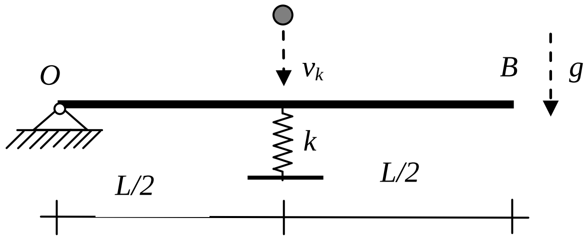
Štap mase $M=6kg$ i duljine $L=4m$, miruje oslonjen na oprugu krutosti $k=200N/m$. U jednom trenutku kuglica mase m=2kg, udari u štap brzinom $v_k=0,5m/s$. Sraz je plastičan.



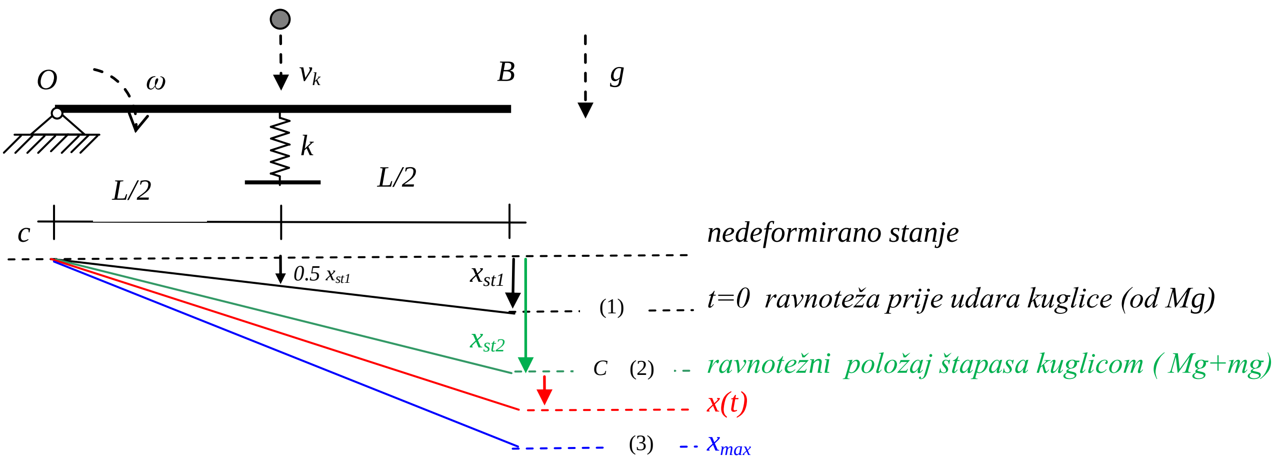
Za nastalo gibanje treba:

a) Pomoću zakona očuvanja mehaničke energije odrediti diferencijalnu jednadžbu kojom je opisano gibanje točke B na štapu.
b) odrediti zakon gibanja točke B.
c) odrediti maksimalnu deformaciju opruge .
d) odrediti veličinu maksimalne brzine točke B.
e) odrediti veličinu maksimalnog ubrzanja točke B.

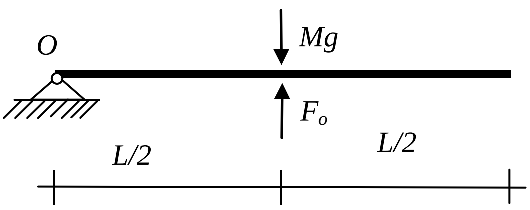
Odrediti veličine pod c), d) i e) direktnim postupkom (ne koristiti zakon oscilacija).

Rješenje:

Štap miruje u gravitacijskom polju te postoji deformacija opruge. Sustav počinje gibanje zbog udara kuglice. Za vrijeme sraza javlja se impuls, što znači da dolazi do promjene količine gibanja, odnosno gibanje počinje s nekom početnom brzinom. Sraz je plastičan, dakle kuglica se zalijepi za štap i nakon sraza giba se zajedno sa štapom. Masa sustava povećava se za masu kuglice, zbog čega sustav počinje gibanje prema novom ravnotežnom položaju, ali prolazi kroz taj položaj i nastaju oscilacije oko tog ravnotežnog položaja.



Odredimo deformaciju opruge prije udara kuglice, odnosno prvi ravnotežni položaj štapa bez kuglice.



$$\sum M_O = 0$$

$$Mg\frac{L}{2} - F_o\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow F_o = Mg = k\cdot\delta_{o1}, \qquad \delta_{o1} = \frac{x_{st1}}{2}$$

$$\delta_{o1} = \frac{Mg}{k} \quad \Rightarrow \quad x_{st1} = \frac{2Mg}{k}$$

Štap nakon sraza sa kuglicom počne gibanje prema drugom ravnotežnom položaju, prolazi kroz taj položaj, te nastaju oscilacije po zakonu *x(t)*, oko tog ravnotežnog položaja. Za vrijeme gibanja djeluju samo konzervativne sile te vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije:

$$\sum M_O = 0$$

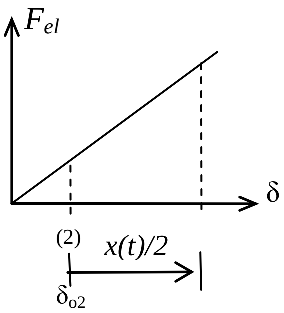
$$(M+m)g\frac{L}{2} - k\cdot\delta_{o2}\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \delta_{o2} = \frac{(M+m)g}{k}$$

$$x_{st2} = \frac{2(M+m)g}{k}$$

$$(E_k+E_p)_1 = (E_k+E_p)_2 = (E_{k,\min}+E_{p,\max}) = (E_{k,\max}+E_{p,\min}) = const\,.$$

a) Ovaj zakon vrijedi i za bilo koji trenutak *t* slobodnih oscilacija, te se koristi za definiranje diferencijalne jednadžbe slobodnih oscilacija.

$$(E_k(t)+E_p(t))=const$$



Prije definiranja potencijalne energije moramo na crtežu označiti odabranu plohu konstantnog potencijala za sve sile, te analizirati pripadne deformacije za elastične sile. Odabrana je ploha ravnotežnog položaja štapa sa kuglicom (2).

Kinetička energija sustava za neki trenutak *t* određena je pripadnom kutnom brzinom rotacije štapa i momentom tromosti mase. Potencijalna energija sustava sastoji se od potencijalne energije elastične sile, težine štapa i kuglice.

$$(E_k+E_p)=const$$

$$\frac{1}{2}I_0\cdot\left(\frac{\dot{x}(t)}{L}\right)^2-(M+m)g\cdot\frac{x(t)}{2}+\frac{1}{2}k\cdot\left(\delta_{o2}+\frac{x(t)}{2}\right)^2-\frac{1}{2}k\cdot\delta^2_{o2}+c=const$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4M+3m}{12}\cancel{L^2}\cdot\frac{\dot{x}}{\cancel{L^2}}^2-(M+m)g\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{2}k\cdot(\delta^2_{o2}+2\delta_{o2}\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4})-\frac{1}{2}k\cdot\delta^2_{o2}=c$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4M+3m}{12}\dot{x}^2-\cancel{(M+m)g\cdot\frac{x}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}k\cdot\delta^2_{o2}}+\cancel{k\frac{(M+m)g}{k}\frac{x}{2}}+k\frac{x^2}{8}-\cancel{\frac{1}{2}k\cdot\delta^2_{o2}}=c\Big|\frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4M+3m}{12}2\dot{x}\cdot\ddot{x}+k\frac{2x\cdot\dot{x}}{8}=0$$

$$\left(\frac{4M+3m}{12}\ddot{x}+\frac{k}{4}x\right)\dot{x}=0\qquad\Rightarrow\qquad\underline{\frac{4M+3m}{12}\ddot{x}+\frac{k}{4}x=0}$$

Ova diferencijalna jednadžba može se napisati i pomoću vlastite frekvencije Ω.

$$\ddot{x}+\Omega^2x=0\qquad\Leftarrow\qquad\Omega=\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}=4,472\ r/s$$

$$\underline{\ddot{x}(t)+20\cdot x(t)=0}$$

b) Rješenje jednadžbe ili zakon oscilacija točke B štapa oko ravnotežnog položaja x_{st2} i ovisi o uzroku oscilacija opisanom u tekstu zadatka, odnosno položaju i brzini sustava u početnom trenutku $t=0$.

$$x(t)=x_0\cos\Omega t+\frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t$$

U trenutku $t=0$ udaljenost od ravnotežnog položaja x_{st2} vidimo na crtežu; u ovom slučaju to je razlika prvog i drugog statičkog progiba, ili jednostavnije, to je samo progib od kuglice. Predznak se promatra u odnosu na označeni smjer $x(t)$.

$$x_0=-(x_{st2}-x_{st1})=-\frac{2mg}{k}$$

$$x_0=-0{,}1962m$$

Zbog plastičnog sraza kuglica se zalijepi za štap koji miruje u prvom ravnotežnom položaju, te nakon sraza nastavlja gibanje zajedno sa štapom. Otpor rotaciji određen je momentom tromosti mase štapa i kuglice, na os koja prolazi točkom O, i okomita je na ravninu crteža.

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{4M+3m}{12}L^2$$

Pri srazu čestica, količina gibanja prije i poslije sraza ostaje nepromjenjena, jer se promatra translacijsko gibanje. Pri srazu tijela i čestice bitno je uočiti kakvo gibanje je moguće! Ovaj se sustav nakon sraza može samo zarotirati oko nepomične točke O, kutnom brzinom ω_O. Zbog toga se bez uklanjanja spoja i uvođenja reaktivnog impulsa ne može promatrati količina gibanja, te je jednostavnije analizirati moment količine gibanja (kinetički moment).

$$\vec{K}_{O,prije} = \vec{K}_{O,poslije}$$

$$m \cdot v_k \cdot \frac{L}{2} = I_O \cdot \omega_O$$

$$m \cdot v_k \cdot \frac{L}{2} = \frac{4M+3m}{12}L^2 \cdot \omega_O \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\omega}_O = -\frac{6\,m \cdot v_k}{L(4M+3m)}\vec{k}$$

$$v_0 = \omega_0 \cdot L$$

$$v_0 = \frac{6m}{4M+3m}v_k \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = 0{,}2\ m/s$$

Ovi početni uvjeti, određuju zakon oscilacija točke B štapa:

$$x(t) = -\frac{2mg}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t + \frac{6m}{4M+3m}v_k\sqrt{\frac{4M+3m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t$$

$$x(t) = -\frac{2mg}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t + mv_k\sqrt{\frac{12}{k(4M+3m)}}\sin\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t.$$

$$x(t) = -0{,}1962\cos 4{,}472t + 0{,}04472\sin 4{,}472t$$

Maksimalna amplituda oscilacija točke B:

$$A = \sqrt{\frac{4m^2g^2}{k^2} + \frac{12m^2{v_k}^2}{k(4M+3m)}} \qquad \Rightarrow \qquad A = 0{,}20123m$$

c) Maksimalna deformacija opruge

$$\delta_{o,Max} = \delta_{o2} + \frac{A}{2} = \frac{(M+m)g}{k} + \frac{m}{k}\sqrt{g^2 + \frac{3k \cdot {v_k}^2}{(4M+3m)}} \qquad \Rightarrow \qquad \delta_{o,Max} = 0{,}493m$$

d) Maksimalna brzina

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{2mg}{k}\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}\sin\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t + \frac{6m \cdot v_k}{4M+3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t$$

$$v(t) = 0{,}877406\sin 4{,}472t + 0{,}2\cos 4{,}472t$$

$$v_{Max} = \sqrt{\frac{12m^2g^2}{k(4M+3m)} + \frac{36m^2{v_k}^2}{(4M+3m)^2}} = \sqrt{0{,}8774^2 + 0{,}2^2} = 0{,}9m/s$$

e) Maksimalno ubrzanje

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{6mg}{4M+3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}t + 6m\cdot v_k\sqrt{\frac{3k}{(4M+3m)^3}}\sin\sqrt{\frac{3k}{4M+3m}}\,t$$

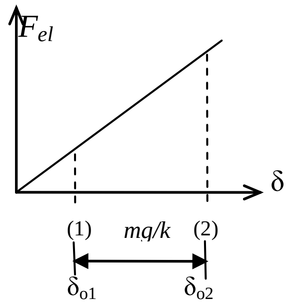
$$a(t) = 3.924\cos 4{,}472t + 0{,}8944\sin 4{,}472t$$

$$a_{Max} = \sqrt{\frac{36m^2g^2}{(4M+3m)^2} + \frac{108k\,m^2v_k^{\,2}}{(4M+3m)^3}} = \sqrt{3{,}92376^2 + 0{,}8944^2} = 4{,}0246\,m/s^2$$

Direktno rješenje za max. brzinu i ubrzanje točke B i max. deformaciju opruge

Sustav tijekom oscilacija prolazi maksimalnom brzinom kroz položaj stabilne ravnoteže, dakle u položaju (2) potencijalna energija minimalna, a kinetička maksimalna.

$$(E_k + E_p)_2 = (E_{k,\max} + E_{p,\min})$$



Za plohu const. potencijala odabrana je ploha ravnotežnog položaja štapa sa kuglicom (2). Izjednačimo mehaničku energiju u početnom položaju (1) i položaju (2):

$$(E_k + E_p)_1 = (E_k + E_p)_2$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega_O^{\,2} + \frac{1}{2}k\delta^2_{o1} + (M+m)g\cdot\frac{mg}{k} + c = E_{k,\max} + \frac{1}{2}k(\delta_{o1} + \frac{mg}{k})^2 + c$$

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2{}_O + \frac{1}{2}k\delta^2{}_{o1} + \frac{Mmg^2}{k} + \frac{m^2g^2}{k} = E_{k,\max} + \frac{1}{2}k\delta^2{}_{o1} + \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{1}{2}k2\cdot\delta_{o1}\cdot\frac{mg}{k} \qquad \Leftarrow \quad \delta_{o1} = \frac{Mg}{k}$$

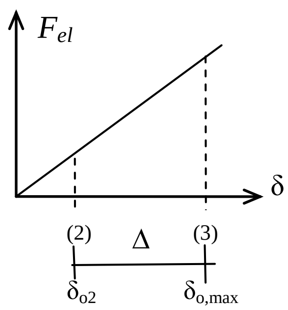
....

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3m^2v^2{}_k}{4M+3m} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2g^2}{k} = E_{k,\max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4M+3m}{12}L^2\,\frac{v^2{}_{B,\max}}{L^2}$$

$$v^2{}_{B,\max} = \frac{36m^2v^2{}_k}{(4M+3m)^2} + \frac{12m^2g^2}{k(4M+3m)} \qquad \Rightarrow \qquad v_{B,\max} = \sqrt{\frac{36m^2v^2{}_k}{(4M+3m)^2} + \frac{12m^2g^2}{k(4M+3m)}}$$

U trenutku max. deformacije opruge mijenja se smjer gibanja štapa, odnosno vektor brzine mijenja predznak, što znači da je u tom trenutku brzina jednaka nuli: $v(x_{max})=0$.

Kinetička energija je minimalna u položaju (3), te je u tom položaju maksimalna deformacija opruge što je označeno na grafu elastične sile.



Izjednačimo mehaničku energiju u položaju (2) i položaju (3):

$$(E_k + E_p)_2 = (E_k + E_p)_3 \qquad E_{k,2} = E_{k,\max}$$

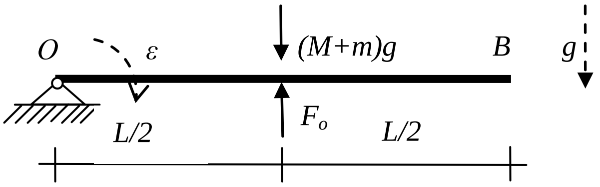
$$\frac{1}{2}I_O\omega^2{}_O + \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} + c = 0 - (M+m)g\cdot\Delta + \frac{k(\delta_{o2}+\Delta)^2}{2} - \frac{k\delta^2{}_{o2}}{2} + c$$

....

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2{}_O + \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} = \frac{1}{2}k\Delta^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{3m^2v_k^{\,2}}{k(4M+3m)}} \qquad \delta_{o2} = \frac{(M+m)g}{k}$$

$$\delta_{o,\max} = \delta_{o2} + \Delta = \frac{(M+m)g}{k} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{3m^2v_k^{\,2}}{k(4M+3m)}} \qquad \Rightarrow \qquad \delta_{o,\max} = 0.493016\,m$$

Ubrzanje odredimo primjenom 2. Newtonovog aksioma. Sustav se rotira oko zgloba u točki O, te koristimo Newtonov aksiom u rotaciji. Maksimalno ubrzanje povezano je s maksimalnim momentom vanjskih sila.



$$I_o \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_o$$

$$I_O \varepsilon_{\max} = M_{\max} = \left(\left(M+m\right)g - F_{O,\min}\right)\frac{L}{2}$$

Moment je najveći ako je elastična sila najmanja!

$$\delta_o = \frac{\left(M+m\right)g}{k} \pm \Delta \qquad \Rightarrow \qquad F_{O,\min} = k \cdot \delta_{o,\min} = \left(M+m\right)g - k\Delta$$

$$I_O \varepsilon = \left(M+m\right)g\frac{L}{2} - \left(M+m\right)g\frac{L}{2} + k \cdot \Delta\frac{L}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{kL}{2I_O}\Delta = \frac{6k}{\left(4M+3m\right)L}\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{3m^2v_k^{\ 2}}{k(4M+3m)}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{36m^2g^2}{\left(4M+3m\right)^2} + \frac{108km^2v_k^{\ 2}}{\left(4M+3m\right)^3}}$$

Ubrzanje točke B:

$$a_{B,\max} = \varepsilon_{\max} \cdot L$$

$$a_{B,\max} = \sqrt{\frac{36m^2g^2}{\left(4M+3m\right)^2} + \frac{108km^2v_k^{\ 2}}{\left(4M+3m\right)^3}} \qquad \Rightarrow \qquad a_{B,\max} = 4{,}0246\, m/s^2$$