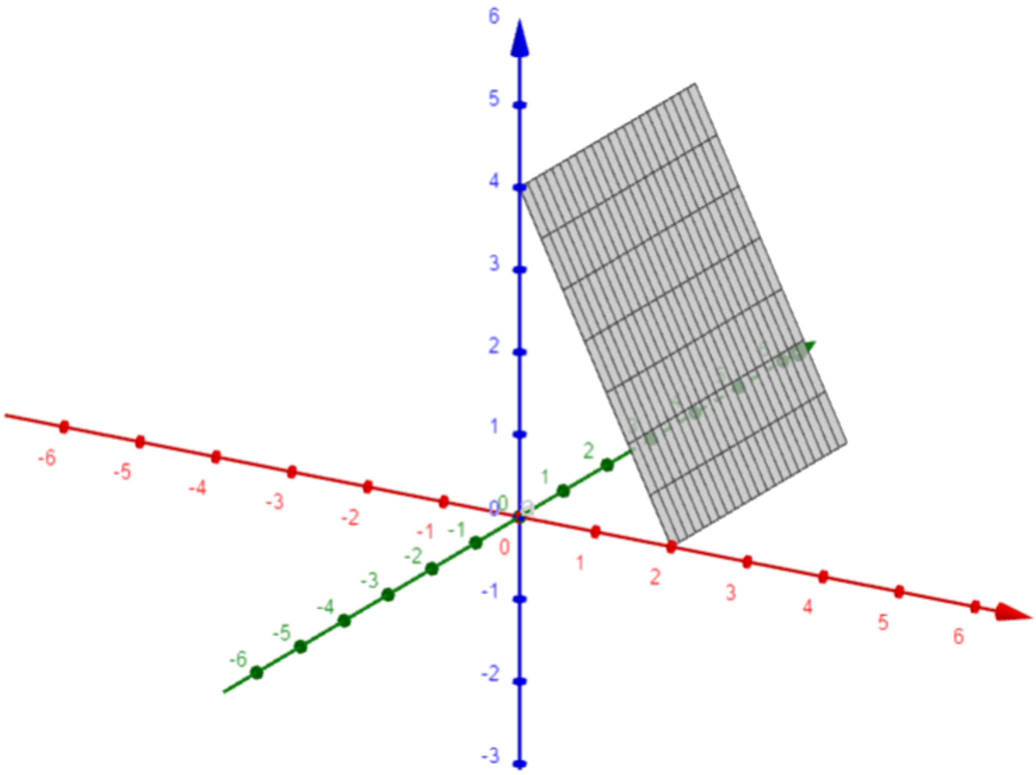
$$= 2\int_0^2 (2 - 3x + x^2)\mathrm{d}x = 2\Big(2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2$$

$$= 2\Big(4 - \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{8}{3}\Big) = 2\Big(-2 + \frac{8}{3}\Big) = \frac{4}{3}.$$

□

Zadatak 6.16. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S}$, ako je $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, a $\vec{\Sigma}$ dio ravnine $2x + z = 4$, $0 < y < 4$, u 1. oktantu orijentiran normalom koja zatvara šiljasti kut s osi z. Skicirajte plohu.

Rješenje: Eksplicitna jednadžba plohe $\vec{\Sigma}$ ima oblik $z = f(x, y) = 4 - 2x$



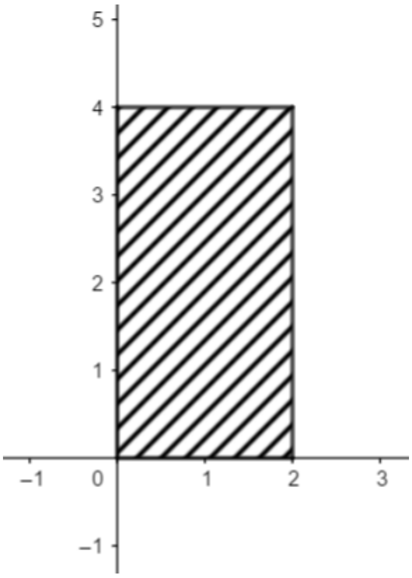
Slika 6.30: Ploha $\vec{\Sigma}$

(pogledajte sliku 6.30) i stoga je $\frac{\partial f}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, pa je normala na plohu koja zatvara šiljasti kut s osi z jednaka $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Projekcija D plohe na xy-ravninu je pravokutnik $[0, 2] \times [0, 4]$ (pogledajte sliku 6.31). Odredimo skalarni produkt vektorskog polja $\vec{a}$ i vektora normale $\vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 2y + z = 2y + 4 - 2x.$$

Sada računamo:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{D} (2y + 4 - 2x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^4 (2y + 4 - 2x) \mathrm{d}y$$



Slika 6.31: Projekcija D

$$= \int_0^2 (y^2 + 4y - 2xy)\Big|_0^4 \mathrm{d}x = \int_0^2 (16 + 16 - 8x)\mathrm{d}x$$
$$= (32x - 4x^2)\Big|_0^2 = 64 - 16 = 48.$$

$\square$

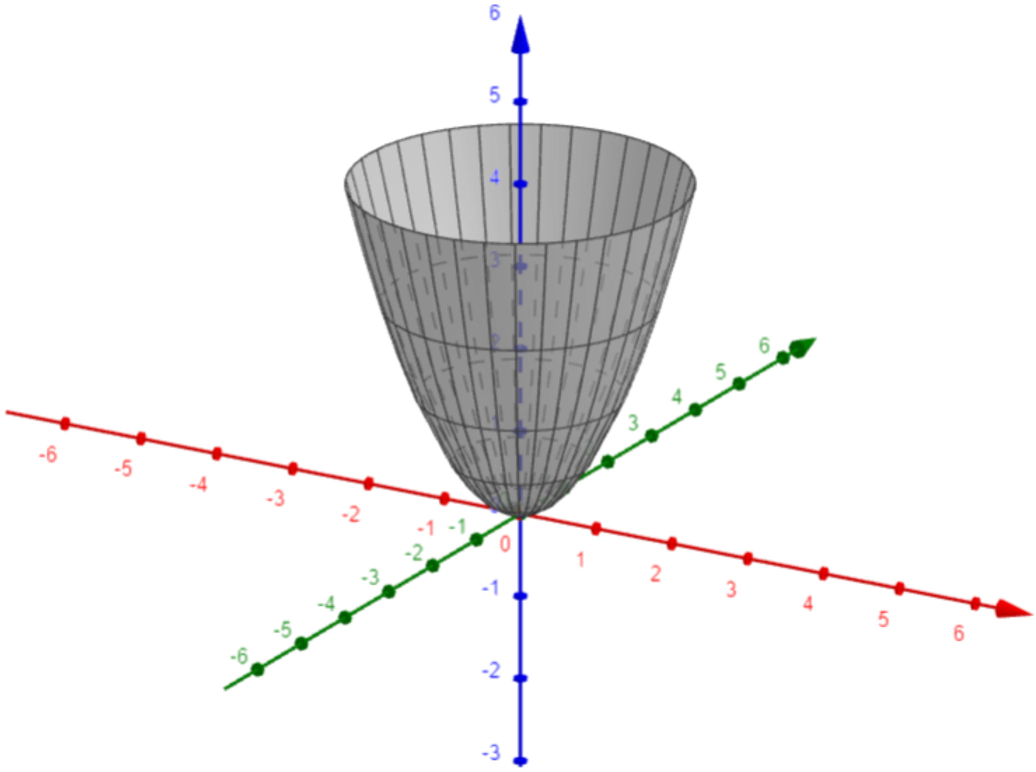
Zadatak 6.17. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S}$, ako je $\vec{a} = (z - x^2)\vec{j} + \sqrt{4 - z}\,\vec{k}$, a $\vec{\Sigma} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$ orijentirana normalom koja zatvara tupi kut s vektorom $\vec{k}$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Znamo da je jednadžba plohe $\vec{\Sigma}$ oblika $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (pogledajte sliku 6.32), tako da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

što znači da je normala na plohu koja zatvara tupi kut s vektorom $\vec{k}$ jednaka $\vec{n} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$. Projekcija D plohe $\vec{\Sigma}$ na xy-ravninu je krug radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu. Skalarni produkt vektorskog polja $\vec{a}$ i vektora normale $\vec{n}$ je dan sa:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = (z - x^2)2y - \sqrt{4 - z} = 2yz - 2x^2y - \sqrt{4 - z}$$
$$= 2y(x^2 + y^2) - 2x^2y - \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2y^3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$



Slika 6.32: Ploha $\vec{\Sigma}$

Odredimo vrijednost integrala:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (2y^3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (2r^3 \sin^3\varphi - \sqrt{4 - r^2}) r\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 2r^4 \sin^3\varphi\,\mathrm{d}r - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 r\sqrt{4 - r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2r^5}{5}\bigg|_0^2 \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{4 - r^2}\,\mathrm{d}(4 - r^2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{64}{5} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left.\frac{(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2$$

$$= \frac{64}{5} \int_0^{2\pi} \sin\varphi(1 - \cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + 2\pi \cdot \frac{1}{3}(4 - r^2)\sqrt{4 - r^2}\bigg|_0^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos\varphi,\ \mathrm{d}t = -\sin\varphi\, d\varphi \\ 0 \mapsto 1,\ 2\pi \mapsto 1 \end{array} \right\} = 0 - 2\pi \cdot \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}\pi.$$

$\square$

Teorem o divergenciji

Neka je $\vec{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^3$ zatvorena ploha orijentirana vanjskom normalom koja omeđuje područje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Neka je $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektorsko polje. Plošni integral vektorskog polja $\vec{a}$ po zatvorenoj plohi $\vec{\Sigma}$ zovemo *tok vektorskog polja kroz plohu*. Prisjetimo se da je divergencija vektorskog polja skalarno polje koje određujemo na sljedeći način:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Prema *teoremu o divergenciji* tok vektorskog polja $\vec{a}$ kroz zatvorenu plohu $\vec{\Sigma}$ možemo izračunati po formuli:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Zadatak 6.18. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = \vec{j} + z^3\vec{k}$ kroz sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Skicirajte sferu.

Rješenje: Zatvorena ploha $\vec{\Sigma}$ omeđuje kuglu Ω sa središtem u ishodištu radijusa $r = 1$ (pogledajte sliku 6.33). Stoga ćemo integral po kugli Ω računati u sfernim koordinatama. Odredimo najprije divergenciju polja $\vec{a}$:

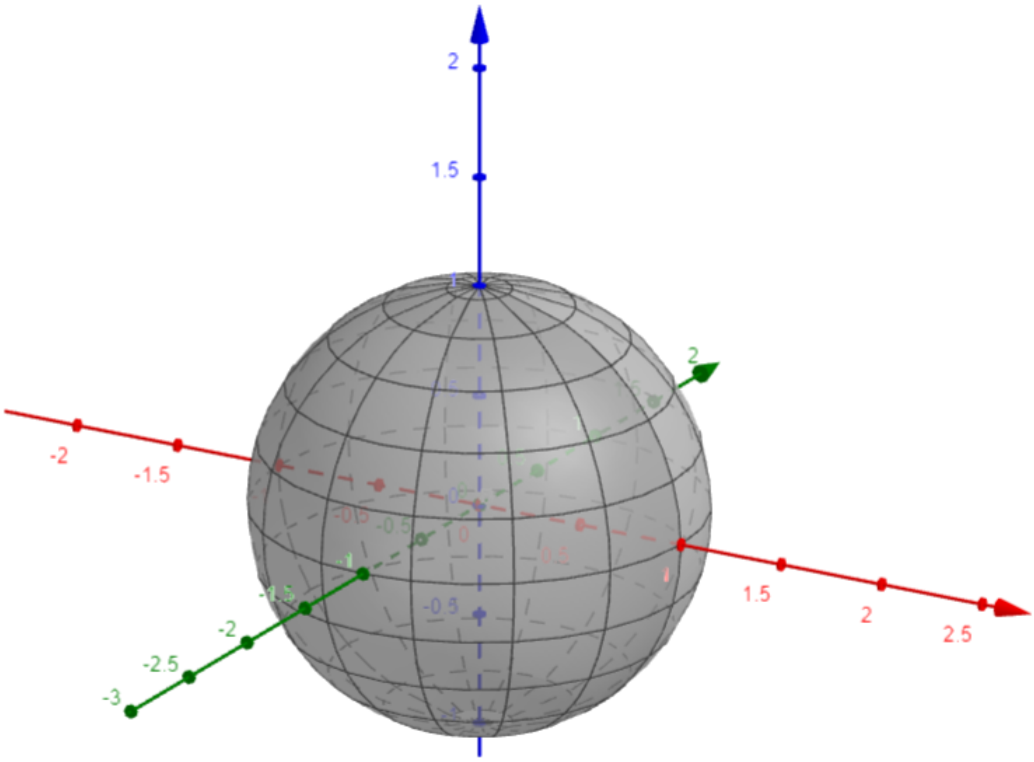
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(1) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3z^2.$$

Prema teoremu o divergenciji tok polja $\vec{a}$ kroz sferu je jednak:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^1 3r^2\cos^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \cdot \frac{3r^5}{5}\Big|_0^1 \mathrm{d}\vartheta = \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta$$



Slika 6.33: Ploha $\vec{\Sigma}$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos\vartheta,\ \mathrm{d}t = -\sin\vartheta\, d\vartheta \\ 0 \mapsto 1,\ \ \pi \mapsto -1 \end{array} \right\} = \frac{6\pi}{5} \int_{1}^{-1} t^2(-\mathrm{d}t)$$

$$= \frac{6\pi}{5} \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\pi}{5}(1+1) = \frac{4\pi}{5}.$$

□

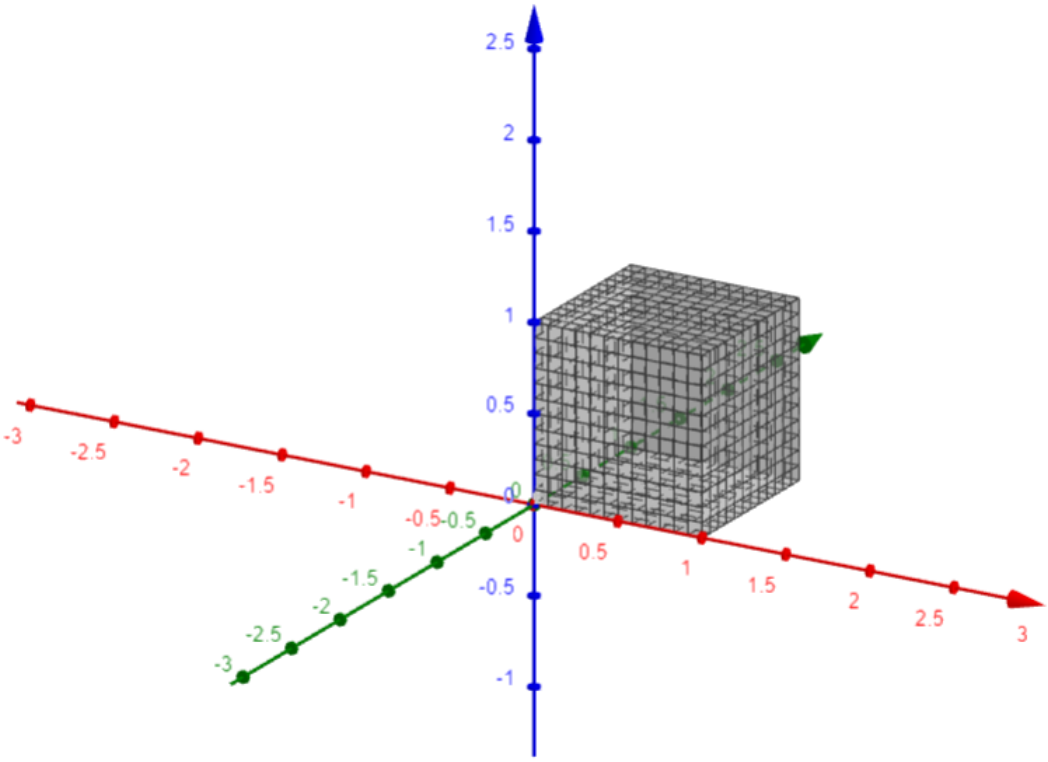
Zadatak 6.19. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ po oplošju kocke $[0,1]^3$. Skicirajte kocku.

Rješenje: Odredimo $\operatorname{div} \vec{a} = 2x + 2y + 2z$. Prema teoremu o divergenciji vrijedi:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 (2x+2y+2z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (2xz + 2yz + z^2)\big|_0^1 \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (2x+2y+1)\mathrm{d}y = \int_0^1 (2xy + y^2 + y)\big|_0^1 \mathrm{d}x$$



Slika 6.34: Kocka Ω

$$= \int_0^1 (2x+1+1)\mathrm{d}x = (x^2+2x)\big|_0^1 = 3.$$

$\square$

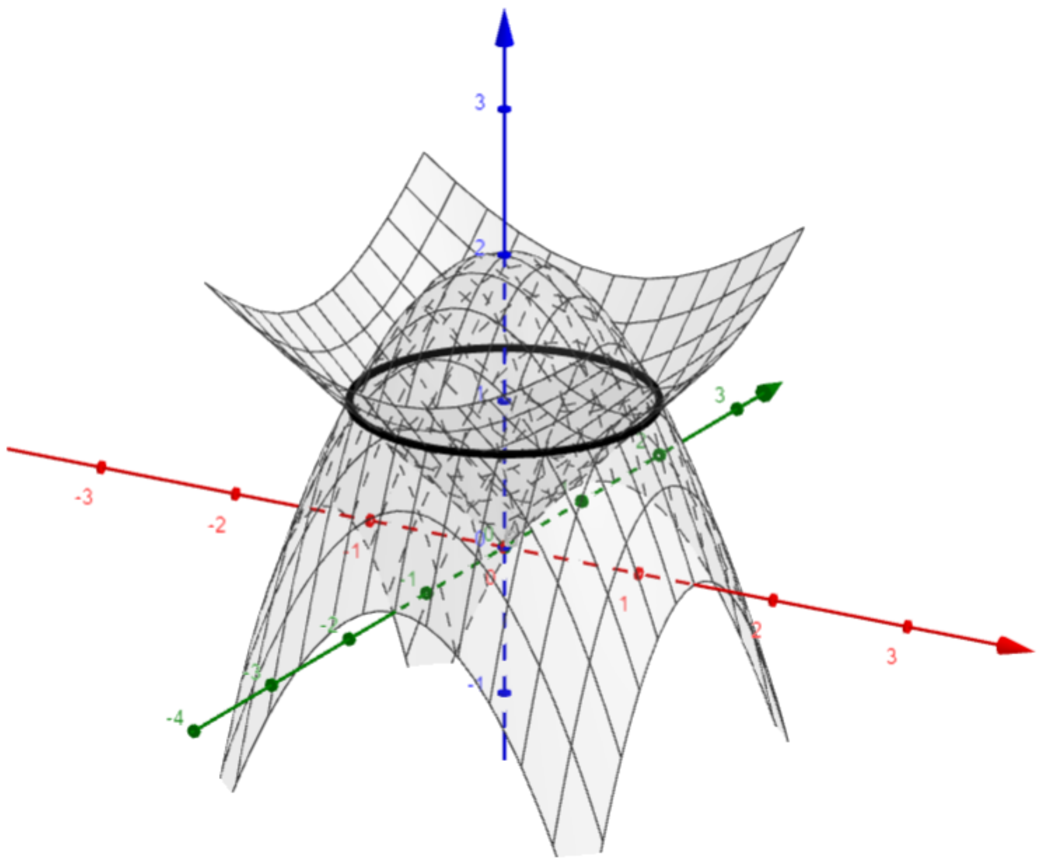
Zadatak 6.20. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{a} = x^2\vec{i} - 2xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ kroz zatvorenu plohu koja se sastoji od ploha $z = 2 - x^2 - y^2$ i $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Skicirajte plohu.

Rješenje: Odredimo najprije presjek kružnog paraboloida $z = 2 - x^2 - y^2$ i kružnog stošca $z = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$2 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2}\,(\rho = \sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow 2 - \rho^2 = \rho$$

$$\Rightarrow \rho^2 + \rho - 2 = 0 \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vidimo dakle, da je presjek ploha kružnica radijusa $r = 1$ sa središtem u točki $(0,0,1)$ na osi z. Volumen Ω kojeg zatvaraju zadane plohe ćemo opisati u cilindričnim koordinatama. Znamo da je div $\vec{a} = 2x - 2x + 3 = 3$. Prema



Slika 6.35: Ploha $\vec{\Sigma}$

teoremu o divergenciji računamo:

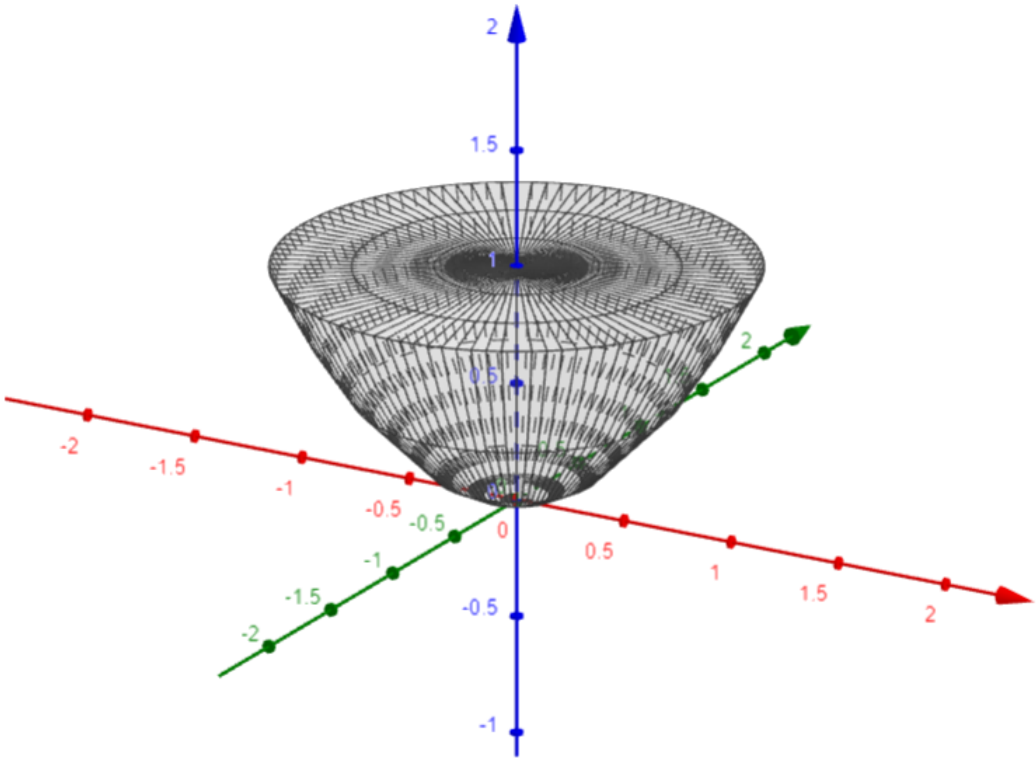
$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} 3\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho\, \mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi = 3 \cdot 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{2}.$$

$\square$

Zadatak 6.21. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\, \mathrm{d}\vec{S}$, gdje je $\vec{a} = xz\vec{i} + x^2y\vec{j} + y^2z\vec{k}$, ako je $\vec{\Sigma}$ zatvorena ploha orijentirana u smjeru vanjskih normala, a sastavljena od paraboloida $z = x^2 + y^2$ i ravnine $z = 1$. Skicirajte plohu.



Slika 6.36: Ploha $\vec{\Sigma}$

Rješenje: Zadane plohe zatvaraju volumen Ω koji ćemo opisati u cilindričnim koordinatama (pogledajte sliku 6.36). Odredimo div $\vec{a} = z + x^2 + y^2$. Sada prema teoremu o divergenciji računamo:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} (z + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^1 (z+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left(\rho \cdot \frac{z^2}{2} + \rho^3 z\right)\Big|_{\rho^2}^1 \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left(\frac{\rho}{2} + \rho^3 - \frac{3}{2}\rho^5\right)\mathrm{d}\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

□

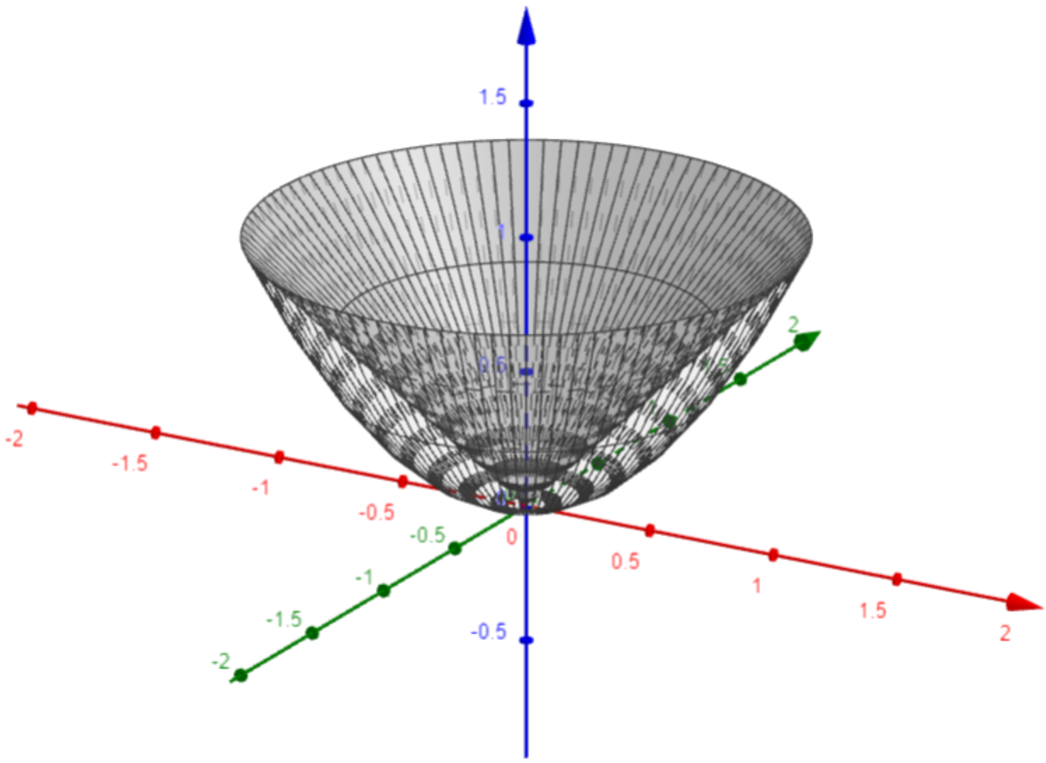
Zadatak 6.22. Izračunajte $\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S}$, gdje je $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z\vec{k}$, ako je $\vec{\Sigma}$ zatvorena ploha orijentirana u smjeru vanjskih normala sastavljena od paraboloida $z = x^2 + y^2$ i stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) direktno,

b) pomoću teorema o divergenciji.

Skicirajte plohu.

Rješenje:



Slika 6.37: Ploha $\vec{\Sigma}$

a) Presjek stošca i paraboloida je očito kružnica radijusa $r = 1$ sa središtem u točki $(0, 0, 1)$ na osi z. Prema tome, projekcija D plohe $\vec{\Sigma}$ na xy-ravninu je krug sa središtem u ishodištu radijusa $r = 1$.

Stožac $z = f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ je orijentiran normalom $\vec{n}_1$ koja zatvara šiljasti kut s vektorom $\vec{k}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow n_1 = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{j} + \vec{k}.$$

Odredimo:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_1 = -\frac{x^2z}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2z}{\sqrt{x^2+y^2}} + z = -x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Paraboloid $z = f_2(x,y) = x^2 + y^2$ je orijentiran normalom $\vec{n}_2$ koja zatvara tupi kut s vektorom $\vec{k}$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2y \Rightarrow n_2 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}.$$

Nađimo:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_2 = 2x^2z+2y^2z-z = 2x^4+2y^4+4x^2y^2-x^2-y^2 = 2(x^2+y^2)^2-x^2-y^2.$$

Sada zbog aditivnosti integrala po području integracije vrijedi:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D \vec{a}\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \vec{a}\cdot\vec{n}_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (-2x^2 - 2y^2 + \sqrt{x^2+y^2} + 2(x^2+y^2)^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 (-2r^2 + r + 2r^4)\,r\,\mathrm{d}r = 2\pi\Big(-\frac{2r^4}{4} + \frac{r^3}{3} + \frac{2r^6}{6}\Big)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\Big) = 2\pi\cdot\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

b) Stožac i paraboloid zatvaraju tijelo Ω koje ćemo opisati u cilindričnim koordinatama. Prema teoremu o divergenciji vrijedi:

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\Omega (z + z + 1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{\rho} (2z+1)\rho\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (\rho z^2 + \rho z)\Big|_{\rho^2}^{\rho}\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 (\rho^3 + \rho^2 - \rho^5 - \rho^3)\mathrm{d}\rho = 2\pi\Big(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^6}{6}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

□

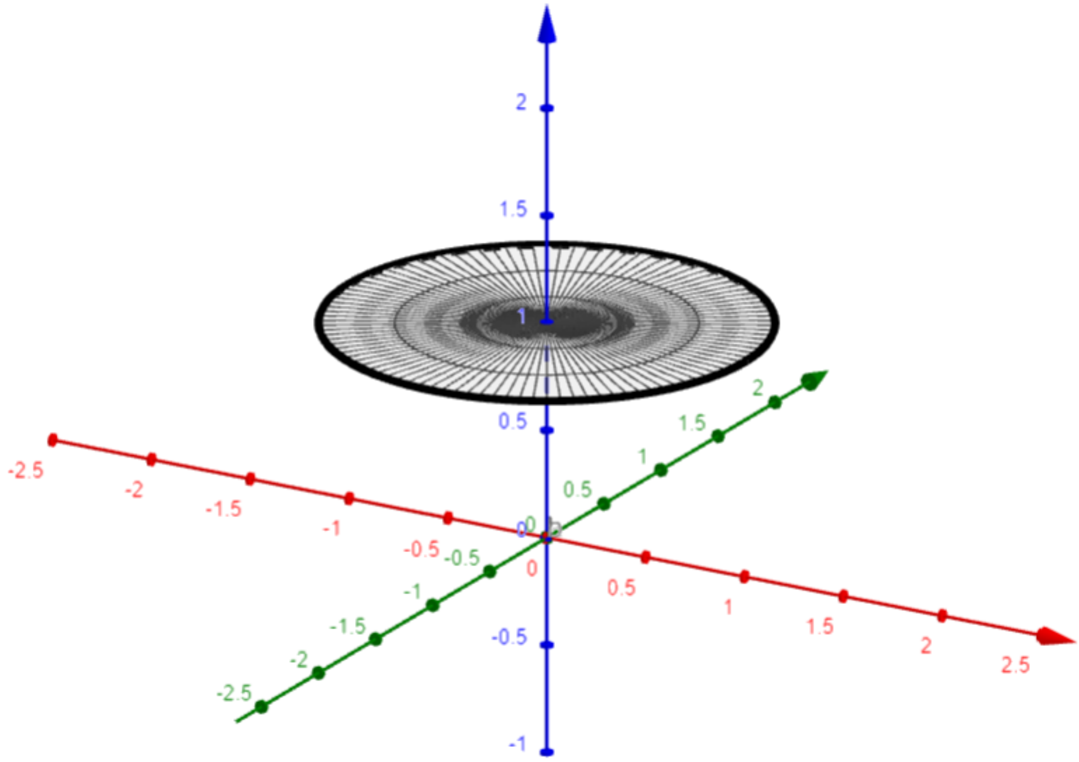
Stokesov teorem

Teorem. *(Stokes) Neka je $\vec{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^3$ zatvorena krivulja koja omeđuje plohu $\vec{\Sigma}$ ($\partial\vec{\Sigma} = \vec{\Gamma}$) orijentirana pozitivno ako se gleda iz vrha normale na plohu $\vec{\Sigma}$ i neka je $\vec{a}$ dovoljno glatko vektorsko polje definirano na području koje sadrži plohu $\vec{\Sigma}$. Tada vrijedi:*

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = \iint_{\vec{\Sigma}} \mathrm{rot}\, \vec{a}\, d\vec{S}.$$

Zadatak 6.23. Primjenom Stokesovog teorema izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} xy^2 \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$ ako je $\vec{\Gamma}$ kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i $z = 1$. Skicirajte krivulju i plohu.

Rješenje: Odredimo rotaciju vektorskog polja $\vec{a}$:



Slika 6.38: Ploha $\vec{\Sigma}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 1 & z \end{vmatrix} = -2xy\,\vec{k}.$$

Budući da jednadžba plohe $\vec{\Sigma}$ ima oblik $z = f(x, y) = 1$, normala na plohu je $\vec{n} = \vec{k}$, tako da vrijedi $\operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n} = -2xy$. Sada prema Stokesovom teoremu vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\vec{\Sigma}} \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{D} (-2xy)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^2 \cos\varphi \sin\varphi\, r\,\mathrm{d}r = -2\int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 \mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\cdot \left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Integral također možemo izračunati direktno pomoću formule za krivuljni integral 2. vrste. Parametriziramo krivulju $\vec{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) &= \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t \\ z(t) &= 1 \Rightarrow z'(t) = 0 \\ t &\in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Sada računamo integral:

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t + 1\cdot 0)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t \cos t + \cos t)\mathrm{d}t = \left(-\frac{\sin^4 t}{4} + \sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

□

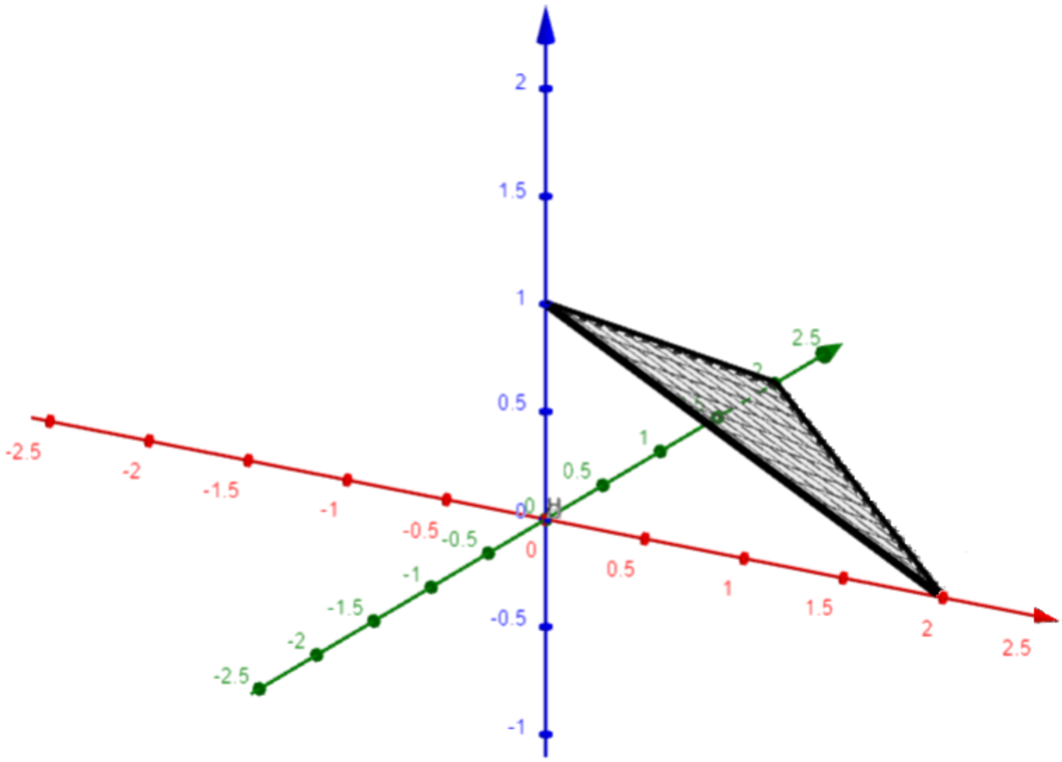
Zadatak 6.24. Primjenom Stokesovog teorema izračunajte $\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r}$, ako je $\vec{a} = 2xz\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$, a $\vec{\Gamma}$ krivulja nastala presjekom ravnine $x + y + 2z = 2$ s koordinatnim ravninama. Skicirajte krivulju i plohu.

Rješenje: Jednadžba plohe $\vec{\Sigma}$ (dio ravnine u 1. oktantu) ima oblik:

$$z = f(x, y) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2},$$

pa je normala na plohu koja zatvara šiljsti kut s vektorom $\vec{k}$ jednaka $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$. Odredimo rotaciju vektorskog polja $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & -x & z \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} - (0 - 2x)\vec{j} + (-1 - 0)\vec{k} = 2x\vec{j} - \vec{k}.$$



Slika 6.39: Ploha $\vec{\Sigma}$

Sada je $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n} = x - 1$, pa prema Stokesovom teoremu vrijedi (prijekcija D plohe na xy-ravninu je pravokutan trokut s katetama na koordinatnim osima i hipotenuzom na pravcu $y = 2 - x$):

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\vec{\Sigma}} \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (x-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} (x-1)\mathrm{d}y = \int_0^2 (x-1)(2-x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 (2x - 2 - x^2 + x)\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Big|_0^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - 4 = -\frac{2}{3}.$$

$\square$

Literatura

[1] I. Brnetic, V. Županovic, *Višestruki integrali*, Element, Zagreb, 2011.

[2] B. P. Demidovic i ostali, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehnicke nauke*, Tehnicka Knjiga, Zagreb, 1975.

[3] T. Došlic, N. Sandric, *Matematika 1*, Gradevinski fakultet (Sveucilište u Zagrebu), interna skripta, 2008. `http://www.grad.unizg.hr/predmet/mat1_a`

[4] T. Došlic, A. Filipin, *Matematika 2*, Gradevinski fakultet (Sveucilište u Zagrebu), interna skripta, 2012. `http://www.grad.unizg.hr/predmet/mat2_a`

[5] T. Došlic, D. Pokaz, T. Slijepcevic-Manger, K. A. Škreb, *Matematika 3*, Gradevinski fakultet (Sveucilište u Zagrebu), interna skripta, 2016. `http://www.grad.unizg.hr/predmet/mat3_a`

[6] N. Elezovic, *Diferencijalne jednadžbe*, Element, Zagreb, 2010.

[7] S. Kurepa, *Matematicka analiza 1 – Diferenciranje i integriranje*, Školska Knjiga, Zagreb, 1997.

[8] S. Kurepa, *Matematicka analiza 2 – Funkcije jedne varijable*, Školska Knjiga, Zagreb, 1997.

[9] S. Kurepa, *Matematicka analiza 3 – Funkcije više varijabli*, Tehnicka Knjiga, Zagreb, 1989.

[10] V. P. Minorski, *Zbirka zadataka više matematike*, Tehnicka Knjiga, Zagreb, 1971.

[11] M. Pašic i ostali, *Vektorska analiza*, Element, Zagreb, 2011.

[12] Š. Ungar, *Matematicka analiza u $\mathbb{R}^n$*, Golden Marketing - Tehnicka Knjiga, Zagreb, 2005.