1. Uvod

1.1. Osnovna podjela mehanike

Mehanika je znanost koja proučava zakonitosti i uzroke gibanja. Mehaniku dijelimo na tri osnovna područja:

- statiku, koja proučava zakonitosti ravnoteže sila,
- kinematiku, koja proučava geometrijske zakonitosti gibanja bez obzira na uzrok gibanja,
- dinamiku, koja proučava gibanja i sile koje uzrokuju gibanje.

Prema agregatnom stanju područja koje proučavamo mehaniku dijelimo na

- mehaniku tijela,
- mehaniku fluida (tekućina i plinova).

Prema objektu promatranja mehaniku dijelimo na

- mehaniku točke,
- mehaniku sustava točaka,
- mehaniku krutih tijela.

1.2. Sila

Sila je međusobno djelovanje dva tijela. Silu definiramo kao djelovanje na pravcu. Kod promatranja djelovanja sile na konstrukciju bitne su točke u kojima sila djeluje na konstrukciju. Točku u kojima pravac djelovanja sile siječe os konstrukcije definiramo kao hvatište sile. Silu $\mathbf{K}$ definiramo iznosom $K = |\mathbf{K}|$, pravcem (smjerom) djelovanja u prostoru, orijentacijom (usmjerenjem) na pravcu djelovanja i hvatištem,

$$\mathbf{K} = K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}\ . \tag{1.2.1}$$

Silu možemo definirati i iznosom K i jediničnim vektorom u smjeru sile, $\mathbf{e}_K$,

$$\mathbf{K} = K\mathbf{e}_K\ . \tag{1.2.2}$$

Kod ravninskih zadaća silu promatramo u ravnini Π_{xz} što znači da i u vektorskom prikazu sila ima samo dvije komponente

$$\mathbf{K} = K_x\mathbf{i} + K_z\mathbf{k}\ . \tag{1.2.3}$$

Mjerna jedinica za silu je Newton, [N]. Sila od 1N odgovara težini tijela mase 1kg s ubrzanjem od 1m/s^2. U proračunu konstrukcija praktičnija je osnovna mjera za silu 1kN = 1000N, koja odgovara težini mase 100kg pod djelovanjem gravitacijskog ubrzanja, ($g \approx 10$ m/s^2).

1.3. Newtonovi aksiomi

Osnovne zakonitosti mehanike izrečene su Newtonovim aksiomima.

1. Svako tijelo u mirovanju ili jednolikom pravocrtnom gibanju zadržava stanje mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja dok na tijelo ne djeluje sila.

2. Promjena količine gibanja jednaka je sili koja djeluje na tijelo,

$$\mathbf{F} = \frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}\,. \tag{1.3.4}$$

3. Za svaku akciju postoji i pripadna reakcija. Djelovanje jednog tijela na drugo tijelo izaziva i djelovanje drugog tijela na prvo. Npr. gravitacijsko djelovanje na bilo koji predmet izaziva i istovrijednu silu kojom taj predmet djeluje na podlogu.

1.4. Materijalna točka i nedeformabilno tijelo

Osnovne zakonitosti statike postavit ćemo uz određene idealizacije. Osnovna idealizacija je definiranje materijalne točke, tijela bez dimenzije za koje znamo položaj i fizikalna svojstva. Nedeformabilno tijelo je tijelo u prostoru definiranih dimenzija, poznatog položaja, apsolutne krutosti (pod djelovanjem opterećenja ne dolazi do deformacije tijela, geometrija tijela nakon djelovanja opterećenja jednaka je početnoj geometriji). Deformabilno tijelo je tijelo u prostoru, definiranih dimenzija, poznatog položaja, ali uslijed djelovanja opterećenja poprima novi položaj (npr. greda pod djelovanjem opterećenja dobiva progib). U linearnoj statici jednadžbe ravnoteže postavljamo prema geometriji prije deformacije (zbog malih odstupanja od početnog položaja), a u nelinearnoj statici jednadžbe ravnoteže postavljamo prema geometriji nakon deformacije.

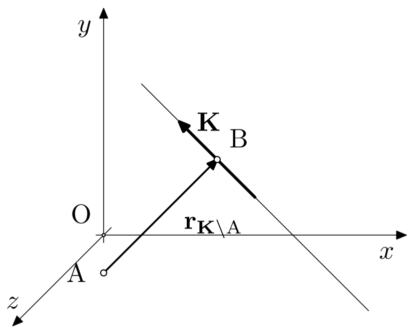
2. Moment

2.1. Moment sile na točku

Moment sile $\mathbf{K}$ na točku A u prostoru vektorski je produkt radij-vektora od točke A do bilo koje točke na pravcu sile $\mathbf{K}$ s vektorom sile $\mathbf{K}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}} = \mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} \; . \tag{2.1.1}$$

Vektor momenta okomit je na ravninu koju tvore pravac sile $\mathbf{K}$ i točka A. Tri vektora $(\mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}}, \mathbf{K}, \mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K}$ tvore desnu bazu u prostoru. Ako točku A definiramo koordinatama

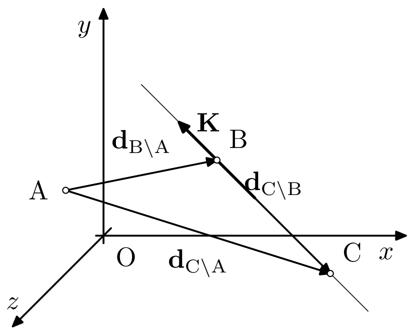


Slika 2.1: Moment sile na točku

$(x_\mathsf{A}, y_\mathsf{A}, z_\mathsf{A})$, a na pravcu sile $\mathbf{K}$ odaberemo proizvoljnu točku B s koordinatama $(x_\mathsf{B}, y_\mathsf{B}, z_\mathsf{B})$, uz zadani vektor sile $\mathbf{K} = K_x\mathbf{i} + K_y\mathbf{j} + K_z\mathbf{k}$, slijedi izračun vektora momenta prema izrazu

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_\mathsf{B} - x_\mathsf{A} & y_\mathsf{B} - y_\mathsf{A} & z_\mathsf{B} - z_\mathsf{A} \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} \; . \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Neovisnost izbora točke na pravcu sile možemo pokazati ako uzmemo neku drugu točku na pravcu sile $\mathbf{K}$, točku C. Vektor $\mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{A}}$ možemo izraziti kao zbroj vektora $\mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}}$ i vektora



Slika 2.2: Moment sile ne ovisi o izboru točke na pravcu sile

$\mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}}$ koji je na pravcu sile $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{A}} = \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} + \mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}} \; . \tag{2.1.3}$$

Izraz za moment sada glasi

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} \\ &= \left(\mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} + \mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}}\right) \times \mathbf{K} \\ &= \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} + \mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}} \times \mathbf{K} \\ &= \mathbf{M} + \mathbf{0} = \mathbf{M}\,, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

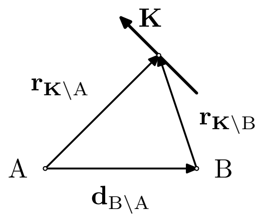
pri čemu je drugi vektorski produkt, $(\mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}} \times \mathbf{K})$, jednak nuli jer su vektori $\mathbf{d}_{\mathsf{C}\backslash\mathsf{B}}$ i $\mathbf{K}$ kolinearni.

Poseban slučaj je kad su točka i sila u istoj ravnini, $\Pi_{\mathsf{A},\mathbf{K}}$. Tada je vektor momenta okomit na tu ravninu. Ako su točka i sila u nekoj od koordinatnih ravnina, npr. u ravnini Π_{xz}, vektor momenta okomit je na tu ravninu, na pravcu jediničnog vektora $\mathbf{j}$,

$$\mathbf{M} = \pm\,(d \cdot M)\,\mathbf{j}\,, \tag{2.1.5}$$

gdje je d najkraća udaljenost (duljina okomice) točke A od pravca sile $\mathbf{K}$, a predznak ovisi o smjeru vrtnje oko točke A (suprotno od smjera kazaljke na satu predznak je pozitivan, u smjeru kazaljke na satu predznak je negativan, što proizlazi iz vektorske jednadžbe za navedeni moment).

Moment u točki A možemo izraziti pomoću momenta u točki B. Neka je $\mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ moment sile $\mathbf{K}$ na točku A, $\mathbf{M}_{\mathsf{B}}$ moment iste sile na točku B i neka je vektor $\overrightarrow{\mathsf{AB}} = \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}}$.



Slika 2.3: Moment sile na razne točke

Relacija između momenata na točku A i B slijedi,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}} &= \mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} = \left(\mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} + \mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{B}}\right) \times \mathbf{K} \\ &= \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} + \mathbf{r}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{B}} \times \mathbf{K} = \mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} + \mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash\mathsf{B}}\,. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Ako se točke nalaze na pravcu paralelnom pravcu sile $\mathbf{K}$ onda su momenti jednaki zbog $\mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}} \times \mathbf{K} = \mathbf{0}$ za vektore na paralelnim pravcima, $p_{\mathbf{d}_{\mathsf{B}\backslash\mathsf{A}}} \parallel p_{\mathbf{K}}$.

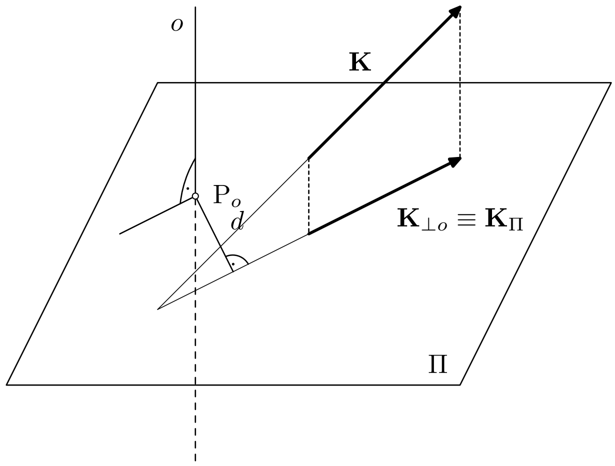
2.2. Moment sile oko osi

Moment sile oko osi je, u fizikalnom smislu, mjera kojom sila utječe na kutno ubrzanje nedeformabilnog tijela koje može samo rotirati oko nepomične osi. To znači da na moment utječe samo projekcija sile na ravninu okomitu na os. Komponenta sile paralelna promatranoj osi ne utječe na moment oko osi. Proučavamo djelovanje proizvoljne sile $\mathbf{K}$ na promatranu os o. Moment sile $\mathbf{K}$ na promatranu os o možemo odrediti tako da iz proizvoljne točke na osi, T_o, postavimo vektor prema proizvoljnoj točki na pravcu sile,

$\mathsf{T}_{\mathbf{K}}$. Takav vektor označimo $\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o}$. Skalarni produkt jediničnog vektora u smjeru promatrane osi o, $\mathbf{e}_o$, i vektorskog produkta tog vektora $\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o}$ i vektora zadane sile $\mathbf{K}$ daje iznos momenta zadane sile na promatranu os,

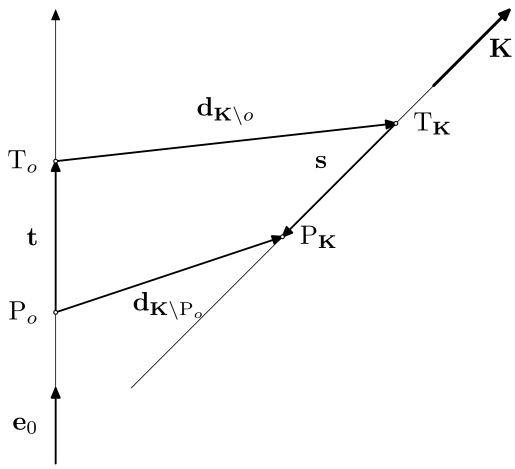
$$M_{\mathbf{K}\backslash o} = \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o \,. \tag{2.2.7}$$

Iz grafičke prezentacije navedenog izraza slijedi da u bilo kojoj točki promatrane osi odredimo ravninu Π okomitu na os o i definiramo probodište ravnine i te osi. $\{\mathsf{P}_o\} = o \cap \Pi$. Nakon toga projiciramo silu $\mathbf{K}$ na tu ravninu i projekciju označimo $\mathbf{K}_{\perp o}$. Odredimo okomicu iz probodišta na projicirani pravac sile kao najkraću udaljenost probodišta i sile, d. Produkt najkraće udaljenosti i iznosa projicirane sile na ravninu daje iznos momenta oko osi uz poštivanje predznaka za moment (pravilo desne ruke).



Slika 2.4: Grafički prikaz određivanja momenta oko osi

Iznos momenta ne ovisi o izboru točka na osi i pravcu sile. Možemo promatrati neke druge dvije točke, P_o na osi i $\mathsf{P}_{\mathbf{K}}$ na pravcu sile. Pripadni vektor označimo $\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{P}_o}$. Neka



Slika 2.5: Neovisnost momenta oko osi o izboru točaka

su vektori $\mathbf{t} = \overrightarrow{\mathsf{P}_o\mathsf{T}_o}$ i $\mathbf{s} = \overrightarrow{\mathsf{T}_k\mathsf{P}_k}$. Očito vrijedi jednakost

$$\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{P}_o} = \mathbf{t} + \mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} + \mathbf{s} \,. \tag{2.2.8}$$

Definiranjem momenta pomoću novih točaka slijedi

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{K}\backslash o} &= \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{P}_o} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o = \left[\left(\mathbf{t} + \mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{P}_o} + \mathbf{s}\right) \times \mathbf{K}\right] \cdot \mathbf{e}_o \\ &= (\mathbf{t} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}_o + \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o + (\mathbf{s} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}_o \\ &= \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o \,, \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

pri čemu vrijedi da je mješoviti produkt $(\mathbf{t} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}_o$ jednak nuli jer su vektori $\mathbf{t}$ i $\mathbf{e}_o$ kolinearni (u istoj su ravnini), a mješoviti produkt $(\mathbf{s} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}_o$ jednak je nuli jer su $\mathbf{s}$ i $\mathbf{K}$ kolinearni (na istom su pravcu).

Za prikaz utjecaja samo komponente zadane sile u ravnini okomitoj na os možemo zadanu silu rastaviti na dvije komponente, na jednu komponentu koja leži u ravnini okomitoj na promatranu os o, $\mathbf{K}_{\perp o}$, i komponentu paralelnu s osi o, $\mathbf{K}_{\parallel o}$. Tada vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{K}\backslash o} &= \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o = \left[\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \left(\mathbf{K}_{\parallel o} + \mathbf{K}_{\perp o}\right)\right] \cdot \mathbf{e}_o \\ &= \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}_{\parallel o}\right) \cdot \mathbf{e}_o + \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}_{\perp o}\right) \cdot \mathbf{e}_o \\ &= \left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}_{\perp o}\right) \cdot \mathbf{e}_o \,, \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

pri čemu vrijedi da je mješoviti produkt $\left(\mathbf{d}_{\mathbf{K}\backslash o} \times \mathbf{K}_{\parallel o}\right) \cdot \mathbf{e}_o$ jednak nuli jer su $\mathbf{K}_{\parallel o}$ i $\mathbf{e}_o$ paralelni (u istoj su ravnini).

2.3. Numerički primjeri

Primjer 2.3.1. *Odredite moment sile* $K = 20\sqrt{3}$ kN, *koja prolazi kroz točku* $\mathsf{K} = (4, -1, 2)$ *u smjeru vektora* $\mathbf{v}_\mathbf{K} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ *na točku* $\mathsf{T} = (2, 1, -1)$ *i pokažite da iznos momenta ne ovisi o izboru točke na pravcu sile* $\mathbf{K}$.

Jedinični vektor pravca sile $\mathbf{K}$ glasi

$$\mathbf{k}_0 = \frac{\mathbf{v}_\mathbf{K}}{|\mathbf{v}_\mathbf{K}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \,,$$

što povlači da je vektor sile jednak

$$\mathbf{K} = K\mathbf{k}_0 = -20\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 20\mathbf{k} \,.$$

Ako uzmemo vektor $\overrightarrow{\mathsf{TK}}$ kao radij-vektor od točke T do sile $\mathbf{K}$,

$$\overrightarrow{\mathsf{TK}} = (x_\mathsf{K} - x_\mathsf{T})\,\mathbf{i} + (y_\mathsf{K} - y_\mathsf{T})\,\mathbf{j} + (z_\mathsf{K} - z_\mathsf{T})\,\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \,,$$

slijedi izraz za moment

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{T}} &= \overrightarrow{\mathsf{TK}} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ -20 & -20 & 20 \end{vmatrix} \\ &= 20\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 80\mathbf{k} \,, \end{aligned}$$

a iznos momenta dobivamo prema

$$M_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{T}} = \left|\mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{T}}\right| = \sqrt{20^2 + (-100)^2 + (-80)^2} = \sqrt{16800} = 129,615 \text{ kNm} \,.$$

Ako uzmemo neku drugu točku na pravcu sile $\mathbf{K}$, točku $\mathsf{P} = (3, -2, 3)$, radij-vektor glasi

$$\overrightarrow{\mathsf{TP}} = (x_\mathsf{P} - x_\mathsf{T})\,\mathbf{i} + (y_\mathsf{P} - y_\mathsf{T})\,\mathbf{j} + (z_\mathsf{P} - z_\mathsf{T})\,\mathbf{k} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \,,$$

moment slijedi prema izrazu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{K}\backslash \mathsf{T}} &= \overrightarrow{\mathsf{TP}} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ -20 & -20 & 20 \end{vmatrix} \\ &= 20\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 80\mathbf{k}\ , \end{aligned}$$

na temelju čega možemo uočiti da smo dobili isti moment neovisno o izboru točke na pravcu sile.

Primjer 2.3.2. *Odredite moment sile* $\mathbf{K} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (kN), *koja prolazi kroz točku* $\mathsf{K} = (4, 4, 4)$ *na os o koja prolazi kroz točku* $\mathsf{T} = (0, 0, 1)$ *paralelno s koordiatnom osi y, pokažite da iznos momenta ne ovisi o izboru točaka na osi o i na pravcu sile* $\mathbf{K}$, *pokažite da je isto rješenje i preko projekcije sile na ravninu okomitu na os.*

Jedinični vektor zadane osi o jednak je $\mathbf{e}_o = \mathbf{j}$. Za točke na osi i na pravcu sile odaberemo točke $\mathsf{T} \in o$ i $\mathsf{K} \in p_{\mathbf{K}}$, što povlači i pripadni vektor $\overrightarrow{\mathsf{TK}} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Iznos traženog momenta sile na zadanu os slijedi prema izrazu

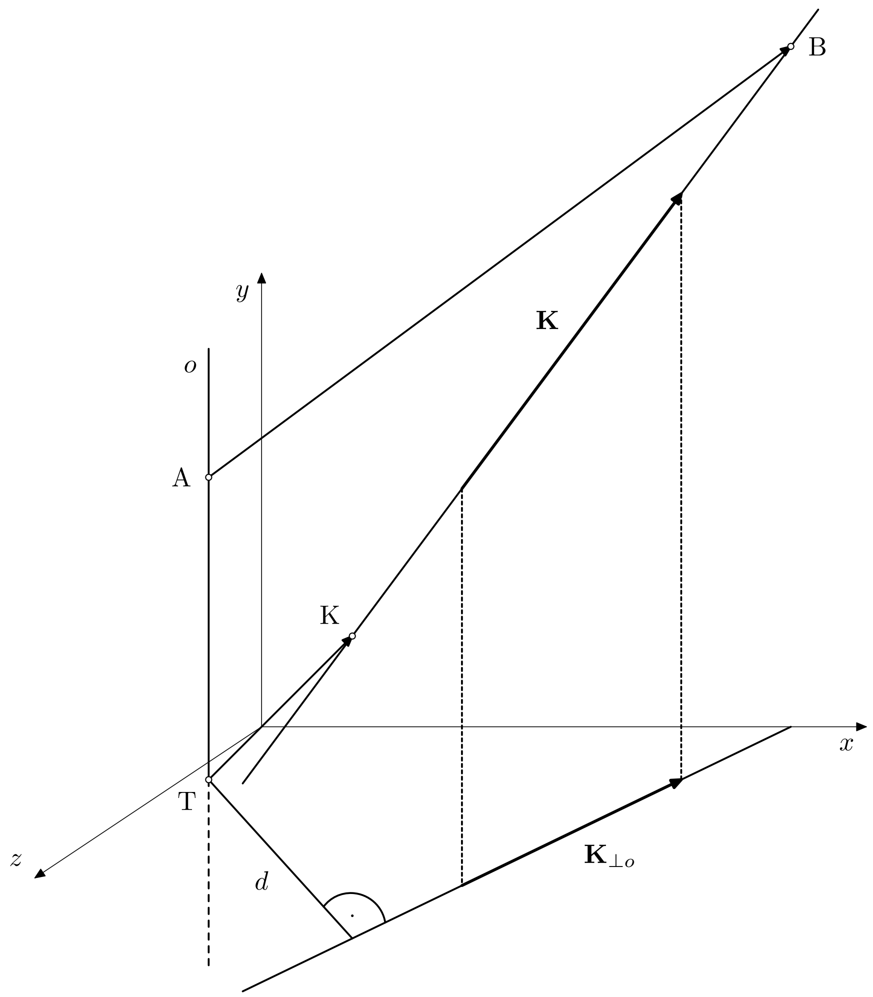
$$\begin{aligned} M_{\mathbf{K}\backslash o} &= \left(\overrightarrow{\mathsf{TK}} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} = (-31\mathbf{i} + 25\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = 25 \text{ kNm}\ . \end{aligned}$$

Ako za točku na osi o uzmemo točku A=(0,4,1), a za točku na pravcu sile $\mathbf{K}$ točku B=(7,9,0), pripadni vektor glasi $\overrightarrow{\mathsf{AB}} = 7\mathbf{i}+5\mathbf{j}-1\mathbf{k}$. Iznos traženog momenta sile na zadanu os sada slijedi prema izrazu

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{K}\backslash o} &= \left(\overrightarrow{\mathsf{AB}} \times \mathbf{K}\right) \cdot \mathbf{e}_o \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} = (-15\mathbf{i} + 25\mathbf{j} + 20\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = 25 \text{ kNm}\ , \end{aligned}$$

na temelju čega možemo uočiti da smo dobili istu vrijednost.

Ako u točki T definiramo ravninu okomitu na zadanu os o jasno slijedi da je to onda Π_{xz} ravnina. Projekcija sile na Π_{xz} ravninu je sila $\mathbf{K}_{\perp o} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ i prolazi kroz točku (4,0,4) odnosno pravcem određenim jednadžbom $p_{\mathbf{K}_{\perp o}} \equiv 3z + 4x - 28 = 0$. Iznos sile $\mathbf{K}_{\perp o}$ je 5kN. Udaljenost probodišta osi o s ravninom Π_{xz}, točke T, od pravca $p_{\mathbf{K}_{\perp o}}$ iznosi 5m. Za traženi moment sile $\mathbf{K}$ oko osi o slijedi da iznosi 25kNm, u pozitivnom smjeru oko osi o.



Slika 2.3.2.1: Grafički prikaz sila u primjeru 2

3. Ravnoteža i statička ekvivalentnost sustava sila i momenata

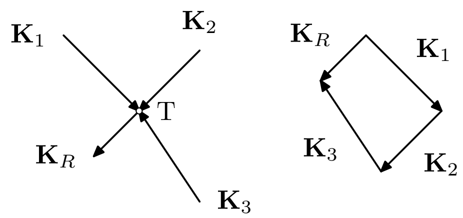
3.1. Ravnoteža

U statičkom smislu ravnotežu shvaćamo kao mirovanje konstrukcije uz djelovanje sila na konstrukciju. Nakon djelovanja sila na konstrukciju, konstrukcija dobiva određenu deformaciju ovisnu o iznosu sila djelovanja i u takvom se položaju nalazi u ravnoteži.

3.2. Rezultantna sila u materijalnoj točki

Neka je u materijalnoj točki T zadan sustav sila $\mathbf{K}_i,\ i = 1, n$. Rezultanta sustava sila, rezultanta sila, vektorski je zbroj svih sila u sustavu

$$\mathbf{K}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i \ . \tag{3.2.1}$$



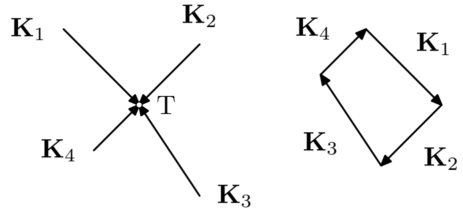
Slika 3.2.1: Rezultantno djelovanje sustava sila u materijalnoj točki

3.3. Ravnoteža materijalne točke

Promatramo materijalnu točku T na koju djeluje sustav sila, $\mathbf{K}_i,\ i = 1, n$. Ravnoteža je postignuta ako je rezultantno djelovanje sila jednako nuli,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \mathbf{0} \ . \tag{3.3.2}$$

U geometrijskom smislu poligon sila (grafički prikaz zbroja vektora sila) mora biti



Slika 3.3.2: Ravnoteža materijalne točke

zatvoren.

Ako na materijalnu točku djeluje samo jedna sila $\mathbf{K}$, postignuta je ravnoteža ako i samo ako vrijedi $\mathbf{K} = \mathbf{0}$, sila je jednaka nuli.

Ako na točku djeluju dvije sile, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, sustav je u ravnoteži ako i samo ako sile djeluju na istom pravcu, jednakog su iznosa ($K_1 = K_2$) i suprotnog smjera ($\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2$), vektorski zapisano

$$\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{0} \; . \tag{3.3.3}$$

3.4. Rezultantno djelovanje sustava sila i momenata

Promatramo sustav sila i momenata, $(\mathbf{K}_i^n, \mathbf{M}_j^m)$. Za zadane sile možemo naći rezultantno djelovanje (zbroj svih sila),

$$\mathbf{K}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i \; . \tag{3.4.4}$$

Ako vrijedi $\mathbf{K}_R \neq \mathbf{0}$, za proizvoljnu točku na pravcu djelovanja rezultantne sile možemo naći rezultantni moment,

$$\mathbf{M}_R = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}_{\mathbf{K}_i} \times \mathbf{K}_i \; , \tag{3.4.5}$$

gdje je $\mathbf{d}_{\mathbf{K}_i}$ udaljenost sile $\mathbf{K}_i$ od proizvoljne točke na pravcu rezultantne sile $\mathbf{K}_R$. Rezultantno djelovanje $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_R)$ zovemo dinama sustava sila i momenata, rezultantni vektor sila $\mathbf{K}_R$ glavni vektor sila, a rezultantni moment $\mathbf{M}_R$ glavni vektor momenta.

Ako rezultantna sila nije jednaka nul-vektoru, $\mathbf{K}_R \neq \mathbf{0}$, možemo naći pravac, paralelan pravcu rezultantne sile, za čije točke vrijedi da je rezultantni moment jednak nuli, $\mathbf{M}_R = \mathbf{0}$. Točke na tom pravcu zovemo točke redukcije, a pravac zovemo pravac redukcije. Ako vrijedi $\mathbf{K}_R = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_R \neq \mathbf{0}$, tada imamo rezultantni spreg sila (rezultantni koncentrirani moment), $\mathbf{M}_R$, jednak za bilo koju proizvoljno odabranu točku u prostoru. Ako vrijedi $\mathbf{K}_R = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_R = \mathbf{0}$ govorimo o statički neutralnom sustavu.

3.5. Ravnoteža u prostoru i ravnini

Promatramo sustav sila, $\mathbf{K}_i$, $i = 1, n$, i momenata, $\mathbf{M}_j$, $j = 1, m$, u prostoru. Takav sustav sila i momenata označavamo kao uređeni par $(\mathbf{K}_i^n, \mathbf{M}_j^m)$. Sustav sila i momenata $(\mathbf{K}_i^n, \mathbf{M}_j^m)$ je u ravnoteži ako je rezultantno djelovanje jednako nuli. To znači da je vektorski zbroj svih sila jednak nuli i da je vektorski zbroj svih koncentriranih momenata i momenata svih sila na proizvoljnu točku u ravnini jednak nuli,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \mathbf{0} \; , \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{d}_{\mathbf{K}_i \setminus \mathsf{T}} \times \mathbf{K}_i = \mathbf{0} \; , \tag{3.5.6}$$

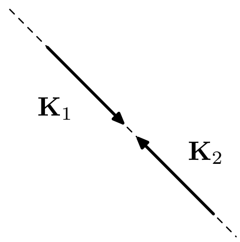
pri čemu je $\mathbf{d}_{\mathbf{K}_i \setminus \mathsf{T}}$ vektor udaljenosti sile $\mathbf{K}_i$ od proizvoljne točke T. Svakoj od ovih vektorskih jednadžbi (3.5.6) u trodimenzionalnom prostoru odgovaraju tri skalarne jednadžbe što čini šest skalarnih jednadžbi.

U slučaju da sve sile i svi momenti djeluju u ravnini vektorske jednadžbe jednake su kao i za prostor, ali vektorskom zbroju sila odgovaraju dvije skalarne jednadžbe (zbroj sila u smjeru dva neparalelna pravca koji razapinju promatranu ravninu, uglavnom u smjeru dva međusobno okomita pravca zbog jednostavnijeg daljnjeg proračuna), a vektorskom zbroju momenata odgovara jedna skalarna jednadžba (zbroj momenata na pravcu okomitom na promatranu ravninu, svi momenti koji djeluju u jednoj ravnini imaju u vektorskom zapisu samo komponentu okomito na promatranu ravninu) što čini ukupno tri skalarne jednadžbe.

Ako se sustav sastoji samo od dvije sile, $\mathbf{K}_1,\ \mathbf{K}_2$, načelo ravnoteže je identično slučaju djelovanja dviju sila u jednoj točki, odnosno sustav je u ravnoteži ako i samo ako sile djeluju na istom pravcu, jednakog su iznosa ($K_1 = K_2$) i suprotnog smjera ($\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_2$), vektorski zapisano

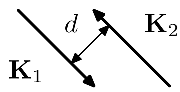
$$\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}\ . \tag{3.5.7}$$

To znači da je za ravnotežu nužno da su na istom pravcu. Nakon što je taj uvjet ispunjen možemo dalje promatrati da li su jednaki po iznosu i suprotnog smjera.



Slika 3.5.3: Dvije sile u ravnoteži

Ako sile nisu na istom pravcu ne mogu biti u ravnoteži. Sile mogu biti jednakog iznosa, suprotnog smjera, ali ako nisu na istom pravcu nisu u ravnoteži. Jedan takav primjer mogu biti dvije sile jednakih iznosa, suprotnih smjerova na dva paralelna pravca. Tada je rezultantno djelovanje tog para sila spreg sila, (Slika 3.5.4), moment koji jednak umnošku udaljenosti između pravaca djelovanja sila i iznosa sila, $M_R = \pm K_1 \cdot d = \pm K_2 \cdot d$, pri čemu predznak ovisi o smjeru vrtnje rezultantnog momenta.



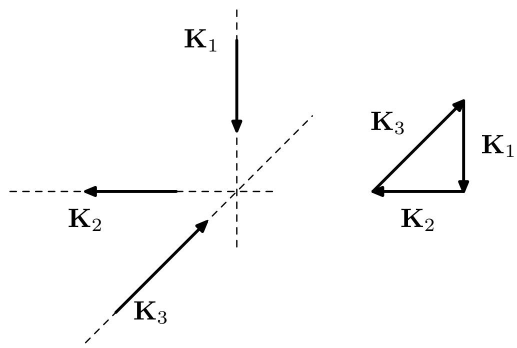
Slika 3.5.4: Spreg sila

Dvije su sile u ravnoteži ako i samo ako djeluju na istom pravcu, jednakog su iznosa i suprotnog smjera djelovanja.

Ako se sustav u ravnini sastoji samo od tri sile, $\mathbf{K}_1,\ \mathbf{K}_2,\ \mathbf{K}_3$, sustav je u ravnoteži ako i samo ako sile prolaze kroz istu točku (pravci djelovanja sila sijeku se u istoj točki) i zatvaraju trokut sila, vektorski zapisano

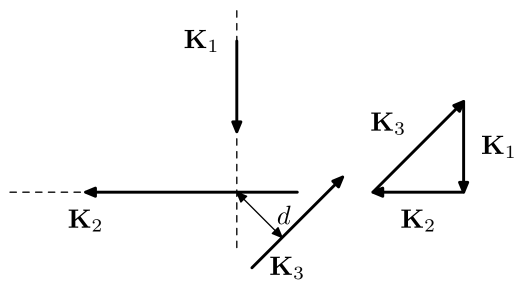
$$\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 = \mathbf{0}\ . \tag{3.5.8}$$

To znači da je za ravnotežu nužno da se pravci djelovanja sila sijeku u istoj točki. Nakon što je taj uvjet ispunjen, za ravnotežu je potrebno da zadane sile zatvaraju trokut sila.



Slika 3.5.5: Tri sile u ravnoteži

Ako se pravci djelovanja sila ne sijeku u istoj točki, sile ne mogu biti u ravnoteži. Sile mogu zatvarati trokut sila, ali ako im se pravci djelovanja ne sijeku u istoj točki sile nisu u ravnoteži, (Slika 3.5.6). U tom slučaju sila, čiji pravac djelovanja ne prolazi kroz točku u kojoj se sijeku pravci djelovanja drugih sila, daje moment (umnožak udaljenosti do točke u kojoj se sijeku druge dvije sile i iznosa sile koja ne prolazi tom točkom) na točku u kojoj se sijeku druge dvije sile i taj moment nije jednak nuli (sila nije jednaka nuli, udaljenost nije jednaka nuli jer ne prolazi kroz navedenu točku) što znači da sustav nije u ravnoteži.



Slika 3.5.6: Tri sile koje nisu u ravnoteži, a zatvaraju trokut sila

Tri su sile u ravnini u ravnoteži ako i samo ako prolaze kroz istu točku i zatvaraju trokut sila.

3.5.1. Formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže u prostoru

U postupku uravnotežavanja sustava sila i momenata u prostoru moramo riješiti vektorske jednadžbe ravnoteže, (3.5.6). Postupak se svodi na rješavanje šest skalarnih jednadžbi. Skalarne jednadžbe možemo postaviti kao

- jednadžbe projekcija sila na tri nekomplanarna pravca i jednadžbe projekcije momenata na tri nekomplanarne osi,
- jednadžbe projekcije sila na dva nekolinearna pravca i jednadžbe projekcije momenata na četiri nekomplanarne osi,
- jednadžbe projekcija sila na jedan pravac i jednadžbe projekcije momenata na pet nekomplanarnih osi,

- jednadžbe projekcije momenata na šest nekomplanarnih osi.

Konačan izbor formulacije ovisi o samom primjeru djelovanja koji trebamo uravnotežiti. Općenito imamo linearni sustav šest jednadžbi sa šest nepoznanica. Promišljanjem oko najjednostavnije formulacije za definiranje skalarnih jednadžbi možemo zadaću svesti na nekoliko manjih podsustava, npr. dva sustava s tri jednadžbe i tri nepoznanice ili tri sustava s dvije jednadžbe i dvije nepoznanice ili čak i na najjednostavniji slučaj da imamo šest jednadžbi u kojima će u svakoj jednadžbi biti samo po jedna nepoznanica.

3.5.2. Formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže u ravnini

U postupku uravnotežavanja sustava sila i momenata u ravnini opet moramo riješiti vektorske jednadžbe ravnoteže, (3.5.6). U ravnini taj se postupak svodi na rješavanje tri skalarne jednadžbe. Skalarne jednadžbe možemo postaviti kao

- jednadžbe projekcije sila na dva nekolinearna pravca i jednadžbe projekcije momenata na jednu točku,
- jednadžbe projekcija sila na jedan pravac i jednadžbe projekcije momenata na dvije točke,
- jednadžbe projekcije momenata na tri točke koje nisu na istom pravcu.

Konačan izbor formulacije skalarnih uvjeta u ravnini opet ovisi o samom primjeru djelovanja koji trebamo uravnotežiti. Općenito imamo linearni sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice. Promišljanjem oko najjednostavnije formulacije za definiranje skalarnih jednadžbi možemo zadaću svesti na nekoliko manjih podsustava, npr. sustav s dvije jednadžbe i dvije nepoznanice i jednadžba u kojoj se javlja samo treća nepoznanica ili čak i na najjednostavniji slučaj da imamo tri jednadžbe u kojima će biti u svakoj jednadžbi samo po jedna nepoznanica.

4. Statička ekvivalentnost sustava sila i momenata

4.1. Pojam statičke ekvivalentnosti

Promatramo dva sustava sila i momenata, $(\mathbf{K}_i^n, \mathbf{M}_j^m)$ i $(\mathbf{K}_p^t, \mathbf{M}_r^s)$.

Dva sustava sila i momenata statički su ekvivalentna ako je njihov doprinos jednadžbama ravnoteže jednak.

Svaki sustav sila i momenata, $(\mathbf{K}_i^n, \mathbf{M}_j^m)$, možemo zamijeniti statički ekvivalentnim djelovanjem, jednom rezultantnom silom $\mathbf{K}_R$ i jednim rezultantnim momentom $\mathbf{M}_R$, odnosno uređenim parom $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_R)$, pri čemu je

$$\mathbf{K}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i \,, \tag{4.1.1}$$

$$\mathbf{M}_R = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^{n} d_{\mathbf{K}_i} \times \mathbf{K}_i \,, \tag{4.1.2}$$

gdje je $d_{\mathbf{K}_i}$ udaljenost sile $\mathbf{K}_i$ od proizvoljne točke na pravcu rezultantne sile $\mathbf{K}_R$. Dva statički ekvivalentna sustava sila i momenata imaju jednaku dinamu sustava sila i momenata. Glavni vektor sila i glavni vektor momenta sustava sila i momenata statički su ekvivalentni zadanom sustavu sila i momenata.

4.2. Invarijante sustava sila i momenata

Rezultantno djelovanje ne moramo nužno promatrati u odnosu na neku točku na pravcu rezultantne sile. Za proizvoljne dvije točke A i B možemo odrediti pripadna rezultantna djelovanja, $(\mathbf{K}_{R,\mathsf{A}}, \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}})$ i $(\mathbf{K}_{R,\mathsf{B}}, \mathbf{M}_{R,\mathsf{B}})$. Prema načinu određivanja rezultantne sile, (3.4.4), jasno je da ne ovisi o izboru promatrane točke, $\mathbf{K}_{R,\mathsf{A}} = \mathbf{K}_{R,\mathsf{B}} = \mathbf{K}_R$.

1. invarijanta sustava sila i momenata: Rezultantna sila ne ovisi o izboru točke na koju postavljamo rezultantni sustav.

Rezultantni moment $\mathbf{M}_{R,\mathsf{B}}$ nije nužno dobiti iz zadanih djelovanja. Rezultantni moment u točki B možemo izraziti pomoću rezultantnog vektora u točki A. Možemo definirati vektor $\mathbf{d} = \overrightarrow{\mathsf{BA}}$, vektor kojem je početna točka B, a krajnja točka A. Za moment u odnosu na točku B vrijedi, prema (2.1.6),

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{B}} = \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} + \mathbf{d} \times \mathbf{K}_R \,. \tag{4.2.3}$$

Na temelju dobivenog izraza jasno je da su momenti na obje točke jednaki ako je vektorski produkt $\mathbf{d} \times \mathbf{K}_R = \mathbf{0}$, odnosno da je vektor $\mathbf{d}$ paralelan s pravcem djelovanja rezultantne sile $\mathbf{K}_R$. To znači da je rezultantni moment na sve točke jednog pravca paralelnog pravcu djelovanja rezultantne sile jednak. Rezultantni momenti razlikuju se samo za komponentu okomitu na rezultantnu silu. Vrhovi svih rezultantnih momenata nanesenih iz iste početne točke leže u ravnini okomitoj na rezultantnu silu. Iz toga slijedi da je projekcija rezultantnog momenta na os određenu rezultantnom silom konstantna,

$$\mathbf{M}_{R,B} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R} = (\mathbf{d} \times \mathbf{K}_R) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R} + \mathbf{M}_{R,A} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R} = \mathbf{M}_{R,A} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R} = M_{R,\mathbf{K}_R} \,, \tag{4.2.4}$$

i iznosi $M_{R,\mathbf{K}_R}$. Vektor $\mathbf{e}_{\mathbf{K}_R}$ jedinični je vektor u smjeru rezultante sile, a mješoviti produkt iščezava jer se radi o paralelnim vektorima $\mathbf{K}_R$ i $\mathbf{e}_{\mathbf{K}_R}$.

2. invarijanta sustava sila i momenata: Projekcija rezultantnog momenta na pravac rezultantne sile je konstantna.

Svaki sustav sila i momenata ima dvije invarijante, rezultantnu silu $\mathbf{K}_R$ i projekciju rezultantnog momenta na pravac rezultantne sile $M_{R,\mathbf{K}_R}$.

4.3. Centralna os, dinamički vijak

Iz druge invarijante sustava sila i momenata možemo zaključiti da, ako je $\mathbf{K}_R \neq \mathbf{0}$, postoji pravac za čije točke vrijedi da je pravac rezultantnog momenta, $p_{\mathbf{M}_R}$, paralelan s pravcem rezultantne sile, $p_{\mathbf{K}_R}$. Taj pravac zovemo centralna os. Pripadni uređeni par $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_R)$ zovemo dinamički vijak.

4.3.1. Određivanje položaja centralne osi

Promatramo rezultantno djelovanje sustava sila i momenata u odnosu na točku A, $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}})$. Rezultantni moment $\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}}$ možemo rastaviti na dvije komponente, komponentu paralelnu s pravcem rezultantne sile, $\mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R}$, i komponentu okomitu na pravac rezultantne sile, $\mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp}$,

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} = \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R} + \mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp} \; . \tag{4.3.5}$$

Komponente rastava jednostavno slijede prema

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R} &= (\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}_R} \; , & (4.3.6)\\ \mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp} &= \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} - \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R} \; . & (4.3.7) \end{aligned}$$

Tražimo točku C na centralnoj osi za čije rezultantno djelovanje $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathsf{C}})$ vrijedi da je statički ekvivalentno rezultantnom djelovanju u točki A, $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}})$ i da je pravac rezultantnog momenta $\mathbf{M}_{R,\mathsf{C}}$ paralelan pravcu rezultantne sile $\mathbf{K}_R$, odnosno da ne postoji komponenta vektora $\mathbf{M}_{R,\mathsf{C}}$ okomita na pravac rezultantne sile,

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{C}} = \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R}, \; \mathbf{M}_{R,\mathsf{C},\mathbf{K}_R,\perp} = \mathbf{0} \; . \tag{4.3.8}$$

Neka je $\mathbf{g} = \overrightarrow{\mathsf{AC}}$. Točka C proizvoljna je točka na centralnoj osi, pa možemo uzeti da je to točka na pravcu okomitom na rezultantnu silu u točki A, $p_{\mathbf{g}} \perp p_{\mathbf{K}_R}$. Između rezultantnih momenata vrijedi relacija

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} = \mathbf{M}_{R,\mathsf{C}} + \mathbf{g} \times \mathbf{K}_R \; , \tag{4.3.9}$$

koja povlači odnos

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp} = \mathbf{g} \times \mathbf{K}_R \; , \tag{4.3.10}$$

što zapravo znači da su $\mathbf{g}, \mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp}$ desno orijentirana baza. Uz oznaku $\mathbf{M}_{R,\mathsf{A},\mathbf{K}_R,\perp} = \mathbf{M}_{R,\perp}$ slijedi relacija za iznos vektora $\mathbf{g}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_{R,\perp}| &= |\mathbf{g}|\,|\mathbf{K}_R| \sin\angle(\mathbf{g}, \mathbf{K}_R) = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{K}_R| \\ &\Rightarrow \; |\mathbf{g}| = \frac{|\mathbf{M}_{R,\perp}|}{|\mathbf{K}_R|} \; . \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Vektori baze međusobno su okomiti što povlači da su pravci vektora $\mathbf{g}$ i $\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\perp}$ paralelni, $p_{\mathbf{g}} \parallel p_{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\perp}}$, odnosno kolinearni. To znači da njihov odnos možemo zapisati kao dva kolinearna vektora

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \lambda\,(\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\perp}) \\ &\Rightarrow \; |\mathbf{g}| = \lambda\,|\mathbf{K}_R|\,|\mathbf{M}_{R,\perp}| \; . \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

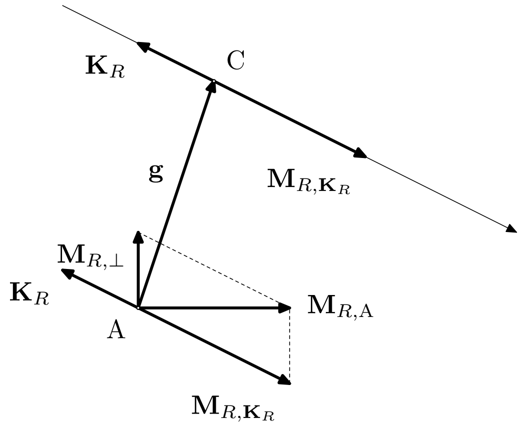
Izjednačavanjem izraza za $|\mathbf{g}|$ u jednadžbama (4.3.11) i (4.3.12) slijedi

$$\frac{|\mathbf{M}_{R,\perp}|}{|\mathbf{K}_R|} = \lambda\,|\mathbf{K}_R|\,|\mathbf{M}_{R,\perp}| \Rightarrow \lambda = \frac{1}{|\mathbf{K}_R|^2}\,, \tag{4.3.13}$$

na temelju čega proizlazi izraz za vektor $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\perp}}{|\mathbf{K}_R|^2}\,. \tag{4.3.14}$$

Uz poznatu točku A i određeni vektor $\mathbf{g}$ jednostavno proizlaze koordinate točke C, a pravac centralne osi određen je jediničnim vektorom $\mathbf{e}_{\mathbf{K}_R}$ zbog paralelnosti centralne osi s pravcem rezultantne sile.



Slika 4.3.1: Položaj centralne osi

Izraz za vektor $\mathbf{g}$ u jednadžbi (4.3.14) možemo raspisati,

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\perp}}{|\mathbf{K}_R|^2} = \frac{\mathbf{K}_R \times (\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} - \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R})}{|\mathbf{K}_R|^2} \\ &= \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}}}{|\mathbf{K}_R|^2} - \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R}}{|\mathbf{K}_R|^2} = \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}}}{|\mathbf{K}_R|^2}\,, \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

što je jednostavniji izraz jer ne moramo rastavljati na komponente rezultantni moment u točki A.

Odnos (4.3.15) možemo dobiti i izravno iz vektorske algebre,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} &= \mathbf{K}_R \times (\mathbf{g} \times \mathbf{K}_R + \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R}) = \mathbf{K}_R \times (\mathbf{g} \times \mathbf{K}_R) + \mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R} \\ &= \mathbf{K}_R \times (\mathbf{g} \times \mathbf{K}_R) = \mathbf{g} \cdot (\mathbf{K}_R \cdot \mathbf{K}_R) - \mathbf{K}_R\,(\mathbf{g} \cdot \mathbf{K}_R) = \mathbf{g}\,|\mathbf{K}_R|^2 \\ &\Rightarrow\ \mathbf{g} = \frac{\mathbf{K}_R \times \mathbf{M}_{R,\mathsf{A}}}{|\mathbf{K}_R|^2}\,. \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

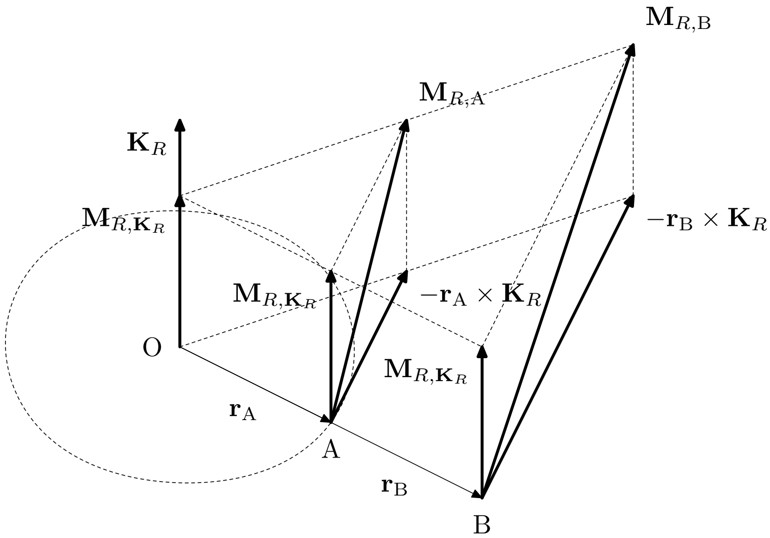
4.4. Rotacijska simetrija

Pomoću centralne osi možemo opisati rotacijsku simetriju polja rezultantnih djelovanja. Pretpostavljamo da su poznata rezultantna djelovanja $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R})$ i centralna os. Promatramo proizvoljnu ravninu okomitu na centralnu os, a probodište centralne osi s promatranom ravninom označimo O. Rezultantna sila jednaka je u svim točkama (1. invarijanta). Promatramo rezultantno djelovanje u proizvoljnoj točki A koja se ne nalazi na centralnoj osi. Radij-vektor od probodišta do točke A označimo $\mathbf{r}_{\mathsf{A}}$. Rezultantno djelovanje je dinamički vijak u probodištu, $(\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R})$. Vektor momenta u točki A određen je izrazom

$$\mathbf{M}_{R,\mathsf{A}} = \mathbf{M}_{R,\mathbf{K}_R} + (-\mathbf{r}_{\mathsf{A}}) \times \mathbf{K}_R \ , \tag{4.4.17}$$

pri čemu je komponenta $(-\mathbf{r}_{\mathsf{A}}) \times \mathbf{K}_R$ tangencijalni vektor na kružnicu određenu radijusom $|\mathbf{r}_{\mathrm{A}}|$ oko probodišta centralne osi.

Za sve točke jednako udaljene od probodišta, sve točke na kružnici radijusa $\|\mathbf{r}_{\mathsf{A}}\|$, vektori momenta jednakog su iznosa i leže u ravnini paralelnoj centralnoj osi koja dira definiranu kružnicu u promatranoj točki. Povećanjem radijusa kružnice proporcionalno raste i komponenta tangencijalnog vektora na kružnicu. Svim tangencijalnim vektorima pribrajamo još i komponentu momenta na centralnoj osi što povlači da će vrhovi vektora momenata točaka, koje se nalazu na nekom pravcu iz probodišta, ležati na istom pravcu.



Slika 4.4.2: Rotacijska simetrija

5. Statika materijalne točke

5.1. Ravnoteža materijalne točke

Neka na materijalnu točku djeluje sustav sila $\mathbf{K}_i, i = 1, \ldots, n$. Osnovna karakteristika takvog sustava sila je da sve sile prolaze kroz promatranu materijalnu točku. Materijalna točka je u ravnoteži ako iščezava vektorski zbroj svih sila koje na točku djeluju,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \mathbf{0} . \tag{5.1.1}$$

Skalarna formulacija ravnoteže materijalne točke svodi se na iščezavanje zbroja projekcija svih sila na tri nekomplanarne osi,

$$\sum_i K_{i,o_1} = 0 , \quad \sum_i K_{i,o_2} = 0 , \quad \sum_i K_{i,o_3} = 0 . \tag{5.1.2}$$

U konkretnim primjerima načelno uzimamo tri međusobno ortogonalne osi što uglavnom dovodi do postavljanja zbroja sila u smjeru tri koordinatne osi. U slučaju ravninskog sustava sila vektorska jednadžba jednaka je kao i za prostorni slučaj, (5.1.1), a u sklaranoj formulaciji dovoljno je uzeti iščezavanje zbroja projekcija svih sila na dvije nekolinearne osi.

Zadovoljavanje navedenog uvjeta, (5.1.1), automatski povlači i zadovoljenje uvjeta za ravnotežu momenata, jer za sve sile koje djeluju na istu materijalnu točku vrijedi $\sum_i (\mathbf{d}_i \times \mathbf{K}_i) = \mathbf{0}$. Obrat ne vrijedi, ako sile zadovoljavaju ravnotežu svih momenata na točku ne slijedi nužno i da vrijedi ravnoteža svih sila na točku. Najjednostavniji primjer je kad imamo samo jednu silu, $\mathbf{K}_1 \neq \mathbf{0}$, u promatranoj točki. Očito je rezultantni moment na promatranu točku jednak nuli jer sila prolazi kroz tu točku, a rezultanta sila je jednaka zadanoj sili u točki i sigurno nije jednaka nuli.

Za određivanje ravnoteže materijalne točke nije nužno koristiti samo skalarnu formulaciju ravnoteže projekcija sila na tri nekomplanarne osi, (5.1.2). Određivanje ravnoteže materijalne točke možemo provesti pomoću

- iščezavanja projekcija na tri nekomplanarne osi, (5.1.2),
- iščezavanja momenata oko tri osi koje nisu paralelne, ne sijeku se u istoj točki i nisu u ravnini koja sadrži promatranu materijalnu točku,
- iščezavanja projekcija na dvije nekolinearne osi i iščezavanja momenta na os koja ne smije biti u ravnini s pravcem koji sadrži promatranu materijalnu točku i okomit je na dvije osi projekcija,
- iščezavanja projekcije na jednu os i iščezavanja momenata na dvije osi koje ne smiju sadržavati promatranu materijalnu točku, njihove ravnine s promatranom materijalnom točkom ne smiju se podudarati i presječni pravac tih ravnina ne smije biti okomit na os projekcije sila.

5.2. Uravnoteženje materijalne točke

5.2.1. Uravnoteženje jednom silom

Neka na materijalnu točku djeluje sustav sila $\mathbf{K}_i,\ i = 1, \ldots, n$. Zadani sustav sila uravnotežujemo jednom uravnotežujućom silom, $\mathbf{R}$, koja djeluje na materijalnu točku. Neka je rezultantna sila $\mathbf{K}_R$ statički ekvivalentno, rezultantno djelovanje zadanom sustavu sila, $\mathbf{K}_R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i$, iz vektorske jednadžbe ravnoteže materijalne točke, (5.1.1), jasno slijedi vektorska jednadžba za uravnotežujuću silu

$$\mathbf{K}_R + \mathbf{R} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R} = -\mathbf{K}_R \ , \tag{5.2.3}$$

odnosno pripadne skalarne jednadžbe, ravnoteže projekcija na kordinatne osi (x_1, x_2, x_3),

$$R_{x_j} = -\sum_{i=1}^{n} K_{i,x_j} = -K_{R,x_j} \ , \quad j = 1, 2, 3 \ . \tag{5.2.4}$$

Grafički postupak se svodi na zatvaranje poligona zadanih sila s uravnotežujućom silom prema pravilima grafičkog zbrajanja vektora.

5.2.2. Uravnoteženje jednom silom na zadanom pravcu i jednom silom u zadanoj ravnini

Neka na materijalnu točku djeluje sustav sila $\mathbf{K}_i,\ i = 1, \ldots, n$. Sustav sila želimo uravnotežiti silom $\mathbf{R}_1$ na zadanom pravcu i silom $\mathbf{R}_2$ u zadanoj ravnini. Zadani pravac sile $\mathbf{R}_1$ definiran je jediničnim vektorom $\mathbf{p}_0$, a zadana ravnina sile $\mathbf{R}_2$ definirana je normalom $\mathbf{n}$. Vektorska jednadžba ravnoteže glasi

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{0} \ , \tag{5.2.5}$$

uz geometrijske uvjete

$$\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{p}_0 \ , \quad \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \ . \tag{5.2.6}$$

Vektorsku jednadžbu ravnoteže možemo skalarno pomnožiti s normalom na zadanu ravninu sile $\mathbf{R}_2$ i slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{n} + R_1 \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \ , \tag{5.2.7}$$

iz čega proizlazi izraz za iznos sile $\mathbf{R}_1$

$$R_1 = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{n}} \ . \tag{5.2.8}$$

Na taj način vektor sile glasi $\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{p}_0$. Sila $\mathbf{R}_2$ jednostavno slijedi iz vektorske jednadžbe ravnoteže

$$\mathbf{R}_2 = -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i - \mathbf{R}_1 \ . \tag{5.2.9}$$

Grafički postupak se svodi na rastavljanje rezultantne sile zadanih djelovanja $\mathbf{K}_R$ na silu na zadanom pravcu i silu u zadanoj ravnini, pri čemu je orijentacija uravnotežujućih sila takva da zatvara poligon sila sa zadanim silama u promatranoj materijalnoj točki.

5.2.3. Uravnoteženje s tri sile na zadanim nekomplanarnim pravcima

Neka na materijalnu točku djeluje sustav sila $\mathbf{K}_i,\ i=1,\dots,n$. Sustav sila želimo uravnotežiti sa tri sile $\mathbf{R}_1,\ \mathbf{R}_2$ i $\mathbf{R}_3$ na zadanim nekomplanarnim pravcima. Zadani pravci sila $\mathbf{R}_j$ definirani su jediničnim vektorima $\mathbf{p}_{j,0}$. Vektorska jednadžba ravnoteže glasi

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{K}_i+\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3=\mathbf{0}\ , \tag{5.2.10}$$

uz geometrijske uvjete

$$\mathbf{R}_1=R_1\mathbf{p}_{1,0}\ ,\quad \mathbf{R}_2=R_2\mathbf{p}_{2,0}\ ,\quad \mathbf{R}_3=R_3\mathbf{p}_{3,0}\ . \tag{5.2.11}$$

Pripadne skalarne jednadžbe, ravnoteže projekcija na kordinatne osi (x_1,x_2,x_3), slijede

$$R_1p_{1,x_j}+R_2p_{2,x_j}+R_3p_{3,x_j}=-\sum_{i=1}^{n}K_{x_j}=-K_{R,x_j}\ ,\quad j=1,2,3\ . \tag{5.2.12}$$

Rješenjem definiranog linearnog sustava tri jednadžbe sa tri nepoznanice, (5.2.12), slijede iznosi traženih uravnotežujućih sila, a množenjem dobivenih iznosa sila s pripadnim jediničnim vektorima jednostavno slijede vektori traženih sila. Projekcijama na pravce okomite na ravnine koje zatvaraju po dvije tražene uravnotežujuće sile možemo zadatak svesti na tri jednadžbe u kojima je samo jedna nepoznanica, treća sila. U praktičnom smislu to nije uvijek i najjednostavniji postupak jer može biti više posla dok se nađu ravnine i pripadne okomice nego rješavanje sustava sa tri nepoznanice. Postupak je jednostavniji ako su pravci traženih sila međusobno okomiti.

6. Statika tijela u ravnini

6.1. Ravnoteža tijela u ravnini

Promatramo tijelo u ravnini. Na tijelo djeluje ravninski sustav sila i momenata $(\mathbf{K}_i,\ i=1,\ldots,n, \mathbf{M}_j,\ j=1,\ldots,m)$. Ravninu promatranog tijela možemo promatrati kao ravninu xz. Vektori sila $\mathbf{K}_i$ imaju komponente samo u ravnini promatranog tijela, $\mathbf{K}_i = K_{x,i}\mathbf{i} + K_{z,i}\mathbf{k}$, a vektori momenata koji djeluju u promatranoj ravnini imaju samo komponente okomite na ravninu, $\mathbf{M}_j = M_j\mathbf{j}$. Vektorski uvjeti ravnoteže tijela u ravnini su

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{K}_i = \mathbf{0}\ , \quad \sum_{j=1}^{m}\mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{d}_i \times \mathbf{K}_i = \mathbf{0}\ . \tag{6.1.1}$$

Skalarna formulacija ravnoteže tijela u ravnini svodi se na iščezavanje zbroja projekcija svih sila na dvije nekolinearne osi (uglavnom uzimamo koordinatne osi x i z) i iščezavanje zbroja momenata oko osi paralelne osi y u proizvoljno odabranoj točki u ravnini (osi okomite na promatranu ravninu),

$$\sum_{i=1}^{n}K_{x,i} = 0\ , \quad \sum_{i=1}^{n}K_{z,i} = 0\ , \quad \sum_{i=1}^{n}\pm d_{K_i}K_i + \sum_{j=1}^{m}M_j = 0\ , \tag{6.1.2}$$

pri čemu je d_{K_i} najkraća udaljenost pravca sile $\mathbf{K}_i$ od ishodišta, a predznak uz umnožak udaljenosti i pripadne sile ovisi o smjeru vrtnje momenta pripadne sile oko točke u kojoj je definirana os paralelna osi y. Predznak je pozitivan ako je smjer vrtnje u pozitivnom smjeru, u smjeru suprotnom od smjera kazaljki. Na temelju činjenice da momenti u vektorskom smislu imaju komponentu samo okomito na promatranu ravninu, možemo zapravo promatrati zbroj momenata oko točke probodišta definirane osi u promatranoj ravnini xz.

Za određivanje ravnoteže materijalne točke nije nužno koristiti samo skalarnu formulaciju ravnoteže projekcija sila na dvije nekolinearne osi i momenta oko osi okomite na promatranu ravninu (momenta oko jedne točke u ravnini), (6.1.2). Određivanje ravnoteže tijela u ravnini možemo provesti pomoću

- iščezavanja projekcija sila na dvije nekolinearne osi u promatranoj ravnini i iščezavanja momenata oko jedne točke u promatranoj ravnini, (6.1.2),
- iščezavanja projekcija sila na jednu os u promatranoj ravnini i iščezavanja momenta oko dvije točke u promatranoj ravnini,
- iščezavanja momenata oko tri nekolinearne točke u promatranoj ravnini.

6.2. Uravnotežavanje tijela u ravnini

Promatramo tijelo u ravnini xz na koje djeluje zadani ravninski sustav sila i momenata $(\mathbf{K}_i,\ i=1,\ldots,n,\ \mathbf{M}_j,\ j=1,\ldots,m)$. Zadani sustav sila i momenata u ravnini uvijek možemo zamijeniti statički ekvivalentnom rezultanton silom $\mathbf{K}_R$ (ako vrijedi $\mathbf{K}_R \neq \mathbf{0}$) ili statički ekvivalentnim koncentriranim momentom $\mathbf{M}_R$. U smislu skalarnih formulacija uvjeta ravnoteže, tijelo na koje djeluje zadani sustav sila i momenata možemo uravnotežiti sa

- tri sile na zadanim pravcima koji ne smiju prolaziti kroz istu točku,
- jednom silom u zadanoj točki i jednim koncentriranim momentom.

Ovakva dva načina mogu imati i nešto drugačije interpretacije. Umjesto tri sile na zadanim pravcima možemo tijelo uravnotežiti s jednom silom na zadanom pravcu i jednom silom u zadanoj točki pri čemu je ta zadana točka sjecište preostala dva pravca iz osnovne formulacije. Umjesto sile u točki i koncentriranog momenta možemo uravnotežiti s koncentriranim momentom i dvije sile na proizvoljnim pravcima koji se sijeku u zadanoj točki iz osnovne formulacije ili sa silom u zadanoj točki i silama na dva paralelna pravca (čiji spreg sila zapravo tvori primarno traženi moment).

Postupak rješavanja načelno se svodi na linearni sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice. Promišljanjem o izboru skalarnih jednadžbi za određivanje nepoznanica možemo postupak svesti i na tri jednadžbe u kojima se javlja po jedna nepoznanica ili na podsustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice i jednom jednadžbom u kojoj se javlja samo treća nepoznanica.

6.2.1. Uravnotežavanje tijela s tri sile na zadanim pravcima

Nužni uvjet da bi mogli uravnotežiti djelovanje na tijelo silama na tri zadana pravca je da se ta tri zadana pravca ne sijeku u istoj točki. Ako bi se pravci sijekli u istoj točki, mogli bismo uravnotežiti samo ono djelovanje čija rezultantna sila prolazi kroz tu točku. Za slučaj da rezultantno djelovanje ne prolazi kroz tu točku, uvijek bismo imali neuravnoteženi moment zbog umnoška kraka rezultantne sile do te točke i iznosa rezultantne sile. U daljnjim opisima postupka rješavanja ove zadaće pretpostavit ćemo da je ispunjen ovaj nužni uvjet.

Analitički postupak - Ritterov postupak

Neka na definirano tijelo djeluje rezultantno djelovanje $\mathbf{K}_R$ ili $\mathbf{M}_R$ i neka su određena tri pravca, r_1, r_2 i r_3 na kojima djeluju uravnotežujuće sile R_1, R_2 i R_3. U analitičkom postupku tražimo skalarne veličine iznosa sila, a vektorski izraz za tražene sile dobivamo množenjem iznosa silom s jediničnim vektorom pripadnih pravaca djelovanja svake od sila. Prije postavljanja jednadžbi pretpostavimo smjerove nepoznatih sila na traženim pravcima. Ako nakon rješenja sustava jednadžbi iznosi budu negativni znači da su stvarni smjerovi sila suprotni od pretpostavljenih, a ako iznosi budu pozitivni pretpostavljen je stvarni smjer traženih sila.

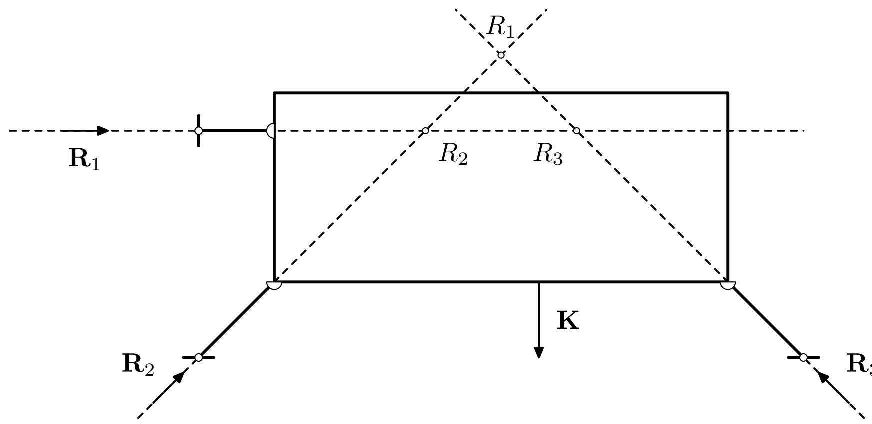
Označimo presjecišta pravaca traženih sila točkama

$$\{\mathrm{R}_i\} = r_j \cap r_k,\ (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\ . \tag{6.2.3}$$

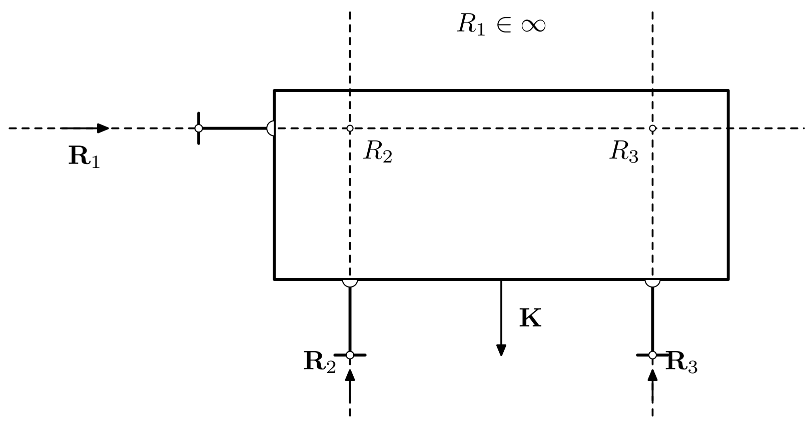
Na taj način definirane točke zovemo Ritterove točke. Postavljanjem jednadžbi zbroja svih momenata oko definiranih presjecišta dobivamo tri jednadžbe u kojima je u svakoj samo po jedna nepoznanica,

$$\sum M_{\mathrm{R}_i} = 0 \Rightarrow R_i\ , \quad i = 1,2,3\ . \tag{6.2.4}$$

Ako su dva pravca traženih sila uravnoteženja međusobno paralelna (sijeku se u beskonačnoj točki njihovih pravaca) tada je treća jednadžba zbroj projekcija svih sila u smjeru okomito na ta dva paralelna pravca, a jasno je da je onda jedina nepoznanica u toj jednadžbi iznos sile na trećem pravcu.



Slika 6.2.1: Ritterove točke



Slika 6.2.2: Ritterove točke ako su neki od pravaca paralelni

Grafički postupak - Culmannov postupak

Neka na definirano tijelo djeluje rezultantno djelovanje $\mathbf{K}_R$ i neka su određena tri pravca, r_1, r_2 i r_3 na kojima djeluju uravnotežujuće sile R_1. R_2 i R_3. U grafičkom postupku dobit ćemo vektore traženih sila čija duljina predstavlja iznos traženih sila.

Postupak se svodi na grafičko rješavanje zadaće ravnoteže četiri sile

$$\mathbf{K}_R + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 = \mathbf{0} \,, \tag{6.2.5}$$

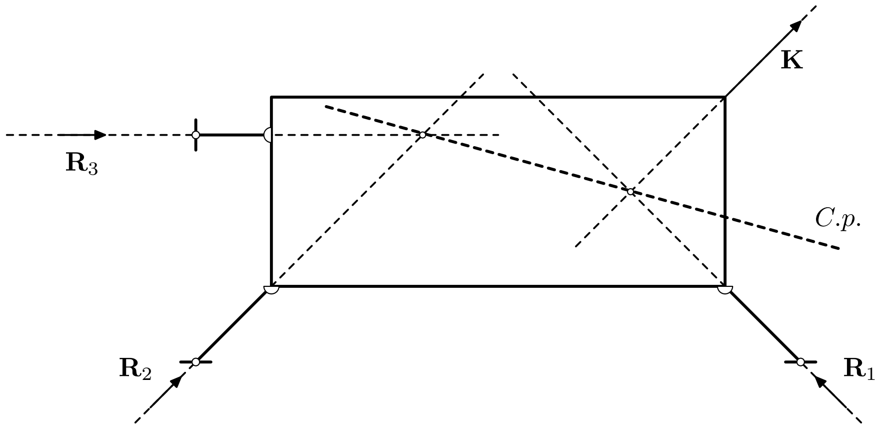
pri čemu za jednu silu, $\mathbf{K}_R$, znamo sve potrebne parametre (pravac, iznos, smjer), a za ostale tri sile znamo njihov pravac. U prvom koraku grupiramo po dva para sila čija su presjecišta pravaca vizualno odredljiva (jednostavno uočavamo presjecišta pravaca, presjecišta nisu negdje izvan vidokruga, Slika 6.2.3). Presjecišta pravaca označimo $\{\mathrm{T}_1\} = p_{\mathbf{K}} \cap r_1$ i $\{\mathrm{T}_2\} = r_2 \cap r_3$. Za svaki par sila možemo definirati pripadnu rezultantu (zbroj tih sila),

$$\mathbf{R}_{\mathbf{K}_R,1} = \mathbf{K}_R + \mathbf{R}_1 \,, \quad \mathbf{R}_{2,3} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 \,, \tag{6.2.6}$$

pri čemu znamo da svaka od rezultanti mora prolaziti kroz točku u kojoj se sijeku pravci sila koje tvore pripadnu rezultantu, $\mathrm{T}_1 \in p_{\mathbf{R}_{\mathbf{K}_R,1}}$ i $\mathrm{T}_2 \in p_{\mathbf{R}_{2,3}}$. Zadaća je sada svedena na ravnotežu dvije sile

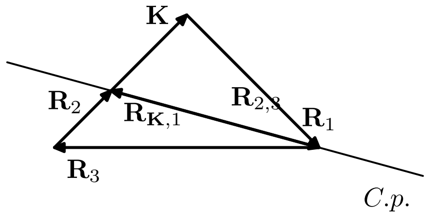
$$\mathbf{R}_{\mathbf{K}_R,1} + \mathbf{R}_{2,3} = \mathbf{0} \,, \tag{6.2.7}$$

pri čemu za svaku od tih sila znamo točku kroz koju prolazi. Za dvije sile znamo nužni uvjet za ravnotežu, moraju biti na istom pravcu, što povlači da je pravac za obje sile pravac kroz točke T_1 i T_2. Taj pravac zovemo Culmannov pravac. Sile $\mathbf{R}_{K,1}$ i $\mathbf{R}_{2,3}$ nalaze se na Culmannovom pravcu, jednakog su iznosa i suprotnog smjera.



Slika 6.2.3: Culmannov postupak

U proizvoljnoj točki pravaca paralelnog s Culmannovim pravcem nanesemo iznos (u odabranom mjerilu) i smjer poznate sile $\mathbf{K}_R$. Iz vrha te sile, što je ujedno i početak sile $\mathbf{R}_1$, povučemo pravac paralelan s pravcem r_1, na mjestu presjeka tog pravca s Culmannovim pravcem završava sila $\mathbf{R}_1$. Na Culmannovom pravcu odmah slijedi i sila $\mathbf{R}_{K,1}$. Sila $\mathbf{R}_{2,3}$ jednaka je sili $\mathbf{R}_{K,1}$, ali u suprotnom smjeru. Iz početka sile $\mathbf{R}_{2,3}$ povučemo pravac paralelan pravcu r_2, a iz njenog vrha povučemo pravac paralelan pravcu r_3. Presjek ta dva pravca daje vrh sile $\mathbf{R}_2$ i početak sile $\mathbf{R}_3$. U grafičkom prikazu imamo određene vektore traženih sila. Njihova duljina u odabranom mjerilu predstavlja iznose tih sila. Na grafičkom prikazu, (Slika 6.2.4), jasno je vidljivo da sa zadanom silom $\mathbf{K}_R$ zatvaraju poligon sila.



Slika 6.2.4: Određivanje sila na kraju Culmannovog postupka

A Osnovni pojmovi vektorske algebre

A1. Notacija

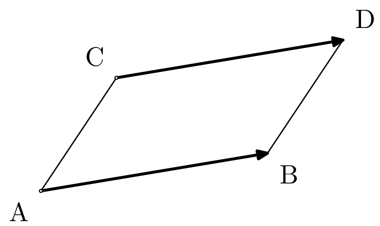
Skalarne vrijednosti iskazivat ćemo malim ili velikim slovom, npr. progib w, modul elastičnosti E. Vektore prikazujemo masno (bold) otisnutim slovom, npr. vektor sile $\mathbf{K}$. Komponente vektora prikazivat ćemo pripadnim, obično otisnutim, slovom kao i vektor, uz indeks koji određuje o kojoj se komponenti vektora radi, npr. K_i predstavlja i-tu komponentu vektora sile $\mathbf{K}$.

A2. Vektori

A2.1. Geometrijsko i fizikalno značenje vektora

Neka su A i B dvije točke u n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$. Orijentiranu dužinu $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ zovemo vektor. Geometrijsko značenje vektora je translacijski pomak u prostoru $\mathbb{R}^n$, iz točke $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n$ u točku $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Fizikalno značenje vektora je sila na pravcu točaka A i B čiji je iznos jednak duljini vektora. Duljina vektora je udaljenost točaka A i B. Smjer (pravac) vektora definiran je pravcem kroz točke A i B. Usmjerenje vektora određeno je definiranjem početne i krajnje točke.

Vektori $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ i $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ su jednaki ako točke A,B,D,C (točno tim redoslijedom) tvore paralelogram iz čega proizlazi tvrdnja o jednakosti vektora:
Dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer (pravac) i isto usmjerenje.



Slika A2.1: Jednakost vektora, grafički prikaz

Vektor $\mathbf{v}$ dimenzije n (n-dimenzionalni vektor) u prostoru $\mathbb{R}^n$ uređena je n-torka realnih brojeva

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} . \tag{A2.1}$$

Dva su vektora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ jednaka ako i samo ako su im jednake sve komponente,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \Leftrightarrow v_i = w_i,\ i = 1, 2, \dots, n . \tag{A2.2}$$

Duljina (modul) vektora preslikavanje je iz skupa $\mathbb{R}^n$ u skup nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_0^+$ i definirano izrazom

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+,\ |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} . \tag{A2.3}$$

Transponirani vektor je vektor zapisan kao redak

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n \end{bmatrix} \; . \tag{A2.4}$$

A2.2. Množenje vektora skalarom

Množenjem n-dimenzionalnog vektora skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ dobijemo n-dimenzionalni vektor čije su komponente jednake komponentama zadanog vektora pomnoženim zadanim skalarom,

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \; \lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \; . \tag{A2.5}$$

A2.3. Zbrajanje vektora

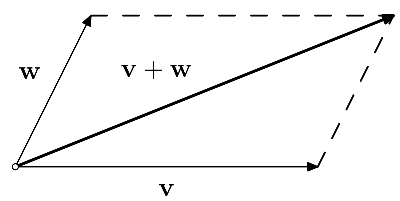
Zbroj dva n-dimenzionalna vektora (rezultanta vektora) jednak je n-dimenzionalnom vektoru čije su komponente jednake zbroju komponenti zadanih vektora

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \; \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \; . \tag{A2.6}$$

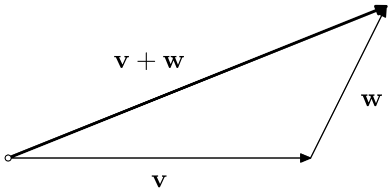
Za zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom vrijede svojstva

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v} \quad \text{komutativnost,} \tag{A2.7}$$
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) \quad \text{asocijativnost,} \tag{A2.8}$$
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \; , \tag{A2.9}$$
$$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} \; , \tag{A2.10}$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v} \; , \tag{A2.11}$$
$$\lambda(\mu \mathbf{v}) = (\lambda \mu)\mathbf{v} \; . \tag{A2.12}$$

Fizikalno, zbroj vektora (sila) je rezultantna sila. Geometrijski, zbroj vektora jednak je dijagonali paralelograma razapetog sa zadanim vektorima (pravilo paralelograma), ili postupna translacija iz početne točke za zadane vektore neovisno o redoslijedu vektora jer vrijedi komutativnost (pravilo trokuta).



Slika A2.2: Zbrajanje vektora, pravilo paralelograma

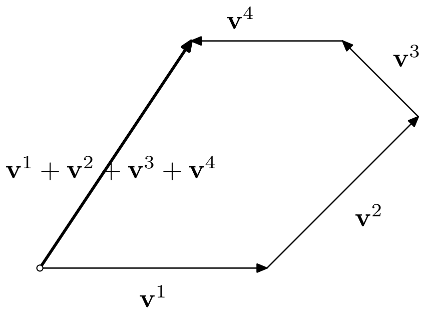


Slika A2.3: Zbrajanje vektora, pravilo trokuta

Na isti način možemo definirati i zbrajanje više vektora

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}^j = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} v_1^j \\ \sum\limits_{j=1}^{m} v_2^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} v_n^j \end{bmatrix} , \tag{A2.13}$$

što u geometrijskom smislu opet predstavlja postupnu translaciju iz početne točke za zadane vektore (pravilo poligona).



Slika A2.4: Zbrajanje vektora, pravilo poligona (mnogokuta)

A2.4. Skalarni produkt vektora

Skalarni produkt vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$, oznaka $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ili $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, definiramo

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \quad . \tag{A2.14}$$

Vrijednost skalarnog produkta možemo izračunati i kao

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \ , \tag{A2.15}$$

pri čemu je $\angle (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in [0, \pi]$ kut između vektora.

Skalarni produkt je komutativna operacija, $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})$. Za skalarni produkt vrijedi svojstvo distributivnosti,

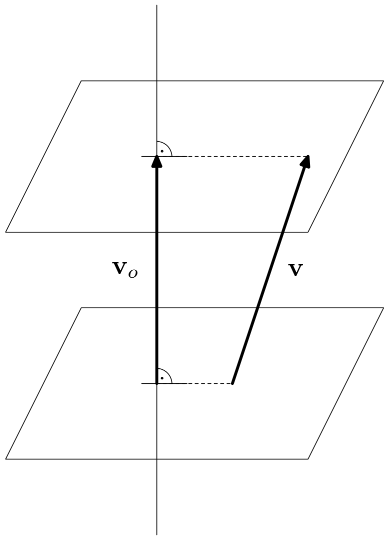
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \ . \tag{A2.16}$$

Skalarni produkt može poslužiti i za definiranje okomitosti vektora. Dva vektora $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ međusobno su okomita ako i samo ako vrijedi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Skalarni produkt ima primjenu kod projekcije vektora na proizvoljnu os ili proizvoljnu ravninu. Neka je $\mathbf{e}_0$ jedinični vektor proizvoljne osi o . Projekcija vektora $\mathbf{v}$ na os o jednaka je

$$\mathbf{v}_o = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0)\, \mathbf{e}_0 \ . \tag{A2.17}$$

Grafički projekciju vektora na os određujemo postavljanjem ravnina okomitih na os kroz vrhove vektora. Vektor između probodišta zadane osi s tim ravninama predstavlja projekciju vektora na os.

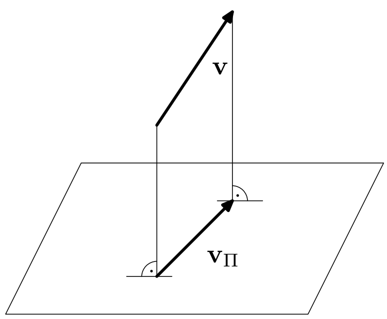


Slika A2.5: Projekcija vektora na os

Neka je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na proizvoljnu ravninu Π . Projekcija vektora $\mathbf{v}$ na ravninu Π jednaka je razlici zadanog vektora i njegove projekcije na pravac normale $\mathbf{n}$ na ravninu

$$\mathbf{v}_\Pi = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n} \ . \tag{A2.18}$$

Grafički projekciju vektora na ravninu određujemo postavljanjem pravaca okomitih na ravninu iz vrhova vektora. Vektor između probodišta tih pravaca sa zadanom ravninom predstavlja projekciju vektora na ravninu.



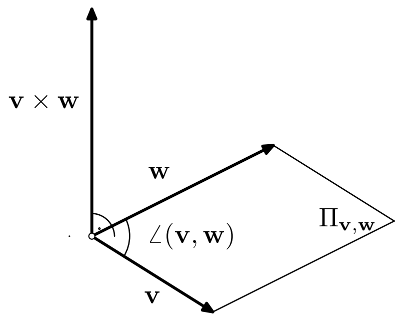
Slika A2.6: Projekcija vektora na ravninu

A2.5. Vektorski produkt vektora

Vektorski produkt vektora $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ (oznaka $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$) definiramo

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= (v_y w_z - v_z w_y)\,\mathbf{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\,\mathbf{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\,\mathbf{k} \quad . \end{aligned} \tag{A2.19}$$

Vektorski produkt je vektor okomit na ravninu $\Pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$, ravninu u kojoj se nalaze vektori koji tvore vektorski produkt, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \perp \Pi_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$. To povlači da je vektorski produkt okomit na oba vektora koji tvore vektorski produkt što znači da uređena trojka $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$, točno tim redoslijedom, tvori desno orijentiranu bazu.



Slika A2.7: Vektorski produkt

Apsolutnu vrijednost vektorskog produkta možemo izračunati i kao

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \sin \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad , \tag{A2.20}$$

što je površina paralelograma koji razapinju vektori $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ čime je definirana duljina vektora koji je dobiven kao vektorski produkt. Vektorski produkt je antikomutativna operacija, vrijedi jednakost $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$. Vektorski produkt dva kolinearna vektora jednak je nul-vektoru, odnosno $\mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R}\ \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ povlači $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

A2.6. Mješoviti produkt vektora

Mješoviti (vektorsko-skalarni) produkt vektora $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ definiramo

$$\left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v}^3 : \left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \cdot \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \tag{A2.21}$$

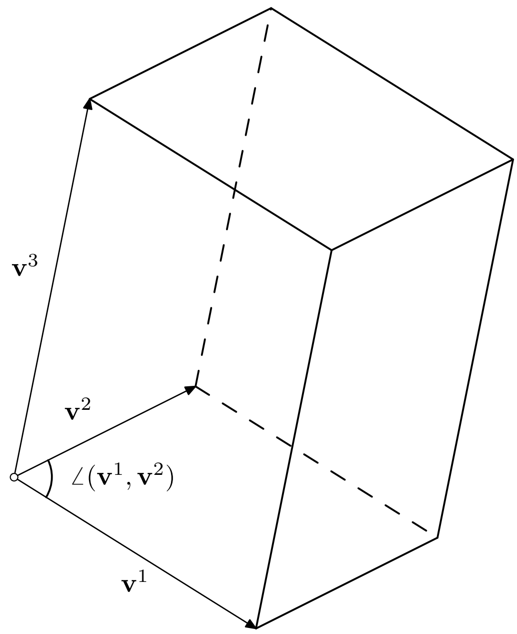
što nakon raspisivanja daje

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v}^3 &= \left(v_y^1 v_z^2 - v_z^1 v_y^2\right) v_x^3 + \left(v_z^1 v_x^2 - v_x^1 v_z^2\right) v_y^3 + \left(v_x^1 v_y^2 - v_y^1 v_x^2\right) v_z^3 \\ &= \begin{vmatrix} v_x^1 & v_y^1 & v_z^1 \\ v_x^2 & v_y^2 & v_z^2 \\ v_x^3 & v_y^3 & v_z^3 \end{vmatrix} \ . \end{aligned} \tag{A2.22}$$

Apsolutnu vrijednost mješovitog produkta možemo izračunati i kao

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v}^3 &= \left(\left|\mathbf{v}^1\right| \left|\mathbf{v}^2\right| \sin \angle\left(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\right)\right) \left|\mathbf{v}^3\right| \cos \angle\left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\right) \\ &= \left(\left|\mathbf{v}^1\right| \left|\mathbf{v}^2\right| \sin \angle\left(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\right)\right) \left|\mathbf{v}^3\right| \sin \angle\left(\mathbf{v}^3, \Pi_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2}\right) \quad , \end{aligned} \tag{A2.23}$$

pri čemu je $\Pi_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2}$ ravnina u kojoj su vektori $\mathbf{v}^1$ i $\mathbf{v}^2$. Geometrijski, mješoviti produkt predstavlja volumen paralelopipeda razapetog zadanim vektorima pri čemu je baza paralelogram razapet vektorima koji tvore pripadni vektorski produkt.



Slika A2.8: Mješoviti produkt, volumen paralelopipeda

Za mješoviti produkt vrijede odnosi

$$\left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \cdot \mathbf{v}^3 = \left(\mathbf{v}^2 \times \mathbf{v}^3\right) \cdot \mathbf{v}^1 = \left(\mathbf{v}^3 \times \mathbf{v}^1\right) \cdot \mathbf{v}^2 \,. \tag{A2.24}$$

Mješoviti produkt može poslužiti i za definiranje komplanarnosti vektora (vektori se nalaze u istoj ravnini). Tri vektora $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \neq \mathbf{0}$ su komplanarna ako i samo ako vrijedi $(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{v}^3 = 0$.

A2.7. Vektorsko-vektorski produkt vektora

Vektorsko-vektorski produkt vektora $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ definiramo

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \times \mathbf{v}^3 \quad : \quad & \left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & \left(\mathbf{v}^1 \times \mathbf{v}^2\right) \times \mathbf{v}^3 = \left(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}^3\right) \mathbf{v}^2 - \left(\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}^3\right) \mathbf{v}^1 \,. \end{aligned} \tag{A2.25}$$

Geometrijski, vektorsko-vektorski produkt je vektor u ravnini određenoj vektorima prvog vektorskog produkta.

A2.8. Derivacije vektora

Vektor deriviramo po skalaru tako da svaku komponentu vektora deriviramo po zadanom skalaru

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_i \frac{da_i}{dt} \mathbf{e}_i \quad . \tag{A2.26}$$

Gradijent vektor je vektor dobiven deriviranjem skalarnog polja po smjerovima

$$\nabla\Phi = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial i}\mathbf{e}_i \quad . \tag{A2.27}$$

Divergencija vektora skalarna je vrijednost dobivena zbrajanajem derivacija komponenti vektora po pripadnim smjerovima

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial i} \quad . \tag{A2.28}$$

Laplace skalarnog polja opet je skalarno polje prema izrazu

$$\triangle\Phi = (\nabla \cdot \nabla)\Phi = \sum_i \frac{\partial^2\Phi}{\partial i^2} \quad . \tag{A2.29}$$

A2.9. Linearna nezavisnost vektora

Skup vektora $\mathbf{a}_i, i = 1, \ldots, n$ je linearno nezavisan ako vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \ , i = 1, \ldots, n \ , \tag{A2.30}$$

odnosno nijedan vektor iz skupa ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ostalih vektora.