Vera Čuljak

PRIMIJENJENA MATEMATIKA

Građevinski fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Predgovor

Poštovani čitatelji,

nadam se da ćete naći korisne informacije u ovom nastavnom tekstu.

Ovaj nastavni materijal (skripta) je nastao kao radni materijal za predavanja iz kolegija *Primijenjena matematika* koji predajem od 2007. godine na poslijediplomskom doktorskom studiju Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Cilj kolegija je da se studenti upoznaju s osnovnim svojstvima funkcija kompleksne varijable, konformnim preslikavanjima, Fourierovim redovima, Fourierovim transformacijama i primjenama. Naglasak je na primjenama za rješavanje rubnih problema, za tok fluida, za obradu signala.

Predznanje koje je neophodno za praćenje ovog kolegija studenti su stekli na preddiplomskom i diplomskom studiju u okviru kolegija Matematika 1, Matematika 2, Matematika 3: diferencijalni račun, obične diferencijalne jednadžbe, parcijalne diferencijalne jednadžbe, vektorska analiza. Kao podsjetnik u poglavljima PRISJETIMO SE dane su osnovne definicije.

Metodički razlozi uvjetovali su organizaciju skripte u dvije cjeline: Funkcije kompleksne varijable i Fourierove transformacije. Nastavni materijal prati 30 sati predavanja i daje motiv za seminarske radove (15 sati).

Strogi matematički sadržaj ublažen je shematiziranom organizacijom svakog poglavlja:

definicija + primjer + domaća zadaća + teorem + primjer + napomene + domaća zadaća

Ovo je radni materijal i bit ću zahvalna ako sve uočene greške i prijedloge kolegice i kolege studenti i čitatelji pošalju na e-mail adresu vera@grad.hr.

Dodatni nastavni materijali na web stranici predmeta koji prate ovu web skriptu odnose se na primjenu programskog paketa *Mathematica* za Fourierove transformacije.

Zahvaljujem se kolegici Martini Benković na pomoći u grafičkoj obradi. Zahvaljujem se kolegi Vladimiru Beniću koji je napravio web format skripte.

Zagreb, 1.9.2011. Vera Čuljak

Sadržaj

Dio I

Funkcije kompleksne varijable

Poglavlje 1

Kompleksni brojevi

Neki inženjerski problemi koji uključuju harmonijske funkcije $u(x, y)$ mogu se riješiti korištenjem alata kompleksne analize.

1.1 Kompleksni brojevi

Prisjetimo se skupova brojeva: skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$, skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, skup iracionalnih $\mathbb{I}$, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$; i relacija među njima

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Realan broj koji nije racionalan zove se iracionalan broj. Do pojma iracionalnog broja prvi su došli Pitagorejci pokazujući da iznos duljine dijagonale kvadrata nije racionalan broj. Neka je n prirodan broj koji nije kvadrat nekog cijelog broja. Ne postoji racionalan broj x koji zadovoljava jednadžbu $n - x^2 = 0$. Rješenja su iracionalani brojevi $x = \sqrt{n}$, $x = -\sqrt{n} \in \mathbb{I}$.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Sustavnu teoriju kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$ prvi put je izložio 1572. g. talijanski matematičar R. Bombellia. Povod je bio prikaz tri realna rješenja kubne jednadžbe $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Q}$ (kad je $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{3} < 0$.) Bombelli je dobio tri realna rješenja jednadžbe $x^3 - 15x - 4 = 0$ koja su dana Cardanovom formulom

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Pretpostavio je postojanje broja oblika $a + b\sqrt{-1}$, pokazao da vrijedi
$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$
$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$
i dobio realno rješenje $x = 4$.
Ostala dva realna rješnenja su $2-\sqrt{3}$ i $2-\sqrt{3}$.

Definicija 1.1 *imaginarna jedinica*

Imaginarna jedinica je broj i koji ima svojstvo da je $i^2 = -1$. Imaginarna jedinica nije realan broj.

$$i = \sqrt{-1}.$$

Definicija 1.2 *kompleksni broj*

Kompleksni broj z definira se kao uređeni par realnih brojeva (a, b) algebarskim zapisom

$$z = a + i\,b,$$

gdje je i imaginarna jedinica, $a = \mathrm{Re}\,z$ realni dio kompleksnog broja, $b = \mathrm{Im}\,z$ imaginarni dio kompleksnog broja. Dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + i\,b_1$, $z_2 = a_2 + i\,b_2$ su jednaka ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.

Skup kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C} = \{a + i\,b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Realne brojeve $a \in \mathbb{R}$ možemo prikazati kao kompleksne brojeve $a = a + i\,0$ pa je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.1.1 Operacije na skupu $\mathbb{C}$

Na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definirane su operacije:
za $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ z_2 = a_2 + i\,b_2$:

(i) zbrajanje:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2),$$

(ii) množenje:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$$

Kompleksni broj $\overline{z} = a - i\,b$ zovemo KONJUGIRANO KOMPLEKSNI BROJ broju $z = a + i\,b$.

Uočimo da veza konjugiranog para $z = a + i\,b$ i $\overline{z} = a - i\,b$ daje izraze za realni i imaginarni dio kompleksnog broja

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

MODUL KOMPLEKSNOG BROJA $z = a + i\,b$ je pozitivan realan broj

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Za kompleksan broj $z = a + i\,b$, $z \neq 0$ njegov INVERZ je broj $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Operacija dijeljenja se definira kao množenje s inverzom:
za $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ \ z_2 = a_2 + i\,b_2,$

(iii) dijeljenje:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

ZADAĆA 1.1 *Za konjugiranje i operacije sa kompleksnim brojevima vrijede sljedeća pravila:*

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}, \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ \ z_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

ZADAĆA 1.2 *Pokažite da za modul kompleksnih brojeva vrijede sljedeća svojstva:*

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|, \\
|z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2|, \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \ z_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

NAPOMENA 1.1 *Neka su* $z_1 = x_1 + iy_1$ *i* $z_2 = x_2 + iy_2$ *dva kompleksna broja (koje smatramo 'vektorima'). Neka je* $\alpha \in [0, \pi]$ *kut između 'vektora'* z_1 *i* z_2.

Skalarni produkt kompleksnih brojeva definira se formulom:

$$z_1 \circ z_2 = |z_1||z_2| \cos \alpha$$

$$z_1 \circ z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{Re}[\overline{z_1} \cdot z_2] = \frac{1}{2}(\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}).$$

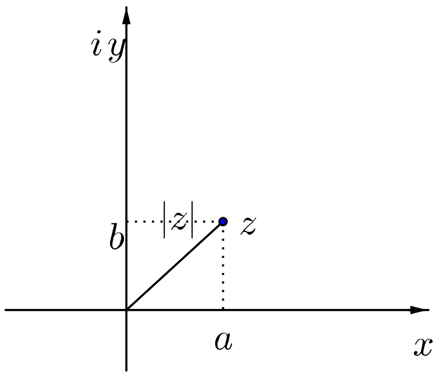
Vektorski produkt kompleksnih brojeva definira se formulom:

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \sin \alpha$$

$$z_1 \times z_2 = x_1y_2 - y_1x_2 = \mathrm{Im}[\overline{z_1} \cdot z_2] = \frac{1}{2i}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}).$$

1.1.2 Prikaz kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prikazujemo kao točke u GAUSSOVOJ RAVNINI (kompleksna ravnina ili Argandova ravnina) sa Kartezijevim koordinatnim sustavom tako da je $x-$os realna os, a $y-$os imaginarna os.
Kompleksnom broju $z = a + ib$ pridružujemo točku T s koordinatama (a, b).



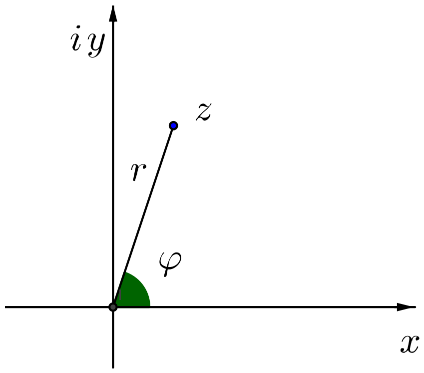
Slika 1.1: $z = a + i\,b$

Kompleksne brojeve prikazujemo kao točke u Gaussovoj ravnini s polarnim koordinatama tako da kompleksnom broju $z = a + ib$, $z \neq 0$ pridružujemo točku T s koordinatama (r, φ). Koordinata r je udaljenost točke T od ishodišta

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Za kompleksan broj $z \neq 0$ kut φ je kut koji OT zatvara s pozitivnim krakom realne osi. Kut nije jednozačno određen jer točki odgovaraju i kutovi $\varphi + 2k\pi$, za $k \in \mathbb{Z}$. Iskoristimo vezu između polarnih i Kartezijevih koordinata $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ da dobijemo zapis kompleksnog broja u TRIGONOMETRIJSKOM OBLIKU

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$



Slika 1.2: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

U tom zapisu r je modul kompleksnog broja a kut φ zovemo argument kompleksnog broja koji računamo u ovisnosti o predznaku a i b :

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & a < 0,\ b \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \pi, & a < 0,\ b \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0,\ b < 0 \\ \textit{neodređeno}, & a = 0,\ b = 0 \\ \pi, & a < 0,\ b = 0 \\ 0, & a > 0, b = 0 \end{cases}$$

ARGUMENT KOMPLEKSNOG BROJA $z = a + ib$ je mjera kuta φ i označava se sa $arg\, z$. Glavna vrijednost argumenta je vrijednost argumenta koja je unutar $(-\pi, \pi]$ i označavamo je sa $\operatorname{Arg} z$ i često se zapisuje $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

$$arg\, z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nekada se za glavnu vrijednost argumenta uzima vrijednost argumenta koja je u intervalu $[0, 2\pi)$.

PRIMJER 1.1 *Odredite trigonometrijski zapis kompleksnog broja* $z = 1 - i$.

Rješenje:
Modul kompleksnog broja je $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. Ako glavnu vrijednost argumenta definiramo unutar intervala $(-\pi, \pi]$ onda je

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ jer je $a > 0$, $b < 0$.

Glavna vrijednost argumenta je $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$.

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja je

$z = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\ \sin(-\frac{\pi}{4}))$.

Ako glavnu vrijednost argumenta definiramo unutar intervala $[0, 2\pi)$ onda je

$\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja je

$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\ \sin(\frac{7\pi}{4}))$.

Prikaz kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku pomaže nam da bolje razumijemo operacije množenja i dijeljenja kompleksnih brojeva. Operacije na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ zadanih u trigonometrijskom obliku:
za $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)$, $\quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)$,

(i) zbrajanje: $z_1 + z_2 = (|z_1|\cos\varphi_1 + |z_2|\cos\varphi_2) + i\,(|z_1|\sin\varphi_1 + |z_2|\sin\varphi_2)$;

(ii) množenje: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

(iii) dijeljenje: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

ZADAĆA 1.3 *Izvedite formulu za produkt dva kompleksna broja* $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$. *Koristite adicijske teoreme za sinus i kosinus.*

PRIMJER 1.2 *Koristeći aksiom matematičke indukcije izvedite De Moivreovu formulu*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Baza indukcije $n = 1: \ z^1 = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;
Pretpostavka indukcije $n = k: \ z^k = |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$;
Korak indukcije $n = k+1:$ trebamo pokazati da je

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Računamo $z^{k+1} = z^k \cdot z = \text{(PI)}$
$= |z|^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$= |z|^{k+1}(\cos k\varphi + \cos\varphi - \sin k\varphi \sin\varphi) + i(\cos k\varphi \sin\varphi + \sin k\varphi \cos\varphi)$
$= |z|^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi)$.
Prema aksiomu matematičke indukcije pokazali smo da formula vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

PRIMJER 1.3 *Pokažite da dijeljenje kompleksnog broja z s imaginarnom jedinicom i geometrijski predstavlja rotaciju za kut $\pi/2$ u smjeru kazaljke na satu.*

Rješenje:

Neka je $z = |z|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ a trigonometrijski oblik imaginarne jedinice je $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}$.

$\frac{z}{i} = |z|[\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}]$.

Od točke T u Gaussovoj ravnini koja odgovara broju z, rotacijom oko ishodišta, u smjeru kazaljke na satu za kut $\frac{\pi}{2}$, dobili smo točku T' koja odgovara broju $\frac{z}{i}$.

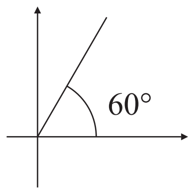
ZADAĆA 1.4 *Pokažite da množenje kompleksnog broja z s imaginarnom jedinicom i geometrijski predstavlja rotaciju za kut $\pi/2$ suprotno smjeru kazaljke na satu.*

PRIMJER 1.4 *Skicirajte u Gaussovoj ravnini kompleksne brojeve*

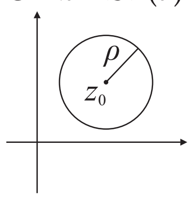
(a) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ \ |z| \in \mathbb{R}, \ \ \varphi = \frac{\pi}{3}$;

(b) $|z - z_0| \leq \rho, \ |z - z_0| = \rho$;

(c) $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$.



Slika 1.3: (a)



Slika 1.4: (b)

Slika 1.5: (c)

Rješenje: (a) Kompleksni brojevi leže na zraci $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
(b) Kompleksni brojevi $|z - z_0| \leq \rho$, leže u krugu $\overline{K}(z_0, \rho)$;
Kompleksni brojevi $|z - z_0| = \rho$, leže na kružnici $k(z_0, \rho)$;
(c) Kompleksni brojevi $\rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2$ leže u kružnom prstenu.

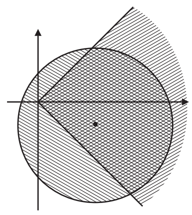
PRIMJER 1.5 *Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju*

(a) $|z - 3 + i| \leq 4$

(b) $|\text{Arg}\, z| \leq \frac{\pi}{4}$

(c) $|z - 3 + i| \leq 4, \ |\text{Arg}\, z| \leq \frac{\pi}{4}$

Rješenje:



Slika 1.6: (c)

(a) Prema prethodnom primjeru kompleksni brojevi koji zadovoljavaju $|z-(3-i)| \leq 4$ leže u u Gaussovoj ravnini u krugu $\overline{K}(z_0, \rho) = \overline{K}(3-i, 4)$ sa središtem u $z_0 = 3 - i$ i s polumjerom 4.
(b) Komleksni brojevi $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gdje je $\varphi = \operatorname{Arg} z$ trebaju zadovoljiti uvjet $|\operatorname{Arg} z| \leq \frac{\pi}{4}$ tj. $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{4}$.

U Gaussovoj ravnini to su točke koje leže između zraka $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

(c) U Gaussovoj ravnini to su točke koje leže i u krugu $\overline{K}(3-i, 4)$ i u kružnom isječku s vrhom u ishodištu s kracima $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Definicija 1.3 *konjugirane koordinate*

Kompleksnom broju $z = x + iy$ u kompleksnoj ravnini odgovara točka T s Kartezijevim koordinatama (x, y). Točki T mogu se pridružiti i konjugirane koordinate $(z, \overline{z})$:

$$z = x + iy, \;\; \overline{z} = x - iy$$

ZADAĆA 1.5 *(a) Pokažite da jednadžba pravca u konjugiranim koordinatama ima zapis*

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \; \gamma \in \mathbb{R}, \; \beta \in \mathbb{C}.$$

(koristite jednadžbu pravca u Kartezijevim koordinatama $ax + by + c = 0, \;\; a, b, c \in \mathbb{R}$.
(b) Pokažite da jednadžba kružnice u konjugiranim koordinatama ima zapis

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \;\; \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \; \beta \in \mathbb{C}, \; \alpha \neq 0.$$

(koristite jednadžbu kružnice u Kartezijevim koordinatama
$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}$.)

PRIMJER 1.6 *Opišite što geometrijski predstavljaju sljedeće jednadžbe dane u konjugiranim koordinatama:*

(a) $z\overline{z} = 64$

(b) $z + \overline{z} = 2.$

Napišite sljedeće jednadžbe u konjugiranim koordinatama :

(c) $(x - 5)^2 + y^2 = 16$

(d) $2x - 3y = 10.$

Rješenje:

(a) $x^2 + y^2 = 64$ centralna kružnica polumjera 8;

(b) $x = 1$ pravac;

(c) $(z - 5)(\overline{z} - 5) = 16$ kružnica sa središtem u $(5, 0)$ polumjera 4;

(d) $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=10$ pravac

NAPOMENA 1.2 *tko želi znati više*

W.R. Hamilton, irski matematičar dao je definiciju kompleksnog broja z kao uređenog para realnih brojeva (a,b), gdje se a zove realni dio kompleksnog broja, a b imaginarni dio kompleksnog broja: $a=\mathrm{Re}\, z,\ \ b=\mathrm{Im}\, z$. Dva kompleksna broja $z_1=(a_1,b_1)$ i $z_2=(a_2,b_2)$ su jednaka ako je $a_1=a_2$ i $b_1=b_2$.

Na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definirane su operacije zbrajanja i množenja: za $z_1=(a_1,b_1)$ i $z_2=(a_2,b_2)$

(i) zbrajanje: $z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$;

(ii) množenje: $z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2,a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)$.

Operacije zbrajanja i množenja imaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti množenja prema zbrajanju.

Realni brojevi $a\in\mathbb{R}$ se predstavljaju uređenim parovima $(a,0)$, pa je $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$. Prema pravilu množenja za kompleksne brojeve $(0,1)$ vrijedi

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0),$$

pa možemo zapisati kompleksan broj

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,1)(b,0).$$

Ako se kompleksan broj $(0,1)$ definira kao imaginarna jedinica $i=(0,1)$ onda kompleksan broj možemo zapisati u algebarskom obliku

$$z=a+ib.$$

Skup $\mathbb{C}$ s operacijama zbrajanja i množenja je polje.

Neutralni element za zbrajanje je kompleksna nula $(0,0)$.

Za element $z=(a,b)$ suprotni element je $-z=(-a,-b)$. Jedinični element za množenje je $1=(1,0)$.

Za element $z\neq 0,\ z=(a,b)$ inverzni element za množenje je $\frac{1}{z}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.

Poglavlje 2

Funkcije kompleksne varijable

U ovom poglavlju definiramo funkciju kompleksne varijable analogno definiciji funkcije realne varijable. Plan proučavanja funkcija realne (elementarne funkcije, neprekinutst, limes, derivacija) preslikat će se u ovom poglavlju na funkcije kompleksne varijable.

Definicija 2.1 *funkcija kompleksne varijable*

Neka je D podskup Gaussove ravnine $\mathbb{C}$. Funkcija kompleksne varijable $f : D \to \mathbb{C}$ argumentu $z \in \mathbb{C}$, $z = x + i\,y$ pridružuje vrijednost $w = f(z) \in \mathbb{C}$ i ima prikaz

$$f(z) = Re\, f(z) + i\, \mathrm{Im}\, f(z).$$

Zadati funkciju kompleksne varijable znači zadati dvije realne funkcije od dvije realne varijable na realnom području $D \in \mathbb{R}^2$ koje skupovno odgovara $D \in \mathbb{C}$

$$u : D \to \mathbb{R}, \;\; v : D \to \mathbb{R}$$

tako da vrijedi

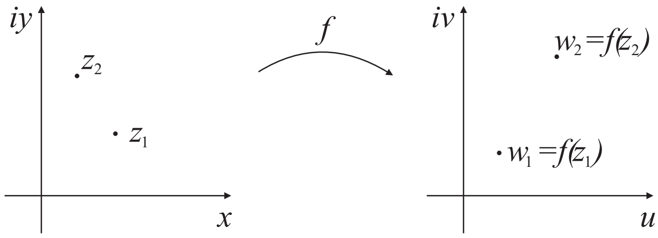
$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

gdje je

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y), \;\; \mathrm{Im}\, f(z) = v(x, y).$$

Prema nazivu realna funkcija i u slučaju funkcije kompleksne varijable naziv se obično skraćuje u kompleksna funkcija.

Graf kompleksne funkcije $f(z)$ je uređena četvorka $(x, y, u(x, y), v(x, y))$ koju prikazujemo pomoću dvije Gaussove ravnine: $z-$ravnina ili $(x, y)-$ravnina domene i $w-$ravnina ili $(u, v)-$ravnina slike funkcije.



Slika 2.1: graf funkcije f(z)

Definicija 2.2 *preslikavanje*

Skup jednadžbi

$u = u(x, y)$

$v = v(x, y)$

zovu se transformacijske jednadžbe i definiraju preslikavanje koje točke iz $(x, y)-$ravnine preslikava u točke iz $(u, v)-$ravnine.

Ako svakoj točki iz $(x, y)-$ravnine odgovara jedinstvena točka iz $(u, v)-$ravnine i obrnuto preslikavanje je bijektivno.

Neka se tim preslikavanjem područje D preslika u područje D^* i neka su ΔA_{xy} i ΔA_{uv} povrďż˝ine tih područja. Ako su funkcije u i v neprekinuto diferencijabilne onda se definira Jakobijan preslikavanja

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

i vrijedi

$$\lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = |J|,$$

kad $\Delta A_{xy} \to 0$.

Ako riješimo sistem transformacijskih jednadžbi po x i y transformacijske jednadžbe

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$
predstavljaju inverzno preslikavanje.

Ako su $x(u, v)$ i $y(u, v)$ jednoznačne funkcije i neprekinuo diferencijabilne onda je je Jakobijan tog preslikavanja $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Dovoljan uvjet da postoji inverzno preslikavanje je da je $J \neq 0$ na području D.

Neka je $D \subset \mathbb{C}$ podskup Gaussove z-ravnine a $D' \subset \mathbb{C}$ poskup Gaussove w-ravnine. Kompleksnu funkciju $f : D \to D'$,
$f(z) = (x, y) + iv(x, y)$ geometrijski interpretiramo kao preslikavanje $w = f(z)$ koje je zadano transformacijskim jednadžbama $u = u(x, y),\ \ v = v(x, y)$ i koje skup D preslika u $f(D) \subset D'$.

NAPOMENA 2.1 *Za zadana područja D i D' želimo odrediti preslikavanje $f : D \to D'$, tako da je $f(D) = D'$.*

To preslikavanje će biti opisano u poglavlju 5. konformno preslikavanje.

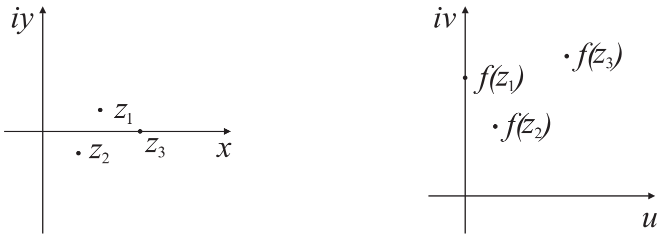
PRIMJER 2.1 *Zadana je kompleksna funkcija $f(z) = (1+i)z + (-2+3i)$. Odredite sliku*
(a) točaka $z_1 = 3 + i,\ \ z_2 = 2 - i,\ \ z_3 = 5$
(b) pravaca $x = c$

Rješenje: (a) Računamo po definiciji
$f(z_1) = (1 + i) \cdot (3 + i) + (-2 + 3i) = 2 + 4i - 2 + 3i = 7i$
$f(z_2) = (1 + i) \cdot (2 - i) + (-2 + 3i) = 3 + i - 2 + 3i = 1 + 4i$
$f(z_3) = (1 + i) \cdot 5 + (-2 + 3i) = 3 + 8i$

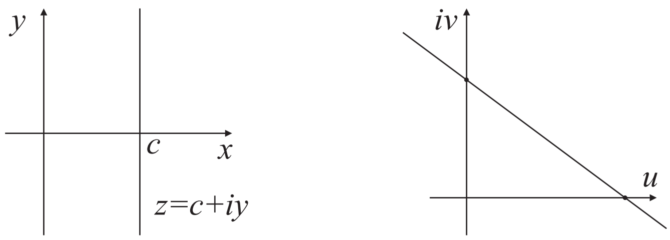
(b) Točke pravca $x = c$ su kompleksni brojevi $z = c + iy,\ y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= (1+i)z + (-2+3i) = (1+i) \cdot (c+iy) + (-2+3i) \\ &= c - y + ic + iy - 2 + 3i = \underbrace{(c - 2 - y)}_{u} + \underbrace{(c + 3 + y)}_{v} i \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava $y = c - 2 - u,\ \ v = c + y + 3 = c + c - 2 - u + 3 = 2c + 1 - u$ dobijemo jednadžbu pravca u $w-$ravnini $v = 2c + 1 - u$.



Slika 2.2: (a)



Slika 2.3: (b)

NAPOMENA 2.2 *Neka je S podskup od* $\mathbb{C}$.
Skup $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ *zovemo* $\varepsilon-$ *okolina oko točke* z_0.
Za točku z_0 *kažemo da je unutarnja točka skupa S ako postoji okolina* $B(z_0, \varepsilon)$ *koja potpuno leži u S.*
Za točku z_0 *kažemo da je vanjska točka skupa S ako postoji okolina* $B(z_0, \varepsilon)$ *koja potpuno leži izvan S.*
Ako točka z_0 *nije ni unutarnja ni vanjska točka skupa S kažemo da je rubna točka skupa S.*
Sve rubne točke skupa S zovemo rub skupa S i označavamo ∂S.
Skup S je otvoren ako ne sadrži niti jednu svoju rubnu točku.
Skup je zatvoren ako sadrži sve svoje rubne točke.
Skup S je povezan ako se svake dvije točke iz S mogu spojiti izlomljenom linijom koja leži u S.
Skup S je područje ako je otvoren i povezan.
Jednostruko povezano područje ima rub koji je jednostavna zatvorena po dijelovima glatka krivulja.

Definicija 2.3 *višeznačne funkcije*

Funkcija $f(z)$ *koja poprima više vrijednosti* w *za argument* z *nije prava funkcija* *i zovemo je višeznačna funkcija. Za višeznačne funkcije kažemo da su predstavljene skupom pravih funkcija (jednoznačnih funkcija) koje se zovu grane funkcije (za svaki pojedini slučaj vrijednosti). Posebno istaknuta grana funkcije zove se glavna grana funkcije ili glavna vrijednost funkcije.*

Definicija 2.4 *točka grananja i krivulja grananja ili razrez*

Neka je f višeznačna funkcija. Točka z_0 se zove točka grananja funkcije f ako obilaskom oko z_0 po bilo kojoj jednostavnoj zatvorenoj krivulji koja obuhvaća z_0 i koja leži u okolini $B(z_0, \varepsilon)$, prelazimo iz jedne grane funkcije u drugu. Krivulja koja spaja točke grananja zove se krivulja grananja ili razrez.

2.1 Elementarne funkcije

2.1.1 Prisjetimo se

Prisjetimo se osnovnih elementarnih funukcija realne varijable:
- konstantna funkcija
- potencija
- eksponencijalna funkcija
- logaritamska funkcija
- trigonometrijske funkcije (sinus, kosinus, tangens, kotangens)
- ciklometrijske ili arkus funkcije (arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens, arkus kotangens)
- hiperboličke i area funkcije:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c,\ \ c \in \mathbb{R},\ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\\
f(x) &= x^c,\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\\
e^x &: \mathbb{R} \to (0,\infty),\\
\ln\ x &: (0,\infty) \to \mathbb{R},\\
a^x &= e^{x \ln a},\ \ a > 0, a \neq 1\\
\sin\ x &: \mathbb{R} \to [-1,1],\ \ \cos\ x : \mathbb{R} \to [-1,1].\\
\sinh\ x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \sinh\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\\
\cosh\ x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \cosh\ x : \mathbb{R} \to [1,\infty).\\
\operatorname{arsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ \operatorname{arsh} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\\
\operatorname{arch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ \operatorname{arch} x : [1,\infty) \to [0,\infty).
\end{aligned}
$$

ZADAĆA 2.1 *Nacrtajte grafove navedenih osnovnih elementarnih funkcija koristeći programski paket Mathematica.*

2.1.2 Eksponencijalna funkcija

Definicija 2.5 *eksponencijalna funkcija*

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable $f(z) = e^z$ definira se formulom

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

U prikazu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su*

$$u(x, y) = e^x \cos y, \ \ v(x, y) = e^x \sin y$$

Za $z = iy$ vrijednost $e^z = \cos y + i \sin y$ daje EULEROVU FORMULU:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \ \ y \in \mathbb{R}$$

koja povezuje imaginarnu jedinicu i, bazu prirodnog logaritma e i trigonometrijske funkcije $\sin$ i $\cos$.

Iz trigonometrijskog oblika $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ dobijemo pomoću Eulerove formule POLARNI OBLIK kompleksnog broja

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}.$$

Za $z \in \mathbb{C}$ označimo vrijednost funkcije $w = f(z)$. Primijenimo algebarski oblik varijable $z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$ i polarni oblik kompleksne slike
$w = |w|e^{i \operatorname{Arg} w}, \ |w| > 0$, gdje je $\operatorname{Arg} w \in [0, 2\pi)$ ili $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$

Iz relacija
$e^z = w \Rightarrow e^{x+iy} = |w|e^{i \operatorname{Arg} w} \Rightarrow e^x \cdot e^{iy} = |w| \cdot e^{i \operatorname{Arg} w}$ izvodimo vezu

$$|w| = e^x, \ \operatorname{Arg} w = y.$$

T: Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable ima svojstvo aditivnosti (kao i realne eksponencijalne funkcije):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

D: Tvrdnje slijede iz definicije e^z, svojstva eksponencijalne funkcije realne varijable i adicijskih teorema za funkcije $\sin$ i $\cos$.
T: Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable je periodička s periodom $2\pi i$.

$$e^{z+i2\pi} = e^z$$

D: Računamo po definiciji $e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Slijedi
$e^z = e^z \cdot e^{i2\pi} = e^{z+i\,2\pi}$.
T: Eksponencijalna funkcija nikad ne poprima vrijednost nula

$$e^z \neq 0.$$

D: Za eksponencijalnu funkciju realne varijable vrijedi $e^x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji z takav da je $e^z = 0$. Modul od
$e^x(\cos y + i \sin y)$ mora biti jednak 0,
$|e^x(\cos y + i \sin y)| = 0$.
Kako je $|e^x| > 0$, a $|(\cos y + i \sin y)| = 1$ zaključujemo da je pretpostavka kriva. Ne postoji $z \in \mathbb{C}$ takav da je $e^z = 0$.

PRIMJER 2.2 *Skicirajte djelovanje funkcije $f(z) = e^z$ na*

(a) $x-$os,

(b) $y-$os,

(c) pravac $y = c$

(d) pravac $x = c$

Rješenje:

Trebamo odrediti skup $\{w \in \mathbb{C}\}$ za koje $|w| = e^x > 0,\ \ \operatorname{Arg} w = y$.

(a) Jednadžba x-osi je $y = 0$. Iz relacija $|w| = e^x > 0,\ \operatorname{Arg} w = 0$ dobijemo

$$\{z = x + iy : \ x \in \mathbb{R},\ y = 0\} \rightarrow \{w : \ \operatorname{Arg} w = 0\}.$$

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable preslika pravac $y = 0$ u pozitivni polupravac $u-$osi.

(b) Jednadžba y-osi je $x = 0$. Iz relacija $|w| = e^x = e^0 = 1,\ \operatorname{Arg} w = y \in \mathbb{R}$ dobijemo

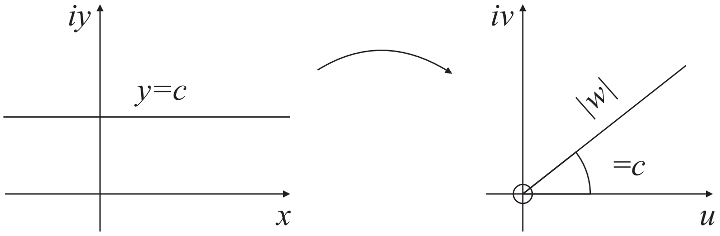
$$\{z = x + iy : \ x = 0, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{w : \ |w| = 1\}.$$

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable preslika y-os u $k(0, 1)$ kružnicu jediničnog polumjera.

(c) Pravcu $y = c$ pripadaju kompleksni brojevi $z = x + ic, x \in \mathbb{R}$. Računamo $|w| = e^x > 0,\ \operatorname{Arg} w = y = c$.

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable preslika pravac $y = c$ u polupravac koji s $u-$osi zatvara kut $\operatorname{Arg} w = c$.

$$\{z = x + iy : \ x \in \mathbb{R},\ y = c\} \rightarrow \{w : \ \operatorname{Arg} w = c\}.$$

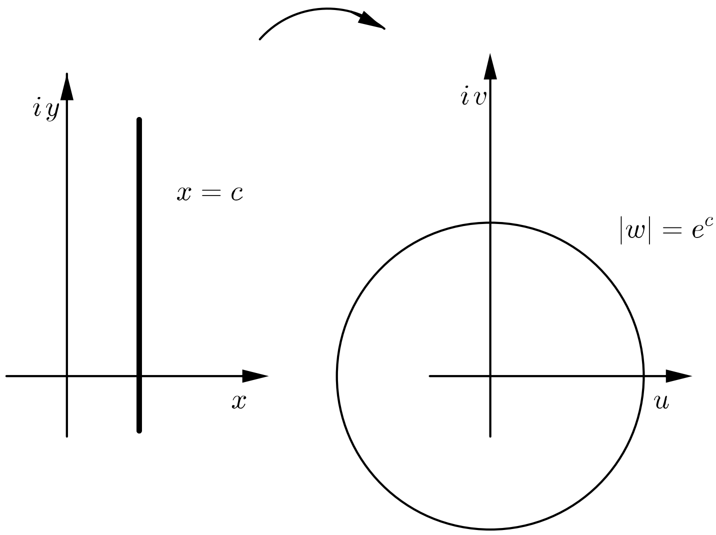


Slika 2.4: (c) e^z

(d) Pravcu $x = c$ pripadaju kompleksni brojevi $z = c + iy, y \in \mathbb{R}$. Računamo $|w| = e^x = e^c,\ \ \operatorname{Arg} w = y$.

Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable preslika pravac $x = c$ u $k(0, e^c)$ kružnicu polumjera e^c.

$$\{z = x + iy :\ x = c, y \in \mathbb{R}\} \to \{w :\ |w| = e^c\}.$$



Slika 2.5: (d) e^z

PRIMJER 2.3 *Odredite sliku područja D za eksponencijalnu funkciju* e^z :

(a) $D = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : x \in \mathbb{R},\ 0 < y < 2\pi\}$

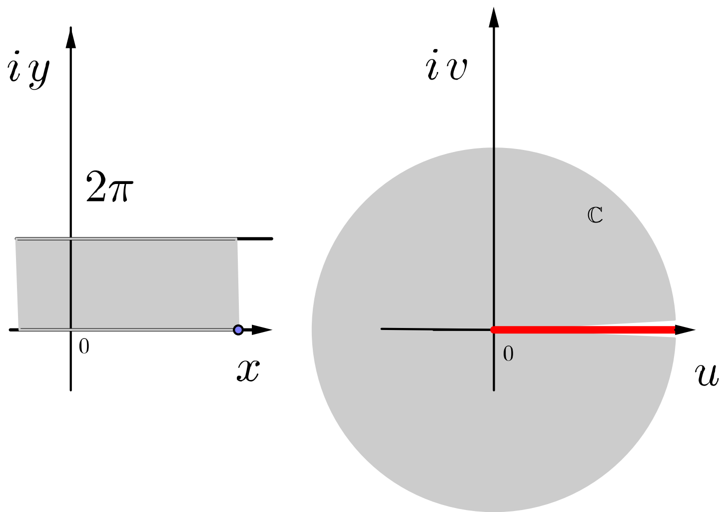
(b) $D = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$

(c) $S_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : x \in \mathbb{R}, a < y < b\}$

(d) $S_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : y \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

(e) $R_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : a < x < b, -\pi < y < \pi\}$

Rješenje:



Slika 2.6: (a) $\{z : 0 < y < 2\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{w : v = 0,\ u \geq 0\}$.

Koristimo formule

$$|w| = e^x, \quad \operatorname{Arg} w = y.$$

(a) Ako odaberemo za glavnu vrijednost argumenta $\operatorname{Arg} w \in [0, 2\pi)$ onda eksponencijalna funkcija preslika prugu $\{0 < y < 2\pi\}$ iz z-ravnine u cijelu w-ravninu bez pozitivnog dijela realne osi:

$$\{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{w = u + iv : v = 0,\ u \geq 0\}.$$

To preslikavanje je jednoznačno. Zraka $\{v = 0,\ u \geq 0\}$ je razrez.

(b) Ako odaberemo $\operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$onda eksponencijalna funkcija preslika prugu $\{-\pi < y < \pi\}$ iz z-ravnine u cijelu w-ravninu bez negativnog dijela realne osi:

$$\{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{w = u + iv : v = 0, u \leq 0\}.$$

To preslikavanje je jednoznačno. Zraka $\{v = 0,\ u \leq 0\}$ je razrez.

(c) Eksponencijalna funkcija prugu $S_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : x \in \mathbb{R},\ a < y < b\}$ preslika u isječak $\{w \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Arg} w < b\}$.

Preslikavanje je jednoznačno ako je $|b - a| < 2\pi$.

Specijalno eksponencijalna funkcija preslika

$$\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\} \to \{\operatorname{Re} w > 0\}.$$

(d) Eksponencijalna funkcija prugu

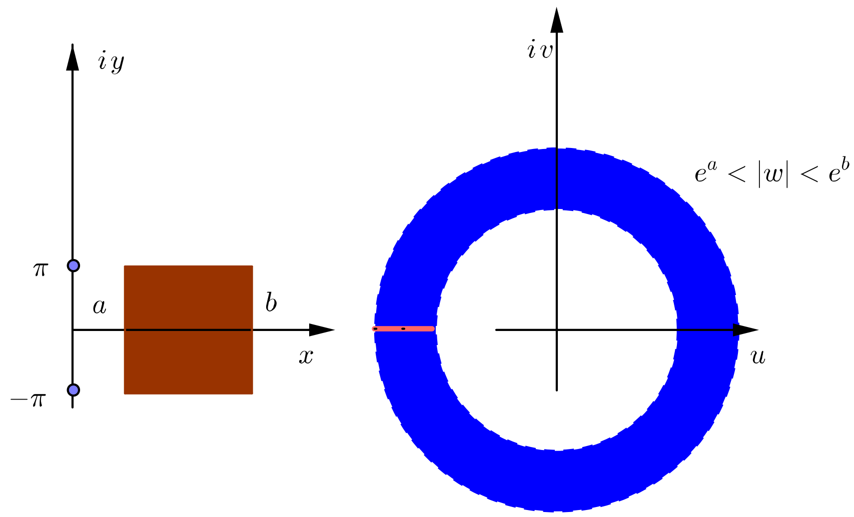
$$S_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : y \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$$

preslika u kružni vijenac $\{w \in \mathbb{C} : e^a < |w| < e^b\}$.

(e) Eksponencijalna funkcija pravokutnik

$$R_{ab} = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy : a < x < b,\ -\pi < y < \pi\}$$

preslika u kružni vijenac $\{w \in \mathbb{C} : e^a < |w| < e^b\}$ koji ima razrez duž negativnog dijela realne osi.



Slika 2.7: (e) $R_{ab} \to \{w : e^a < |w| < e^b\}$

NAPOMENA 2.3 *Prisjetimo se homogene obične diferencijalne jednadže drugog reda s konstantnim koeficijentima*

$$y'' + py' + y = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe $\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$ *su konjugirano kompleksni brojevi* $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, *a linearno nezavisna rješenja diferencijalne jednadže su:*

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \;\; y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Primjenom Eulerove formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *rješenja su:*

$$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot (\cos bx + i\sin bx),$$

$$y_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax} \cdot (\cos bx - i\sin bx),$$

a opće rješenje je linearna kombinacija y_1 *i* y_2 *:*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

$$y(x) = e^{ax}[D_1 \cos bx + D_2 \sin bx], \;\; D_1 = (C_1 + C_2), D_2 = i(C_1 - C_2) \in \mathbb{C};$$

ZADAĆA 2.2 *Riješite diferencijalnu jednadžbu* $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$, *uz početne uvjete* $y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$.

NAPOMENA 2.4 *tko želi znati više*

Eksponencijalna funkcija na $\mathbb{R}$ *može se prikazati redom* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

Analogno se definira eksponencijalna funkcija kompleksne varijable redom $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

Eksponencijalna funkcija $f(z) = e^z$ *je analitička funkcija na* $\mathbb{C}$ *koja zadovoljava uvjete:*

(i) $f'(z) = f(z)$

(ii) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$

(iii) za $\theta \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $f(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Eksponencijalna funkcija je rješenje diferencijalne jednadžbe $f'(z) = f(z)$ *uz početni uvjet* $f(0) = 1$.
Za $z = x + iy$ *pomoću tvrdnji (i) i (ii) vrijedi*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos\, y + i \sin\, y)$$

2.1.3 Logaritamska funkcija

Definicija 2.6 *logaritamska funkcija*

Logaritamska funkcija kompleksne varijable $f(z) = \ln\, z$ *je višeznačna funkcija koja definira se za* $z \neq 0$ *formulom*

$$\ln\, z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi),\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Glavna vrijednost (glavna grana) logaritamske funkcije je

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

U prikazu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *glavne grane realne funkcije su*

$$u(x, y) = \ln\, \sqrt{x^2 + y^2},\;\; v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Eksponencijalan funkcija je periodička s osnovnim periodom $2\pi\, i$ pa njena 'inverzna funkcija' ne može biti jednoznačna funkcija. Logaritamska funkcija će varijabli z pridružiti bekonačno vrijednosti $\ln\, z$ koje će se razlikovati za $2k\pi\, i$, $k \in \mathbb{Z}$.
T: Za fiksni k, funkcija k-ta grana logaritamske funkcije $\ln_k z$ je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije e^z definirane na $\{z : 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\}$.
D: Za fiksni k eksponencijalna funkcija je bijekcija

$$\{z : 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{w = u + iv : v = 0,\, u \geq 0\}$$

pa možemo odrediti inverznu funkciju. Trebamo riješiti jednadžbu $e^w = z$ tj. odrediti $w = u + iv$. Zapišimo argument z u polarnom obliku $z = |z|\, e^{i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$.
Slijedi
$e^w = z \;\Rightarrow\; e^{u+iv} = |z| e^{i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)}$

$e^u e^{iv} = |z| e^{i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)} \;\Rightarrow\; e^u = |z| \; v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,$
$\Rightarrow \quad u = \ln|z|, \; v = \operatorname{Arg} z + 2k\pi.$
Inverzna funkcija $w = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) = \ln_k z$, je k-ta grana logaritamske funkcije kompleksne varijable.

Za $k = 0$ preslikavanje $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ koje predstavlja glavnu vrijednost logaritamske funkcije preslika kompleksnu ravninu bez pozitivne realne osi (razrez) na prugu $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$.

Za izbor $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ glavna vrijednost logaritamske funkcije je bijektivno preslikavanje koje preslika kompleksnu ravninu bez negativne realne osi (razrez) na prugu $\{w : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$.

Veza između logaritamske funkcije $\ln z$ i glavne vrijednosti $\operatorname{Ln} z$ je

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}.$$

PRIMJER 2.4 *Izračunajte*

(a) $\ln(1 - i)$,

(b) *glavnu vrijednost* $\operatorname{Ln}(1 - i)$.

Rješenje:
Ako za glavnu vrijednost argumenta uzmemo $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$ onda broj $z = 1 - i$ ima polarni zapis $z = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

(a) $\ln(1 - 1i) = \ln \sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

(b) $\operatorname{Ln}(1 - i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$.

ZADAĆA 2.3 *Skicirajte djelovanje funkcije* $f(z) = \ln z$ *na*

(a) *x–os*

(b) *y–os*

PRIMJER 2.5 *Provjerite da je za*

(a) $z = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *funkcija* $\operatorname{Ln} z = \ln x$;

(b) $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ *funkcija* $\operatorname{Ln} z = \ln|x| + i\pi$.

Rješenje:

(a) Za $z = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, odredimo modul i argument: $|z| = x$, $\operatorname{Arg} z = 0$. Po definiciji $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln x + i0 = \ln\, x$;

(b) Za $z = x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, odredimo modul i argument: $|z| = |x|$, $\operatorname{Arg} z = \pi$. Po definiciji $\operatorname{Ln} z = \ln\, |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln\, |x| + i\pi$.

ZADAĆA 2.4 *Izračunajte*

(a) $\operatorname{Ln} 3$,

(b) $\operatorname{Ln}(-3)$.

ZADAĆA 2.5 *Riješite jednadžbe:*

(a) $\ln\, z = 3 - i$

(b) $e^{iz} = 3$.

2.1.4 Opća potencija

Definicija 2.7 *opća potencija*

Funkcija opća potencija kompleksne varijable $f(z) = z^c$ za $z, c \in \mathbb{C}, z \neq 0$, je višeznačna funkcija koja se definira formulom

$$z^c = e^{c \ln z}.$$

Glavna vrijednost od opće potencije je funkcija

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}.$$

Specijalni slučajevi opće potencije će se razmatrati u nastavku poglavlje 2.1.10:

$c = n \in \mathbb{N}$ funkcija $z^c = z^n$ ima jedinstvenu vrijednost i zove se je n-ta potencija;

$c = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ funkcija $z^c = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \ln z}$ nije jednoznačna i zove se n-ti korijen.

PRIMJER 2.6 *Izračunajte* $(3i)^{1+i}$.

Rješenje:

Za $z = 3i = |3|e^{i\frac{\pi}{2}}$, računamo po definiciji

$$z^c = e^{c \ln z}.$$

$(3i)^{1+2i} = e^{(1+2i) \ln(3i)}$
$= e^{(1+2i)\cdot[\ln 3+i(\pi/2+2k\pi)]}$
$= e^{\ln 3+i(\pi/2+2k\pi)+2i(\ln 3+i(\pi/2+2k\pi))}$
$= e^{\ln 3+i(\pi/2+2k\pi)+2i\ln 3-2(\pi/2+2k\pi)}$
$= e^{\ln 3-2(\pi/2+2k\pi)+i(\pi/2+2k\pi+2\ln 3)}$
$= e^{\ln 3-2(\pi/2+2k\pi)} \cdot e^{i(\pi/2+2k\pi+2\ln 3)}$
$= 3e^{(-\pi-4k\pi)} \cdot e^{i(\pi/2+2k\pi+\ln 9)}$
$= 3e^{-\pi(4k+1)} \cdot (\cos(\pi/2 + \ln 9) + i \sin(\pi/2 + \ln 9), \; k \in \mathbb{Z}.$

ZADAĆA 2.6 *Odredite glavnu vrijednost od*

(a) i^i,

(b) $(-3)^{2-4i}$.

2.1.5 Opća eksponencijalna funkcija

Definicija 2.8 *opća eksponencijalna funkcija*

Funkcija opća eksponencijalna funkcija kompleksne varijable $f(z) = a^z$ *za* $a \in \mathbb{R}, a > 0$, *definira se formulom*

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Funkcija opća eksponencijalna funkcija kompleksne varijable $f(z) = a^z$ *za* $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$, *definira se formulom*

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Glavna vrijednost od opće potencije je funkcija

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

2.1.6 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije se definiraju pomoću eksponencijalne funkcije. Prema Eulerovoj formuli

$$\left.\begin{array}{rcl} e^{ix} & = & \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} & = & \cos x - i \sin x \end{array}\right\} + / -$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ovi zapisi sugeriraju sljedeću definiciju funkcija sinus i kosinus za kompleksne varijable.

Definicija 2.9 *trigonometrijske funkcije kompleksne varijable*

Trigonometrijske funkcije kompleksne varijable definiraju se formulama:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

U prikazu $\sin z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su:*

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \;\; v(x, y) = \cos x \sinh y.$$

U prikazu $\cos z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su:*

$$u(x, y) = \cos x \cosh y, \;\; v(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Iz definicije slijedi da Eulerova formula vrijedi i za kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

PRIMJER 2.7 *Pokažite da su u prikazu* $\sin z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije*

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \;\; v(x, y) = \cos x \sinh y.$$

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i} \\
&= -\frac{i}{2}(e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}) = -\frac{i}{2}(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)) \\
&= \sin x\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y}) + i\cos x\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y}) \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}
$$

$u(x,y) = \sin x\cosh y, \quad v(x,y) = \cos x\sinh y.$

PRIMJER 2.8 *Odredite sliku pravca $x = c$ pri preslikavanju $f(z) = \sin\, z$.*

Rješenje:

U prikazu $\sin\, z = u(x,y) + iv(x,y)$ realne funkcije za $x = c$ poprimaju oblik $u(x,y) = \sin c\cosh y,\ v(x,y) = \cos c\sinh y$.
$\rightarrow \quad u^2 = \sin^2 c\cosh^2 y,\ v^2 = \cos^2 c\sinh^2 y$

$$
\begin{aligned}
u^2+v^2 &= \sin^2 c\cosh^2 y + \cos^2 c\sinh^2 y = (1-\cos^2 c)\cosh^2 y + \cos^2 c\sinh^2 y \\
&= \cosh^2 y - \cos^2 c\cosh^2 y + \cos^2 c\sinh^2 y \\
&= \cosh^2 y + \cos^2 c(\sinh^2 y - \cosh^2 y)
\end{aligned}
$$

$\frac{u^2}{\sin^2 c} = \cosh^2 y,\ \frac{v^2}{\cos^2 c} = \sinh^2 y$
$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1.$

U kompleksnoj $w-$ravnini preslikavanje$w = \sin\, z$ pravac $x = c$ preslika u hiperbolu s poluosima $a^2 = \sin^2 c,\ b^2 = \cos^2 c$.

ZADAĆA 2.7 *Skicirajte u kompleksnim ravninama z i w djelovanje preslikavanja $w = \sin\, z$ na pravac $y = c$.*

2.1.7 Hiperboličke funkcije

Prisjetimo se definicije hiperboličkih funkcija realne varijable:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Ovi zapisi sugeriraju sljedeću definiciju funkcija sinus hiperbolički i kosinus hiperbolički za kompleksne varijable.

Definicija 2.10 *hiperboličke funkcije kompleksne varijable*
Hiperboličke funkcije kompleksne varijable definiraju se formulama:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

U prikazu $\sinh z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su:*

$$u(x, y) = \sinh x \cos y, \quad v(x, y) = \cosh x \sin y.$$

U prikazu $\cosh z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su:*

$$u(x, y) = \cosh x \cos y, \quad v(x, y) = \sinh x \sin y.$$

PRIMJER 2.9 *Pokažite da su u prikazu* $\sinh z = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije* $u(x, y) = \sinh x \cos y, \quad v(x, y) = \cosh x \sin y$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2} \\
&= \frac{1}{2}[(e^x \cos y - e^{-x} \cos y) + i(e^x \sin y + e^{-x} \sin y)] \\
&= \frac{1}{2}[\cos y(e^x - e^{-x}) + i \sin y(e^x + e^{-x})] \\
&= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x
\end{aligned}$$

$u(x, y) = \sinh x \cos y, \quad v(x, y) = \cosh x \sin y$

PRIMJER 2.10 *Neka je zadano preslikavanje* $w = \sinh z$. *Odredite slike pravaca:*

(*a*) $x = c$,

(b) $y = c$.

Rješenje:

a) $x = c$

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & \sinh c \cos y \\ v(x,y) & = & \cosh c \sin y \\ \hline \frac{u^2}{\sinh^2 c} & = & \cos^2 y \\ \frac{v^2}{\cosh^2 c} & = & \sin^2 y \\ \end{array}$$
$$\frac{u^2}{\sinh^2 c} + \frac{v^2}{\cosh^2 c} = 1.$$

Preslikavanje $w = \sinh z$ preslika pravac $x = c$ u elipsu $\frac{u^2}{\sinh^2 c} + \frac{v^2}{\cosh^2 c} = 1$ u kompleksnoj $w-$ravnini.

b) $y = c$

$$\begin{array}{rcl} u(x,y) & = & \sinh x \cos c \\ v(x,y) & = & \cosh x \sin c \\ \hline \frac{u^2}{\cos^2 c} & = & \sinh^2 x \\ \frac{v^2}{\sin^2 c} & = & \cosh^2 x \\ \end{array}$$
$$\frac{v^2}{\sin^2 c} - \frac{u^2}{\cos^2 c} = 1.$$

Preslikavanje $w = \sinh z$ preslika pravac $y = c$ u $\frac{v^2}{\sin^2 c} - \frac{u^2}{\cos^2 c} = 1$ u kompleksnoj $w-$ravnini.

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

PRIMJER 2.11 *Pokažite da je* $\sin iz = i \sinh z$.

Rješenje: Po definiciji funkcije sinus računamo:
$\sin iz = \frac{1}{2i}(e^{i^2 z} - e^{-i^2 z})$
$= \frac{1}{2i}(e^{-z} - e^{z})$
$= -\frac{1}{2i}(e^{z} - e^{-z})$
$= -\frac{1}{i} \sinh z$
$= i \sinh z$.

TRIGONOMETRIJSKE I HIPERBOLIČKE FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$
$$\sin(iz) = i\sinh(z), \qquad \cos(iz) = \cosh(z)$$
$$\sinh(iz) = i\sin(z), \qquad \cosh(iz) = \cos(z)$$
$$\sin(x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y, \qquad |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$
$$\cos(x \pm iy) = \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y, \qquad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$$
$$\sinh(x \pm iy) = \sinh x \cos y \pm i \cosh x \sin y, \qquad |\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}$$
$$\cosh(x \pm iy) = \cosh x \cos y \pm i \sinh x \sin y, \qquad |\cosh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \cos^2 y}$$
$$\arcsin(z) = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2}) + 2k\pi, \qquad \operatorname{arsinh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) + 2k\pi i$$
$$\arccos(z) = -i\ln(iz + \sqrt{z^2-1}) + 2k\pi, \qquad \operatorname{arcosh}(z) = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) + 2k\pi i$$

PRIMJER 2.12 *Funkcija* arcsin z *je višeznačna funkcija koja je inverzna funkcija od* sin z. *Pokažite da je*

$$\arcsin z = -i\ln(zi + \sqrt{1-z^2}) + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Rješenje: Trebamo riješiti jednadžbu $\sin w = z$ tj. odrediti w.

$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad / \cdot 2i$

$2zi = e^{iw} - e^{-iw} \quad / \cdot e^{iw}$

$2e^{iw}zi = e^{2iw} - 1$

$e^{2(iw)} - 2zie^{iw} - 1 = 0, \qquad e^{iw} = t$

$t^2 - 2zit - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{2zi \pm \sqrt{(2zi)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2} = zi \pm \sqrt{-z^2+1}$$

Ne moramo pisati ± jer se radi o kompleksnom korijenu. $e^{iw} = zi + \sqrt{1-z^2}$

Kako je e^w periodična s periodom $2k\pi i$ mora vrijediti $e^{iw+2k\pi i} = zi + \sqrt{1-z^2}, \; k \in \mathbb{Z}$

$iw + 2k\pi i = \ln(zi + \sqrt{1-z^2})$
$w = -i\ln(zi + \sqrt{1-z^2}) - 2k\pi$
$w = \arcsin z = -i\ln(zi + \sqrt{1-z^2}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

ZADAĆA 2.8 *Izvedite formulu za area sinus hiperbolički, višeznačnu funkciju* Arshz *kao inverznu funkciju od* sinh z.

$\mathrm{Arshz} = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

2.1.8 Linearna funkcija

Definicija 2.11 *linearna funkcija*

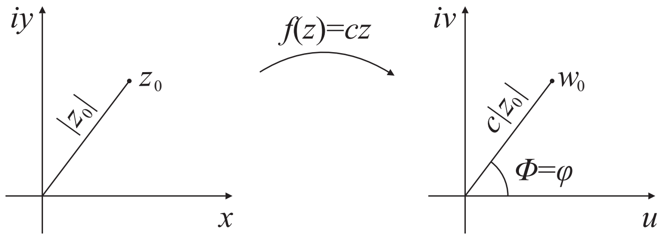
Neka su $a \neq 0, b \in \mathbb{C}$. Linearna funkcija kompleksne varijable definira se formulom

$$f(z) = a \cdot z + b.$$

T: (1) Za $a \in \mathbb{R}, a > 0$ preslikavanje $w = f(z) = a \cdot z$ je KONTRAKCIJA ili DILATACIJA.
(2) Za $a \in \mathbb{C}, a = e^{i\theta_0}$ preslikavanje $w = f(z) = a \cdot z$ je ROTACIJA za kut θ_0.
(3) Za $a \in \mathbb{C}, a = |a|e^{i\theta_0}$ preslikavanje $w = f(z) = a \cdot z$ je kompozicija kontrakcije ili dilatacije i rotacija za kut θ_0.
(4) Za $b \neq 0$ preslikavanje $w = f(z) = z + b$ je TRANSLACIJA.
(5) Za $a \neq 0, b \in \mathbb{C}, a = |a|e^{i\theta_0}$ preslikavanje $w = f(z) = a \cdot z + b$ je kompozicija kontrakcije ili dilatacije $w_1 = |a|z$ za koeficijent $|a|$, rotacije za kut θ_0 $w_2 = e^{i\theta_0}z$ i translacije $w_3 = z + \beta$

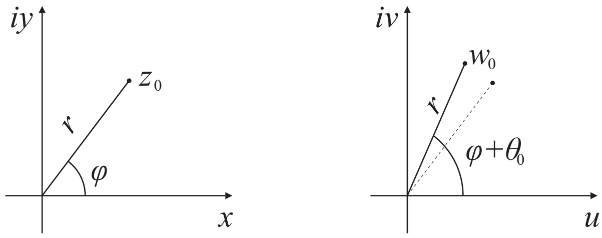
$$w = (w_3 \circ w_2 \circ w_1)(z).$$

D: (1) Za $a \in \mathbb{R}, a > 0$ zadano je preslikavanje $w = f(z) = a \cdot z = a(x+iy) = ax + iay$. Odredimo zapis w u polarnom obliku $w = |w|e^{\mathrm{Arg}\, w}$.
$|w| = |az| = |a||z|,\ \mathrm{Arg}\, w = \mathrm{arctg}\frac{ay}{az} = \mathrm{Arg}\, z$. Preslikavanje $f(z) = az$ točku z u Gaussovoj $z-$ ravnini preslika u točku w čiji modul se produljio ili skratio a puta u Gaussovoj $w-$ ravnini.



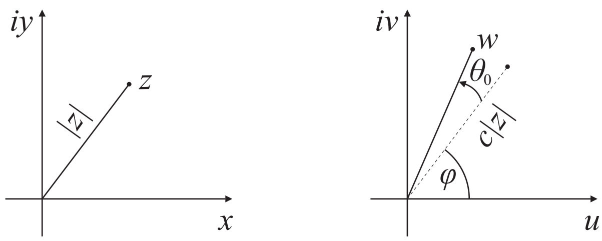
Slika 2.8: (1) kontrakcija ili dilatacija $f(z) = c \cdot z$

(2) Za $a \in \mathbb{C}, a = e^{i\theta_0}$ zadano je preslikavanje $f(z) = e^{i\theta_0} \cdot z = e^{i\theta_0}|z|e^{i\operatorname{Arg} z} = |z|e^{i(\operatorname{Arg} z+\theta_0)}$. Odredimo zapis w u polarnom obliku $w = |w|e^{\operatorname{Arg} w}$.
$|w| = |z|$, $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z + \theta_0$. Preslikavanje $f(z) = e^{i\theta_0}z$ točku z preslika u w čiji modul jednak modulu od z a argument se povećao za θ_0.



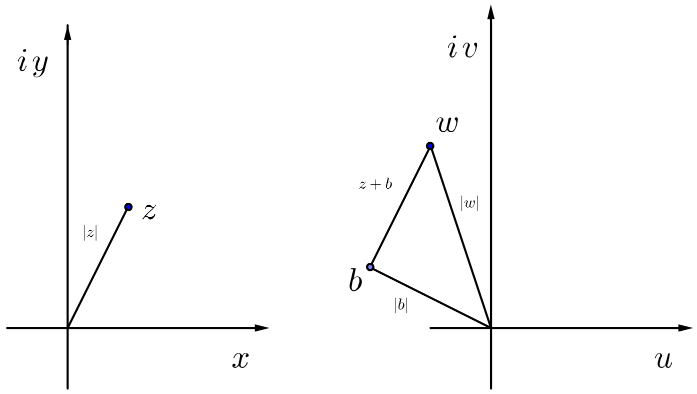
Slika 2.9: (2)rotacija $f(z) = e^{i\theta_0} \cdot z$

(3) slijedi iz (1) i (2). Preslikavanje $w = f(z) = |a|e^{i\theta_0}z$ točku z preslika u w čiji modul jednak $|a||z|$ a argument se povećao za θ_0.



Slika 2.10: (3)$f(z) = |c|e^{i\theta_0}z$

(4) Za $b \neq 0$ preslikavanje $f(z) = z + b$ točku z preslika u točku w koja je odgovara translaciji od z za b u smislu zbrajanja kompleksnih brojeva.



Slika 2.11: (4)translacija $f(z) = z + b$

(5) slijedi iz (3) i (4).

ZADAĆA 2.9 *Pokažite:*
(1) Kontrakcija ili dilatacija $f(z) = a \cdot z$, $a > 0$ *preslika kružnicu* $|z| = c$, $c > 0$ *u kružnicu* $|w| = ac$.
(2) Rotacija $f(z) = e^{i\varphi_0} \cdot z$ *preslika kružnicu* $|z| = c$, $c > 0$ *u kružnicu* $|w| = c$.
(3) Preslikavanje $f(z) = |a|e^{i\varphi_0} \cdot z$ *preslika kružnicu* $|z| = c$, $c > 0$ *u kružnicu* $|w| = |a|c$.
(4) Translacija $f(z) = z + b$ *kružnicu* $|z| = c$, $c > 0$ *preslika u kružnicu* $|w - b| = c$.
(5) Linearno preslikavanje $f(z) = |a|e^{i\varphi_0} \cdot z + b$ *kružnicu* $|z| = c$, $c > 0$ *preslika u kružnicu* $|w - b| = |a|c$.

PRIMJER 2.13 *Neka je područje D u z− ravnini pravokutnik omeđen pravcima* $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ $y = 1$. *Odredite područje D′ u w− u koje se preslikavanjem* $w = f(z) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z + (1 - 2i)$ *preslika D.*

Rješenje: Ako je $w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z + (1 - 2i)$ onda je w kompozicija rotacije $w_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}z$ (rotacije za kut $\theta_0 = \pi/4$ u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu dilatacije $w_2 = \sqrt{2}z$, za koeficijent $a = \sqrt{2}$ i translacije $w_3 = z + \beta$ za $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2i)$.

Trebamo odrediti funkcije u i v u prikazu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:
Iz zapisa $u + iv = (1 + i)(x + iy) + (1 - 2i)$, određujemo:

$$u(x, y) = x - y + 1, \ v(x, y) = x + y - 2.$$

Pravac $x = 0$ preslika se u pravac $u + v = -1$,
pravac $y = 0$ u pravac $u - v = 3$
pravac $x = 2$ u pravac $u + v = 3$
i pravac $y = 1$ u pravac $u - v = 1$.

2.1.9 Kvadratna funkcija

Definicija 2.12 *kvadratna funkcija*

Kvadratna funkcija kompleksne varijable definira se formulom

$$f(z) = z^2.$$

U prikazu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *realne funkcije su*

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \ v(x, y) = 2xy.$$

U polarnim koordinatama kvadratna funkcija se definira formulom

$$f(z) = r^2 e^{i2\varphi}, \ z = re^{i\varphi},$$

a realne funkcije su

$$u(r, \varphi) = r^2 \cos(2\varphi), \ v(r, \varphi) = r^2 \sin(2\varphi).$$

PRIMJER 2.14 *Skicirajte djelovanje funkcije* $f(z) = z^2$ *na*

(a) *pravac* $x = c$,

(b) *pravac* $y = c$,

(c) *pravac* $x + y = 1$,

(d) *gornju poluravninu* $y > 0$,

(e) *prvi kvadrant* $x > 0, \ y > 0$.

Rješenje:

(a) $x = c$
$u = c^2 - y^2, \ \ v = 2cy \ \ \rightarrow \ \ y = \frac{v}{2c}$
$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2} \ \ \ \rightarrow$ (parabola).
$x = 0 \ \rightarrow \ u \leq 0, v = 0$

(b) $y = c$
$u = x^2 - c^2, \ \ v = 2xc \ \ \Rightarrow \ \ x = \frac{v}{2c}$
$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2 \ \ \ \rightarrow$ (parabola).
$y = 0 \ \rightarrow \ u \geq 0, v = 0$

(c) $x + y = 1$,
$v = \frac{1}{2}(1-u)^2$ (parabola).

(d) $y > 0$
Za $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\, z}$, $0 < \mathrm{Arg}\, z < \pi$ računamo $f(z) = |z|^2 e^{i2\mathrm{Arg}\, z}$. Prema polarnom zapisu $w = |w|e^{i\mathrm{Arg}\, w}$ možemo odrediti da je $|w| = |z|^2$ $\mathrm{Arg}\, w = 2\mathrm{Arg}\, z$. Slika je cijela ravnina bez pozitivne u-osi $\{v = 0, u \geq 0\}$ (razrez).

(e) $x > 0, y > 0$
Za $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}\, z}$, $0 < \mathrm{Arg}\, z < \pi/2$ računamo $f(z) = |z|^2 e^{i2\mathrm{Arg}\, z}$. Prema polarnom zapisu $w = |w|e^{i\mathrm{Arg}\, w}$ možemo odrediti da je $|w| = |z|^2$ $\mathrm{Arg}\, w = 2\mathrm{Arg}\, z$. Slika je gornja poluravnina bez pozitivne u-osi $\{v = 0, u \geq 0\}$ (razrez).

ZADAĆA 2.10 *Neka je trokut D u $z-$ ravnini zadan s pravcima $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$. Odredite i skicirajte područje D' u $w-$ravnini u koje se preslikavanjem $f(z) = z^2$ preslika trokut D.*

2.1.10 n-ta potencija i n-ti korijen

Definicija 2.13 *n-ta potencija*

Funkcija n-ta potencija kompleksne varijable je definirana sa

$$f(z) = z \cdot z \cdot \ \ldots \cdot z = z^n$$

za $n \in \mathbb{N}$. *Neka je* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *prikaz kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku onda vrijedi*

$$f(z) = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

U polarnom sustavu funkcija je zadana s $f(z) = |z|^n e^{ni\varphi}$ $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ *gdje su realne funkcije*

$$u(r,\varphi) = r^n \cos n\varphi, \;\; v(r,\varphi) = r^n \sin n\varphi, \;\; r = |z|.$$

Poznata De Moivre-ova formula dobije se za kompleksan broj z modula $|z| = 1$ i $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

ZADAĆA 2.11 *Pokažite da De Moivre-ova formula vrijedi i za* $n \in \mathbb{Z}_-$ *i za* $n \in \mathbb{Q}$.

NAPOMENA 2.5 *Za* $z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}$, $\frac{2k}{n}\pi < \operatorname{Arg} z < \frac{2(k+1)}{n}\pi$ *računamo* $f(z) = |z|^n e^{in\operatorname{Arg} z}$. *Prema polarnom zapisu* $w = |w|e^{i\operatorname{Arg} w}$ *možemo odrediti da je* $|w| = |z|^n$ $\operatorname{Arg} w = n\operatorname{Arg} z$. *Slika isječka* $\{z : 2k/n\pi < \operatorname{Arg} z < 2(k+1)/n\pi\}$ *je cijela ravnina* $\mathbb{C}$ *bez pozitivne u-osi* $\{v = 0, u \geq 0\}$ *(razrez).*

Definicija 2.14 *Neka je kompleksna ravnina proširena s dodanom točkom* ∞. *Preslikavanje definirano formulom*

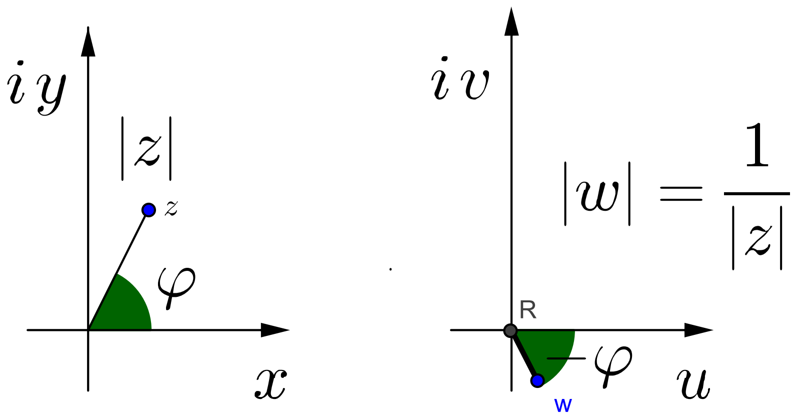
$$f(z) = \frac{1}{z}$$

zovemo inverzija. Realne funkcije u prikazu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *su*

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \;\; v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

U polarnom sustavu funkcija je zadana s
$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ *gdje su realne funkcije*

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\cos n\varphi, \;\; v(r,\varphi) = -\frac{1}{r}\sin n\varphi, \;\; r = |z|.$$



Slika 2.12: (6)inverzija $f(z) = \frac{1}{c}$

T: (6) Preslikavanje inverzija $f(z) = \frac{1}{z}$ je kompozicija osne simetrije u odnosu na x os i kontrakcije ili dilatacije.

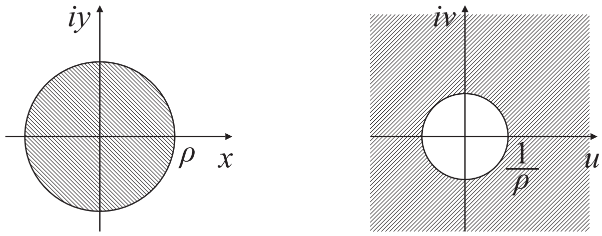
PRIMJER 2.15 *Inverzija $f(z) = \frac{1}{z}$ preslika kružnicu $z\,\overline{z} = \rho^2$ u kružnicu $w\,\overline{w} = \frac{1}{\rho^2}$.*
Inverzija preslika točke unutar kruga $z\,\overline{z} \leq \rho^2$ u područje izvan $w\,\overline{w} \geq \frac{1}{\rho^2}$.

Rješenje:
U jednadžbi kružnice $z\overline{z} = \rho^2$ djelujemo preslikavanjem $w = \frac{1}{z} : \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad w \cdot \overline{w} = \frac{1}{\rho^2}$.

Sve točke kruga $z\overline{z} \leq \rho^2$ preslikavanje $w = \frac{1}{z}$ preslika u $\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} \leq \rho^2 \quad \Rightarrow \quad w\overline{w} \geq \frac{1}{\rho^2}$
područje izvan kruga $w\overline{w} = \frac{1}{\rho^2}$.

PRIMJER 2.16 *Pokažite da preslikavanje $w = \frac{1}{z}$ preslikava područje $D : \{z : Re\, z > \frac{1}{2}\}$ u krug $\overline{K} : \{w : |w - 1| < 1\}$.*

Rješenje:
Za preslikavanje $w = f(z)$ gledamo inverzno preslikavanje $z = \frac{1}{w}$. Tada vrijedi $x + iy = \frac{1}{u+iv}$
$x + iy = \frac{u}{u^2+v^2} - i\frac{v}{u^2+v^2}$.
Uvjet $\mathrm{Re}\, z > \frac{1}{2}$ implicira $\frac{u}{u^2+v^2} > \frac{1}{2}$ što je ekvivalentno $(u-1)^2 + v^2 < 1$.



Slika 2.13: $f(z) = 1/z$

Definicija 2.15 *n-ti korijen*

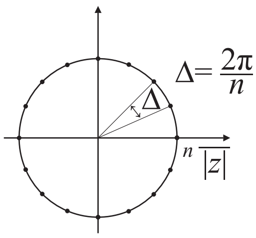
Neka je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *prikaz kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Funkcija n-ti korijen iz kompleksnog broja* $f(z) = \sqrt[n]{z}$ *je višeznačna funkcija koja definira se formulom*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Za svaki $k = 0, 1, \ldots n-1$ *definirana je jedna grana funkcije.*

U polarnom sustavu funkcija je zadana s $f(z) = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\arg z/n}$
$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$ *gdje je*

$$u(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad v(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad r = |z|.$$



Slika 2.14: $f(z) = \sqrt[n]{|z|}$

NAPOMENA 2.6 *Svaka grana preslika cijelu ravninu bez pozitivne u-osi* $\{z : y = 0, x \geq 0\}$ *(razrez) na isječak s centrom u ishodištu* $\{w : \mathrm{Arg}\, w, \frac{2k}{n}\pi < \mathrm{Arg}\, w < \frac{2(k+1)}{n}\pi\}$.

2.2 Neprekidnost, limes i derivacija

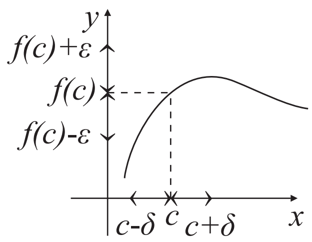
2.2.1 Prisjetimo se

Prisjetimo se definicije neprekinutosti, limesa i derivacije realnih funkcija:

Definicija 2.16 *neprekinuta realne funkcije u točki*

Kažemo da je funkcija $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neprekinuta u točki* $c \in I$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za* $|x - c| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je neprekinuta na skupu D ako je neprekinuta u svakoj točki $c \in D$. T: Neprekinuta funkcija na segmentu je ograničena i dostiže svoj minimum i maksimum.



Slika 2.15: neprekinutost u $c \in \mathbb{R}$

Definicija 2.17 *limes realne funkcije*

Neka je funkcija f *definirana na* $I \subset \mathbb{R}$ *osim možda u točki* c. *Kažemo da funkcija* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ima limes* L *u točki* $c \in I$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za* $0 < |x - c| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - L)| < \varepsilon$.

Limes označavamo $L = \lim_{x \to c} f(x)$.

T: Ako je funkcija f neprekinuta u točki c onda ima limes u točki c i vrijedi $L = \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
T: Ako funkcija f definirana u točki c ima limes u točki c i ako je $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ onda je funkcija f neprekinuta u točki c.

Definicija 2.18 *derivacija realne funkcije u točki*

Kažemo da je funkcija $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivabilna u točki* $c \in I$ *ako postoji*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ako postoji limes označavamo ga $f'(c)$ i zovemo derivacija funkcije f u točki c.

Ako je funkcija derivabilna u svakoj točki intervala I onda funkciju f' koja broju x pridružuje $f'(x)$ zovemo derivacijom funkcije f.

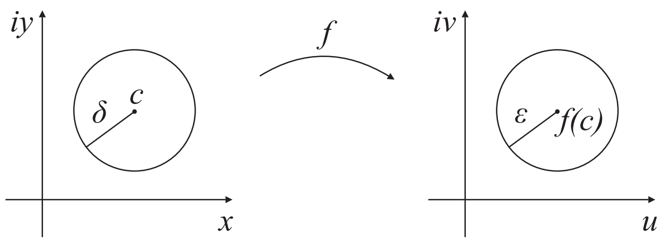
ZADAĆA 2.12 *Izvedite formulu za derivaciju kompozicije funkcija:*
$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \ln(\sin x^2)$.

2.2.2 Neprekinutost, limes i derivacija funkcije kompleksne varijable

Definicija neprekinutosti, limesa i derivacije funkcije kompleksne varijable su analogne.

Definicija 2.19 *neprekinutost kompleksne funkcije*

Neka je $D \subset \mathbb{C}$ područje u $\mathbb{C}$. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ neprekinuta u točki $c \in D$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $|z - c| < \delta$ vrijedi $|f(z) - f(c)| < \varepsilon$.



Slika 2.16: neprekinutost u $c \in \mathbb{C}$

T: Ako je funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je neprekinuta u točki $c = a + ib$, onda su funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ neprekinute u točki (a, b).
D: Neka je f neprekinuta u $c = a + ib$ tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0),\ \ |z - c| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z) - f(c)| < \varepsilon$$

Za $|z-c|<\delta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$,
uz prikaz $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ i $f(c)=u(a,b)+iv(a,b)$ vrijedi
$|u(x,y)+iv(x,y)-u(a,b)-iv(a,b)|<\varepsilon$
$|u(x,y)-u(a,b)+i(v(x,y)-v(a,b))|<\varepsilon$
$\sqrt{(u(x,y)-u(a,b))^2+(v(x,y)-v(a,b))^2}<\varepsilon$
$\sqrt{|u(x,y)-u(a,b)|^2+|v(x,y)-v(a,b)|^2}<\varepsilon.$
Zato je $|u(x,y)-u(a,b)|<\varepsilon$
$|v(x,y)-v(a,b)|<\varepsilon$,
pa zaključujemo da su i $u(x,y)$ i $v(x,y)$ je neprekinute u točki (a,b).

Vrijedi i obrat:

T: Ako su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ je neprekinute u točki (a,b) onda je f neprekinuta u c.

D: Neka su su $u(x,y)$ i $v(x,y)$ neprekinute u točki (a,b). Tada

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0),\ \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

$$\Rightarrow\ |u(x,y)-u(a,b)|<\varepsilon/2,\ |v(x,y)-v(a,b)|<\varepsilon/2.$$

Ocjenjujemo $|f(z)-f(c)|$:
$|f(z)-f(c)| = \sqrt{(u(x,y)-u(a,b))^2+(v(x,y)-v(a,b))^2} \leq |u(x,y)-u(a,b)| + |v(x,y)-v(a,b)|<\varepsilon$.

Definicija 2.20 *limes kompleksne funkcije*

Neka je funkcija f definirana na području $D\subset\mathbb{C}$ osim možda u točki $c\in D$. Kažemo da funkcija $f:D\to\mathbb{C}$ ima limes L u točki $c\in D$ ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ tako da

$$0<|z-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-L)|<\varepsilon.$$

Limes označavamo $L=\lim\limits_{z\to c}f(z)$.

T: Funkcija $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ima limes $L=A+iB$ u točki $c=a+ib$ ako i samo ako $A=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}u(x,y)$ i $B=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}v(x,y)$.
T: Ako je funkcija f neprekinuta u točki c onda ima limes u točki c i vrijedi $L=\lim\limits_{z\to c}f(z)=f(c)$. T: Ako funkcija f ima limes u točki c i ako je $\lim\limits_{z\to c}f(z)=f(c)$ onda je funkcija f neprekinuta u točki c.

NAPOMENA 2.7 *Skup $\mathbb{C}$ možemo proširiti sa ∞. Što znači ∞ u kompleksnoj ravnini? Ako zamislimo jediničnu sferu i kompleksnu ravninu koja prolazi ekvatorom sfere onda se svaka točka kompleksne ravnine može se spojiti spojnicom s polom sfere. Svakoj točki z iz kompleksne ravnine odgovara presječna točka spojnice i sfere. Beskonačno dalekoj točki ∞ u proširenoj kompleksnoj ravnini odgovara pol.*

Definicija 2.21 *derivacija kompleksne funkcije*

Kažemo da je funkcija $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabilna u toçki $c \in D$ ako postoji

$$\lim_{z\to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}.$$

Ako postoji limes označavamo ga $f'(c)$ i zovemo derivacija funkcije f u toči c.

Ako je funkcija derivabilna u svakoj točki područja D onda funkciju f' koja broju z pridružuje $f'(z)$ zovemo derivacijom funkcije f na D.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

za svaki $z \in D$.

Za derivacije kompleksnih funkcija vrijede sva pravila deriviranja realnih funkcija.

PRIMJER 2.17 *Izračunajte derivaciju funkcije $f(z) = z$ u točki $c = 0$.*

Rješenje:

$f'(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z - 0}{z - 0} = \lim\limits_{z\to 0} 1 = 1.$

Funkcija je derivabilna u $z = 0$ i njezina derivacija je 1.

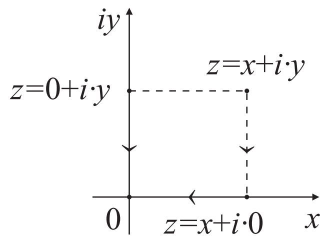
ZADAĆA 2.13 *Provjerite je li funkcija $f(z) = z$ derivabilna na $\mathbb{C}$ tj. u svakoj točki $c \in \mathbb{C}$.*

PRIMJER 2.18 *Provjerite je li funkcija $f(z) = \bar{z} = x - iy$ derivabilna u točki $c = 0$.*

Rješenje: Po definiciji derivacije funkcije f u točki c računamo

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \begin{cases} z = x + i \cdot 0 & \lim_{z\to 0} \frac{x - i\cdot 0}{x + i \cdot 0} = 1 \\ z = 0 + i \cdot y & \lim_{z\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1 \end{cases}$$

Limes ako postoji je jedinstven pa zaključujemo da funkcija $f(z) = \overline{z}$ nije derivabilna u nuli.



Slika 2.17: $z \to 0$

ZADAĆA 2.14 *Provjerite da je funkcija $f(z) = z^2$ derivabilna na $\mathbb{C}$. Odredite derivaciju funkcije f.*

NAPOMENA 2.8 *Neka su z_0 i $z_0 + \Delta z$ pridružene točke A i B u $z-$ravnini, a slikama $f(z_0)$ i $f(z_0 + \Delta z)$ pridružene točke A' i B' u $w-$ravnini.*
Geometrijska interpretacija derivacije funkcije kompleksne varijable f u točki z_0 je limes kvocijenta duljina $B'A'$ i BA kad se točka A približava točki B.

$$f'(z_0) = \lim_{A\to B} \frac{B'A'}{BA}.$$

Poglavlje 3

Analitičke funkcije

Definicija 3.1 *analitička funkcija*

Funkcija kompleksne varijable $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je analitička na području D ako funkcija ima derivaciju f' na D i ako je ta derivacija neprekinuta funkcija na D.

Definicija 3.2 *analitička funkcija u točki*

Funkcija kompleksne varijable $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je analitička u točki $c \in D$ ako postoji okolina $D = \{z : |z - c| < \delta\}$ oko c tako da je f analitička na D.

NAPOMENA 3.1 *Za analitičku funkciju koriste se i nazivi holomorfna i regularna funkcija.*

PRIMJER 3.1 *Odredite područje na kojem je funkcija $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ analitička.*

Rješenje:

Računamo derivaciju po pravilima deriviranja koja vrijede i za realnu funkciju: $f'(z) = \frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{(z^2+1)^2} \cdot 2z = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}$
Funkcija f' je dobro definirana ako je $z^2 + 1 \neq 0$,
$(z + i) \cdot (z - i) \neq 0$,
$z \neq i, \;\; z \neq -i$.
Funkcija f je analitička na $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Definicija 3.3 *singularne točke*

Točke u kojima kompleksna funkcija nije analitička zovu se singularne točke. Tipovi singularnih točaka:

(1) z_0 je izolirani singularitet ako nema okoline oko z_0 u kojoj postoje drugi singulariteti;

(2) z_0 je pol reda n ako postoji $lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) \neq 0$;

(3) z_0 je uklonjiv singularitet ako postoji $lim_{z\to z_0} f(z) \neq 0$;

(4) z_0 je točka grananja.

PRIMJER 3.2 *(1) $z_0 = i$, $z_0 = -i$ su izolirani singulariteti za funkciju $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$;*

(2) $z_0 = i$, $z_0 = -i$ su polovi prvog reda za funkciju $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
jer postoji $lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2i} \neq 0$; i postoji $lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = -\frac{1}{2i} \neq 0$;

(3) $z_0 = 0$ je uklonjiv singularitet za funkciju $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
jer postoji $lim_{z\to 0} f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 \neq 0$;

(4) $z_0 = 3$ je točka grananja za višeznačnu funkciju $f(z) = \sqrt{z-3}$.
$z_0 = -2$ je točka grananja za višeznačnu funkciju

$z_0 = 3$ je točka grananja za višeznačnu funkciju $f(z) = \ln(z-3)$.

PRIMJER 3.3 *Polinomi $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ su analitičke funkcije na cijelom $\mathbb{C}$.*
Racionalne funkcije $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ su analitičke na $\mathbb{C} \setminus \{z : h(z) = 0\}$.
Racionalne funkcije oblika $f(z) = \frac{a}{(z-z_0)^n}$ su analitičke na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
Funkcija $f(z) = \operatorname{Ln} z$ je analitička na $D : \mathbb{C} \setminus \{z : y = 0, x < 0\}$.

TEOREM 3.1 *Ako je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička na području D onda postoje sve derivacije višeg reda i one su analitičke funkcije.*

Dokaz: Tvrdnja je posljedica Cauchyjeve formule (u poglavlju 4.4).

TEOREM 3.2 *Funkcija kompleksne varijable $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ u prikazu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je analitička na području D ako i samo aku su funkcije . u i v* *klase C^1 na D i za svaki $(x, y) \in D$ vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti $(C - R)$ uvjeti*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Funkcije u i v zovu se konjugirane funkcije.

Dokaz:

$(\Rightarrow)$

Pretpostavimo da je $f(z)$ analitička, tj. $\exists f'(z)$ i $f'(z)$ je neprekinuta funkcija na D $\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Računat ćemo limes $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ u dva smjera

$$I\ \Delta x = 0,\ \ II \Delta y = 0.$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \begin{cases} \text{I}\ \ \Delta x = 0 & \begin{aligned} & \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \\ & = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y))}{i\Delta y} \\ & = -i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \\ \\ \text{II}\ \ \Delta y = 0 & \begin{aligned} & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta x} \\ & = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \end{cases}$$

Budući je limes jedinstven mora vrijediti $-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$, a to su C-R uvjeti.

$(\Leftarrow)$

Pretpostavimo da su funkcije u i v klase C^1 na D i za svaki $(x, y) \in D$ vrijede

Cauchy-Riemannovi uvjeti (C-R uvjeti).

Trebamo odrediti da li postoji jedinstven limes $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \ \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ Računamo

$$f(z+\Delta z)-f(z) = u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)+i\ (v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)) = \Delta u + i\,\Delta v.$$

Prema svojstvima funkcija u i v vrijedi

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,\Delta y,$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) \approx \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,\Delta y.$$

Zato je prirast funkcije f

$$f(z+\Delta z) - f(z) \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,\Delta y + i\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,\Delta y\right),$$

$$f(z+\Delta z) - f(z) \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + i\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,\Delta y + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,\Delta x - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,\Delta y$$

$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,(\Delta x + i\,\Delta y) + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,(\Delta x + i\,\Delta y)\,.$$

Odredimo limes

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \approx \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Funkcija f ima derivaciju

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

na D pa je f analitička na D.

Zapisi za derivaciju f' funkcije $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ su:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

ZADAĆA 3.1 *Neka je zadana funkcija* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3))$. *Pokažite da je analitička funkcija.*
Pokažite da funkcija $f_1(z) = v(x,y) + iu(x,y)$ *nije analitička.*
Pokažite da je funkcija $f_2(z) = v(x,y) - iu(x,y)$ *analitička.*

ZADAĆA 3.2 *Izvedite (C-R) jednadžbe u POLARNOM SUSTAVU*
$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z$
$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$
$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$
(C-R) jednadžbe u polarnom sustavu su:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Koristite lančano pravilo $u(r,\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$

TEOREM 3.3 *Preslikavanje definirano funkcijom kompleksne varijable* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *zadano je jednadžbama* $u = u(x,y), \ \ v = v(x,y)$. *Ako je funkcija* f *analitička na području* D *onda je Jakobijan preslikavanja*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$

Dokaz: Ako je funkcija analitička onda vrijede (C-R) jednadžbe na području D pa računamo Jakobijan:
$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$
$= (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$
$= |\frac{\partial u}{\partial x} + i(\frac{\partial u}{\partial y})|^2$
$= |f'(z)|^2$.

PRIMJER 3.4 *Odredite Jakobijan i njegove geometrijsko značenje za preslikavanje dano analitičkom funkcijom* $f(z) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}z + (1-2i)$.

Rješenje:

Prema definiciji računamo Jakobijan

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2 = |\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}|^2 = 2.$$

Prema lokalnom svojstvu Jakobijana

$$|J| = \lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}},$$

geometrijska interpretacija Jakobijana nam kaže da je ΔA_{uv} površina slike u w ravnini dva puta veća od ΔA_{xy} površine originala u $z-$ ravnini, kad $\Delta A_{xy} \to 0$.

3.1 Konjugirano-harmonijske funkcije

Definicija 3.4 *harmonijska funkcija*

Funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je klase $C^2(D)$ (ima druge parcijalne derivacije koje su neprekinute funkcije) i koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

zovemo harmonijska funkcija.

Uz oznaku Laplaceovog operatora

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceovu jednadžbu zapisujemo

$$\Delta \phi(x, y) = 0.$$

ZADAĆA 3.3 *Provjerite je li funkcija $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ harmonijska. Provjerite je li funkcija $\phi(x, y) = \mathrm{arctg}(\frac{y}{x})$ harmonijska.*

TEOREM 3.4 *Ako je $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička funkcija, onda su funkcije u i v harmonijske funkcije i zovemo ih se KONJUGIRANO HARMONIJSKE FUNKCIJE.*

Dokaz:

Pretpostavimo da je f analitička $\to \exists f'(z)$ i $f'(z)$ neprekidna. Slijedi $u, v \in C^1(D)$ i vrijede (C-R) jednadžbe. Da bi $u(x, y)$ bila harmonijska treba provjeriti je li $\Delta u(x, y) = 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta u(x, y) = 0.$$

Provjeravamo zadovoljava li funkcija v Laplaceovu jednadžbu $\Delta v(x,y) = 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v(x,y) = 0.$$

PRIMJER 3.5 *Neka je zadana funkcije* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y)$. *Provjerite jesu li funkcije u i v harmonijske.*

Rješenje:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

TEOREM 3.5 *Neka je D jednostruko povezano područje, i* $u : D \to \mathbb{R}$ *harmonijska funkcija na D. Tada postoji jedinstvena do na konstantu funkcija* $v : D \to \mathbb{R}$ *harmonijska na D, takva da je* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analitička funkcija.*

Dokaz:

Za funkcija u harmonijsku na D vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Definiramo nove funkcije $P(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ koje é biti komponente vektorskog polja $\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$.

Prema pretpostavci u je harmonijska pa zaključujemo da za funkcije P i Q vrijedi:
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, tj. vektorsko polje $\vec{a}$ je potencijalno. Postoji funkcija $\Phi(x,y)$ koja se zove potencijal vektorskog polja takva da vrijedi

$$\nabla \Phi = \vec{a}.$$

Dakle, za funkciju Φ vrijede relacije $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$.

Koristeći definicije funkcija P i Q pokazujemo da za funkciju Φ i u vrijede (C-R) jednadžbe: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Postoji konjugirana funkcija v koja se definira kao $v(x,y) = \Phi(x,y)$.

Ako pretpostavimo da su dvije funkcije v_1 i v_2 konjugirane funkciji u onda vrijedi
$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$
$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$
i
$\frac{\partial(v_1 - v2)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial(v_1 - v2)}{\partial y} = 0.$
Slijedi da je $v_1 - v_2 = konst.$

ZADAĆA 3.4 *Ako je zadano vektorsko polje $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ potencijalno pokažite da je njegov potencijal funkcija Φ dana formulom*

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} (P\,dx + Q\,dy)\,.$$

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt.$$

NAPOMENA 3.2 *Milne-Thomson Method za određivanje konjugirano harmonijskih funkcija*

Konjugirano harmonijsku funkciju možemo odrediti na sljedeći način:

(i) *ako je poznata funkcija u onda konjugirana funkcija* $v = \mathrm{Im}\{2u(z/2, -iz/2)\}$;

(ii) *ako je poznata funkcija v onda je konjugirana funkcija* $v = Re\{2iv(z/2, -iz/2)\}$.

Funkciju $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ možemo prikazati u varijabli z pomoću sljedećih formula:

(a) $f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$ *ako su obe funkcije u i v poznate;*

(b) $f(z) = 2u(z/2, -iz/2) + c$ *ako je poznata funkcija u, a* $c = -u(0, 0)$ *je konstanta;*

(c) $f(z) = 2iv(z/2, -iz/2) + c$ *ako je poznata funkcija v, a* $c = -iv(0, 0)$ *je konstanta.*

PRIMJER 3.6 *Neka je $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$. Treba odrediti $v(x, y)$ tako da $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bude analitička).*

Rješenje: (prvi način):
Nužan uvjet da bi f bila analitička su (C-R) uvjeti za funkcije u i v :
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int (2x - 1)\, dy + C(x) = (2x - 1)y + C(x)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$
$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$
$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = 2y \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = C$
Odredili smo funkciju $v(x, y)$ do na konstantu C :

$v(x, y) = 2xy - y + C$

i funkciju $f = u + iv$ do na konstantu C :

$f(z) = (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y + C), \quad z = x + iy$

Prikaz funkcije u varijabli z možemo odrediti računajući $f(z) = x^2 + i2xy + iy^2 - (x + iy) + iC = (x + iy)^2 - (x + iy) + iC = z^2 - z + iC.$

Prikaz funkcije u varijabli z možemo odrediti lakše prema prethodnoj napomeni 3.2 (a):
$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z^2 - z + iC.$

(drugi način):
Funkciju v možemo odrediti i kao potencijal vektorskog polja $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, gdje su funkcije P i Q zadane s $P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\ \ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1.$

$$v(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P\, dx + Q\, dy) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\, dt = 2xy - y + C.$$

(treći način):
Ako je poznata funkcija u u prethodnoj napomeni 3.2(i) konjugirana funkcija v je dana formulom $v(x, y) = \mathrm{Im}\{2u(z/2, -iz/2)\} + c = 2xy - y$, a koristeći (b) odredimo $f(z) = 2u(z/2, -iz/2) - u(0, 0)$
$f(z) = 2u(z/2, -iz/2) = z^2 - z.$

Veza harmonijskih i analitičkih funkcija je važna za rješavanje rubnih problema. Sljedeća napomena će se u poglavlju Primjene harmonijskih funkcija dokazati.

NAPOMENA 3.3 *Neka je $\phi^*(u, v)$ harmonijska funkcija na D'. Tada postoji* *konjugirano harmonijska funkcija* $\psi^*(u, v)$ *tako da je*

$$F^*(w) = \phi^*(u, v) + i\psi^*(u, v)$$

analitička funkcija.
Neka je $F(z)$ *je kompozicija* $F(z) = (F^* \circ f)(z) = F^*(f(z))$. *Tada je*

$$F(z) = \underbrace{\phi^*(u(x, y), v(x, y))}_{=\phi(x,y)} + i\underbrace{\psi^*(u(x, y), v(x, y))}_{=\psi(x,y)} = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

analitička a funkcije ϕ, ψ *harmonijske na D.*

Poglavlje 4

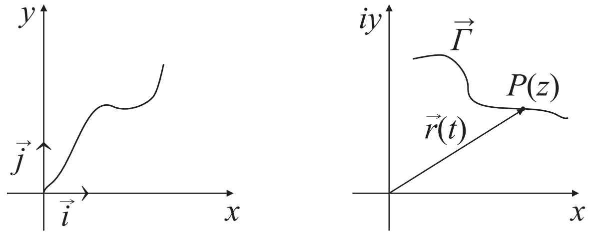
Integral funkcije kompleksne varijable

U ovom poglavlju pokazat ćemo jedno svojstvo funkcija kompleksne varijable koje nemaju realne funkcije: Ako je funkcija analitička (ima prvu derivaciju) na jednostruko povezanom području (bez ′rupa′) onda funkcija ima derivacije svakog reda i one su analitičke funkcije.

4.1 Prisjetimo se

Definicija 4.1 *parametrizacija krivulje*

Neka su zadane funkcije $x : I \to \mathbb{R}$ i $y : I \to \mathbb{R}$ neprekinute na $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i vektorska funkcija $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I$. Skup točaka u ravnini $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$ zovemo krivulja u ravnini s parametrizacijom $(\vec{r}, [a, b])$.



Slika 4.1: krivulja u ravnini i krivulja u kompleksnoj ravnini

Ako funkcije $x(t)$ i $y(t)$ imaju neprekinute derivacije na I i ako su derivacije različite od nule za sve $t \in [a, b]$ onda za krivulju Γ kažemo da je glatka krivulja ili Jordanov luk.

Krivulje koje su sastavljene od više glatkih krivulja su po dijelovima glatke krivulje ili konture.

Zatvorena krivulja ima svojstvo da je $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$.

Jednostavna zatvorena krivulja ne siječe samu sebe.

Jedinični vektor tangente na krivulju Γ je $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ za $t \in [a, b]$. Za glatku krivulju kažemo da je orijentirana ako je izabran smjer jediničnog vektora tangente $\vec{T}$, smjer od $A(x(a), y(a))$ do $B(x(b), y(b))$ ili suprotno.
Ako je glatka krivulja zatvorena onda kažemo da je pozitivno orijentirana ako je smjer vektora $\vec{T}(t)$ suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu.
Za područje D kažemo da je unutarnje područje pozitivno orijentirane zatvorene krivulje Γ ako se ono nalazi lijevo pri obilasku po krivulji.

PRIMJER 4.1 *(a) Napišite parametrizaciju pravca koji prolazi točkama $A(1, 5)$ i $B(2, 3)$;*

(b) Napišite parametrizaciju kružnice sa središtem u $S_0(2, 3)$ i polumjerom 3.

Rješenje:

(a) Parametrizacija pravca koji prolazi točkama $A(x_1, x_2)$ i $B(y_1, y_2)$; je

$$\Gamma : x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t,\ t \in \mathbb{R};$$

Ako su točke $A(1, 5)$ i $B(2, 3)$; parametrizacija pravca je

$$\Gamma : x(t) = 1 + t,\ y(t) = 5 - 2t,\ t \in\in \mathbb{R};$$

(b) Parametrizaciju kružnice sa središtem u $S_0(x_0, y_0)$ i polumjerom R je

$$\Gamma : x(t) = x_0 + R\cos t,\ y(t) = y_0 + R\sin t,\ t \in [0, 2\pi];$$

a sa središtem u $S_0(2, 3)$ i polumjerom 5

$$\Gamma : x(t) = 2 + 5\cos t,\ y(t) = 3 + 5\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

NAPOMENA 4.1 *krivuljni integral 1. vrste*

Neka je $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in I = [a, b]\}$ *krivulja u ravnini i neka je na krivulji zadana funkcija* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$. *Krivuljni integral funkcije* f *(krivuljni integral 1. vrste) računa se po formuli*

$$\int_\Gamma f(x, y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

NAPOMENA 4.2 *krivuljni integral 2. vrste*

Neka je $\vec{\Gamma} = \{(x(t), y(t)), t \in I = [a, b]\}$ *orijentirana krivulja u ravnini i neka je na krivulji zadano vektorska funkcija* $\vec{a} : \Gamma \to V^2, \vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$. *Krivuljni integral vektorske funkcije* $\vec{a}$ *(krivuljni integral 2. vrste) računa se po formuli*

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{\Gamma}} a_x dx + a_y dy \\ &= \int_a^b a_x(x(t), y(t))x'(t)\, dt + a_y(x(t), y(t))y'(t)\, dt \end{aligned}$$

Definicija 4.2 *jednostruko i višestruko povezano područje*

Za područje $D \in \mathbb{R}^2$ *kažemo da je jednostruko povezano područje ako se svaka zatvorena krivulja u* D *može bez prekidanja stegnuti na točku ne izlazeći iz područja.*
Za područje D *kažemo da je višestruko povezano područje ako ima 'rupe' tako da kad opišemo zatvorenu krivulju u području oko 'rupe', nije moguće stegnuti tu krivulju na točku a da ne izađemo iz područja.*

TEOREM 4.1 *Greenov teorem*

Neka je $D \in \mathbb{R}^2$ *jednostruko povezano područje i neka je* $\vec{Gamma}$ *zatvorena pozitivno orijentirana jednostavna glatka krivulja koja je rub područja* D. *Neka komponente vektorske funkcije* $\vec{a} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ *imaju neprekinute derivacije. Tada*

$$\oint_{\vec{\Gamma}} M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

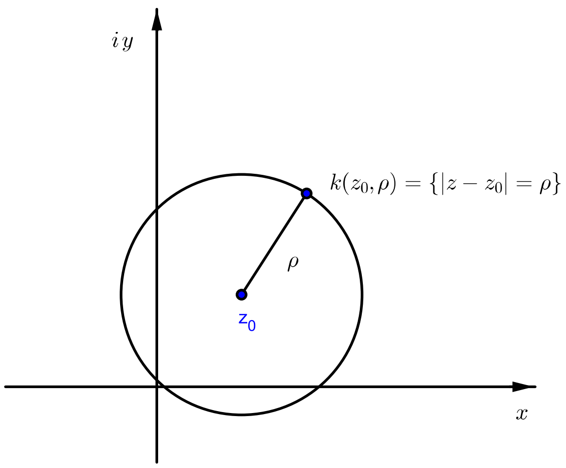
4.2 Kompleksna integracija

Definicija 4.3 *krivulja u kompleksnoj ravnini*

Neka su zadane funkcije $x : I \to \mathbb{R}$ *i* $y : I \to \mathbb{R}$ *neprekinute na* $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. *Krivulja* $\vec{\Gamma}$ *u kompleksnoj ravnini zadana je parametrizacijom*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \;\; t \in [a, b],$$

gdje je početna točka krivulje $z(a) = A = (x(a), y(a)) \in \mathbb{C}$, *a krajnja točka krivulje* $z(b) = B = (x(b), y(b)) \in \mathbb{C}$.
Krivulju koja ima suprotan smjer označit ćemo $-\vec{\Gamma}$.
Ako je $z(a) = z(b)$ *krivulja je zatvorena.*
Glatka zatvorena krivulja je pozitivno orijentirana ako je smjer 'vektora' tangente $z'(t)$ *suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu.*



Slika 4.2: $K(z_0, \rho)$

PRIMJER 4.2 (a) *Odredite parametrizaciju pravca u kompleksnoj ravnini koji prolazi točkama* z_1 *i* z_2.

(b) *Odredite parametrizaciju kružnice u kompleksnoj ravnini sa ishodištem u* z_0 *i polumjera* R.

Rješenje:

(a) 'Vektor' nosač pravca je $z_2 - z_1$, a točka kroz koju prolazi je z_1. Pravac u kompleksnoj ravnini koji prolazi točkama z_1 i z_2 je krivulja s parametrizacijom:

$$\Gamma : z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Za $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\Gamma : z(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t + i(y_1 + (y_2 - y_1)t), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Prema parametrizaciji kružnice u ravnini, parametrizacija kružnice sa središtem u $z_0 = x_0 + iy_0$ i polumjerom R je

$$\Gamma : z(t) = z_0 + R(\cos t + i \sin t) = z_0 + Re^{it}, \ \ t \in [0, 2\pi];$$

$$\Gamma : z(t) = (x_0 + R\cos t) + i(y_0 + R\sin t), \ \ t \in [0, 2\pi].$$

ZADAĆA 4.1 *(a) Odredite parametrizaciju pravca u kompleksnoj ravnini koji prolazi točkama $z_1 = i$ i $z_2 = 3 - i$.*
(b) Odredite parametrizaciju kružnice u kompleksnoj ravnini sa središtem u $z_0 = 3$ i polumjerom $R = 7$.

Definicija 4.4 *integral kompleksne funkcije*

Neka je krivulja $\vec{\Gamma}$ u kompleksnoj ravnini zadana parametrizacijom $z(t) = x(t) + iy(t), \ t \in [a, b]$. Integral funkcije kompleksne varijable $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ po glatkoj krivulji $\vec{\Gamma}$ definira se na sljedeći način

$$\int_{\vec{\Gamma}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_{\vec{\Gamma}} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\vec{\Gamma}} (udx - vdy) + i \int_{\vec{\Gamma}} (vdx + udy).$$

PRIMJER 4.3 *Izračunajte*

$$I = \int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z - z_0}$$

po kružnici oko z_0 polumjera ρ pozitivno orijentiranoj (suprotno kretanju kazaljke na satu).

Rješenje:
$\vec{r}(t) = (x_0 + \rho\cos t) + i(y_0 + \rho\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$
$f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$
$z(t) = x(t) + iy(t) = (x_0 + \rho\cos t) + i(y_0 + \rho\sin t)$
$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i\sin t) = z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$
$z'(t) = \rho i e^{it}$

$$I = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\rho i e^{it} dt$$
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{it}} \rho i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

ZADAĆA 4.2 *Pokažite da je*

$$\int_{\vec{\Gamma}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = 0, \quad n \neq -1$$

gdje je $\vec{\Gamma}$ kružnica $k(z_0, \rho)$.

4.3 Cauchyjev teorem

TEOREM 4.2 *Cauchyjev teorem*

Neka je $\vec{\Gamma}$ zatvorena po dijelovima glatka krivulja u kompleksnoj ravnini koja je pozitivno orijentirana i kojoj je unutarnje područje u D. Neka je f analitička funkcije na D. Tada je integral funkcije $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ po glatkoj krivulji $\vec{\Gamma}$ jednak nuli.

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z)\, dz = 0.$$

Dokaz:
Prema definiciji integrala kompleksne funkcije

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z)dz = \int_{\vec{\Gamma}} (udx - vdy) + i \int_{\vec{\Gamma}} (vdx + udy).$$

Trebamo izračunati dva krivuljna integrala druge vrste. Ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička onda funkcije u i v zadovoljavaju (C-R) jednadžbe.

Primijenimo Geenov teorem ili činjenicu da je krivuljni integral 2. vrste potencijalnog vektorskog polja po zatvorenoj krivulji jednak nuli.

$\int_{\vec{\Gamma}}(udx - vdy) = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$
gdje je $\vec{a} = v(x, y)\vec{i} + u(x, y)\vec{j}$ potencijalno vektorsko polje.
$\int_{\vec{\Gamma}}(vdx + udy) = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$
gdje je $\vec{a} = u(x, y)\vec{i} - v(x, y)\vec{j}$ potencijalno vektorsko polje.

PRIMJER 4.4 *Neka je $\vec{\Gamma}$ po dijelovima glatka zatvorena krivulja i $z_0 \in \mathbb{C}$. Izračunajte integrale:*

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} dz$

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} z\,dz$

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} (z - z_0)dz$

Rješnenje: Funkcije $f(z) = 1$, $f(z) = z$ i $f(z) = (z - z_0)$ su analitičke na na $\mathbb{C}$ pa i unutar krivulje Γ pa možemo primijeniti Cauchyjev teorem

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} dz = 0$

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} z\,dz = 0$

(a) $\oint_{\vec{\Gamma}} (z - z_0)dz = 0.$

TEOREM 4.3 *Morerin teorem - obrat Cauchyjevog teorema*

Neka je f neprekinuta funkcija na jednostruko povezanom području D i neka vrijedi

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z)\,dz = 0,$$

za svaku zatvorenu po dijelovima glatku krivulju $\vec{\Gamma}$ u kompleksnoj ravnini koja je pozitivno orijentirana i kojoj je unutarnje područje u D.
Tada je f analitička na D.

Dokaz: Posljedica Cauchyjeve integralne formule koju ćemo pokazati u sljedećem poglavlju.

Definicija 4.5 *primitivna funkcija-'neodređeni integral'*

Neka su F i f analitičke funkcije na području D takve da je $F'(z) = f(z)$ tada funkciju F zovemo primitivna funkcija funkcije f i označavamo

$$F(z) = \int f(z)\,dz + C.$$

PRIMJER 4.5 *Odredite primitivnu funkciju funkcije $f(z) = \cos z + z^3$.*

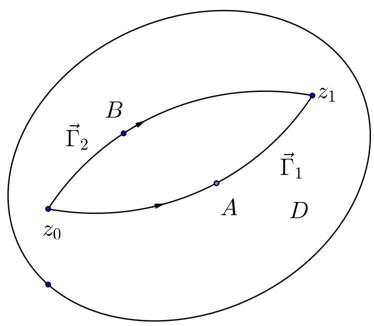
Rješenje: Kako je $\frac{d}{dz}(\sin z + \frac{z^4}{4}) = \cos z + z^3 = f(z)$ zaključujemo da je primitivna funkcije od f je funkcija $F(z) = \sin z + \frac{z^4}{4} + C$ i zapisujemo

$$\int (\cos z + z^3)\,dz = \sin z + \frac{z^4}{4} + C.$$

Sljedeći teoremi su posljedica Cauchyjevog teorema.

TEOREM 4.4 *Neka je f analitička funkcija na jednostruko povezanom području D. Neka su z_0 i z_1 dvije točke iz D. Tada integral funkcije f ne ovisi o krivulji koja spaja z_0 i z_1 i leži u D.*

Dokaz:



Slika 4.3: $\vec{\Gamma} = z_0Az_1Bz_0 = \vec{\Gamma}_1 \cup -\vec{\Gamma}_2$.

Pretpostavimo da točke z_0 i z_1 povežemo s dvije različite krivulje $\vec{\Gamma}_1 = z_0Az_1$ i $\vec{\Gamma}_2 = z_0Bz_1$. Označimo zatvorenu krivulju

$$\vec{\Gamma} = z_0Az_1Bz_0 = \vec{\Gamma}_1 \cup -\vec{\Gamma}_2.$$

Primijenimo Cauchyjev teorem za funkciju f i pozitivno orijentiranu krivulju $\vec{\Gamma}$

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z)dz = 0$$

i

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} f(z)dz + \int_{-\vec{\Gamma}_2} f(z)dz = 0.$$

Zato je

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} f(z)dz = \int_{\vec{\Gamma}_2} f(z)dz,$$

tj.

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} f(z)dz = \int_{\vec{\Gamma}_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

TEOREM 4.5 *Neka je f analitička funkcija na jednostruko povezanom području D. Neka su z_0 i z dvije točka iz D i neka je definirana funkcija*

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt.$$

Tada je G analitička na D i vrijedi $G'(z) = f(z)$, tj. G je primitivna funkcija od f.

Dokaz:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(z+h) - F(z)\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(s)ds + \int_{z}^{z_0} f(s)ds\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(s)ds \end{aligned}$$

(= prema teoremu srednje vrijednosti za integrale)
$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(c_h)\cdot h = f(z).$

TEOREM 4.6 *'određeni integral'*
Neka su f i F njena primitivna funkcija analitičke funkcije na $\mathbb{C}$ (cijele funkcije). Tada za sve krivulje u D koje povezuju dvije točke z_1 i z_2 iz D vrijedi

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a),\ \ a, b \in D.$$

PRIMJER 4.6 *Izračunajte integral*

$$\int_{2i}^{2-i} (2z + e^z)dz$$

Rješenje: Primitivna funkcija je $F(z) = z^2 + e^z + C$.

$$\int_{2i}^{2-i} (2z + e^z)dz = F(2-i) - F(2i) = 7 - 2i + e^{2-i} + e^{2i}.$$

NAPOMENA 4.3 *U integralu* $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$ *gdje je krivulja* $\Gamma = A(0,-1)B(1,-1)C(1,1)D(0,1)$ *možemo krivulju zamijeniti s desnom polukružnicom* $\vec{\Gamma}_1 : \{z(t) = e^{it},\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ *koja leži u jednostruko povezanom području koje ne sadrži ishodište i na kojem je funkcija* $\frac{1}{z}$ *analitička.*

Moramo paziti u primjeni da i zadana krivulja i zamjenska krivulja po kojoj se integrira (koja spaja točke $a = -i$ *i* $b = i$*) i točke leže u području koje je jednostruko povezano i na kojem je funkcija* f *analitička.*

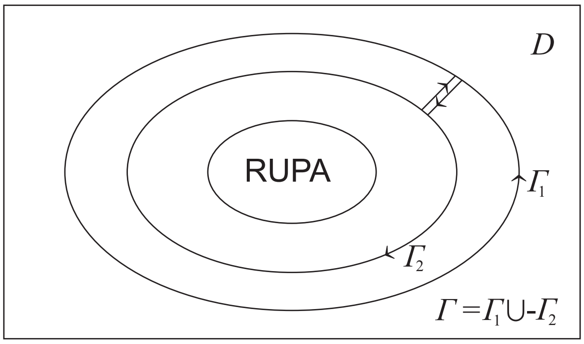
$$\begin{aligned}\int_{\vec{\Gamma}} \frac{1}{z}dz &= \int_{\vec{\Gamma}_1} \frac{1}{z}dz \\ &= i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt \\ &= \pi i.\end{aligned}$$

Ne bismo smjeli zadanu krivulju Γ *zamijeniti s lijevom polukružnicom* $\vec{\Gamma}_2$: $\{z(t) = e^{it},\ t \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ *jer ona ne leži u istom jednostruko povezanom području.*

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\Gamma}_2} \frac{1}{z}dz &= i\int_{3\pi/2}^{\pi/2} dt \\ &= -\pi i.\end{aligned}$$

TEOREM 4.7 *Cauchyjev teorem za 'rupu'*

Neka je D *višestruko povezano područje (s rupom). Neka je* $\vec{\Gamma}_1$ *pozitivno orijentirana, zatvorena, po dijelovima glatka krivulja kojoj je unutarnje područje u* D. *Neka je* $\vec{\Gamma}_2$ *pozitivno orijentirana, zatvorena, po dijelovima glatka krivulja koja se nalazi u unutrašnjem području od* $\vec{\Gamma}_1$ *tako da obuhvaća rupu. Neka je* $\overline{AB}$ *spojnica krivulja* Γ_1 *i* Γ_2. *Neka je* f *analitička funkcija na* D. *Tada je integral funkcije*



Slika 4.4: područje s 'rupom'

f po dijelovima glatkoj krivulji pozitivno orijentiranoj $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \overline{AB} \; - \vec{\Gamma}_2 \cup \overline{BA}$ *jednak nuli:*

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z)\, d\, z = 0$$

i vrijedi

$$\oint_{\vec{\Gamma}_1} f(z)\, dz = \oint_{\vec{\Gamma}_2} f(z)\, dz.$$

Dokaz: Funkcija f je analitička na unutarnjem području krivulje $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \overline{AB} \; - \vec{\Gamma}_2 \cup \overline{BA}$ pa možemo primijeniti Cauchyjev teorem za jednostruko povezano područje.

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\vec{\Gamma}} f(z)\, dz \\ &= \int_{\vec{\Gamma}_1 \cup AB \cup - \vec{\Gamma}_2 \cup BA} f(z)\, dz \\ &= \oint_{\vec{\Gamma}_1} f(z)\, dz + \int_{\overline{AB}} f(z)\, dz + \oint_{-\vec{\Gamma}_2} f(z)\, dz + \int_{\overline{BA}} f(z)\, dz \\ &= \oint_{\vec{\Gamma}_1} f(z)\, dz - \oint_{\vec{\Gamma}_2} f(z)\, dz \end{aligned}$$

Iz gornje jednakosti slijedi

$$\oint_{\vec{\Gamma}_1} f(z)\, dz = \oint_{\vec{\Gamma}_2} f(z)\, dz.$$

NAPOMENA 4.4 *Neka je funkcija f analitička na području D osim u točki z_0. Tada u pretpostavkama Cauchyjevog teorema za višestruko povezano područje s* *'rupom' možemo za krivulju $\vec{\Gamma}_2$ izabrati kružnicu $k(z_0, \rho)$ koja obuhvaća 'rupu' oko točke z_0. Tada vrijedi*

$$\oint_{\vec{\Gamma}_1} f(z)\, dz = \oint_{k(z_0,\rho)} f(z)\, dz, \; za \rho > 0.$$

PRIMJER 4.7 *Izračunajte*

$$I = \oint_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z - z_0}$$

za:

(a) $\Gamma = k(z_0, \rho)$ kružnici oko z_0 polumjera ρ pozitivno orijentiranoj (suprotno kretanju kazaljke na satu)

(b) Γ bilo koja po dijelovima glatka zatvorena pozitivno orijentirana krivulja koja obuhvaća z_0

(c) Γ bilo koja po dijelovima glatka zatvorena pozitivno orijentirana krivulja koja ne obuhvaća z_0

Rješenje:

(a) $I = \oint_{K(z_0,\rho)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (zadatak 4.3;

(b) $I = \oint_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z-z_0}$ = (Cauchyjev teorem za 'rupu')= $\oint_{K(z_0,\rho)} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

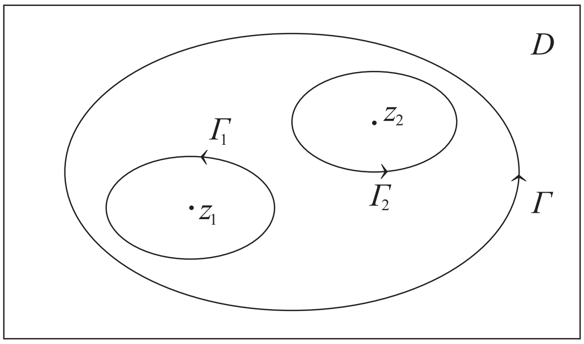
(c) Funkcija $g(z) = \frac{1}{z-z_0}$ je analitička na unutarnjem području od Γ jer Γ ne obuhvaća z_0 pa možemo primijeniti Cauchyjev teorem $I = \int_{\vec{\Gamma}} g(z) d z = 0$.

Sljedeći teorem je posljedica Cauchyjevog teorema za višestruko povezano područje (više 'rupa')

TEOREM 4.8 *Neka je funkcija f analitička na području D osim u točkama z_1 i z_2. Tada vrijedi*

$$\oint_{\vec{\Gamma}} f(z) dz = \oint_{\Gamma_1} f(z) dz + \oint_{\Gamma_2} f(z) dz$$

za $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$.



Slika 4.5: f nije analitička u z_1 i z_2

4.4 Cauchyjeva integralna formula

U nastavku ćemo pretpostaviti da je Γ po dijelovima jednostavna glatka zatvorena krivulja koja je pozitivno orijentirana i njeno unutarnje područje je unutar D (ostaje s lijeve strane pri obilasku).

TEOREM 4.9 *Cauchyjeva integralna formula*

Neka je Γ zatvorena po dijelovima glatka krivulja u kompleksnoj ravnini koja je pozitivno orijentirana i kojoj je unutarnje područje u D. Neka je f analitička funkcije na D. Tada za z_0 iz unutarnjeg područja od Γ vrijedi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

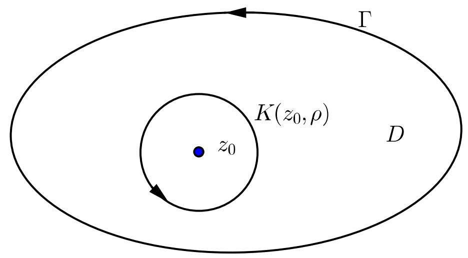
Rezultat vrijedi i u slučaju višestruko povezanog područja.

Dokaz:

Definiramo novu funkciju $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Funkcija g nije definirana i nije analitička u z_0. Možemo dodefinirati funkciju g u točki z_0 na sljedeći način $\lim_{z \to z_0} g(z) = f'(z_0)$.

$g(z)$ je analitička na D osim u z_0, pa možemo primijeniti Cauchyjev teorem s ('rupom') i napomenu 4.4:

$$\oint_\Gamma g(z)dz = \oint_{K(z_0,\rho)} g(z)dz, \ \ za\ \rho > 0.$$



Slika 4.6: f analitička u z_0

Apsolutnu vrijednost integrala na desnoj strani možemo ograničiti, za bilo koji $\rho > 0$, pa u limesu kad $\rho \to 0$ vrijedi $\oint_\Gamma g(z)dz = \oint_{K(z_0,\rho)} g(z)dz = 0$.

$$\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$$

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \underbrace{\oint_\Gamma \frac{1}{z - z_0} dz}_{2\pi i}$$

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

TEOREM 4.10 *Neka je f analtička funkcija na D. Tada funkcija f ima derivacije svakog reda na D i derivacije su analitičke funkcije.*
Neka Γ bilo koja zatvorena po dijelovima glatka krivulja u kompleksnoj ravnini koja je pozitivno orijentirana i kojoj je unutarnje područja u D. Tada se $n-$ta derivacija funkcije f u bilo kojoj točki z_0 iz unutarnjeg područja od Γ računa na

sljedeći način

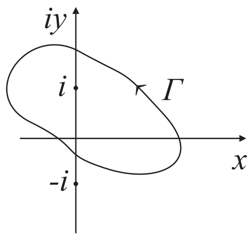
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

PRIMJER 4.8 *Izračunajte integral*

$$\oint_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+1}dz$$

gdje je Γ *je zatvorena glatka krivulja u čijem se unutarnjem području nalazi točka* $z = i$ *a ne nalazi točka* $z = -i$.

Rješenje: Neka je D područje koje obuhvaća unutarnje područje krivulje Γ.



Za primjenu Cauchyjevog teorema provjeravamo je li podintegralna funkcija analitička na D. Označimo $g(z) = \frac{\sin z}{z^2+1} = \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)} \quad \rightarrow \quad g(z)$ je analitička osim u $z_0 = i$.

$\Rightarrow \quad \oint_\Gamma g(z)dz \neq 0$ (prema Cauchyjevom teoremu).

Neka je $f(z) = \frac{\sin z}{z+i}$. To je analitička funkcija na D.

Prema Cauchyjevoj formuli za točku $z_0 = i$ vrijedi

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

Budući je $g(z) = \frac{f(z)}{z-i}$ možemo izračunati vrijednost integrala

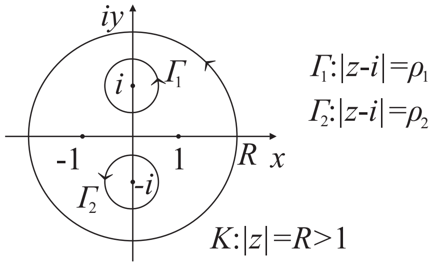
$$\begin{aligned}\oint_\Gamma g(z)dz &= \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-i}dz \\ &= 2\pi i \cdot f(i) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{\sin i}{i+i} \\ &= \pi i \sinh 1\end{aligned}$$

PRIMJER 4.9 *Izračunajte*

$$\oint_\Gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz$$

gdje je Γ *je kružnica polumjera* $R > 1$.

Rješenje: Označimo funkciju $g(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$. Funkcija g je analitička osim u $z_1 = i$ i $z_2 = -i \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma g(z)dz \neq 0$.
Označimo krivulje $\Gamma_1 : |z-i| = \rho_1$ i $\Gamma_2 : |z+i| = \rho_2$. Primijenimo posljedicu

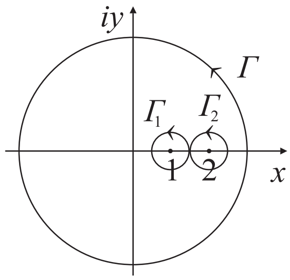


Cauchyjev teorem za višestruko povezano područje

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma g(z)dz &= \int_{\Gamma_1} g(z)dz + \int_{\Gamma_2} g(z)dz \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\sin z}{(z-i)(z+i)}dz \\
& \quad f_1(z) = \frac{\sin z}{z+i}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{z-i} \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-i}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+i}dz \\
&= \text{Cauchyjevaint.formula} \\
&= 2\pi i f_1(i) + 2\pi i f_2(-i) \\
&= 2\pi i \frac{\sin i}{i+i} + 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-i-i} \\
&= \pi \sin i - \pi \sin(-i) = 2\pi \sin i \\
&= 2\pi i \sinh 1
\end{aligned}$$

PRIMJER 4.10 *Izračunajte integral*

$$\int_{|z|=3} \frac{z+3}{(z-1)(z-2)} \, dz$$



Rješenje: Označimo funkciju $g(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z-2)}$ i ona je analitička osim u $z_1 = 1$ i $z_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma g(z)dz \neq 0$.
Označimo krivulje $\Gamma_1 : |z-1| = \rho_1$ i $\Gamma_2 : |z-2| = \rho_2$. Primijenimo posljedicu Cauchyjev teorem za višestruko povezano područje - teorem4.8:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma g(z)dz &= \int_{\Gamma_1} g(z)dz + \int_{\Gamma_2} g(z)dz \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{z+3}{(z-1)(z-2)}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{z+3}{(z-1)(z-2)}dz \\
&= 2\pi i \cdot (-4) + 2\pi i \cdot 5 = 2\pi i
\end{aligned}
$$

ZADAĆA 4.3 *Izračunajte integrale*

(a) $\displaystyle\int_{\Gamma:|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$

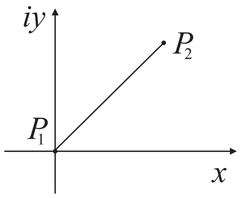
PRIMJER 4.11 *Izračunajte integral funkcije* $f(z) = \mathrm{Re} z$ *po krivulji* Γ *ako je*

(a) Γ *pravac* $\overline{P_1P_2}$, $P_1 \to z_1 = 0$, $P_1(0,0)$, $P_2 \to z_2 = 1+i$, $P_2(1,1)$

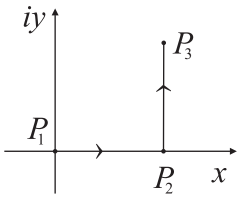
(b) $\Gamma : \overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3}$, $P_1 \to z_1 = 0$, $P_2 \to z_2 = 1$, $P_3 \to z_3 = 1+i$

Rješenje:

(a) $f(z) = Re(z) = x = t$, $\vec{r}(t) = t + it$, $t \in [0,1]$, $dz = z'(t)dt = (x'(t) + iy'(t))dt = (1+i)dt$
$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1+i}{2}$



Slika 4.7: (a)



Slika 4.8: (b)

(b) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$\Gamma_1: \ y(t) = 0, \ x(t) = t, \ \vec{r}(t) = t, \ t \in [0,1]$

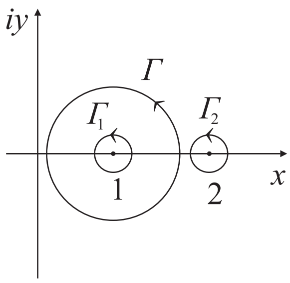
$\Gamma_2: \ y(t) = t, \ x(t) = 1, \ \vec{r}(t) = 1 + it, \ t \in [0,1]$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 i\,dt = \frac{1+2i}{2}$$

Funkcija $f(z) = \operatorname{Re} z$ nije analitička - integrali ne ovise samo o početnoj i krajnjoj točki krivulja.

ZADAĆA 4.4 *Izračunajte integrale*

(a) $$\oint_{\Gamma:|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i$$



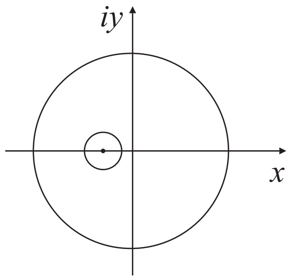
Slika 4.9: (a)

(b) $$\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz = 4\pi i$$

PRIMJER 4.12 *Izračunajte integral*

$$\oint_{\Gamma:|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz.$$

Rješenje:



Slika 4.10: $\Gamma : |z| = 3\ z_0 = -1$

Primijenimo Cauchyjevu integralnu formulu za $n-$tu defivaciju:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^(n+1)}dz.$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^(n+1)}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$n = 3,\ \ z_0 = -1,\ \ f(z) = e^{2z}$

$$\oint_{\Gamma:|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz = \frac{8\pi i}{3e^2}.$$

Posljedice Cauchyjeve integralne formule su sljedeća dva važna svojstva analitičke funkcije:

TEOREM 4.11 *maksimum modula*

Ako je f analitička na zatvorenoj krivulji Γ i ako f nije konstantna $\Rightarrow |f(z)|$ ima maksimum na Γ.

TEOREM 4.12 *minimum modula*

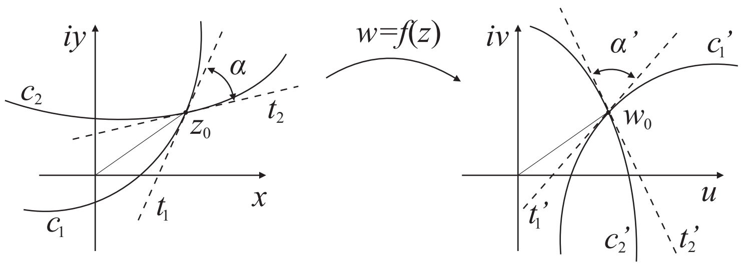
Ako je f analitička na zatvorenoj krivulji Γ i ako $f(z) \neq 0$ na $\Gamma \Rightarrow |f(z)|$ ima minimum na Γ.

Poglavlje 5

Konformno preslikavanje

Definicija 5.1 *Konformno preslikavanje*

Neka je zadano preslikavanje $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ *koje točku iz* (x_0, y_0) *iz* $(x, y)-$*ravnine preslikava u* (u_0, v_0) *u* $(u, v)-$*ravnini, a krivulje* C_1 *i* C_2 *koje se sijeku u* (x_0, y_0) *preslika u* $C_1^{'}$ *i* $C_2^{'}$ *koje se sijeku u* (u_0, v_0)*. Ako je kut između krivulja* C_1 *i* C_2 *jednak kutu između krivulja* $C_1^{'},\ C_2^{'}$ *po iznosu i smjeru onda je preslikavanje konformno u točki* (x_0, y_0).



Slika 5.1: konformno preslikavanje

Preslikavanje definirano kompleksnom funkcijom $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ zadano je jednadžbama $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$.

TEOREM 5.1 *Ako je funkcija* f *analitička u* z_0 *i ako je* $f'(z_0) \neq 0$ *onda se tangenta na krivulju* C *u točki* z_0 *preslika u tangentu na krivulju* C' *u točki* $w_0 = f(z_0)$ *koja je zarotirana za kut* $\alpha = \mathrm{Arg} f'(z_0)$.

Dokaz: Neka krivulja C koja prolazi kroz točku z_0 ima parametrizaciju $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, $z_0 = z(t_0), t_0 \in [a, b]$, a njena slika C' parametrizaciju $w = w(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$.
Vektor tangente na krivulju C u točki z_0 je dan s $z'(t_0)$ (kad gledamo na kompleksni broj kao vektor). Pomoću lančanog pravila računamo $w'(t)$ (predstavlja vektor tangente na C'):

$$w'(t) = f'(z(t))z'(t).$$

U točkama $z_0 = z(t_0)$ i $w_0 = w(t_0)$ uz pretpostavku da je f analitička i $f'(z_0) \neq 0$ vrijedi $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$. U polarnom zapisu imamo $\text{Arg}w'(t_0) = \text{Arg}f'(z_0) + \text{Arg}z'(t_0)$. Zato je efekt transformacije $w = f(z)$ rotacija tangente za kut $\text{Arg}f'(z_0)$.

TEOREM 5.2 *Ako je funkcija f analitička u z_0 i ako je $f'(z_0) \neq 0$ onda je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u točki z_0.*

Dokaz:

Trebamo pokazati da je kut između krivuja C_1 i C_2 koje se sijeku u točki z_0 sačuvan pri preslikavanju $w = f(z)$. Prema prethodnom teoremu tangente se rotiraju za isti kut $\alpha = \text{Arg}f'(z_0) \neq 0$ u istom smjeru pa je preslikavanje konformno u točki z_0.

PRIMJER 5.1 *(a) Pokažite da je preslikavanje $w = \cos z$ konformno u točkama $z = i,\ 1,\ \pi + i$.*
(b) Odredite kut rotacije u tim točkama.

Rješenje:

(a) Derivacija funkcije $f(z) = \cos z$ je $f'(z) = -\sin z$. Preslikavanje dano analitičkom funkcijom je konformno u točkama u kojima je defivacija različita od nule. Preslikavanje je konformno osim u točkama $z = k\pi\ k \in \mathbb{Z}$. Preslikavanje je konformno u zadanim točkama $i,\ 1,\ \pi + i$.
(b) Kut rotacije u točki z_0 je jednak $\text{Arg}f'(z_0)$:
Za $z = i$ pomoću $f'(i) = -\sin(i) = -i \sinh 1$ odredimo da je $\text{Arg}f'(i) = 3\pi/2$;
za $z = 1$ pomoću $f'(1) = -\sin(1)$ odredimo da je $\text{Arg}f'(1) = \pi$;
Za $z = \pi + i$ pomoću $f'(\pi + i) = \sinh(1)$ odredimo da je $\text{Arg}f'(\pi + i) = \pi/2$.

TEOREM 5.3 *Ako je funkcija f analitička na području D i ako je $f'(z) \neq 0$ na području D onda je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u svim točkama područja D.*

PRIMJER 5.2 *(a) Odredite u kojem području je preslikavanje $w = \mathrm{Ln}z$ (glavna vrijednost logaritma) konformno preslikavanje.*
(b) Pokažite da to preslikavanje pravce $C_1 : \{x > 0, y = 0\}$ i $C_2 : \{x = 1\}$ preslika u ortogonalne krivulje.

Rješenje:

(a) Derivacija $f'(z) = \frac{1}{z} \neq 0$ za $z \neq 0$. Preslikavanje je konformno na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
(b) Neka su krivulje $C_1 : \{x > 0, y = 0\}$ i $C_2 : \{x = 1\}$ pravci koji su ortogonalni i sijeku se u točki $z_0 = 1$. Preslikavanje je konformno u $z_0 = 1$ i slijedi da će se slike krivulja C_1 i C_2 sijeći pod pravim kutom u točki $w_0 = f(1) = \mathrm{Ln}1 = \ln 1 + i0 = 0$.

PRIMJER 5.3 *(a) Pokažite da je preslikavanje $w = z^n$, $n = 2, 3, ...$ konformno na $\mathbb{C}$ osim u točki $z_0 = 0$.*
(b) Pokažite da je preslikavanje $w = e^z$ konformno na $\mathbb{C}$.
(c) Pokažite da je preslikavanje $w = \sin z$ konformno na $\mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.
(d) Pokažite da je preslikavanje $w = \frac{z+1}{z-1}$ konformno na $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

Rješenje:

Preslikavanje je konformno u onim točkama u kojima je $f'(z) \neq 0$.
(a) Derivacija $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ za $z \neq 0$.
(b) Derivacija $f'(z) = e^z \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$.
(c) Derivacija $f'(z) = \cos z \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pi/2 + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.
(d) Derivacija $f'(z) = -\frac{2}{(z-1)^2}$ nije definirana za $z = 1$ pa je preslikavanje $w = f(z)$ konformno za sve $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

NAPOMENA 5.1 *Neka je f analitička funkcija na području D i neka je $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Analitička funkcija u točki z_0 male udaljenosti oko z_0 preslika u male udaljenosti oko w_0 a faktor uvećanja (rastezanja ili stezanja) λ je jednak $|f'(z_0)|$ jer vrijedi*

$$|w - w_0| = |f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)||z - z_0|.$$

(Prisjetimo se Napomene 2.8 i geometrijske interpretacije derivacije $f'(z_0)$.)

PRIMJER 5.4 *(a) Provjerite da je preslikavanje* $w = z^2$ *konformno u točki* $z_0 = 1 + i$.
(b) Koliki je faktor uvećanja u okolini točke z_0?
(c) Koliki je kut rotacije preslikavanja u z_0?

Rješenje:

(a) Derivacija $f'(z) = 2z$ u točki $z = i+1$ ima vrijednost $f'(i+1) = 2+2i \neq 0$ pa je u z_0 preslikavanje konformno.
(b) Faktor uvećanja u okolini točke $z_0 = i + 1$ je $\lambda = |f'(z_0)| = 2\sqrt{2}$ tj. element luka krivulje se rastegne za faktor $\lambda > 1$. (c) Kut rotacije je $\alpha = \operatorname{Arg} f'(z_0) = \pi/4$, tj. element luka krivulje se zarotira za kut α.

NAPOMENA 5.2 *tko želi znati više*

Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ *analitička funkcija u točki* z_0. *Ako je* $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) = 0, \cdot, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^n(z_0) \neq 0$, *onda preslikavanje* $w = f(z)$ *uvećava n puta kut između krivulja koje se sijeku u u točki* z_0.

PRIMJER 5.5 *Pokažite da preslikavanje* $w = z^2$ *nije konformno u* $z_0 = 0$. *Kako se ponaša preslikavanje u* $z = 0$ *s obzirom na kut između krivulja koje se sijeku u* z_0.

Derivacija $f'(z) = 2z$, pa u nuli preslikavnje nije konformno (ne čuva kuteve). Prema prethodnom teoremu $f''(0) = 2 \neq 0$, pa se kutevi u $z_0 = 0$ povećavaju dva puta.

TEOREM 5.4 *Riemannovo preslikavanje*

Neka je C jednostavna zatvorena krivulja u $z-$*ravnini koja je granica područja D. Neka je* C' *centralna kružnica polumjera 1, a* D' *jedinični centralni krug u* $w-$*ravnini. Tada postoji analitička funkcija* f *na području D koja preslikava C u* C', *D u* D' *i preslikavanje je bijektivno.*

5.1 Bilinearno preslikavanje

Definicija 5.2 *bilinearno preslikavanje*

Neka su zadane konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takvi da $ad - bc \neq 0$. Bilinearno preslikavanje ili razlomljeno linearno preslikavanje ili Möbiusovo preslikavanje je racionalna funkcija kompleksne varijable $f : \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$ definirana formulom

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Funkcija je analitička $f'(z) = \dfrac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2}$
$f'(z) \neq 0$ ako je $ad - bc \neq 0$.

Bilinearno preslikavanje predstavlja za

$c = 0$

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a_1 z + b_1$$

linearno preslikavanje;

$c \neq 0$

$$w = \underbrace{\frac{bc - ad}{c^2}}_{k \in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\frac{1}{z + \underbrace{\frac{d}{c}}_{translacija}}}_{inverzija} + \underbrace{\frac{a}{c}}_{l \in \mathbb{C}}$$

kompoziciju:
$z \to z_1, \;\; z_1 = z + \frac{d}{c}$ translacija
$z_1 \to z_2, \;\; z_2 = \frac{1}{z_1}$ inverzija
$z_2 \to z_3, \;\; z_3 = kz_2 + l$ linearno preslikavanje

PRIMJER 5.6 *Ako pretpostavimo da je pravac specijalna kružnica polumjera ∞, onda bilinearno preslikavanje kružnice preslikava u kružnice.*

Rješenje:

Opća jednadžba kružnice u konjugiranim varijablama je ($z, \bar{z}$ je

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta}\bar{z} + \gamma = 0,$$

gdje su realne konstante konstante α i γ, dok je β kompleksna. Ako je $\alpha = 0$ kružnica se reducira na pravac. Pretpostavimo da su $\alpha > 0$ i $\gamma > 0$.
Za preslikavanje:
(a) inverzija $w = \frac{1}{z}$, jednadžba kružnice iz z-ravnine postaje $\gamma w\overline{w} + \overline{\beta}w + \beta\overline{w} + \alpha = 0$, a to je opet jednadžba kružnice u $w-$ ravnini;
(b) rotacija i kontrakcija ili dilatacija $w = az$, jednadžba kružnice iz z-ravnine postaje $\alpha w\overline{w} + \beta\bar{a}w + \overline{\beta}a\overline{w} + \gamma a\bar{a} = 0$, a to je opet jednadžba kružnice u $w-$ ravnini;
(c) translacija kružnice preslikava u kružnice.
Bilinearno preslikavanje je kompozicija translacije, inverzije, rotacije i kontrakcije ili dilatacije. Tako smo pokazali da se kombinacijom ovih preslikavanja koje odgovaraju bilinearnom preslikavanju kružnice preslikavaju u kružnice u smislu da je pravac kružnica polumjera ∞.

Definicija 5.3 *inverzno bilinearno preslikavanje*

Neka je zadano bilinearno preslikavanje $f(z) = w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *tako da je* $ad - bc \neq 0$. *Tada je za* $w \neq \frac{a}{c}$ *definirano inverzno bilinearno preslikavanje*

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Ako proširimo kompleksnu ravninu s točkom ∞ onda definiramo:
$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{a}{c}$;
i inverz je $f^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$. Analogno definiramo:
$f^{-1}(\infty) = \lim_{w\to\infty} f^{-1}(w) = -\frac{d}{c}$;
i inverz je $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

PRIMJER 5.7 *(a) Neka je zadano bilinearno preslikavanje* $w = f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$. *Odredite inverzno bilinearno preslikavanje* $f^{-1}(w)$.
(b) Pokažite da preslikavanje $w = f(z)$ *prelikava kružnicu* $C : \{|z| = 1\}$ *u pravac* $C' : \{v = 0\}$.

Rješenje:

(a) Prema definiciji inverznog bilinearnog preslikavanja
$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-1w+i}{1w-(-i)} = \frac{-1w+i}{w+i}$.
(b) Koristeći inverzno bilinearno preslikavanje $z = f^{-1}(w)$ slike točaka kružnice $C : \{|z| = 1\}$ zadovoljavaju jednadžbu $|\frac{-1w+i}{w+i}| = 1$. Prema zapisu $w = u + iv$ jednadžbu možemo napisati u obliku
$|u + iv + i| = | - u - iv + i|$.
Kvadriranjem obe strane dobijemo
$u^3 + (1 + v)^2 = (-u)^2 + (1 - v)^2$
$(1 + v)^2 = (1 - v)^2$
$v = 0$. (pravac - u-os u $w-$ ravnini)

PRIMJER 5.8 *(a) Neka je zadano bilinearno preslikavanje* $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$*. Odredite inverzno bilinearno preslikavanje* $f^{-1}(w)$*.*
(b) Odredite sliku prvog kvadranta $x > 0,\ y > 0$ *pri preslikavanju* $w = f(z)$*.*

Rješenje:

(a) Prema definiciji inverznog bilinearnog preslikavanja
$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-1w+(-1)}{1w-1} = \frac{-1w-1}{w-1}$.
(b) Za inverzno bilinearno preslikavanje $z = f^{-1}(w)$ imamo
$x + iy = \frac{-1(u+iv)-1}{(u+iv)-1}$
$x+iy = \frac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{2v}{(u-1)^2+v^2}$. Tako da za točke iz prvog kvadranta: $x > 0,\ y > 0$ vrijedi
$u^2 + v^2 < 1$ i $v > 0$. Preslikavanje $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ prelika prvi kvadrant iz $z-$ ravnine $D : \{x > 0,\ y > 0\}$ u područje $D' : \{|w| < 1, v > 0\}$, tj. jedinični polukrug u gornjoj w-ravnini.

TEOREM 5.5 *Postoji jedinstveno bilinearno prslikavanje koje tri različite točke* $z_1,\ z_2,\ ,z_3$ *preslika u tri različite točke* $w_1,\ w_2,\ w_3$ *(respektivno) i dano je formulom*

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Ako je $z_3 = \infty$ *onda je preslikavanje dano formulom*

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Ako je $w_3 = \infty$ onda je preslikavanje dano formulom

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Dokaz:

Ako je w_k slika z_k za $k = 1, 2, 3$ vrijedi

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)}.$$

Supstituirajući z_k i w_k računamo $\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}$. Uz pretostavku $ad - bc \neq 0$ dobijemo traženu jednadžbu.
Ako je $z_3 = \infty$ onda je kvocijent $\lim_{z_3 \to \infty} \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} = 1$ i formula se pojednostavljuje.
Analogno zaključujemo za $w_3 = \infty$.

PRIMJER 5.9 *Odredite bilinearno preslikavanje $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, ako su zadani sljedeći parovi točaka (z_i, w_i), $w_i = f(z_i), i = 1, 2, 3$:*

z	w
0	i
$-i$	1
-1	0

Rješenje: (1. način)
$f(z_1) = w_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = i$
$f(z_2) = w_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot (-i) + b}{c \cdot (-i) + d} = 1$
$f(z_3) = w_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot (-1) + b}{c \cdot (-1) + d} = 0$
$i = \frac{b}{d} \to (1)\, b = d\, i$
$(2)\, -c\, i + d = -a\, i + b$
$-a + b = 0 \to (3)\, a = b = (1) = d\, i$
Uvrstimom relacije (1) i (3) u (2) $(2) - c\, i + d = -a\, i + b = -d\, i(i) + d\, i \to -c\, i = d\, i \to c = -d$
Zato je

$$f(z) = \frac{d\, i\, z + d\, i}{-dz + d} = \frac{-i\, z - i}{z - 1}.$$

(2. način) Prema jednadžbi

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

dobijemo
$\frac{(w-i)(1-0)}{(w-0)(1-i)} = \frac{(z-0)(-i-(-1))}{(z-(-1))(-i-0)}$.
Rješenje jednadžbe po w je $w = \frac{-iz-i}{z-1}$.

PRIMJER 5.10 *Odredite bilinearno preslikavanje $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, ako su zadani sljedeći parovi točaka (z_i, w_i), $w_i = f(z_i), i = 1, 2, 3$:*

z	w
$-i$	-1
1	0
i	1

Rješenje: (1. način) $f(z_1) = w_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a\cdot(-i)+b}{c\cdot(-i)+d} = -1$
$f(z_2) = w_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a\cdot 1+b}{c\cdot 1+d} = 0$
$f(z_3) = w_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a\cdot(i)+b}{c\cdot(i)+d} = 1$
(1) $c\,i - d = -a\,i + b$
(2) $a = -b$
(3) $c\,i + d = a\,i + b$
Zbrajanjem relacija (1) i (3) $\Rightarrow$ (4) $c\,i = b$
Iz (2) i (4) $\Rightarrow$ (5) $a = -c\,i$.
Primijenimo (4) i (5) u (3) $\Rightarrow d = c$. Traženo preslikavanje je

$$f(z) = \frac{-c\,i\,z + c\,i}{c\,z + c} = \frac{-i\,z + i}{z+1}.$$

(2. način)

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

$$\frac{(w+1)(0-1)}{(w-1)(0+1)} = \frac{(z+i)(1-i)}{(z-i)(1+i)}$$

Raspišemo i grupiramo članove s w i zw na lijevoj strani $zw + w = -iz + i$
Traženo preslikavanje je $f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$.

PRIMJER 5.11 *Odredite bilinearno preslikavanje* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *ako su zadani sljedeći parovi točaka* (z_i, w_i), $w_i = f(z_i), i = 1, 2, 3$:

z	w
0	1
1	i
i	0

Rješenje:

$f(z) = \frac{-z+i}{z+i}$

PRIMJER 5.12 *Odredite bilinearno preslikavanje* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *ako su zadani sljedeći parovi točaka* (z_i, w_i), $w_i = f(z_i), i = 1, 2, 3$:

z	w
0	0
1	1
2	∞

Rješenje: Ako je $w_3 = \infty$ onda je preslikavanje dano formulom

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

$$\frac{w - 0}{1 - 0} = \frac{(z - 0)(1 - 2)}{(z - 2)(1 - 0)}$$

$w = \frac{-z}{z-2}$

NAPOMENA 5.3 *Neka je D područje u* $z-$*ravnini čiji je rub krivulja C kružnica ili pravac. Neka su zadane tri različite točke na krivulji C tako da kretanjem po C od* z_1 *preko* z_2 *do* z_3 *područje D je s lijeve strane. (Ako je C kružnica onda je ona pozitivno orijentirana- suprotno kretanju kazaljke na satu.) Bilinearnim preslikavanjem slike točaka* z_1, z_2, z_3 *leže na slici krivulje* C' *koja je ili kružnica ili pravac. Slika područja D je područje* D' *čiji je rub krivulja* C' *(s lijeve strane obilaska po* C' *od* w_1 *preko* w_2 *do* w_3*.)*

PRIMJER 5.13 *Neka je zadano bilinearno preslikavanje* $w = f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$. *Odredite sliku desne poluravnine* $\operatorname{Re} z > 0$.

Rješenje:

Koristit ćemo prethodnu Napomenu 5.3. Rub područja $D : \{x > 0\}$ je krivulja $C : \{x = 0\}$. Izaberemo tri točke na $C : z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = -i$. Slike tih točaka su $w_1 = f(z_1) = 1$, $w_2 = f(z_2) = i$, $w_3 = f(z_3) = -i$. Te točke leže na kružnici $C' : \{|w| = 1\}$ koja je pozitivno orijentirana (suprotno kazaljci na satu), pa je rub područja $D'; \{|w| < 1\}$.

PRIMJER 5.14 *Neka je zadano bilinearno preslikavanje* $w = f(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$. *Odredite sliku kruga* $D : \{|z + 1| < 1\}$.

Rješenje:

Koristit ćemo gornju napomenu 5.3. Rub područja $D : \{|z + 1| < 1\}$ je krivulja $C : \{|z+1| = 1\}$. Izaberemo tri točke na $C : z_1 = -2$, $z_2 = -1-i$, $z_3 = 0$. Slike tih točaka su $w_1 = f(z_1) = -1$, $w_2 = f(z_2) = 0$, $w_3 = f(z_3) = 1$. Te točke leže na $u-$osi $C' : \{v = 0\}$. To je rub područja $D' : \{v > 0\}$ (prema gornjoj napomeni 5.3.) Ako želimo provjeriti koje je područje možemo provjeriti sliku još jedne unutarnje točke $z \in D$. U ovom primjeru možemo izabrati točku iz $z_4 = -1 \in D$. Njena slika je $w_4 = i$, pa je zaista D' gornja poluravnina.

ZADAĆA 5.1 *Pokažite da bilinearno preslikavanje* $w = f(z) = \frac{z+i}{-z+i}$ *preslikava jedinični krug* $D : \{|z| < 1\}$ *u desnu poluravninu* $D' : \{u > 0\}$.

5.1.1 Primjeri kompozicija s bilinearnim preslikavanjem

TEOREM 5.6 *Neka je zadana točka* P *u gornjoj poluravnini u* $z-$*Gaussovoj ravnini kojoj odgovara kompleksan broj* z_0. *Tada bilinearno preslikavanje*

$$w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\right)$$

preslikava x-os ($C : \{y = 0\}$) *u kružnicu* $C' : \{|w| = 1\}$, *a gornju poluravninu u jedinični krug* $D' : \{|w| \leq 1\}$.
Konstanta θ_0 *se može odrediti ako se zada jedan par* (z_1, w_1).

Dokaz:

Ako je z_0 u gornjoj poluravnini onda je $\overline{z_0}$ u donjoj poluravnini. Ako uzmemo neku drugu točku z iz gornje poluravnine onda vrijedi $|z - z_0| < |z - \overline{z_0}|$.
Za točke na x-osi $(C : \{y = 0\})$ vrijedi $|z - z_0| = |z - \overline{z_0}|$.
Modul prelslikavanja $w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right)$ je $|w| = |e^{i\theta_0}|\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|$. Točke na x-osi preslika u krivulju $C' : \{|w| = 1\}$, a gornju poluravninu u područje $D' : \{|w| < 1\}$.

PRIMJER 5.15 *Odredite bilinearno preslikavanje koje preslika gornju poluravninu u jedinični krug ako su zadani sljedeći parovi točaka* (z_i, w_i), $w_i = f(z_i), i = 1, 2$:

z	w
i	0
∞	-1

Rješenje: Prema prethodnom teoremu znamo da bilinearno preslikavanje koje preslikava gornju poluravninu u jedinični krug ima oblik
$w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right)$. Trebamo odrediti z_0 i θ_0.
Za par $(i, 0)$ vrijedi
$0 = e^{i\theta_0}\left(\frac{i-z_0}{i-\overline{z_0}}\right)$, pa slijedi da je $z_0 = i$. Preslikavanje ima oblik
$w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$. Uvrštavanjem drugog para $(\infty, -1)$ vrijedi

$-1 = e^{i\theta_0}\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z-i}{z-\overline{z_0}}\right) = e^{i\theta_0}$. Odredili smo konstantu $\theta_0 = \pi$. Traženo preslikavanje je $w = -1\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{-z+i}{z+i}$.

ZADAĆA 5.2 *Neka je zadan* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Tada bilinearno preslikavanje*

$$w = e^{i\theta_0}\left(\frac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}\right)$$

preslikava kružnicu $(C : \{|z| = 1\})$ *u kružnicu* $C' : \{|w| = 1\}$, *a jedinični krug* $D : \{|z| < 1\}$ *u jedinični krug* $D' : \{|w| < 1\}$ *ako je* $|z_0| < 1$, *odnosno u područje* $D' : \{|w| > 1\}$ *ako je* $|z_0| > 1$.
Konstanta θ_0 *se može odrediti ako se zada jedan par* (z_1, w_1).

PRIMJER 5.16 *Neka je zadano preslikavanje* $w = f(z) = \frac{e^z-i}{e^z+i}$. *Odredite sliku pruge* $D : \{z : 0 < y < \pi\}$.

Rješenje:

Zadano preslikavanje je kompozicija dva preslikavanja $w = f(z) = f_2(f_1(z)$ gdje je $Z = f_1(z) = e^z,\ w = f_2(Z) = \frac{Z-i}{Z+i}$. Preslikavanje $Z = f_1(z) = e^z$ preslika D u $D' : \{Z : \mathrm{Im}Z > 0\}$, bilinearno preslikavanje $w = f_2(Z) = \frac{Z-i}{Z+i}$ preslika D' u $D'' : \{w : |w| < 1\}$.

ZADAĆA 5.3 *Neka je zadano preslikavanje* $w = f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z+1}{-z+1}\right)$. *Pokažite da je slika kruga* $D : \{z : |z| < 1\}$ *horizontalna pruga* $D'' : \{w : |v| < \frac{\pi}{2}\}$.

Poglavlje 6

Primjene harmonijskih funkcija

Harmonijske funkcije koje su realni i imaginarni dijelovi analitičke funkcije uključene su u mnoge inženjerske probleme. Primjenjuju se u npr. problemu dvodimenzionalnog provođenja topline, dvodimenzionalnog toka tekućine, strujanja tekućine i složenih potencijala. Teoriju analitičkih funkcija, konformnog preslikavanja i kompleksnog integriranja koristitimo za izgradnju harmonijska funkcija s propisanim graničnim vrijednostima. Posebno su korisne Poissonove integralne formule i Schwarz-Christoffel transformacije (seminar). Moderni računalni softver implementira te složene metoda analize.

6.1 Dirichletov rubni problem

Dirichletov (i Neumannov) rubni problem za jednostruko povezano područje D možemo riješiti pomoću analitičke funkcije koja će konformno preslikati D u krug ili gornju poluravninu. Rješenje Dirichletovog rubnog problema na krugu ili gornjoj poluravnini dano je Poissonovim formulama. Primijenimo inverzno konformno preslikavanje kako bi rješenje na krugu ili gornjoj poluravnini iskoristili za prikaz rješenja originalnog rubnog problema na D.

Definicija 6.1 *Dirichletov rubni problem*

Neka je Γ po dijelovima glatka zatvorena krivulja koja je rub jednostruko povezanog područja D. Dirichletov rubni problem je naći harmonijsku funkciju

$\phi(x, y)$ tj. koja zadovoljava Laplaceovu jednažbu $\Delta\phi(x, y) = 0$ na području D i na rubu Γ ima zadanu vrijednost.

PRIMJER 6.1 *Riješite rubni problem*

$$\Delta\phi(x, y) = 0 \ na \ D : \{1 < y < 2\}$$

$$\phi(x, 1) = 5, \ \phi(x, 2) = -2, \ x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje:

Razumno je tražiti rješenje koje ima konstantne vrijednosti na pravcu $y = c$ pa pretpostavljamo da je funkcija ϕ funkcija samo od y, $\phi(x, y) = h(y)$. Budući funkcija mora zadovoljavati Laplaceovu jednadžbu $\Delta\phi(x, y) = 0$ za pretpostavljenu funkciju h vrijedi $h''(y) = 0$. Rješenje ove obične diferencijalne jednadžbe je $h(y) = a + by, \ a, b \in \mathbb{R}$. Funkcija $\phi(x, y) = a + by$ je harmonijska na D. Konstante ćemo odrediti iz Dirichletovih uvjeta na rubu: $\phi(1, y) = a + b = 5$ $\phi(2, y) = a + 2b = -2$.
Rješavanjem sustava dobijemo $a = 12$, $b = -7$, pa je rješenje Dirichletovog rubnog problema funkcija $\phi(x, y) = 12 - 7y$.

PRIMJER 6.2 *Riješite rubni problem*

$$\Delta\phi(x, y) = 0 \ na \, D : \{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/3\}$$

$$\phi(x, 0) = 1, \ x > 0$$

$$\phi(x, y) = 5, \ \operatorname{Arg} z = \pi/3.$$

Rješenje:

Razumno je tražiti rješenje koje ima konstantne vrijednosti na pravcima $\operatorname{Arg} z = c$ pa pretpostavljamo rješenje
$\phi(x, y) = a + b \operatorname{Arg} z$.
Budući je funkcija
$f(z) = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$
harmonijska na $D : \{\operatorname{Re} z > 0\}$, onda je i funkcija
$\phi(x, y) = a + b \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$
harmonijsaka na $D : \{x > 0\}$, zadovoljava Laplaceovu jednadžbu.

Konstante ćemo odrediti iz Dirichletovih rubnih uvjeta:
na zraci $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) = \pi/3$ izaberemo kompleksni broj $z = 1 + \sqrt{3}$, a na zraci $\operatorname{Arg} z = 0$ izaberemo kompleksni broj $z = 1$.
Iz uvjeta
$\phi(1,0) = 1$ $\phi(1, \sqrt{3}) = 5$
imamo
$a + b\operatorname{arctg}(\frac{0}{1}) = 1$, $a + b\operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = 5$.

Rješavanjem sustava dobijemo $a = 1$, $b = 12/\pi$, pa je rješenje Dirichletovog rubnog problema funkcija
$\phi(x, y) = 1 + \frac{12}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$.

TEOREM 6.1 *Neka je $\phi^*(u, v)$ harmonijska funkcija na D' u $w-$ravnini. Funkcija $\phi^*(u, v)$ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu*

$$\Delta\phi^*(u, v) = 0, \quad w = u + iv \in D'.$$

Ako je $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konformno preslikavanje koje preslika područje D iz $z-$ravnine u područje D' u $w-$ravnini onda je funkcija

$$\phi(x, y) = \phi^*(f(z)) = \phi^*(u(x, y), v(x, y))$$

harmonijska na D u $z-$ ravnini i zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\Delta\phi(x, y) = 0, \quad z = x + iy \in D.$$

Dokaz:

Koristit ćemo teorem o konformnom preslikavanju i analitičkim funkcijama.
Neka je $\phi^*(u, v)$ harmonijska funkcija na D' u w-ravnini. Tada postoji konjugirano harmonijska funkcija $\psi^*(u, v)$ tako da je

$$F^*(w) = \phi^*(u, v) + i\psi^*(u, v)$$

analitička funkcija u nekoj okolini točke $w_0 = f(z_0)$
Neka je $F(z)$ je kompozicija $F(z) = (F^* \circ f)(z) = F^*(f(z))$. Tada je F analitička u okolini z_0 i vrijedi

$$F(z) = \underbrace{\phi*(u(x, y), v(x, y))}_{=\phi(x,y)} + i\,\underbrace{\psi^*(u(x, y), v(x, y))}_{=\psi(x,y)} = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

gdje su funkcije ϕ, ψ harmonijske na D.

PRIMJER 6.3 *Pokažite da je funkcija* $\phi(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+y^2-1}\right)$ *harmonijska na jediničnom centralnom krugu, zadovoljava Lapaceovu jednadžbu:*
$\Delta\phi(x,y) = 0$ *na* $D : \{z : |z| < 1.\}$

Rješenje:
(prvi način):
Zadatak možemo riješiti direktnim deriviranjem i provjerom.
(drugi način):
Koristit ćemo prethodno navedeni Teorem 6.1.

U Zadaći 3.3 pokazali ste da je funkcija $\phi^*(u,v) = \operatorname{arctg}(\frac{u}{v})$ harmonijska na $D' : \{\operatorname{Re} w > 0\}$ (deriviranjem i provjerom).

Trebamo se prisjetiti koje bilinearno preslikavanje $w = f(z)$ preslikava $D : \{|z| < 1\}$ u $D' : \{Re\, w > 0\}$..
U Zadaći 5.1 pokazali ste da bilinearno preslikavanje $w = f(z) = \frac{z+i}{-z+i}$ preslika $D : \{|z| < 1\}$ u $D' : \{\operatorname{Re} w > 0\}$.
Iz prikaza tog preslikavanja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ imamo funkcije $u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1-y)^2}$ i $v(x,y) = \frac{-2x}{x^2+(1-y)^2}$. Prema Teoremu 6.1 zaključujemo da je funkcija $\phi(x,y) = \phi^*(u(x,y), v(x,y))$ harmonijska na $D : \{|z| < 1\}$.
Dakle, pokazali smo da je funkcija $\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+y^2-1}\right)$ harmonijska na jediničnom centralnom krugu.

PRIMJER 6.4 *Neka je* $w = f(z)$ *konformno preslikavanje tj.* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *analitička i* $f'(z) \neq 0$ *na području* D*. Neka je zadana funkcija* $F(x,y)$ *u* $z-$*ravnini i njena slika* $F^*(u(x,y), v(x,y))$ *u* $w-$*ravnini. Pokažite da vrijedi:*

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 F^*(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F^*(u,v)}{\partial v^2}\right)$$

$$\Delta F(x,y) = |f'(z)|^2 \Delta F^*(u,v)$$

Ako je funkcija $F(x,y)$ *harmonijska na* D *onda je i funkcija* $F^*(u,v)$ *harmonijska na slici* D'*.*

Rješenje:
Po pretpostavci funkcija $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je analitička pa su funkcije u i v harmonijske, zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu $\Delta u(x,y) = 0$ i $\Delta v(x,y) = 0$. Osim toga vrijede i (C-R) jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Koristit ćemo i formulu za derivaciju
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ i $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Tako je

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}$$

Funkcija $F(x,y)$ se transformira u funkciju $F(x(u,v), y(u,v))$. Koristimo lančano pravilo za deriviranje funkcije $F(x(u,v), y(u,v))$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F^*(u(x,y), v(x,y))}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F^*(u(x,y), v(x,y))}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F^*(u(x,y), v(x,y))}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F^*(u(x,y), v(x,y))}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial F^*}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial F^*}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial u}{\partial x}[\frac{\partial^2 F^*}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}] \\ &+ \frac{\partial v}{\partial x}[\frac{\partial^2 F^*}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}] \end{aligned}$$

Analogno odredimo $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$.
Primijenjujući sve izraze dobivene iz pretpostavke analitičnosti, računamo lijevu stranu tvrdnje
$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 F^*(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F^*(u,v)}{\partial v^2}\right).$

Ako je F harmonijska, ona zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\Delta F(x,y) = 0$ na D. Uz pretpostavku da je $w = f(z)$ konformno preslikavanje $f'(z) \neq 0$ zaključujemo da je $\Delta F^*(u,v) = 0$, tj. F^* je harmonijska na slici D'.

U idućem primjeru koristit ćemo teorem o vezi analitičke funkcije i harmonijskih funkcija kako bismo riješili Dirichletov rubni problem.

PRIMJER 6.5 *Pokažite da je funkcija* $\psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x-x_0}\right)$ *harmonijska na gornjoj poluravnini i rješenje Dirichletovog rubnog problema:*

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(x,y) &= 0 \textit{ na } D : \{y > 0\} \\
\psi(x,0) &= 0, \;\; x > x_0, \\
\psi(x,0) &= 1, \;\; x < x_0.
\end{aligned}$$

Rješenje:

Funkciju $\psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x-x_0}\right)$ gledamo kao funkciju definiranu u kompleksnoj $z-$ ravnini:
Za $z = x + iy$ funkcija se može napisati u obliku
$\psi(x,y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x-x_0}\right) = \frac{1}{\pi}\,\text{Arg}(z - x_0)$.
Funkcija $f(z) = \frac{1}{\pi}\text{Ln}(z - x_0)$ je analitička na gornjoj poluravnini $D : \{\text{Im}\, z > 0\}$. Po definiciji $f(z) = \frac{1}{\pi}\text{Ln}(z - x_0) = \frac{1}{\pi}\ln|z - z_0| + i\frac{1}{\pi}\text{Arg}(z - z_0)$. Uočimo da je zadana funkcija $\psi(x,y)$ imaginarni dio analitičke funkcije, pa prema Teoremu 3.4 funkcija je harmonijska.

NAPOMENA 6.1 *tko želi znati više-seminar*

Neka su $x_1 < x_2 < ... < x_{N-1}$ *realne konstante. Rješenje Dirichletovog rubnog problema*

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \textit{ na } D : \{y > 0\} \\
\phi(x,0) &= a_0, \;\; x < x_1, \\
\phi(x,0) &= a_k, \;\; x_k < x < x_{k+1}, \; k = 1, 2, ..., N-2 \\
\psi(x,0) &= a_{N-1}, \;\; x_{N-1} < x
\end{aligned}$$

je funkcija

$$\phi(x,y) = a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\mathrm{Arg}\,(z-x_k)$$

$$\phi(x,y) = a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x-x_k}\right).$$

ZADAĆA 6.1 *Riješi Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini:*

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y) &= 0 \;\; na\, D:\{y>0\}\\
\phi(x,0) &= 4,\;\; x<-1,\\
\phi(x,0) &= 1,\;\; -1<x<0\\
\phi(x,0) &= 3,\;\; 0<x<1,\\
\phi(x,0) &= 2,\;\; 1<x.
\end{aligned}$$

ZADAĆA 6.2 *Riješi Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini:*

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \;\; na \;\; D:\{y>0\}\\
\phi(x,0) &= 1,\;\; |x|<1,\\
\phi(x,0) &= 0,\;\; |x|>1.
\end{aligned}$$

NAPOMENA 6.2 *tko želi znati više-seminar*
Neka je D područje u z-ravnini čiji je rub pozitivno orijentirana krivulja Γ. *Neka su* $z_1 < z_2 < ... < z_N$ *točke na krivulji tako da dijele krivulju* Γ *na krivulje* $\Gamma_k,\;\; k=1,...,N$. *Rješenje Dirichletovog rubnog problema*

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \;\; na \;\; D:\{\mathrm{Im}\, z>0\}\\
\phi(x,0) &= a_1 \;\; na\, C_1,\\
\phi(x,0) &= a_k \;\; na\, C_k,\;\; k=1,2,...,N\\
\phi(x,0) &= a_N \;\; na \;\; C_N
\end{aligned}$$

je funkcija

$$\phi(x,y) = a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\mathrm{Arg}(f(z)-f(z_k))$$

$$\phi(x,y) = a_{N-1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}(a_{k-1}-a_k)\mathrm{arctg}\left(\frac{v(x,y)}{u(x,y)-f(z_k)}\right),$$

gdje je $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *konformno preslikavanje koje područje* D *iz* $z-$*ravnine preslika u gornju poluravninu* $D' : \{\mathrm{Im}\, w > 0\}$ *pri čemu točke* z_k *preslika u* $f(z_k)$ *za* $k = 1,...,N-1$ *a točku* z_k *u* ∞.

6.1.1 Poissonove formule

TEOREM 6.2 *Poissonova formula za krug*

Rješenje Dirichletovog rubnog problema za krug:

$$\begin{aligned}\Delta\phi(r,\theta) &= 0 \text{ na } D : \{(r,\theta) : r \leq R\}\\ \phi(R,\theta) &= G(\theta),\ \theta \in [0,2\pi]\end{aligned}$$

je funkcija

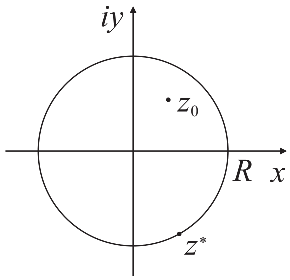
$$\phi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)G(t)}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}\,dt.$$

Dokaz:

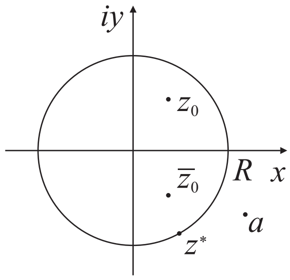
Skica dokaza Poissonove formule za krug:
Ako je ϕ harmonijska funkcija onda postoji konjugirano harmonijska funkcija ψ i analitička funkcija f tako da je

$$f(z) = \phi(r,\theta) + i\psi(r,\theta).$$

Promatrat ćemo analitičku funkciju f na krugu $D : \{|z| < R\}$ i na kružnici $C : \{|z| = R\}$ u kompleksnoj ravnini.
Neka je z_0 proizvoljna točka unutar kruga $D : \{|z| < R\}$ a točka z^* točka na



Slika 6.1: $z_0 = r_0 e^{i\theta_0},\ z^* = Re^{it},\ r_0 < R$



Slika 6.2: $a = \frac{R^2}{\bar{z}_0}$

kružnici $C : \{|z| = R\}$: $z_0 = r_0 e^{i\theta_0},\ z^* = Re^{it},\ r_0 < R,\ \ t \in [0, 2\pi]$.
Točku a izvan kruga možemo zadati na sljedeći način $a = \frac{R^2}{\bar{z}_0}$ jer je $|a| = \frac{R^2}{|\bar{z}_0|} > R$.
Za funkciju $f(z)$ analitičku unutar kruga omeđenog pozitivno orijentiranom kružnicom C prema Cauchyjevoj integralnoj formuli vrijedi:
za a izvan kruga D

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - a} dz^* = 0$$

a za z_0 iz unutarnjeg područja kružnice C

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z_0} dz^*.$$

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= f(z_0) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{z^* - z_0} - \frac{1}{z^* - a}\right) f(z^*)\,dz^* \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z_0 - a}{(z^* - z_0)(z^* - a)} f(z^*)\,dz^* \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z_0\overline{z}_0 - R^2}{(z^* - z_0)(z^*\overline{z}_0 - R^2)} f(z^*)\,dz^* \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - R^2}{(Re^{it} - r_0 e^{i\theta_0})(Re^{it} r_0 e^{-i\theta_0} - R^2)} f(Re^{it}) iRe^{it}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{Rr_0 e^{i(t-\theta_0)} - r_0^2 - R^2 + Rr_0 e^{i(\theta_0 - t)}} f(Re^{it})\,dt \\
(\quad & Rr_0[\cos(t-\theta_0) + i\sin(t-\theta_0)] + Rr_0[\cos(\theta_0 - t) + i\sin(\theta_0 - t)] \\
& = 2Rr_0\cos(t - \theta_0)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - R^2}{2Rr_0\cos(t-\theta_0) - r_0^2 - R^2} f(Re^{it})\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0\cos(t-\theta_0)} f(Re^{it})\,dt
\end{aligned}$$

Nadalje određujemo konjugirano harmonijsku funkciju kao realni i imaginarni dio od f :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\theta_0 - t)} f(z^*)\,dt$$

$$f(z_0) = \phi(r_0, \theta_0) + i\psi(r_0, \theta_0), \quad f(z^*) = \phi(R, t) + i\psi(R, t), \quad z^* = Re^{it}$$

$$\phi(r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\theta_0 - t)}\phi(R, t)\,dt$$

$$\psi(r_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\theta_0 - t)}\psi(R, t)\,dt.$$

TEOREM 6.3 *Poissonova formula za poluravninu*

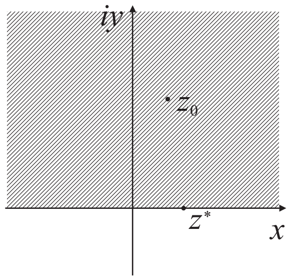
Neka je funkcija $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekinuta i ograničena funkcija. Rješenje Dirichletovog rubnog problema za gornju poluravninu:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x, y) &= 0 \ \textit{na}\ D : \{y > 0\} \\
\phi(x, 0) &= G(x) \ \textit{za}\ -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

je funkcija

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{y^2+(x-t)^2}\,dt.$$

Dokaz:



Slika 6.3: $\operatorname{Im} z_0 > 0,\ \operatorname{Im} z^* = 0$

Ako je ϕ harmonijska funkcija onda postoji konjugirano harmonijska funkcija ψ i analitička funkcija f tako da je

$$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Promatrat ćemo analitičku funkciju f na jediničnom polukrugu u gornjoj poluravnini $D : \{|z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ koji je omeđen pozitivno orijentiranom krivuljom krivuljom $\vec{\Gamma}$ koja je unija polukružnice C_1 i segmenta $[-R, R]$.
U graničnom slučaju kad $R \to \infty$ područje D je gornja poluravnina.
Neka je z_0 bilo koja točka unutar D, odgovarajuća točka izvan D je $a = \overline{z_0}$.
Točke na na krivulji $\vec{\Gamma}$ označit ćemo sa z^*.
Primijenimo Cauchyijevu integralnu formulu za točke z_0 i $a = \overline{z_0}$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z^*)}{z^*-a}dz^* = 0$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z^*)}{z^*-z_0}dz^*.$$

Ako oduzmemo te vrijednosti imamo

$$f(z_0) = f(z_0) - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\vec{\Gamma}}\left(\frac{f(z^*)}{z^*-z_0} - \frac{f(z^*)}{z^*-a}\right)dz^*.$$

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} \frac{y_0}{(z^*-z_0)(z^*-\overline{z_0})} f(z^*)dz^* + \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{y_0}{(t-x_0)^2+y_0^2} f(t)dt.$$

U graničnom slučaju kad $R \to \infty$ može se pokazati da prvi integral teži nuli. Zato je

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(t-x_0)^2 + y_0^2} f(t)dt.$$

Odredimo konjugirano harmonijske komponente analitičke funkcije f :

$$\phi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(t-x_0)^2 + y_0^2}\phi(t,0)\,dt,$$
$$\psi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(t-x_0)^2 + y_0^2}\psi(t,0)\,dt.$$

PRIMJER 6.6 *Riješite Dirichletov problem ravnoteže kružne membrane*

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\theta\;\;) &= \;0 \;\; na \;\; K(0,1) \\ u(r,\theta)\Big|_K &= \;\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Rješenje:

Prema Poissonovoj formuli za krug:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2 - 2Rr\cos(\theta - t)} u(R,t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1^2 - r^2}{1^2 - r^2 - 21r\cos(\theta - t)}\alpha(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - r^2 - 2r\cos(\theta - t)} \cdot 1\,dt \\ &= \cdots = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left[\frac{\tan(\theta - t)}{r^2 - 1}\right]\Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

PRIMJER 6.7 *Riješite Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini*

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \;\; na \;\; D : \{y \geq 0\} \\ u(x,y)\Big| y = 0 &= \alpha(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y}u(t,0)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\alpha(t)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big|_0^{\infty}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\text{arctg}\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Primjenom Poissonove formule za poluravninu riješit ćemo zadatak iz zadaće 6.2.

PRIMJER 6.8 *Riješite Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini:*

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \;\textit{na}\; D:\{y>0\}\\
\phi(x,0) &= 1,\;\; |x|\le 1,\\
\phi(x,0) &= 0,\;\; |x|>1.
\end{aligned}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\phi(t,0)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\phi(t,0)\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x-t}\right)\Big|_{-1}^{1}\\
&= \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right)-\frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{y}{x+1}\right)
\end{aligned}$$

PRIMJER 6.9 *Riješite Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini:*

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \;\textit{na}\; D:\{y>0\}\\
\phi(x,0) &= x,\;\; 0<x<1,\\
\phi(x,0) &= 0,\;\; x>1\\
\phi(x,0) &= 0,\;\; x<0.
\end{aligned}$$

Rješenje:
Koristimo Poissonovu integralnu formulu za gornju poluravninu:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\phi(t,0)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,t\,dt \\
&= \frac{x}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,t\,dt \\
&+ \frac{y}{\pi}\int_0^1 \frac{(x-t)(-1)}{(x-t)^2+y^2}\,t\,dt \\
&= \frac{x}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-t}\right)\Big|_0^1 \\
&+ \frac{y}{\pi}[\ln\left((x-t)^2+y^2\right)]\Big|_0^1 \\
&= \frac{x}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right)-\frac{x}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&+ \frac{y}{2\pi}\ln\left(\frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}
$$

Funkcija ϕ je neprekinuta na gornjoj poluravnini i ograničena osim u točkama prekida na osi x: $x=0$ i $x=1$.

ZADAĆA 6.3 *Riješite Dirichletov rubni problem na gornjoj poluravnini:*

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi(x,y) &= 0 \quad na\, D:\{y>0\} \\
\phi(x,0) &= 0, \quad x\le 0 \\
\phi(x,0) &= x, \quad 0\le x\le 1, \\
\phi(x,0) &= 1, \quad x\ge 1
\end{aligned}
$$

ZADAĆA 6.4 *Odredite harmonijsku funkciju $\Phi(x,y)$ u prvom kvadrantu $D=\{x>0,\ y>0\}$ koja poprima vrijednosti na rubovima $\Phi(x,0)=-1,\ \Phi(0,y)=2$.*

Uputa:
Dirichletov rubni problem u $z-$ ravnini za područje $D=\{x>0,\ y>0\}$ prebacite

u rubni problem u $w-$ravnini za područje $D' = \{v > 0\}$ tj. gornju poluravninu. Koristite Poissonovu formulu za gornju poluravninu.
1. korak: Odredite konformno preslikavanje $w = f(z)$ koje prvi kvadrant preslika u gornju poluravninu;
2. korak: Za to preslikavanje $w = f(z)$ odredite sliku polupravca $x = 0$, $y > 0$, i sliku polupravca $y = 0$, $x > 0$.
3. korak: Pomoću Poissonove formule riješite rubni problem za gornju poluravninu tj. odredite harmonijsku funkciju $\Phi^*(u, v)$ uz rubni uvjet

$$\Phi^*(u, 0) = 2 \ \textit{za}\, u < 0$$

$$\Phi^*(u, 0) = -1 \ \textit{za}\, u > 0.$$

4.korak Pomoću rješenja iz 3. koraka iskažite rješenje rubnog problema u $z-$zavnini na području D.
Rješenje:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(x, y) &= 0 \ \textit{na} \ D = \{x > 0, y > 0\} \\
\Phi(x, 0) &= -1, \ \ x > 0 \\
\Phi(0, y) &= 2, \ \ y > 0.
\end{aligned}$$

1. korak
$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ preslika D u gornju poluravninu D'
$u(x, y) = x^2 - y^2, \ v(x, y) = 2xy$
2. korak
Odredimo sliku pravca $x = c$
$u = c^2 - y^2 \ \ v = 2cx$
$x = 0, \ y > 0, \Rightarrow v = 0, \ u < 0.$
Odredimo sliku pravca $y = c$
$u = x^2 - c^2 \ \ v = 2cy$
$y = 0, \ x > 0, \Rightarrow v = 0, \ u > 0$
3. korak
Rješavamo rubni problem za Φ^* :

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi^*(u,v) &= 0 \ na \ \ D' = \{v > 0\} \\
\Phi^*(u,0) &= 2, \ u < 0, \\
\Phi^*(u,0) &= -1, \ u > 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^*(u,v) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{(t-u)^2+v^2}\Phi^*(t,0)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{v}{(t-u)^2+v^2}\Phi^{ast}(t,0)\,dt \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{v}{(t-u)^2+v^2}\Phi^{ast}(t,0)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{v}{(t-u)^2+v^2}\cdot 2\,dt \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{v}{(t-u)^2+v^2}\cdot (-1)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{t-u}{v}\right)\Big|_{-\infty}^{0} \\
&+ \frac{-1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{t-u}{v}\right)\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{-3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{2} \\
&= -3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)\right] + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{v}{u}\right) + 1
\end{aligned}$$

4. korak

$$\Phi(u,y) = \frac{-3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{u(x,y)}{v(x,y)}\right) + \frac{1}{2} = \frac{-3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{x^2-y^2}{v}\right) + \frac{1}{2}$$

ili

$$\Phi(u,y) = \frac{3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{v(x,y)}{u(x,y)}\right) + 1 = \frac{3}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right) + 1$$

6.2 Kompleksni diferencijalni operatori

Definicija 6.2 *kompleksni nabla operator*

Nabla operator ∇ i konjugirani nabla operator $\overline{\nabla}$ definiraju se formulama u Kartezijevim koordinatama:

$$\nabla_c = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\overline{\nabla}_c = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Definicija 6.3 *kompleksni gradijent*

Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija zadana zapisom $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Kompleksni gradijent funkcije f u oznaci $\operatorname{grad} f = \nabla_c f$ definira se formulom

$$\operatorname{grad} f = \nabla_c f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u + iv).$$

PRIMJER 6.10 *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitička funkcija. Pokažite da je*

$$\operatorname{grad} f = \nabla_c f = 0.$$

Rješenje:

Neka je $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitička funkcija. Tada vrijede (C-R) jednadžbe: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Kompleksni gradijent

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(z) &= \nabla_c f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (u(x,y) + iv(x,y)) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Definicija 6.4 *divergenicja kompleksne funkcije*

Divergenicja kompleksne funkcije definira se kao skalarni produkt ∇_c i funcije f formulom

$$\operatorname{div} f = \nabla_c \circ f = \operatorname{Re}\{\overline{\nabla}_c f\}.$$

PRIMJER 6.11 *Ako je funkcija zadana zapisom $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ onda je divergenicja*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} f(z) &= \operatorname{Re}\{\overline{\nabla} c f(z)\} = \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(u+iv)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}
\end{aligned}$$

Definicija 6.5 *rotor kompleksne funkcije*

Rotor kompleksne funkcije definira se kao vektorski produkt ∇_c i funkcije f formulom

$$\operatorname{rot} f = \nabla_c \times f = \operatorname{Im}\{\overline{\nabla}_c f\}.$$

PRIMJER 6.12 *Ako je funkcija zadana zapisom $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ onda je rotor*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} f(z) &= \operatorname{Im}\{\overline{\nabla} c f(z)\} = \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot(u+iv)\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

Definicija 6.6 *kompleksni Laplaceov operator*

Kompleksni Laplaceov operator definira se kao skalarni produkt ∇_c i ∇_c

$$\Delta_c = \nabla_c \circ \nabla_c = \operatorname{Re}\{\overline{\nabla}_c \nabla_c\}$$

PRIMJER 6.13 *Pokažite da je*

$$\Delta_c = \Delta.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\Delta_c &= \operatorname{div}(\text{grad}) = \operatorname{div}(\nabla_c) = Re\{\overline{\nabla}c\nabla_c\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \Delta
\end{aligned}$$

PRIMJER 6.14 *Ako je $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitička onda je*

$$\Delta_c f(z) = \Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y) = 0$$

jer su funkcije u i v harmonijske.

PRIMJER 6.15 *Neka je zadana funkcija $f(z) = 2xy - ix^2y^3$. Odredite* $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} f$ *i* $\Delta_c f$.

Rješenje: Zadana je funkcija $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, gdje su realne funkcije $u(x,y) = 2xy,\ \ v(x,y) = -x^2y^3$.

(a) $grad\, f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2y + 3x^2y^2) + i(2x - 2xy^3)$

(b) $div\, f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2y - 3x^2y^2$

(c) $\Delta_c f(z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x,y) = i\,(-2y^3 - 6x^2y)$.

PRIMJER 6.16 *Pokažite da u konjugiranim koordinatama vrijedi:*

$$\nabla_c = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\overline{\nabla}_c = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta_c = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}$$

$$\operatorname{grad} f(x+iy) = \nabla_c f(x+iy) = 2\frac{\partial f(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}}.$$

Rješenje:

$$\begin{array}{l} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{array} \Big/ \pm$$

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}$$

$$y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2i}z - \frac{1}{2i}\overline{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\cdot 1 = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\cdot i + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\cdot (-i) = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

$$\nabla_c = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + i^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\overline{\nabla}_c = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - i^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta_c = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\Delta_c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) + i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

$$\Delta_c = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) + i^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \cdots = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$$

$$\text{grad}\, f(z) = \nabla_c f(z) = 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

PRIMJER 6.17 *POISSONOVA JEDNADŽBA*

Riješite Poissonovu jednadžbu $\Delta u(x,y) = h(x,y)$

$$\Delta u(x,y) = x^2 - y^2$$

Rješenje:

Koristimo konjugirane koordinate $(z, \overline{z})$:

$u(x,y) \Rightarrow \tilde{u}(z,\overline{z})$

$h(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \tilde{h}(z,\overline{z}) = \left(\frac{1}{2}(z+\overline{z})\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)^2 = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\overline{z}^2$

$\Delta_c \tilde{u}(z,\overline{z}) = \tilde{h}(z,\overline{z})$

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\tilde{u}(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\overline{z}^2$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\tilde{u}(z,\overline{z}) = \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}\overline{z}^2$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}(z,\overline{z}) = \frac{1}{8}z^2\overline{z} + \frac{1}{8}\frac{\overline{z}^3}{3} + F_1(z)$$
$$\tilde{u}(z,\overline{z}) = \frac{1}{8}\frac{z^3}{3}\overline{z} + \frac{1}{8}\frac{\overline{z}^3}{3}z + F_1(z)z + F_2(\overline{z})$$
$$\tilde{u}(z,\overline{z}) = \frac{1}{24}z\overline{z}(z^2 - \overline{z}^2) + G_1(z) + F_2(\overline{z})$$
$$\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{12}(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + G_1(x + iy) + F_2(x - iy)$$

Rješenje Poissonove jednadžbe je $u(x,y) = \frac{1}{12}(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$. (samo realni dio)

ZADAĆA 6.5 *Riješite Poissonovu jednadžbu* $\Delta u(x,x) = x^2 + y^2$.

6.2.1 Kompleksni potencijal -Ravninski tok tekućine

Za rješavanje problema u teoriji dinamike tekućina često se koriste metode kompleksne analize. Neka u nekom području postoji tok tekućine koji je određen vektorskim poljem brzina $\vec{v} = \vec{v}(x,y,t)$.
Prisjetimo se osnovne jednadžbe u mehanici- tekućina - jednadžbe kontinuiteta za nestacionarni tok tekućine gustoće mase ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

Zbog složenosti problema postavljaju se neke pretpostavke kako bi se razmatrao matematički model:
1. tok je dvodimenzionalan (promatra se samo jedna $z-$ravnina),
2. tok je stacionaran (brzina tekućine $\vec{v} = \vec{v}(x,y)$ ne ovisi o vremenu, ovisi samo o položaju točke (x,y),
3. brzina tekućine je potencijalno vektorsko polje (postoji potencijal ϕ tako da je $\Phi = \operatorname{grad}\vec{v}$, i $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$

4. tok je konzervativan (nema izvora ni ponora),
5. tekućina je nestlačiv (gustoća mase je konstantna $\rho = konst$ pa je jednadžba kontinuiteta ima oblik

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

6. promatramo idealna tekućine (nema viskoznosti).

Definicija 6.7 *kompleksna brzina tekućine*

Promatrat ćemo tok tekućine preko kompleksne ravnine s vektorskim poljem brzina $\vec{V}$ u točki $z = x + iy$ zadanim zapisom

$$V(z) = p(x, y) + iq(x, y)$$

gdje komponentne funkcije p i q imaju neprekinute parcijalne derivacije.

Prema pretpostavci jednadžba kontinuiteta glasi

$$\operatorname{div} V(z) = \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Prema pretpostavci tok je bezvrtložan pa je

$$\operatorname{rot} V(z) = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Iz tih jednažbi zaključujemo da funkcije p i $-q$ zadovoljavaju (C-R)jednadžbe pa postoji analitička funkcija $g(z) = p(x, y) - iq(x, y)$.

Definicija 6.8 *kompleksni potencijal tekućine*

Neka je $V(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ kompleksna brzina idealne tekućine. Funkciju

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

koja ima svojstvo da je

$$\overline{\Omega}'(z) = V(z)$$

zovemo KOMPLEKSNI POTENCIJAL.
IZNOS BRZINE je $V = |V(z)| = |\overline{\Omega}'(z)|$.
Funkciju ϕ zovemo funkcija POTENCIJALA BRZINE, a funkciju ψ funkcija TOKA.
Krivulje zadane jednadžbom $\phi(x, y) = c$ zovemo EKVIPOTENCIJALNE kRIVULJE.
Krivulje zadane jednadžbom $\psi(x, y) = c$ zovemo STRUJNICE.

Teoretski, svaki kompleksni potencijal $\Omega(z)$ može se promatrati kao zadani ravninski tok tekućine.

NAPOMENA 6.3 *Neka je* $\Omega(Z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ *antiderivacija od* $g(z)$ *tj.*

$$\Omega'(z) = g(z) = p(x, y) - iq(x, y).$$

Prema definiciji je $\Omega'(z) = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - i\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}$*, pa vrijedi*

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = p(x, y)$$
$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = q(x, y).$$

Ove relacije impliciraju da je

$$\operatorname{grad}\phi(x, y) = p(x, y) + i\,q(x, y) = V(z)$$

pa je opravdan naziv za funkciju ϕ *- funkcija POTENCIJALA BRZINE.*
Za funkciju ϕ *vrijedi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija ϕ *potencijala brzine je harmonijska funkcija, pa postoji konjugirano harmonijska funkcija* ψ *i analitička funkcija* Ω *takve da vrijedi* $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$*. Na taj način smo opravdali definiciju kompleksnog potencijala.*

Krivulju $\psi(x, y) = c$ *zovemo strujnica jer one opisuju trag tekućine. Ako implicitno deriviramo* $\psi(x, y) = c$ *dobit ćemo koeficijent smjera tangente na krivulju*

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}}.$$

Vektor tangente $\vec{T}$ *na strujnicu* $\psi(x, y) = c$ *je*

$$\begin{aligned} \vec{T} &= 1 + i\,(-\frac{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}}) \\ &= \frac{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}} + i\,(-\frac{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}}) \end{aligned}$$

Možemo gledati samo vektor u smjeru

$$\vec{T} \;=\; \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}$$

Ako primijenimo (C-R) uvjete

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}$$

vektor tangente na strujnicu možemo prikazati kao

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}\\ &= p(x,y) + iq(x,y)\\ &= V(z).\end{aligned}$$

NAPOMENA 6.4 *Naglasimo da ako je tok tekućine zadan s kompleksnim potencijalom* $\Omega(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ *koji je analitička funkcija onda familija krivulja* $\{\psi(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ *predstavljaju strujnice.*

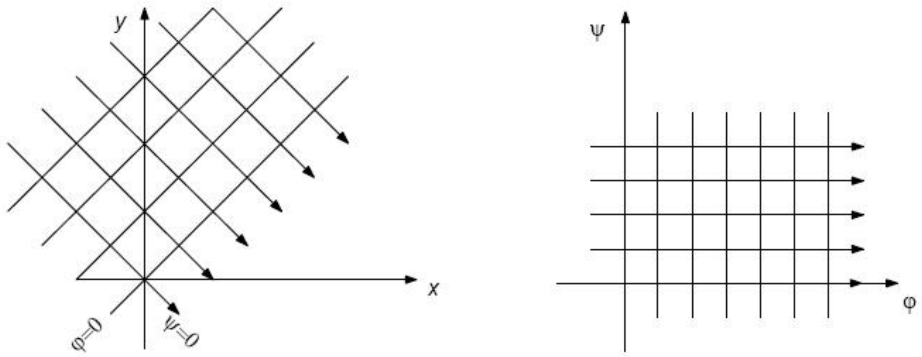
NAPOMENA 6.5 *Prema pretpostavci kod ravninskog toka idealne tekućine vektorsko polje brzina* $V(z)$ *je paralelno sa rubnom krivuljom, pa za zadani kompleksni potencijal rubna krivulja mora biti strujnica* $\psi(x,y) = K$.

TEOREM 6.4 *Neka je zadan kompleksni potencijal* $\Omega^*(w) = \Phi^*(u,v) + i\Psi^*(u,v)$ *za tok tekućine u području* D' *u kompleksnoj* $w-$*ravnini gdje je kompleksna brzina* $V^*(w) = \overline{\Omega}'(w)$. *Ako je* $w = f(z)$ *bijektivno konformno preslikavanje koje područje* D *iz kompleksne* $z-$*ravnine preslika u područje* D' *u kompleksnoj* $w-$*ravnini onda je funkcija*

$$\Omega(z) = \Omega^*(f(z)) = \Phi(u(x,y), v(x,y)) + i\Psi(u(x,y), v(x,y))$$

kompleksni potencijal za tok tekućine u području D *i kompleksna brzina je*

$$V(z) = \overline{\Omega}'(z).$$



Slika 6.4: Tok u z-ravnini u ravnini i tok u w-ravnini

PRIMJER 6.18 *Neka je zadan kompleksni potencijal* $\Omega(z) = (a + ib)z$. *Odredite kompleksnu brzinu* $V(z)$, *iznos brzine* $V = |V(z)|$, *funkciju potencijala brzine* $\phi(x, y)$, *funkciju toka* $\psi(x, y)$, *strujnice.*

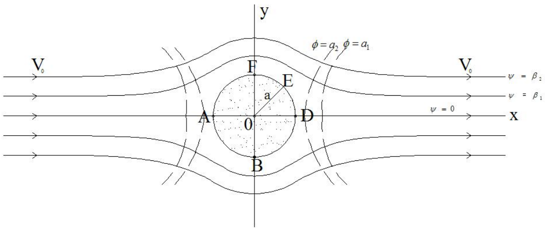
Rješenje:

Kompleksna brzina je $V(z) = \overline{\Omega}'(z) = \overline{a + ib} = a - ib$.
Iznos brzine je $V = |V(z)| = |\Omega'(z)| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
$\Omega(z) = (a + ib)z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$.
Iz zapisa kompleksnog potencijala $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$
određujemo funkciju potencijala brzine $\phi(x, y) = ax - by$, i funkciju toka $\psi(x, y) = bx + ay$.
Ekvipotencijalne linije su zadane jednadžbom $\phi(x, y) = c$, a to su pravci $ax - by = c$.
Strujnice su zadane jednadžbom $\psi(x, y) = c$, a to su pravci $bx + ay = c$, pa je kut koji strujnice zatvaraju s osi x jedak $\alpha = -\mathrm{arctg}(\frac{b}{a})$.

PRIMJER 6.19 *Neka je zadan kompleksni potencijal* $\Omega(z) = \frac{a}{2}z^2$ *(a realan). Odredite kompleksnu brzinu* $V(z)$, *iznos brzine* $V = |V(z)|$, *funkciju potencijala brzine* $\phi(x, y)$, *funkciju toka* $\psi(x, y)$, *strujnice.*

Rješenje:

Kompleksna brzina je $V(z) = \bar{\Omega}'(z) = \overline{az} = a\bar{z}$.
Iznos brzine je $V = |V(z)| = |\Omega'(z)| = |a| \sqrt{x^2 + y^2}$.
$\Omega(z) = \frac{a}{2}z^2 = \frac{a}{2}[(x^2 - y^2) + i2xy] = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) + iaxy$.
Iz zapisa kompleksnog potencijala $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$
određujemo funkciju potencijala brzine $\phi(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$, i funkciju toka $\psi(x, y) = axy$.
Ekvipotencijalne linije su zadane jednadžbom $\phi(x, y) = c$, a to su hiperbole $\frac{a}{2}(x^2 - y^2) = c$.
Strujnice su zadane jednadžbom $\psi(x, y) = c$, a to su hiperbole $axy = c$. Asimptote strujnica su koordinatne osi. Kompleksna brzina je $V(z) = a\bar{z}$. Za točke iz gornje poluravnine $\mathrm{Im}\, z > 0$ tekućina teče duž strujnice uz x os i uz imaginarnu y os kao uz zid.



Slika 6.5: Tok oko kružne prepreke

PRIMJER 6.20 *Neka je zadan kompleksni potencijal* $\Omega(z) = V_0(z + \frac{a^2}{z})$, $V_0, a > 0$. *Odredite kompleksnu brzinu* $V(z)$, *iznos brzine* $V = |V(z)|$, *funkciju potencijala brzine* $\phi(x, y)$, *funkciju toka* $\psi(x, y)$, *strujnice i ekvipotencijalne linije. Pokažite da je to tok idealne tekućine oko kružne obale polumjera* a.

Rješenje:
Za $z = re^{i\theta}$ prikazat ćemo kompleksni potencijal u obliku

$$\Omega(z) = V_0(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}})$$

Odredimo imaginarni i realni dio- to su funkcije potencijala brzine ϕ i funkcije toka ψ

$$\phi(x, y) = V_0(r + \frac{a^2}{r})\cos\theta$$

$$\psi(x, y) = V_0(r - \frac{a^2}{r})\sin\theta$$

Strujnice su krivulje $\psi(r, \theta) = c$ tj.
$V_0(r - \frac{a^2}{r})\sin\theta = c$.
Ako je $r = a$ i $\theta = 0$ ili $\theta = \pi$ onda je $\psi(r, \theta) = 0$.
Ekvipotencijalne linije su krivulje $\phi(r, \theta) = c$ tj.
$V_0(r + \frac{a^2}{r})\cos\theta = c$ i one su okomite na strujnice. Izračunajmo

$$\Omega'(z) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$$

$$\Omega'(z) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}e^{-i\,2\theta}\right) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) + i\,V_0\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$

Kompleksna brzina je

$$V(z) = \overline{\Omega}'(z) = V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) - i\,V_0\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta$$

NAPOMENA 6.6 *Preslikavanje $f(z) = z + \frac{a^2}{z}$ preslikava područje D =gornja poluravnina izvan kruga polumjera a iz z-ravnine u područje D' = gornja poluravnina u w-ravnini. Kompleksnom potencijalu $\Omega(z) = V_0(z + \frac{a^2}{z})$ u z-ravnini odgovara kompleksni potencijal $\Omega^*(w) = V_0\,w$ u w-ravnini, tj. Tok oko kružne prepreke u z-ravnini može se opisati uniformnim tokom u w-ravnini.*

PRIMJER 6.21 *Odredite kompleksni potencijal $\Omega(z)$ za tekućinu koja teče konstantnom brzinom iznosa V_0 u smjeru koji zatvara kut α s pozitivnom x osi. Odredite funkciju potencijala brzine $\phi(x, y)$ i funkciju toka $\psi(x, y)$, i ekvipotencijalne linije $\phi(x, y) = c$ i strujnice $\psi(x, y) = c$.*

Rješenje:
Neka je $V(z)$ kompleksna brzina. Zadan je iznos $V_0 = |V(z)|$ i kut α koji zatvara s osi x, pa slijedi da je
$V(z) = V_0\cos\alpha + V_0\sin\alpha = V_0e^{i\alpha}$ Koristimo zapis kompleksne brzine $V(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ gdje su $p(x, y) = V_0\cos\alpha,\ q(x, y) = V_0\sin\alpha$. Kompleksni potencijal $\overline{\Omega}'(z) = V(z)$, odnosno $\Omega'(z) = \overline{V(z)} = V_0e^{i-\alpha}$.
Integriranjem

$$\Omega(z) = V_0e^{i\alpha}z + C = V_0(\cos\alpha - i\sin\alpha)(x + iy) + C$$

gdje je C konstanta. Ako zanemarimo konstantu u prikazu kompleksnog potencijala $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ odredimo funkcija potencijala brzina

$$\phi(x, y) = V_0(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

i funkciju toka

$$\psi(x, y) = V_0(y\cos\alpha - x\sin\alpha).$$

Ekvipotencijalne linije su krivulje $\phi(x, y) = c$ a strujnice $\psi(x, y) = c$.

NAPOMENA 6.7 *tko želi znati više-seminar*

Teoretski, svaki kompleksni potencijal $\omega(z)$ može se promatrati kao zadani ravninski tok tekućine. Dozvoljeni su i izvori i ponori, vrtlozi
Ispitajte i nacrtajte tokove tekućine ako su zadani pomoću kompleksnih potencijala:

(a) $\Omega(z) = V_0 e^{i\alpha} z$

(b) $\Omega(z) = k \ln(z-a)$*- IZVOR u* $z = a$

(c) $\Omega(z) = -k \ln(z-a)$*- PONOR u* $z = a$

(d) $\Omega(z) = k \ln(z+a) - k \ln(z-a)$*- IZVOR u* $z = -a$*, PONOR u* $z = a$

(e) $\Omega(z) = -ik \ln(z-a)$*- VRTLOG u* $z = a$

NAPOMENA 6.8 *tko želi znati više-seminar*

Odredite kompleksni potencijal koji opisuje tok tekućine oko kružne obale, duge pravokutne obale, oko rta.

6.2.2 Biharmonijske funkcije -Ravninski problem teorije elastičnosti

Ravninska naprezanja mogu se opisati biharmonijskom jednadžbom.

Definicija 6.9 *biharmonijske funkcije*

Jednadžba

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u(x, y)) = 0$$

zove se biharmonijska jednadžba ili Maxwellova jednadžba, a rješenja jednadžbe zovu se biharmonijske funkcije.

Uočimo da je funkcija Δu harmonijska funkcija jer zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta(\Delta u(x, y)) = 0.$$

Tada postoji konjugirano harmonijska funkcija Q i analitička funkcija f tako da je

$$f(z) = \Delta u + iQ.$$

Definiramo funkciju $\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)\,dz$.
Funkcija φ je analitička i vrijedi $\varphi'(z) = \frac{1}{4}f(z)$. Neka funkcija φ ima prikaz

$$\varphi(z) = p + iq.$$

Derivacija funkcije φ je

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{1}{4}(\Delta u + iQ)\end{aligned}$$

Iz (C-R) jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{4}\Delta u = \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{1}{4}Q = -\frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}$$

Zato Vrijedi

$$\Delta(px) = \frac{1}{2}\Delta u, \quad \Delta(qy) = \frac{1}{2}\Delta u$$

Definiramo novu funkciju $p_1 = u - px - qy$
$\Delta p_1 = \Delta u - \Delta(px) - \Delta(qy) = \Delta u - \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\Delta u = 0$.
Funkcija p_1 je harmonijska. Tada postoji harmonijska funkcija q_1 i analitička funkcija χ tako da je

$$\chi(z) = p_1 + iq_1.$$

$Re\chi(z) = p_1 = u - px - qy$
$p_1 = u - (p + iq)(x - iy) = u - \varphi(z)\overline{z}$.
Funkciju u koja je rješenje biharmonijske jednadžbe možemo prikazati pomoću dvije analitičke funkcije

$$u = Re(\chi(z) + \varphi(z)\overline{z})$$

$u(x, y) = Re\{\chi(x + iy)\} + Re\{\varphi(x + iy)(x - iy)\}$

ZADAĆA 6.6 *Pokažite da operator Δ^2 u konjugiranim varijablama $(z, \overline{z})$ ima zapis*

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = 16\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2}.$$

PRIMJER 6.22 *Riješite biharmonijsku jednadžbu*

$$\Delta^2 u(x, y) = 36(x^2 + y^2)$$

Rješenje:

Primijenimo prikaz biharmonijskog operatora u konjugiranim varijablama:

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = 16\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2}.$

Zadana jednadžba

$$\Delta^2 u(x, y) = 36(x^2 + y^2)$$

u konjugiranim varijablama za funkciju $\tilde{u}(z, \overline{z})$ ima oblik

$$16\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = 36 z\overline{z}$$

$\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2} = \frac{9}{4} z\overline{z}$

$\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial z \partial \overline{z}^2} = \frac{9}{4}\frac{z^2}{2}\overline{z} + F_1(\overline{z})$

$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \overline{z}^2} = \frac{9}{8}\frac{z^3}{3}\overline{z} + F_1(\overline{z})z + F_2(\overline{z})$

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \overline{z}} = \frac{9}{24} z^3 \frac{\overline{z}^2}{2} + z \underbrace{\int F_1(\overline{z}) d\overline{z}}_{G_1(z)} + \underbrace{\int F_2(\overline{z}) d\overline{z}}_{G_2(z)} + F_3(z)$

$\vdots$

$\tilde{u} = \frac{3}{48} z^3 \overline{z}^3 + zK_1(\overline{z}) + K_2(\overline{z}) + F_3(z)\overline{z} + F_4(z).$

Rješenje jednadžbe je funkcija

$$u(x, y) = \frac{3}{48}(x^2 + y^2)^3.$$

6.3 Primjer kolokvija

PRIMIJENJENA MATEMATIKA

KOLOKVIJ - KOMPLEKSNA ANALIZA

1. Izračunajte integrale

(a) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{5}{(1+z)(z-1)^2} dz$

2. Odredite bilinearno preslikavanje (Möbiusovu transformaciju) koja preslika i, $-i$, 1 u 0, 1, ∞, respektivno.

Odredite u što to preslikavanje preslika krug $\{|z| < 1\}$?

3. Odredite harmonijsku funkciju $\Phi(x, y)$ u prvom kvadrantu $D = \{x > 0,\ y > 0\}$ koja poprima vrijednosti na rubovima $\Phi(x, 0) = -1,\ \Phi(0, y) = 2$.

Uputa:

Dirichletov rubni problem u $z-$ ravnini za područje $D = \{x > 0,\ y > 0\}$ prebacite u rubni problem u $w-$ravnini za područje $D' = \{v > 0\}$ tj. gornju poluravninu. Koristite Poissonovu formulu za gornju poluravninu.

1. korak: Odredite konformno preslikavanje $w = f(z)$ koje prvi kvadrant preslika u gornju poluravninu;

2. korak: Za to presikavanje $w = f(z)$ odredite sliku polupravca $x = 0,\ y > 0$, i sliku polupravca $y = 0,\ x > 0$.

3. korak: Pomoću Poissonove formule riješite rubni problem za gornju poluravninu tj. odredite harmonijsku funkciju $\Phi^*(u, v)$ uz rubni uvjet

$\Phi^*(u, 0) = 2$ za $u < 0$

$\Phi^*(u, 0) = -1$ za $u > 0$.

4.korak Pomoću rješenja iz 3. koraka iskažite rješenje rubnog problema u $z-$ ravnini na području D.

4. Opišite tok fluida ako je zadan kompleksni potencijal $\Omega(z) = V_0\left(z + \frac{1}{z^2}\right)$. Odredite

(a) kompleksnu brzinu $V(z)$ i iznos brzine $V = |V(z)|$

(b) Odredite funkciju potencijala brzine i ekvipotencijalne linije;

(c) Odredite funkciju toka i strujnice;

(d) Odredite točke u kojima je brzina jednaka nuli.

Dio II

Fourierove transformacije

1

[1] PRIMMAT -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

Poglavlje 7

Fourierove transformacije

Definicija 7.1 *Integralne transformacije*

Integralna transformacija je preslikavanje $\mathcal{T}$ koja zadanoj funkciji f(x) pridružuje novu funkciju $\widehat{f(\omega)}$ koja se zove transformacija (preobrazba) funkcije f i pojavljuje se u obliku integrala. Transformaciju označavamo

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \widehat{f(\omega)},$$

ili

$$\mathcal{T}\{f(x)\} = \widehat{f(\omega)}.$$

Opći oblik transformacije (preobrazbe) funkcije f je:

$$\widehat{f(\omega)} = \int_a^b K(\omega, t) f(t) dt,$$

gdje se funkcija $K(\omega, t)$ se zove jezgra transformacije.

Transformaciju možemo shvatiti kao preslikavanje koje funkciji zadanoj u vremenskoj domeni $f(t)$ pridružuje funkciju $\widehat{f(\omega)}$ zadanoj u frekventnoj domeni.

Najvažnije transformacije u inženjerstvu su:
$\mathcal{L}\{f(x)\}$ Laplaceova transformacija za $K(w, t) = e^{-\omega \cdot t}$ $a = 0$, $b = \infty$
i
$\mathcal{F}\{f(x)\}$ Fourierova transformacija za $K(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i\omega t}$, $a = -\infty$, $b = \infty$

Integralne transformacije su linearna preslikavanja: linearnoj kombinacija funkcija pridružuje linearnu kombinaciju trasformacija.

$$\mathcal{T}\{af_1(x) + bf_2(x)\} = a \cdot \widehat{f_1}(\omega) + b \cdot \widehat{f_2}(\omega).$$

Za Laplaceovu transformaciju i Fourierovu transformaciju pokazuje se da postoje i inverzne transformacije:

$$\widehat{f}(\omega) \stackrel{\mathcal{T}^{-1}}{\to} f(x),$$

ili

$$\mathcal{T}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = f(x).$$

Intergalne transformacije su alat za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, integralnih jednadžbi, a koriste se i u radu sa specijalnim funkcijama. Posebna primjena je u činjenici da se problem iz jednog prostora riješi u drugom prostoru na jednostavniji način i inverznom transformacijom se rješenje prikaže u originalnom prostoru.

Ovo poglavlje se zasniva na djelu francuskog matematičara i fizičara Jean Baptiste Joseph Fourier-a (1768-1830) i kasnijim radovima Dirichleta i Riemanna. Nit vodilja je:

Fourierov red - Fourierov integral - Fourierov integral u kompleksnom obliku - Fourierova transformacija

Periodičnu funkciju možemo razviti u Fourierov red (red trigonometrijskih funkcija) uz određene uvjete.

Za neperiodične funkcije ideja razvoja funkcije u Fourierov red u graničnom slučaju dovodi do pojma Fourierovog integrala.

Fourierovu transformaciju zadane funkcije f odredimo preko Fourierovog integrala u kompleksnom obliku te funkcije.

Zanimanje za područje Fourierovih transformacija raste sa razvojem brzih računala i najpoznatiji pojam iz ove oblasti u inženjerskoj praksi je Fast Fourier Transformation (FFT) - naziv za softwerski algoritam za diskretnu Fourierovu transformaciju.

7.1 Prisjetimo se

U ovom uvodnom poglavlju dane su dane su osnovne činjenice o redovima funkcija, redovima potencija Taylorovim redovima i trigonometrijskim redovima.

7.1.1 Redovi funkcija

Definicija 7.2 *red funkcija*

Red funkcija je uređeni par $((a_n),(f_n))$, $n \in \mathbf{N}$ niza funkcija $a_n : I \to \mathbb{R}$ definiranih na intervalu I i niza parcijalnih suma $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ definiranih sa $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $x \in I$.

Red funkcija označavamo sa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

ili

$$\sum a_k(x)$$

Za svaki fiksni x_0 red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_0)$ je red brojeva. Osnovno pitanje o redovima brojeva je: konvergira li red ili divergira?

To pitanje možemo postaviti i za red funkcija.

Definicija 7.3 *konvergenicja po točkama*

Red funkcija $((a_n),(f_n))$, $n \in \mathbf{N}$ konvergira po točkama funkciji f na skupu $M \subseteq I$ ako za svaki $x_0 \in M$ red brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_0)$ konvergira broju $f(x_0)$.

Za funkciju f vrijedi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, za $x \in M$.

Funkcija f se zove suma reda na $M \subseteq I$ i zapisujemo $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, za $x \in M$.

Za funkciju f kažemo da smo je razvili u red po funkcijama a_n na M.

PRIMJER 7.1 *Red $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ konvergira po točkama funkciji $f(x) = \frac{1}{1-x}$ za $x_0 \in$* $(-1, 1)$.

Definicija 7.4 *apsolutna konvergrnicja*

Za red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, kažemo da apsolutno konvergira ako red apsolutnih vrijednosti $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ konvergira.

Apsolutno konvergentan red je konveregentan.

Definicija 7.5 *uvjetna konvergrnicja*

Za red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, *kažemo da uvjetno konvergira ako red konvergira ali red apsolutnih vrijednosti* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ *divergira.*

Definicija 7.6 *uniformna konvergrnicja*

Red funkcija $((a_n), (f_n))$, $n \in \mathbf{N}$ *konvergira uniformno funkciji* f *na skupu* $M \subseteq I$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *tako da za svaki* $n > N$ *i za svaki* $x \in M$ *vrijedi* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

PRIMJER 7.2 *Geometrijski red* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ *konvergira po točkama funkciji* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *na* $(-1, 1)$ *ali ne konvergira uniformno funkciji* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *na* $(-1, 1)$.

Rješenje:
Za svaki $x \in (-1, 1)$ red postaje geometrijski red brojeva koji ima sumu $\frac{1}{1-x}$ pa red konvergira po točkama.
Za uniformnu konvergenciju provjeravamo da li za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n > N$ i za svaki $x \in M$ vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Računamo $|f_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} x^k - \frac{1}{1-x}| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} > 1$ za $|x - 1| \approx 0$.

Definicija 7.7 *omeđen red funkcija*

Red funkcija $((a_n), (f_n))$, $n \in \mathbf{N}$ *je omeđen na* M *ako postoji red pozitivnih brojeva* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, *koji konvergira i za koji vrijedi:*

$$|a_1(x)| < c_1,\ |a_2(x)| < c_2,\ \ldots, |a_n(x)| < c_n,\ \ldots$$

za $x \in M$.

TEOREM 7.1 *Weierstrassov kriterij za uniformnu konvergenciju*

Red funkcija koji je omeđen na skupu M *konverigra uniformno na* M.

PRIMJER 7.3 *Red* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^p}$ *konvergira uniformno na* $\mathbb{R}$ *ako je* $p > 1$.

Rješenje:
Red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ je red pozitivnih brojeva koji konvergira za $p > 1$.
Članove zadanog reda funkcija možemo omeđiti
$|\frac{1}{x^2+n^p}| < \frac{1}{n^p}$ na $\mathbb{R}$ pa tvrdnja slijedi po Weierstrassovom kriteriju za uniformnu konvergenciju.

TEOREM 7.2 *Ako su a_n članovi reda funkcija neprekinute funkcije na skupu M na kome red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ uniformno konvergira, onda je suma reda $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ neprekinuta funkcija na M i vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_k(x)$$

Često se postavlja pitanje kada red funkcija možemo derivirati, a kada intergirati član po član.

TEOREM 7.3 *Neka su $a_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu (a, b) i neka red $((a_n), (f_n))$ uniformno konvergira funkciji f na (a, b). Ako red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'(x)$ uniformno konvergira na (a, b) onda je suma reda $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, diferencijabilna funkcija na (a, b) i vrijedi*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(x).$$

TEOREM 7.4 *Neka su $a_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije na $[a, b]$ i neka red $((a_n), (f_n))$ uniformno konvergira funkciji f na $[a, b]$. Tada je suma reda $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ integrabilna funkcija na $[a, b]$ i vrijedi*

$$\int_a^b (\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b a_k(x)dx.$$

Budući su neprekinute funkcije na segmentu integrabilne onda uvjet integrabilnosti u prethodnom teoremu možemo zamijeniti s neprekidnošću funkcija a_n.

7.1.2 Red potencija i Taylorov red

Definicija 7.8 *red potencija*

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ niz brojeva. Red funkcija oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

zovemo red potenicja oko c, a brojeve a_n koeficijenti reda potencija.

Sljedeći teoremi govore o konvergenicji reda potencija.

TEOREM 7.5 *Ako red potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *konvergira za neki* $x_0 \neq c$ *onda postoji interval* $(c-R, c+R)$ *tako da red apsolutno konvergira u svakoj točki iz* $(c-R, c+R)$, *a izvan intervala divergira.*

Broj R *se zove polumjer konvergencije, a interval* $(c-R, c+R)$ *interval konvergencije.*

U rubnim točkama R i $-R$ treba posebno ispitati konvergenicju reda brojeva.

Polumjer konvergenicje za konvergentan red računamo po Cauchy-Hadamardovoj formuli

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ako postoji $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$ onda postoji i $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 0$ i vrijedi $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Tada polumjer konvergencije računamo po formuli

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

TEOREM 7.6 *Ako red potencija* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *ima interval konvergencije* $(c-R, c+R)$ *onda red uniformno konvergira funkciji* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *na svakom segmentu* $[a, b] \subseteq (c-R, c+R)$.

Suma reda, funkcija f *je neprekinuta funkcija na* $(c-R, c+R)$.

Suma reda, funkcija f *je diferencijabilna funkcija na* $(c-R, c+R)$ *i red se može derivirati član po član.*

Suma reda, funkcija f *je integrabilna funkcija na* $[a, b] \subseteq (c-R, c+R)$ *i red se može integrirati član po član.*

PRIMJER 7.4 *Suma geometrijskog reda* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *je funkcija* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Interval konvergencije geometrijskog reda je* $(-1, 1)$.

ZADAĆA 7.1 *Odredite polumjer konvergencije za red* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$. *Kako se red ponaša na rubovima intervala konvergencije?*

Definicija 7.9 *Taylorov red*

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ interval, f funkcija klase $C^\infty(I)$ i točka $x_0 \in I$. Taylorov red funkcije f u okolini točke x_0 je red potencija

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

gdje su

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

koeficijenti Taylorovog reda.

Ako je $x_0 = 0$ onda Taylorov red zovemo MacLaurinov red funkcije f.

Funkciji f pridružimo njen Taylorov red zapisom

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Taylorov polinom reda n, $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ je n−ta parcijalna suma reda.

Taylorov red funkcije f može konvergirati ili divergirati. Ako konvergira može konvergirati funkciji f ili nekoj drugoj funkciji.

Sljedeći teorem govori o konvergenciji Taylorovog reda.

TEOREM 7.7 *Ako Taylorov red funkcije f u okolini točke x_0 konvergira s intervalom konvergencije $J = (x_0 - R, x_0 + R)$, $R \neq 0$ onda konvergira funkciji f.*

Kažemo da smo funkciju f razvili u Taylorov red oko x_0 i zapisujemo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Dokaz

Pretpostavimo da je funkcija f suma reda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, tj.
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ na $(x_0 - R, x_0 + R)$, $R \neq 0$.
Funkcija ima derivaciju svakog reda u točki $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $R \neq 0$:

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-x_0)^{k-1}$

$f^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)a_k(x-x_0)^{k-m}$, za $m \in \mathbb{N}$.

U točki x_0 dobivamo vrijednosti

$$f'(x_0) = a_1,\ f''(x_0) = 2a_2,\ f^{(m)}(x_0) = m(m-1)(m-2)\cdots 1\, a_m = m!a_m,$$

pa su koeficijenti $a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ zaista koeficijenti Taylorovog reda funkcije f.

Ako je funkcija f suma reda potencija u okolini točke x_0 onda je to njen Taylorov red.

Rastav funkcije f u red potenicija je jedinstven.

TEOREM 7.8 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ i točka $x_0 \in I$. Funkciju f možemo razviti u njen Taylorov red oko x_0 ako postoje $R > 0$ i $M > 0$ takvi da*
(i) postoje derivacije $f^{(m)}(x)$ za svaki $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$;
(ii) za svaki $m \in \mathbb{N}$ i za svaki $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ vrijedi $|f^{(m)}(x)| < M$.

ZADAĆA 7.2 *(a) Razvijte funkciju $f(x) = x^2 + \sin x$ u Taylorov red oko 1.*

(b) Razvijte funkciju $f(x) = x^2 + \sin x$ u Taylorov red oko nule.

Definicija 7.10 *analitička funkcija realne varijable*

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ i točka $x_0 \in I$. Neka je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylorov red funkcije f s polumjerom konvergencije R. Funkcija f je analitička u točki x_0 ako postoji $0 < \delta \leq R$ tako da Taylorov red funkcije f konvergira funkciji f na intervalu $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, tj. vrijedi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ \ x \in J.$$

Ako je funkcija f jednaka svom Taylorovom redu za svako $x \in \mathbb{R}$ funkciju zovemo cijela funkcija.

7.2 Redovi funkcija kompleksne varijable

Sve tvrdnje koje smo izložili o redovima realnih funkcija vrijede i za redove kompleksnih funkcija.

Definicija 7.11 *red kompleksnih funkcija*

Red kompleksnih funkcija je uređeni par $((a_n),(f_n))$, $n \in \mathbf{N}$ *niza funkcija* $a_n : D \to \mathbb{C}$ *definiranih na području* $D \subset \mathbb{C}$ *i niza parcijalnih suma* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *definiranih sa* $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k(z)$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $z \in D$.

Red funkcija označavamo sa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z).$$

Red konvergira funkciji f *ako je* $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. *Funkciju*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$$

zovemo suma reda.
Ako limes ne postoji kažemo da red divergira. Ako red konvergira u svakoj točki područja D *onda kažemo da je* D *područje konvergencije.*

Definicija 7.12 *red potencija oko točke c*

Neka je (a_n), $n \in \mathbb{N} \cup 0$ *niz kompleksnih brojeva i* $c \in \mathbb{C}$. *Red funkcija oblika*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

zovemo red potenicja oko točke c, *a kompleksne brojeve* a_n *koeficijentima reda potencija.*

Ako $z = c$ nije jedina točka u kojoj red konvergira onda postoji broj $R > 0$ takav da red konvergira na području $D : |z-c| < R$, divergira na području $|z-c| > R$, a na kružnici $\Gamma : |z-c| = R$ može i ne mora konvergirati. Broj R se zove polumjer konvergencije, a krug $K(c,R)$ krug konvergencije.

PRIMJER 7.5 *Pokažite da red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ *konvergira apsolutno na području* D : $|z| \leq 1$.

Rješenje:
Ako je $|z| \leq 1$ onda vrijedi

$$|a_n(z)| = |\frac{z^n}{n(n+1)}| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Red brojeva $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira pa i red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z)|$ konvergira. Kažemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ apsolutno konvergira.

PRIMJER 7.6 *Odredite polumjer konvergencije reda* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(n+2)^2 5^n}$.

Rješenje:
Opći član reda je $a_n(z) = \frac{(z-1)^n}{(n+2)^2 5^n}$.
Provjeravamo D'Alambertov kriterij

$$\lim |\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}| = \lim |\frac{|z-1|}{5}| |\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2}| = \frac{|z-1|}{5}.$$

Red konvergira apsolutno na području $D : |z-1| < 5$. Na rubu područja, na kružnici $\Gamma : |z-1| = 5$ vrijedi nejednakost

$$|a_n(z)| = |\frac{1}{(n+2)^2 5}| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Red brojeva $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira pa i red $\sum |a_n(z)|$ apsolutno konvergira na kružnici $\Gamma : |z-1| = 5$. Dakle, red $\sum a_(z)$ apsolutno konvergira na području konvergencije $D : |z-1| \leq 5$.

ZADAĆA 7.3 *Pokažite da red* $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ *konvergira samo točki* $z = 0$.

TEOREM 7.9 *Taylorov teorem*

Neka je f analitička funkcija na krugu $K(z_0, R)$. Tada za svaki $z \in D$ funkciju f možemo razviti u red

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

koji se zove Taylorov red kompleksne funkcije f u točki z_0.

TEOREM 7.10 *Neka je f analitička funkcija na području D i neka je $z_0 \in D$. Tada za svaki $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq D$ i za svaki $z \in K(z_0, r)$ funkciju f možemo razviti u Taylorov red*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

PRIMJER 7.7 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, *za* $|z| < \infty$.
$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, *za* $|z| < \infty$.
$\cos z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}$, *za* $|z| < \infty$.

ZADAĆA 7.4 *Razvijte funckciju* $f(z) = \ln(1+z)$ *u Taylorov red u okolini točke* $z_0 = 0$. *Odredite područje konvergencije.*

Rješenje:
Računamo koeficijente Taylorovog reda u $z_0 = 0$:
$a_0 = f(z_0) = \ln(1 + z_0) = 0$,
$a_1 = f'(z_0) = (1 + z_0)^{-1} = 1$,
$a_2 = f''(z_0) = -(1 + z_0)^{-2} = -1$,
$a_3 = f'''(z_0) = -(-2)(1 + z_0)^{-3} = 2!$,
$\vdots a_k = f^k(z_0) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1 + z_0)^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$

Dakle, Taylorov red funkcije $f(z) = \ln(1 + z)$ je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

Trebamo odrediti područje konvergencije ovog reda. Prema D'Alambertovom kriteriju određujemo polumjer konvergencije ovog reda s općim članom
$b_n(z) = (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$:
$\lim |\frac{b_{n+1}}{b_n}| = \lim |\frac{n z}{n+1}| = |z| < 1$.
Polumjer konvergencije je $R = 1$ a područje konvergencije $D : |z| < 1$.
U točki $z = -1$ red divergira, a u točki $z = 1$ konvergira.
Dakle, funkciju $\ln(1 + z)$ možemo razviti u njen Taylorov red na $D : |z| < 1$

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

ZADAĆA 7.5 *Razvijte funckiju* $f(z) = \sin z$ *u Taylorov red u okolini točke* $z_0 = \pi/4$. *Odredite područje konvergencije.*

TEOREM 7.11 *Laurentov teorem*

Neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ *i neka su* R_1 *i* R_2 *pozitivni brojevi tako da je* $R_1 > R_2$. *Neka je* f *analitička funkcija na kružnom prstenu* $D : R_2 < |z - z_0| < R_1$. *Tada funkciju* f *možemo razviti u red*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

gdje su koeficijenti

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt\ k \in \mathbb{Z}$$

a $\Gamma : |z - z_0| < \rho$, $R_1 < \rho < R_2$ *bilo koja pozitivno orijentirana kružnica unutar* D. *Red se zove Laurentov red funkcije* f *oko točke* z_0.

NAPOMENA 7.1 *U Laurentovom redu prvi dio* $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k$ *zove se glavni dio,*
a drugi dio $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *zove se analitički dio.*

PRIMJER 7.8 *Odredite Laurentov razvoj funkcije* $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z+1)}$ *u okolini točke* $z_0 = -2$.

Rješenje:

Funkcija ima pol prvog reda u $z_0 = -2$. Ako uvedemo novu varijablu $Z = z+2$ onda tražimo Laurentov razvoj funkcije $f^*(Z) = \frac{Z-2}{(Z-1)Z}$ oko $Z = 0$. Funkciju možemo rastaviti na faktore za koje znamo rastav u red potencija ili Taylorov red:

$$\begin{aligned} f^*(Z) &= \frac{2-Z}{Z}\cdot\frac{1}{1-Z} \\ &= \frac{2-Z}{Z}\cdot(1+Z+Z^2+Z^3+...) \\ &= \frac{2}{Z}+1+Z+Z^2+Z^3+...+ \end{aligned}$$

Ovaj rastav vrijedi za $0 < |Z| < 1$. Dakle zadanu funkciju možemo razviti u Laurentov red oko $z_0 = -2$ za svaki $0 < |z+2| < 1$

$$f(z) = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2)^2 + (z+2)^3 + ...+$$

NAPOMENA 7.2 *tko želi znati više-seminar*

Dokažite Taylorov teorem.
Dokažite Laurentov teorem.

7.3 Fourierov red

ZADAĆA 7.6 *Opći oblik sinusoidne funkcije*

$$f(x) = A\sin(\omega \cdot x + \varphi_0)$$

određen je amplitudom A, kružnom frekvencijom ω i početnom fazom φ_0. Period funkcije je $T = \frac{2\pi}{\omega}$, frekvencija $f = \frac{1}{T}$, a fazni pomak $\varphi = \frac{\omega}{\varphi_0}$.

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 5\sin(3x + \frac{\pi}{3})$. Odredite period, frekvenciju, amplitudu, fazni pomak i kružnu frekvenciju.

ZADAĆA 7.7 *Zadana je funkcija $f(x) = x$, za $-\pi \leq x < \pi$. Proširite funkciju periodično. Skicirajte graf.*
(a) Odredite točke prekida proširene funkcije.
(b) Odredite limes slijeva u π,
$f(\pi_-) = \lim_{h\to 0} f(\pi - h)$;
i limes zdesna u π,
$f(\pi_+) = \lim_{h\to 0} f(\pi + h)$;
(c) Odredite derivaciju slijeva u π
$f'(\pi_-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$;
i derivacija zdesna u π
$f'(\pi_+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$.

Rješenje:
(a)$-\pi$, π (b) π,$-\pi$, (c) 1, 1.

Definicija 7.13 *trigonometrijski polinom*

Funkcija definirana kao suma periodičkih funkcija

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega x + \varphi_k)$$

ili

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$$

zove se trigonometrijski polinom stupnja n, s periodom $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2L$.

Članovi

$$A_k sin\,(k\omega x + \varphi_k)$$

ili

$$a_k \cos\,(k\frac{\pi}{L}x) + b_k \sin\,(k\frac{\pi}{L}x)$$

zovu se k*−ti harmonici i imaju period* $T_k = \frac{2\pi}{k\omega}$.

Definicija 7.14 *trigonometrijski red*

Funkcija definirana kao beskonačna suma periodičkih funkcija

$$S(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\,(k\frac{\pi}{L}x) + b_k \sin\,(k\frac{\pi}{L}x)$$

zove se trigonometrijski red.

NAPOMENA 7.3 *Skup funkcija* $\{\cos\frac{n\pi}{L}x, \sin\frac{n\pi}{L}x\}$ *zove se trigonometrijski sustav. Osnovno svojstvo tih funkcija je ortogonalnost na intervalu duljine 2L:*

za $m, n \in N$;

$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx = \delta_{mn}\cdot L,$

$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx = \delta_{mn}\cdot L;$

$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx = 0.$

gdje je

$$\delta_{mn} := \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

ZADAĆA 7.8 *Pokažite svojstvo ortogonalnosti trigonometrijske funkcija kosinus:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx = 0,\ m \neq n;$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx = L,\ m = n.$$

Koristite adicijske teoreme za produkt

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right).$$

Definicija 7.15 *Fourierov red*

Neka je f periodička funkciju $f(x)$ s periodom $T = 2L$, $f(x+2L) = f(x)$. Fourierov red funkcije f definira se kao trigonometrijski red

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x)}$$

gdje su a_0, a_n, b_n Fourierovi koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ n \geq 1.$$

Ako je funkcija f parna onda se Fourierov red funkcije f reducira na Fourierov kosinusni red

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x}$$

gdje su a_n Fourierovi koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ n \geq 1.$$

Ako je funkcija f neparna onda se Fourierov red funkcije f reducira na Fourierov sinusni red

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x}$$

gdje su b_n Fourierovi koeficijenti

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\ n \geq 1.$$

TEOREM 7.12 *(i) Neka je f neprekinuta funkcija, periodična s periodom $2L$. Ako je f diferencijabilna u točki x onda Fourierov red od f u točki x konvergira ka $f(x)$ i zapisujemo*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x);$$

(ii) Neka je f po dijelovima neprekinuta funkcija, periodična s periodom $2L$. Ako je f diferencijabilna slijeva i zdesna u točki x onda Fourierov red od f u točki x konvergira srednjoj vrijednosti limesa slijeva i limesa zdesna u x i zapisujemo

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x);$$

(iii) Neka je f neprekinuta funkcija, periodična s periodom $2L$. Ako je f diferencijabilna svuda osim u prebrojivo mnogo točaka (po dijelovima glatka funkcija) onda Fourierov red od f na $[-L, L]$ konvergira uniformno funkciji $f(x)$ tj.
za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq N$ i za svaki $x \in [-L, L]$ vrijedi

$$|f(x) - (a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x)| < \epsilon.$$

(iv) Neka je f kvadratno integrabilna funkcija $\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx < \infty$ i periodična s periodom $2L$. Tada Fourierov red od f na $[-L, L]$ konvergira funkciji f u smislu da
za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq N$ i za svaki $x \in [-L, L]$ vrijedi

$$\int_{-L}^{L} |f(x) - (a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos \frac{k\pi}{L}x + b_k \sin \frac{k\pi}{L}x)|^2 < \epsilon.$$

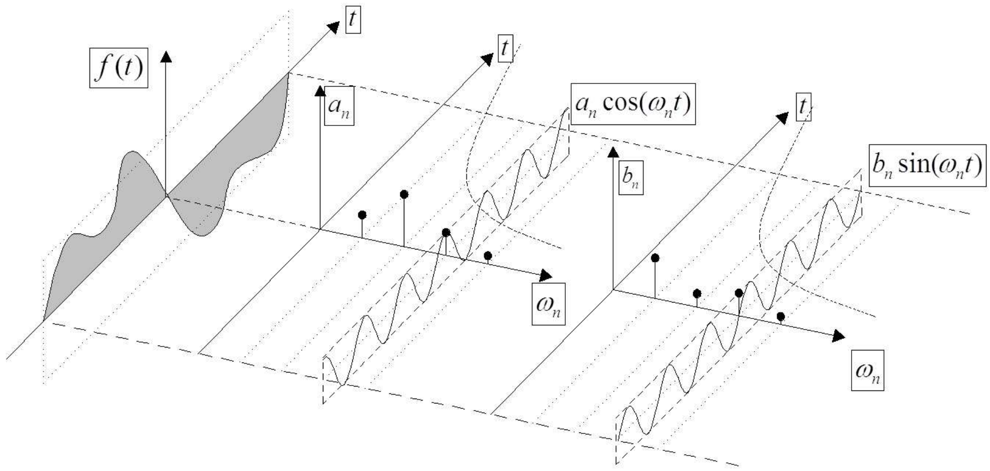
Definicija 7.16 *Amplitudni spektar funkcije f nazivamo niz vrijednosti*

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

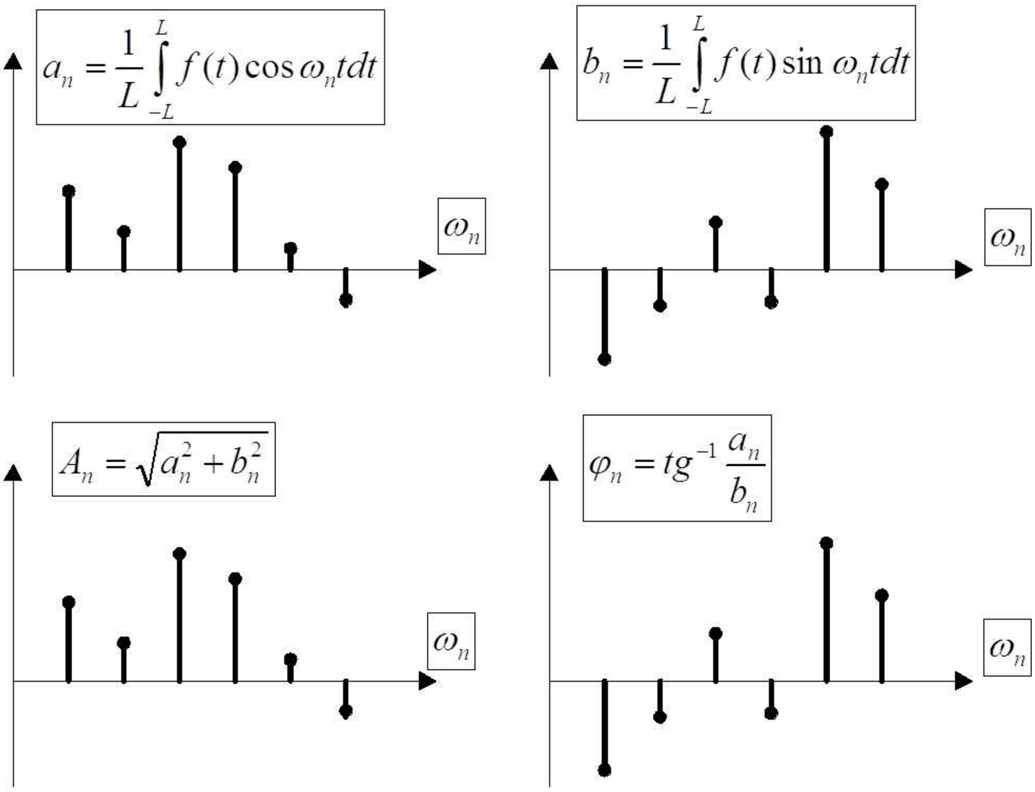
Faznim spektarom funkcije f nazivamo niz vrijednosti

$$\varphi_n, \ \mathrm{tg}\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

NAPOMENA 7.4 *Grafički prikaz razvoja funkcije u vremenskoj domeni (varijabla t) u Fourierov red i grafički prikaz ovisnosti amplitude A_n i faze φ_n o frekvenciji $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ dan je na sljedećim slikama.*



Slika 7.1: Grafički prikaz razvoja vremenske funkcije u Fourierov red



Slika 7.2: Amplitudni i fazni spektar

Definicija 7.17 *Fourierov red za period=2π*

Neka je f periodička funkciju $f(x)$ s periodom 2π, $f(x+2\pi) = f(x)$. Fourierov red funkcije f definira se kao tigonometrijski red

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

gdje su a_0, a_n, b_n Fourierovi koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,\ n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n \geq 1.$$

Ako je funkcija f parna onda se Fourierov red funkcije f reducira na Fourierov kosinusni red

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}$$

gdje su a_0 i a_n Fourierovi koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n \geq 1$$

Ako je funkcija f neparna onda se Fourierov red funkcije f reducira na Fourierov sinusni red

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}$$

gdje su b_n Fourierovi koeficijenti

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,,\ n \geq 1.$$

NAPOMENA 7.5 *Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \leq x \leq L$ onda ju možemo proširiti periodično s periodom $2L$ (po parnosti ili po neparnosti). Proširenu funkciju periodičnu s peridom 2L možemo razviti u Fourierov red.*

Ako je zadana funkcija f na segmentu $0 \leq x \leq L$ proširena po parnosti na $-L \leq x \leq L$ s periodom $2L$ onda proširenu funkciju možemo razviti u Fourierov kosinusni red.

Ako je zadana funkcija f na segmentu $0 \leq x \leq L$ proširena po neparnosti na $-L \leq x \leq L$ s periodom $2L$ onda proširenu funkciju možemo razviti u Fourierov sinusni red.

PRIMJER 7.9 *Funkciju $f(x) = x, \quad x \in [0, L]$ proširite po parnosti i skicirajte graf.*

Rješenje:
$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & x \in [0, L] \\ -x & x \in [-L, 0] \end{cases}$ - proširenje od f po parnosti
$\tilde{f}$ parna i periodična na $[-L, L]$, tj. $2L$

PRIMJER 7.10 *Razvijte funkciju $f(x)$, $0 \leq x \leq L$ u Fourierov kosinusni red:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x & ,0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x) & ,\frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Rješenje:
Trebamo naći Fourierov kosinusni red. Funkciju ćemo proširiti po parnosti na $-L \leq x \leq L$ s periodom 2L:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x, \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx.$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{L/2} f(x)dx + \frac{1}{L}\int_{L/2}^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{L/2}\frac{2}{L}xdx + \frac{1}{L}\int_{L/2}^L \frac{2}{L}(L-x)dx = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\frac{2}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}xdx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^L \frac{2}{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L} \\
&= \text{parcijalna integracija} \\
&= \frac{4}{L^2}[\frac{L^2}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1) - \frac{L^2}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2})] \\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1).
\end{aligned}$$

$a_1 = \frac{4}{\pi^2 1^2}(2\cos\frac{1\pi}{2} - \cos 1\pi - 1) = 0,$
svi neparni koeficijenti su 0;
$a_2 = \frac{4}{\pi^2 2^2}(2\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 2\pi - 1) = -\frac{4}{\pi^2};$
$a_4 = \frac{4}{\pi^2 4^2}(2\cos\frac{4\pi}{2} - \cos 4\pi - 1) = 0:$

$a_6 = \frac{4}{\pi^2 6^2}(2\cos\frac{6\pi}{2} - \cos 6\pi - 1) = -\frac{4}{9\pi^2};$
$a_8 = \frac{4}{\pi^2 8^2}(2\cos\frac{8\pi}{2} - \cos 8\pi - 1) = 0;$
$a_{10} = \frac{4}{\pi^2 10^2}(2\cos\frac{10\pi}{2} - \cos 10\pi - 1) = -\frac{4}{25\pi^2};$
....
$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}[\cos\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{9}\cos\frac{6\pi}{L}x + \frac{1}{25}\cos\frac{10\pi}{L}x + ...].$

TEOREM 7.13 *(Parsevalova jednakost)*

Neka je f kvadratno integrabilna funkcija $\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx < \infty$ i periodična s periodom $2L$. Za

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

vrijedi

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx = 2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

ZADAĆA 7.9 *(a) Odredite Fourierov red funkcije $f(x) = x^2$ na inetervalu $[-1,1]$.*
(b) Primijenite Persevalovu jednakost da odredite sumu reda

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ...$$

Rješenje:
(a) $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi^2 \cdot n^2}$;
(b) $\frac{\pi^4}{90}$.

NAPOMENA 7.6 *(obrada signala)*

Neka je signal predstavljen funkcijom f. Pri obradi signala nađemo Fourierov red za f tj. razložimo signal kao sumu harmonika. Neke Fourierove koeficijente zanemarimo ako su manji od neke zadane vrijednosti, pa tako očistimo signal od dodatnih šumova.

Ukupna energija signala je izržena s $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx$, a kvadrati Fourierovih koeficijenata predstavljaju energiju pojedinih harmonika.

Parsevalova jednakost kaže da je ukupna energija signala jednaka sumi energija svih harmonika.

NAPOMENA 7.7 *Osim predstavljnja prekinutih i periodičnih funkcija, postoji i treća vrlo važna prednost Fourierovih redova. Pretpostavimo da rješsavamo jednadžbu gibanja harmonijskog oscilatora na koji djeluje vanjska sila. Fourierov red za vanjsku silu tada daje osnovni član i više harmonike. To je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima pa se partikularna rješenja mogu dobiti odvojeno za svaki harmonik. Na kraju je ukupno partikularno rješenje za cijelu vanjsku silu zbroj rješenja za pojedine harmonike.*

PRIMJER 7.11 *Nađite rješite prisilnih oscilacija osilatora*

(a) $y''(t) + \omega y(t) = \cos(\omega\, t)$

(b) $y''(t) + \omega y(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\, t)$ *ako je* $|\omega| \neq 1, 2, ..., N$

(c) $y''(t) + \omega y(t) = r(t)$
gdje je $r(t)$ *periodička s periodom* 2π :
$r(t) = \begin{cases} t + \pi, & -\pi < t < 0 \\ -t + \pi, & 0 < t < \pi \end{cases}$
i ako je $|\omega| \neq 1, 3, 5...$

Rješenje:
(a) $y(t) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t) + \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos(n\, t)$
(b) $y(t) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} \cos(n\, t)$
(c) Funkciju $r(t)$ razvijenmo u njen Fourierov red $r(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\, t)$ gdje su Fourierovi koeficijenti:
$a_0 = \frac{\pi}{2}$
$a_n = \frac{4}{\pi\, n^2}$ za neparne n
$a_n = 0$ za parne n.
Partikularno rješenje za $y''(t) + \omega y(t) = a_0$ je $y_p(t) = \frac{a_0}{\omega^2}$.

Koristeći rješenje iz zadatka (b) rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$y(t) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \cos(\omega\, t) + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2(\omega^2 - (2k-1)^2)} \cos((2k-1)\, t)$$

7.3.1 Forierov red u kompleksnom obliku

Definicija 7.18 *Fourierov red u kompleksnom obliku*

Fourierov red u kompleksnom obliku peridičke funkcije f s periodom $2L$ je red

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{n\pi x}{L}}}$$

gdje su c_n Fourierovi kompleksni koeficijenti

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\cdot\frac{n\pi t}{L}}dx,$$

a n su cijeli brojevi.

TEOREM 7.14 *Neka je f kvadratno integrabilna funkcija $\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx < \infty$ i periodična s periodom $2L$. Tada Fourierov red u kompleksnom obliku od f na $[-L, L]$ konvergira funkciji f u smislu da*
za svaki $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq N$ i za svaki $x \in [-L, L]$ vrijedi

$$\int_{-L}^{L}|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\frac{k\pi x}{L}}|^2 < \epsilon.$$

TEOREM 7.15 *Parsevalova jednakost-kompl. oblik* *Neka je f kvadratno integrabilna funkcija $\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx < \infty$ i periodična s periodom $2L$. Za*

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i\frac{k\pi x}{L}}$$

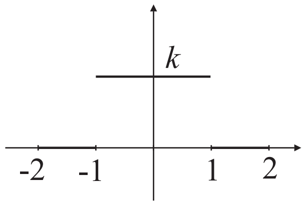
vrijedi

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

7.4 Fourierov integral

PRIMJER 7.12 *Razvijte periodičku funkciju f s periodom $2L = 4$ u Fourierov red*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$



Rješenje:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 k\,dx = \frac{k}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{2}\int_0^1 k\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \\ &= \frac{2k}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{2k}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & n = 2m \\ \frac{2k}{n}, & n = (1+4m) \\ -\frac{2k}{n}, & n = (4m-1) \end{array} \right. , \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x\right) + \ldots$$

Ako zapišemo

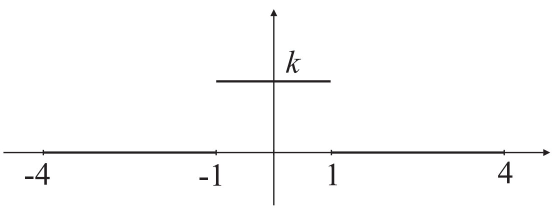
$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi}{2},$$

funkciju f možemo razviti u red u frekventnoj domeni

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x).$$

PRIMJER 7.13 *Razvijte peridičku funkciju f s periodom $2L = 8$ u Fourierov red*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & -4 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 4 \end{array} \right. , \quad p = 2L = 8$$

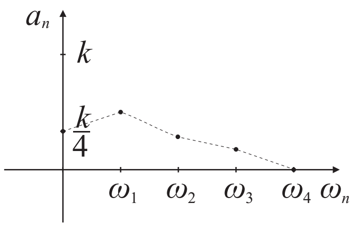


Rješenje:

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 k\,dx = \frac{k}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^1 k\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx = \frac{2k}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \begin{cases} 0, & n = 4m \\ \frac{2k}{2m\pi}\cdot(\pm 1), & n = 2m \\ -\frac{2k}{2m+1}\cdot(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}), & n = 2m+1 \end{cases}$$

ω_n	a_n
0	$\frac{k}{4}$
1	$\frac{2k}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k}{\pi}\sqrt{2}$
2	$\frac{k}{\pi}$
3	$\frac{k}{3\pi}\sqrt{2}$



PRIMJER 7.14 *Razvijte periodičku funkciju f s periodom $2L = 16$ u Fourierov red*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -8 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 8 \end{cases}$$

Rješenje:

$a_0 = \frac{k}{8}$

$a_n = \frac{2k}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$

ω_n	a_n
0	$\frac{k}{8}$
1	$\frac{2k}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
2	$\frac{k}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	$\frac{2k}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
4	$\frac{k}{2\pi}$
5	$\frac{2k}{5\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
6	$\frac{k}{3\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$
7	$\frac{2k}{7\pi} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
8	0

NAPOMENA 7.8 *Periodička funkcija*

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & -L < x < -1 \end{cases}$$

za $L \to \infty$ konvergira funkciji

$$f(x) = \begin{cases} k, & -1 < x < 1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

NAPOMENA 7.9 *Izvedite Fourierov red za periodičku funkciju s periodom $T = 2L$ funkciju kad $L \to \infty$*

Rješenje:

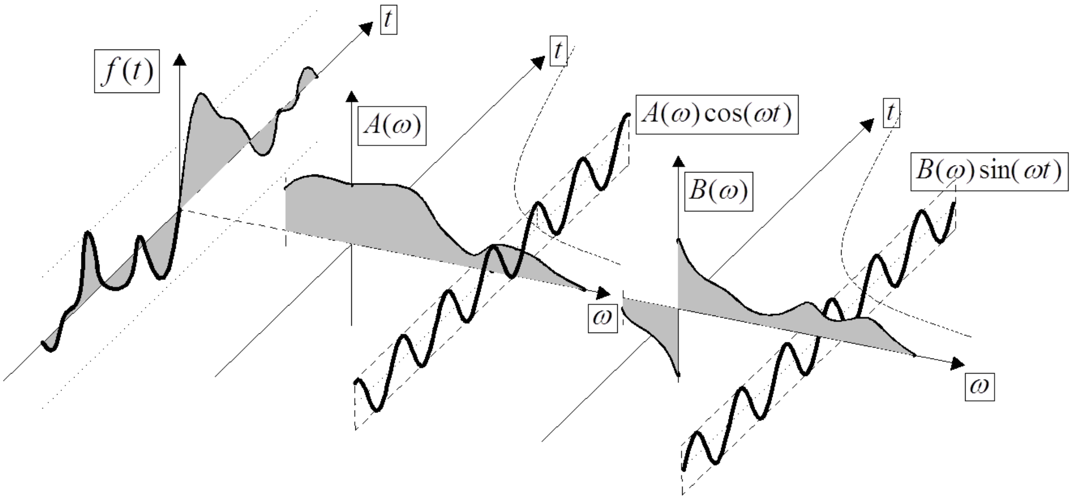
Za $L \to \infty$ izrazimo ovisnost amplitude a_n o frekvenciji ω_n

odnosno $A(\omega)$.

$$\begin{aligned}
f_L(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\
\omega_n &= \frac{n\pi}{L} \\
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x) \right]
\end{aligned}$$

$L \to \infty \quad \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(t)\, dt;$
$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(t) \cos(\omega_n t)\ dt,$
$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(t) \sin(\omega_n t)\ dt$

$$
\begin{aligned}
f_L(x) &= \frac{\Delta\omega_n}{2\pi}\int_{-L}^{L} f_L(t)\,dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\Delta\omega_n}{\pi}\int_{-L}^{L} f_L(t)\cos\left(\omega_n t\right)\,dt\right)\cos(\omega_n x)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\Delta\omega_n}{\pi}\int_{-L}^{L} f_L(t)\sin\left(\omega_n t\right)\,dt\right)\sin(\omega_n x)\right] \\
&\quad L \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad f_L(x) \to f(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(\omega t\right)\,dt\right)\cos(\omega_n x)\Delta\omega_n\right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\left(\omega t\right)\,dt\right)\sin(\omega_n x)\Delta\omega_n\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(\omega t\right)\,dt \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\omega_n x)\Delta\omega_n}_{\textit{integralna suma}} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\left(\omega t\right)\,dt \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\omega_n x)\Delta\omega_n \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(\omega t\right)\,dt}_{A(\omega)} \int_{0}^{\infty} \cos\left(\omega x\right)\,d\omega \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\left(\omega t\right)\,dt}_{B(\omega)} \int_{0}^{\infty} \sin\left(\omega x\right)\,d\omega
\end{aligned}
$$



Slika 7.3: Grafički prikaz razvoja vremenske funkcije $f(t)$ u Fourierov integral

Definicija 7.19 *Fourierov integral*

Za funkciju f definira se Fourierov integral u realnom obliku je

$$\boxed{\int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)]\,dw,}$$

gdje su

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)\,dt;$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)\,dt.$$

TEOREM 7.16 *Ako je funkcija f neprekinuta na svakom konačnom intervalu, ako ima desnu i lijevu derivaciju u svakoj točki i ako postoji integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x|dx$ onda se funkcija f može prikazati pomoću Fourierovog integrala (u realnom obliku)*

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)]\,dw.$$

U točkama prekida funkcije f vrijednost Fourierovog integrala jednaka je aritmetičkoj sredini limesa slijeva i zdesna u toj točki.

Definicija 7.20 *Fourierov integral - kompleksni oblik*

Fourierov integral u kompleksnom obliku za funkciju f je integral

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\exp[iw(x-t)]\,dt\,dw.}$$

Izvod kompleksnog oblika iz realnog oblika Fourierovog integrala:
$f(x) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw$
$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos wt\cos wx + \sin wt\sin wx]dtdw$
= adicijski teorem za cos i parnost funkcije cos
$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw$
= [...] je parna funkcija od w
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw$
= dodamo pribrojnik=0 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wx-wt)dt]dw = 0$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wx-wt)dt]dw$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(wx-wt) + i\sin(wx-wt))dt\,dw$
= Eulerova formula $\exp(i\varphi) = cos\varphi + i\sin\varphi$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp[iw(x-t)]dt\,dw.$

7.5 Fourierova transformacija

Definicija 7.21 *Fourierova transformacija*

Za funciju f, funkcija $\widehat{f}(w)$ definirana sa

$$\boxed{\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\exp(-iwx)\,dx}$$

zove se Fourierova transformacija.

Proces dobivanja transformacije $\widehat{f}$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova transformacija i označava $\mathcal{F}$:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(w), \qquad \mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w).$$

Definicija 7.22 *Inverzna Fourierova transformacija*

Neka je $\widehat{f}(w)$ Fourierova transormacija funkcije f. Inverzna Fourierova transformacija definira se sa

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \exp(iwx)\, dw.}$$

Proces dobivanja funkcije f iz zove se zadane Fourierove transformacije $\widehat{f}$ također se zove inverzna Fourierova transformacija i označava $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\widehat{f}(w) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\to} f(x), \qquad \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} = f(x).$$

NAPOMENA 7.10 *Fourierova transformacija definira se pomoću Fourierovog integrala:*

U Fourierovom integralu
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[iw(x-t)]\, dt\, dw$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iwt) dt] \exp(iwx)\, dw$
označimo unutarnji integral [...]
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iwt)\, dt.$
Zato je
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \exp(iwx)\, dw.$

PRIMJER 7.15 *Nađite Fourierovu transformaciju $\widehat{f}(w)$ zadane funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < a \\ 0, & inače \end{cases}$$

Rješenje:

$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \int_0^a \exp(-iwx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \frac{\exp(-iwa)-1}{-iw}.$
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \frac{\exp(-iwa)-1}{-iw}.$
Uočimo:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \frac{\exp(-iwa)-1}{-iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c [\frac{\sin wa}{w} + i \frac{1-\cos wa}{w}] = \frac{1}{2}[\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{1-\cos wa}{w}].$
$\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w}.$

$\widehat{f_s}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{1-\cos wa}{w}.$

PRIMJER 7.16 *Nađite Fourierovu transformaciju $\widehat{f}(w)$ zadane funkcije*
$f(x) = exp(-ax^2),\ a > 0.$

Rješenje:

$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \exp(-iwx)dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - iwx)dx =$ dopunjavamo na potpun kvadrat
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2]dx$
$=$ supstitucija $z = \sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-z^2]dz$
$=$poznati integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-z^2]dx = \sqrt{\pi}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$
$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{w^2}{4a})$.
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{w^2}{4a})$.

Svojstva Fourierovih transformacija

TEOREM 7.17 *Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na $[0, \infty)$ i po dijelovima neprekinuta na svakom konačnom intervalu onda Fourierova transformacija $\widehat{f}(w)$ funkcije f postoji.*

TEOREM 7.18 *svojstvo linearnosti*

Neka funkcije f i g imaju Fourierove transformacije. Tada za bilo koje konstante a i b funkcija $af + bg$ ima Fourierovu transformaciju i vrijedi svojstvo linearnosti
$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\} = a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w)$.

Dokaz:

$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x)) \exp(-iwx)dx =$linearnost integrala
$= a\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx + b\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-iwx)dx$
$= a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w)$
$= a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$.

TEOREM 7.19 *pomak u varijabli x-a*

Neka funkcija f ima Fourierovu transformaciju. Tada vrijedi

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \exp(-iwa) \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}.}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x-a)\} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\exp(-iwx)dx \\
&= \text{supstitucija } x-a=p \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp[-iw(p+a)]dp \\
&= \exp(-iwa)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)dp \\
&= \exp(-iwa)\cdot\mathcal{F}\{f(x)\}.
\end{aligned}$$

$\widehat{f}(w-a) = \exp(-iwa)\widehat{f}(w)$.

TEOREM 7.20 *transformacija derivacije*

Neka je funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$ i $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Neka je $f'(x)$ po dijelovima apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}.}$$

Dokaz:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\exp(-iwx)dx$$

$= \text{parcijalna integracija}$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x)\exp(-iwx)|_{-\infty}^{\infty} - (-iw)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-iwx)dx)$$

$= iw\widehat{f}(w)$

$= iw\mathcal{F}\{f(x)\}$.

PRIMJER 7.17 *Pokažite da vrijedi*

$$\boxed{\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}.}$$

Rješenje:

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = iw\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw[iw\mathcal{F}\{f(x)\}] = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

PRIMJER 7.18 *Nađite Fourierovu transfomaciju $\widehat{f}(w)$ zadane funkcije*

$f(x) = x\exp(-x^2)$.

Rješenje:

Koristimo primjer

$g(x) = \exp(-x^2), \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{w^2}{4})$

i svojstvo $\mathcal{F}\{g'(x)\} = iw\mathcal{F}\{g(x)\}$.

$f(x) = x\exp(-x^2) = -\frac{1}{2}g'(x)$

$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{-\frac{1}{2}g'(x)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{g'(x)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{g'(x)\} = -\frac{1}{2}iw\mathcal{F}\{g(x)\}$

$= -\frac{1}{2}iw\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{w^2}{4})$.

TEOREM 7.21 *konvolucije funkcija*

Neka su f i g po dijelovima neprekinute funkcije, ograničene i apsolutno integrabilne na $\mathbb{R}$.

Tada konvolucija funkcija
$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp$
ima Fourierovu transformaciju

$$\boxed{\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\}\cdot\mathcal{F}\{g(x)\}}$$

i vrijedi

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)\exp(iwx)\,dw.}$$

Dokaz:
$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp]\exp(-iwx)\,dx$
=supstitucija $z = x - p$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(z)\exp[-iw(z+p)]\,dp\,dz$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)\cdot g(z)\exp(-iwz)\,dp\,dz$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)\,dp\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\exp(-iwz)\,dz$
$= \sqrt{2\pi}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)\,dp\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\exp(-iwz)\,dz]$
$= \sqrt{2\pi}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)$
$= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\}\cdot\mathcal{F}\{g(x)\}.$
Prema definiciji inverzne Fourierove transformacije
$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{(f*g)}(w)\exp(iwx)\,dw$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)\exp(iwx)\,dw$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)\exp(iwx)\,dw.$

7.5.1 Fourierova kosinusna transformacija i integral

Definicija 7.23 *Fourierov kosinusni integral*

Za parnu funkciju f kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog kosinusnog integrala ako vrijedi

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos(wx)\,dw,}$$

gdje je

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)\,dt.$$

Definicija 7.24 *Fourierova kosinusna transformacija*

Neka je f parna funkcija. Funkcija $\widehat{f_c}(w)$ definirana sa

$$\boxed{\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)\,dx}$$

zove se Fourierova kosinusna transformacija.

Proces dobivanja transformacije $\widehat{f_c}$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova kosinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_c$:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \widehat{f_c}(w), \qquad \mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f_c}(w).$$

Definicija 7.25 *Inverzna Fourierova kosinusna transformacija*

Neka je $\widehat{f_c}(w)$ Fourierova kosinusna transformacija funkcije f.

Inverzna Fourierova kosinusna transformacija funkcije f definira se sa

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \widehat{f_c}(w)\cos(wx)\,dw.}$$

Proces dobivanja funkcije f iz zadane Fourierove kosinusne transformacije $\widehat{f_c}$ također se zove inverzna Fourierova kosinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_c^{-1}$:

$$\widehat{f_c}(w) \xrightarrow{\mathcal{F}_c^{-1}} f(x), \qquad \mathcal{F}_c^{-1}\{\widehat{f_c}(w)\} = f(x).$$

NAPOMENA 7.11 *Fourierova kosinusna transformacija definira se pomoću Fourierovog kosinusnog integrala:*

U Fourierovom integralu

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos(wx)\,dw$$

označimo $A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{f_c}(w)$,

gdje je $\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)\,dt.$

Zato je

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \widehat{f_c}(w)\cos(wx)\,dw.$$

PRIMJER 7.19 *Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju $\widehat{f_c}(w)$ zadane funkcije*
$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{cases}$

Rješenje:
$\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wxdx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a c \cos wxdx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w}.$

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f_c}(w)$

PRIMJER 7.20 *Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju $\widehat{f_c}(w)$ zadane funkcije*
$f(x) = exp(-x),\ 0 < x < \infty.$

Rješenje:
$\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx\, dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x) \cos wx\, dx$
=parcijalna integracija
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}.$
$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f_c}(w);$
$\exp(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}.$

7.5.2 Fourierova sinusna transformacija i integral

Definicija 7.26 *Fourierov sinusni integral*

Za neparnu funkciju f kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog sinusnog integrala ako vrijedi

$$\boxed{f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin(wx)\, dw,}$$

gdje je

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin(wt)\, dt.$$

Definicija 7.27 *Fourierova sinusna transformacija*

Neka je f neparna funkcija. Funkcija $\widehat{f_s}(w)$ definirana sa

$$\boxed{\widehat{f_s}(w) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(wx)\, dx}$$

zove se Fourierova sinusna transformacija.

Proces dobivanja transformacije $\widehat{f_s}$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova sinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_s$:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \widehat{f_s}(w), \qquad \mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f_s}(w).$$

Definicija 7.28 *Inverzna Fourierova sinusna transformacija*

Neka je $\widehat{f_s}(w)$ Fourierova sinusna transformacija funkcije f.

Inverzna Fourierova sinusna transformacija funkcije f definira se sa

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f_s}(w) \sin(wx)\, dw.}$$

Proces dobivanja funkcije f iz zadane Fourierove sinusne transformacije $\widehat{f_s}$ također se zove inverzna Fourierova sinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_s^{-1}$:

$$\widehat{f_s}(w) \xrightarrow{\mathcal{F}_s^{-1}} f(x), \qquad \mathcal{F}_s^{-1}\{\widehat{f_s}(w)\} = f(x).$$

NAPOMENA 7.12 *Fourierova sinusna transformacija definira se pomoću Fourirovog sinusnog integrala:*

U Fourierovom sinusnom integralu

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \cos(wx)\, dw$$

označimo $B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{f_s}(w)$,

gdje je $\widehat{f_s}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(wt)\, dt$. *Zato je*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f_s}(w) \sin(wx)dw.$$

PRIMJER 7.21 *Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju $\widehat{f_s}(w)$ zadane funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Rješenje:

$\widehat{f_s}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a c \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{1-\cos aw}{w}$.

$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f_s}(w)$

PRIMJER 7.22 *Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju $\widehat{f_s}(w)$ zadane funkcije $f(x) = exp(-x), \ 0 < x < \infty$.*

Rješenje:

$\widehat{f_s}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x) \sin wx dx$ =parcijalna integracija

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-x)}{1+w^2} [-w \cos wx - \sin wx]|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2}$.

$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f_s}(w)$;

$\exp(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2}$.

Svojstva Fourierovih sinus i kosinus transformacija

TEOREM 7.22 *Ako je funkcija f apsolutno integrabilna na $[0,\infty)$ i po dijelovima neprekinuta na svakom konačnom intervalu, onda postoje Fourierova kosinusna $\widehat{f_c}(w)$ i sinusna transformacija $\widehat{f_s}(w)$ funkcije f.*

TEOREM 7.23 *svojstvo linearnosti*

Ako su f i g apsolutno integrabilne funkcije na $[0,\infty)$ i po dijelovima neprekinute na svakom konačnom intervalu onda za funkciju $af + bg$ postoje Fourierova kosinusna i sinusna transformacija i vrijedi svojstvo linearnosti

$\mathcal{F}_c\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}_c\{f(x)\} + b\mathcal{F}_c\{g(x)\} = a\widehat{f_c}(w) + b\widehat{g_c}(w)$;

$\mathcal{F}_s\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}_s\{f(x)\} + b\mathcal{F}_s\{g(x)\} = a\widehat{f_s}(w) + b\widehat{g_s}(w)$.

Dokaz:

$\mathcal{F}_c\{af(x) + bg(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (af(x) + bg(x)) \cos wx dx$ =linearnost integrala

$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx + b\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x) \cos wx dx = a\widehat{f_c}(w) + b\widehat{g_c}(w)$

$= a\mathcal{F}_c\{f(x)\} + b\mathcal{F}_c\{g(x)\}$.

TEOREM 7.24 *transformacija derivacije*

Neka je f neprekinuta i apsolutno integrabilna funkcija na [0,∞) i $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Neka je derivacija* f' *po dijelovima neprekinuta na svakom konačnom intervalu. Tada vrijedi*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0);\\ \mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}.\end{array}}$$

Dokaz:

$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos wx\,dx$ =parcijalna integracija

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[f(x)\cos wx|_0^\infty + w\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\widehat{f_s}(w)$

$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\}$.

$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin wx\,dx$ =parcijalna integracija

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[f(x)\sin wx|_0^\infty - w\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx] = 0 - w\widehat{f_c}(w)$

$= -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$.

PRIMJER 7.23 *Pokažite da vrijedi*

$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0);$

$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0).$

Rješenje:

$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0);$

$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + w\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0).$

PRIMJER 7.24 *Nađite Fourierovu kosinusnu transfomaciju* $\widehat{f_c}(w)$ *zadane funkcije*

$f(x) = \exp(-ax),\ a > 0.$

Rješenje:

$f(x) = exp(-ax)$

$f'(x) = -a\exp(-ax);\ f'(0) = -a;$

Iz $f''(x) = a^2\exp(-ax) = a^2 f(x)$i svojstva linearnosti slijedi da je

$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}.$

Osim toga vrijedi

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}a.$$

Zato

$a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, tj.

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$.

Zapisujemo $\exp(-ax) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$;

$\widehat{f_c}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$.

7.6 Primjena Fourierove transformacije za PDJ

Ako je početni ili rubni problem zadan na $\mathbb{R}_+$ onda se mogu koristiti Fourierova kosinusna ili sinusna transformacija, a ako je problem zadan na cijelom $\mathbb{R}$ onda koristimo Fourierovu transformaciju.

PRIMJER 7.25 *PROVOĐENJE TOPLINE KROZ ŠTAP*

Naći temperaturu $u(x,t)$ u štapu konstantnog presjeka uz početne i rubne uvjete:

$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$

Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty.$

Rješenje:

Prisjetimo se:

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$

$t \geq 0, u(0,t) = 0, u(L,t) = 0.$

$u(x,0) = f(x), -L < x < L.$

Koristeći Fourierovu metodu (separacije varijabli) i razvoj funkcije f u Fourierov red nalazimo rješenje

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \exp[-(\frac{cn\pi}{L})^2 t] \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x,$

gdje je $E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.$

Treba riješiti rubni problem

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \\ t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty. \\ u(x,0) = f(x), \ -\infty < x < \infty. \end{array}}$$

Ideja:

1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju na parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Djelovanje na funkciju $u(x,t)$ odnosi se samo na varijablu x :

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t);$$

2. korak: Naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, (koristeći Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$;)

3. korak: Naći inverznu Fourierovu transformaciju $u(x,t)$.

1. korak:

Na zadanu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $u(x,t)$

$$\boxed{\text{PDJ} \qquad \tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)}$$

djelujemo Fourierovom transformacijom

$$\mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\} = \mathcal{F}\{c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}.$$

Računamo desnu stranu koristeći formulu za transformaciju druge derivacije

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\} &= c^2\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\} \\ &= -c^2w^2\mathcal{F}\{u(x,t)\}). \end{aligned}$$

Lijevu stranu računamo po definiciji Fourierove transformacije

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)\,dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)\,dx] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(x,t)\}. \end{aligned}$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu za $\mathcal{F}\{u(x,t)\}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(x,t)\} = -c^2w^2\mathcal{F}\{u(x,t)\}.$$

2. korak: Trebamo riješite običnu diferencijalnu jednadžbu za $\widehat{u}(w,t)$

$$\boxed{\text{ODJ} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(w,t) = -c^2w^2\,\widehat{u}(w,t)}$$

Rješenje ODJ za funkciju $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t je (separacija varijabli)

$\widehat{u}(w,t) = C\exp(-c^2w^2t)$, gdje konstanta $C = C(w)$.

Funkciju $C(w)$ određujemo primjenjujući Fourierovu transformaciju na početni uvjet $u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$:

$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}$

i vrijedi $\widehat{u}(w,0) = C(w) = \widehat{f}(w)$.

Rješenje je

$$\boxed{\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)\exp(-c^2w^2t),}$$

gdje je $\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\exp(-iwx)\,dx$.

3. korak:

Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(w,t)\cdot\exp(iwx)\,dw.}$$

Računamo

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)\,dw\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\cdot\exp(-iwp)\,dp]\cdot\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)\,dw\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-iwp)\cdot\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)\,dw]\,dp\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp[i(wx-wp)]\,dw]\,dp\\
&= \text{Eulerova formula}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot[\cos(wx-wp)+i\sin(wx-wp)]\,dw]\,dp\\
&= \text{integral imaginarnog dijela je jednak 0 jer je neparna funkcija} pow\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\cos(wx-wp)\,dw]\,dp\\
&= \text{podintegralna funkcija je parna po varijabli w}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{0}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\cos(wx-wp)\,dw]\,dp
\end{aligned}
$$

Unutarnji integral rješavamo koristeći supstitucije
$w = \frac{\varphi}{c\sqrt{t}}$ i $b = \frac{x-p}{2c\sqrt{t}}$:
$\int_0^\infty \exp(-c^2w^2t)\cdot\cos(wx-wp)\,dw = \int_0^\infty \exp(-\varphi^2)\cdot\cos(2b\varphi)\,d\varphi$
$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2)$.
Konačno rješenje rubnog problema je

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\cdot\exp[-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}]\,dp}$$

Rješenje možmo dobiti i primjenom transformacije konvolucije.

PRIMJER 7.26 *VALNA JEDNADŽBA*

Naći progib $u(x,t)$ beskonačne žice, $-\infty < x < \infty$, koja poprečno oscilira uz početne i rubne uvjete:
$u(x,0) = f(x)$,*početni progib,*
$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$, *početna brzina*
Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty$.

Rješenje:

Prisjetimo se:
$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$
$t \geq 0, u(0,t) = 0, u(L,t) = 0.$
$u(x,0) = f(x), -L < x < L$
$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0.$

Koristeći Fourierovu metodu (separacije varijabli) i razvoj funkcije f(x) u Fourierov red nalazimo rješenje

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(\frac{cn\pi}{L}t) \cdot \sin(\frac{n\pi}{L}x),$

gdje je $E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi}{L}x.$

Koristeći adicijski teorem za $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha) + \sin(\beta+\alpha)]$ rješenje možemo prikazati kao

$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)],$

gdje je f^* neparna peridička funkcija dobivna od f proširivanjem po neparnosti na $[-L, L]$.

Treba riješiti rubni problem

$$\begin{array}{|c|}\hline \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \\ t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty \\ u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0. \end{array}$$

Ideja:

1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju na parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Djelovanje na funkciju $u(x,t)$ odnosi se samo na varijablu $x:$

$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t),$

2. korak: Naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, (koristeći Fourierovu transformaciju funkcije $f(x)$;)

3. korak: Naći inverznu Fourierovu transformaciju $u(x,t)$.

1. korak:

Na zadanu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za $u(x,t)$

$$\boxed{\text{PDJ} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)}$$

djelujemo Fourierovom transformacijom

$$\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\} = \mathcal{F}\{c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}.$$

Računamo desnu stranu i koristimo svojstvo transformacije druge derivacije

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\} &= c^2\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}\\ &= -c^2 - w^2\mathcal{F}\{u(x,t)\}.\end{aligned}$$

Lijevu stranu računamo po definiciji Fourierove transformacije

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)\,dx\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)\,dx]\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(x,t)\}.\end{aligned}$$

Dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu za $\mathcal{F}\{u(x,t)\}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(x,t)\} = -c^2w^2\mathcal{F}\{u(x,t)\}$$

2. korak: Trebamo riješiti običnu diferencijalnu jednadžbu za $\widehat{u}(w,t)$:

ODJ	$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(w,t) + c^2w^2\widehat{u}(w,t) = 0$

Rješenje ODJ za funkciju $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t je (homogena, drugog reda s konstantnim koeficijentima)

$\widehat{u}(w,t) = A\cos(cwt) + B\sin(cwt)$, gdje su konstante funkcije od $w : A = A(w)$, $B = B(w)$.

Funkcije $A(w)$ i $B(w)$ određujemo primjenjujući Fourierovu transformaciju na početne uvjete:

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty :$$

$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}$,
$\mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(x,0)\}$.
i zato vrijedi

$A(w) = \widehat{f}(w)$,
$cwB(w) = 0 \Rightarrow B(w) = 0$.
Rješenje obične diferencijalne jednadžbe je

$$\boxed{\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)\cos(cwt)}$$

gdje je
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \exp(-iwx)\, dx$.
3. korak:
Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(w,t) \cdot \exp(iwx)\, dw.}$$

Primijenimo transformaciju funkcije pomaknute u varijabli $x - a$
$\widehat{f}(w-a) = \exp(-iwa)\widehat{f}(w)$
i definiciju
$\cos\varphi = \dfrac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2}$:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)\cos(cwt) \cdot \exp(iwx)\, dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \frac{\exp(icwt) + \exp(-icwt)}{2} \cdot \exp(iwx)\, dw \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \exp(icwt) \cdot \exp(iwx)\, dw \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \exp(-icwt) \cdot \exp(iwx)\, dw \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w+ct) \cdot \exp(iwx)\, dw \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w-ct) \cdot \exp(iwx) d\, w \\
&= \frac{1}{2} \cdot f(x+ct) + \frac{1}{2} \cdot f(x-ct).
\end{aligned}$$

Rješenje rubnog problema je

$$\boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2} f(x+ct) + \tfrac{1}{2} f(x-ct).}$$

7.7 Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

U praksi je često funkcija f zadana s vrijednostima u konačno mnogo točaka

$$f_k = f(x_k),\ k = 0, 1, ..., N-1.$$

U tom slučaju Fourierova transformacija se zamjenjuje s diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT).

Definicija 7.29 *DFT i IDFT*

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π. Za fiksni $N \in \mathbb{N}$ vektor $\mathbf{f} = [f_0\ f_1 \dots f_{N-1}]^T$, s vrijednostima $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$, u točkama $x_k = \frac{2kpi}{N}$ je zadani signal. Diskretna Fourierova transformacija je vektor

$$\widehat{\mathbf{f}} = [\widehat{f_0}\ \widehat{f_1} \dots \widehat{f_{N-1}}]^T,$$

s komponentama

$$\widehat{f_n} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,n\,x_k},\ \ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Vektor $\widehat{\mathbf{f}}$ se zove i frekventni spektar signala.

Inverzna diskretna Fourierova transformacija je vektor

$$\mathbf{f} = [f_0\ f_1 \dots f_{N-1}]^T,$$

s komponentama

$$f_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f_n}\, e^{i\,k\,x_n},\ \ k = 0, 1, ..., N-1.$$

NAPOMENA 7.13 *Za fiksni $N \in \mathbb{N}$ i periodičku funkciju f s periodom 2π s vrijednostima $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$ u točkama $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ treba odrediti kompleksni trigonometrijski interpolacijski polinom $p(x)$ tako da vrijedi $p(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$.*

Kompleksni trigonometrijski polinom pretpostavimo u obliku

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{i\,n\,x}.$$

Trebamo odrediti koeficijente $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$ *tako da vrijedi*

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{i\,n\,x_k}.$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu s $e^{-i\,m\,x_k}$ *i sumiramo po* $k = 0, ..., N-1$.

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,m\,x_k} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{-i\,m\,x}\, e^{i\,n\,x_k}.$$

Nakon promjene poretka sumacije vrijedi

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,m\,x_k} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\,(n-m)\,x_k}.$$

Nakon uvođenja oznake $q = e^{i\,(n-m)\frac{2\pi}{N}}$ *imamo prikaz*

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,m\,x_k} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=0}^{N-1} q^k.$$

Trebamo izračunati desnu stranu.
Za $n = m$ *vrijednost od* $q = 1$ *pa je suma* $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = N$.
Za $n \neq m$ *parcijalna suma geometrijskog reda* $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q} = 0$ *jer je* $q^N = 1$.
Zato vrijedi

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,m\,x_k} = N\, c_m.$$

Odredili smo tražene koeficijente za interpolacijski polinom p :

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,n\,x_k}.$$

Diskretnu Fourierovu transformaciju definiramo

$$\widehat{f_n} = N\, c_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\,n\,x_k},\ \ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Definicija 7.30 *DFT i IDFT-matrični zapis*

Diskretna Fourierova transformacija u matričnom zapisu je

$$\widehat{\mathbf{f}} = E_N \mathbf{f}$$

gdje je $E_N = [e_{nk}]$ *Fourierova matrica reda N s elementima*

$$e_{nk} = e^{-i\,n\,x_k} = (e^{\frac{-2\pi i}{N}})^{n\cdot k}, \;\; n,k = 0,1,...,N-1.$$

Uz oznaku $w_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}$

$$e_{nk} = w_N^{n\cdot k}, \;\; n,k = 0,1,...,N-1.$$

Fourierova matrica je

$$E_N = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 & ... \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & ... \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & ... \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

Inverzna diskretna Fourierova transformacija u matričnom zapisu je

$$\mathbf{f} = E_N^{-1} \widehat{\mathbf{f}}$$

i vrijedi $E_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{E}_N$.

PRIMJER 7.27 *Neka je zadan signal* $\mathbf{f} = [0\;1\;4\;9]^T$. *Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju (frekventni spektar signala)* $\widehat{\mathbf{f}}$.

Rješenje:

$$\widehat{\mathbf{f}} = E_4 \mathbf{f}$$

$$e_{nk} = (e^{\frac{-\pi i}{2}})^{n\,k} = (-i)^{n\,k}, \;\; n,k = 0,1,2,3.$$

$$\widehat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4+8i \\ -6 \\ -4-8i \end{bmatrix}$$

PRIMJER 7.28 *Neka je zadan frekventni spektar* $\widehat{\mathbf{f}} = [14 \ \ -4+8i \ \ -6 \ \ -8-8i]^T$. *Odredite inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju* **f**.

Rješenje:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N}\overline{E}_N \widehat{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ -4+8i \\ -6 \\ -4-8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

NAPOMENA 7.14 *tko želi znati više*

Iz frekventnog spektra $\widehat{\mathbf{f}}$ *može se dobiti zadani signal* **f**.

$$\widehat{\mathbf{f}} = E_N \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f} = E_N^{-1} \widehat{\mathbf{f}}.$$

Označimo sa $G_N = [g_{jk}]$ *produkt Fourierove matrice* $E_N = [w^{nk}]$ *i njene konjugirane* $\overline{E}_N = [\overline{w}^{nk}]$

$$G_N = \overline{E}_N \, E_N.$$

Označimo j-ti redak matrice $\overline{E}_N$

$$[\overline{w}^0 \ \overline{w}^j \ \overline{w}^{2j} \ \overline{w}^{kj} \ \ldots \overline{w}^{(N-1)\,j}].$$

Označimo k-ti stupac matrice E_N

$$[w^0 \ w^k \ w^{2k} \ w^{jk} \ .. \ w^{(N-1)\,k}].$$

Zato je

$$g_{jk} = (\overline{w}\, w)^0 + (\overline{w}^j\, w^k)^1 + (\overline{w}^j\, w^k)^2 + \ldots + (\overline{w}^j\, w^k)^{N-1}.$$

Za $j = k$ *svaki od pribrojnika* $(\overline{w}^j\, w^j) = 1$ *pa je*

$$g_{kk} = N.$$

Za $j \neq k$ *i za* $q = \overline{w}^j\, w^k$ *parcijalna suma geometrijskog reda je*

$$q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q} = 0$$

jer je $q^N = 1$. *Dobili smo vrijednosti*

$$g_{jk} = 0,\ j \neq k.$$

Matrica $G_N = N\,I$.

$$\overline{E}_N\,E_N = E_N\,\overline{E}_N = N\,I$$

pa je inverz Fourierove matrice dan sa

$$E_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{E}_N.$$

NAPOMENA 7.15 *tko želi znati više-seminar*

Da bi se analogni, vremenski kontinuirani signal mogao digitalno obraditi potrebno ga je otipkati u vremenu. To znači da od vremenski kontinuiranog signala uzimamo samo određene uzorke. Ti se uzorci uzimaju najcečešće s jednakim vremenskim razmakom T. Takav T se naziva period otipkavanja, pa vremenske trenutke u kojima se obavlja otipkavanje možemo opisati nizom: $t_n = T \cdot n$, $-\infty < n < \infty$. *Tim postupkom se od vremenski neprekinutog signala* $x(t)$ *dobiva diskretni niz uzoraka* $x[n]$:

$$x[n] = x(nT),\ -\infty < n < \infty.$$

Ako je $x(t) = \cos(2\pi \cdot 90 \cdot t)$, *i ako je* $T = \frac{1}{100}$*Hz onda je*

$$x[n] = x(nT) = \cos(2\pi \cdot \frac{90}{100} \cdot n) = \cos(2\pi \cdot \frac{10}{100} \cdot n).$$

To znaci da kosinusoide frekvencija 10 Hz i 90 Hz imaju istog reprezentanta u vremenski diskretnoj domeni, pa je nakon otipkavanja nemoguce odrediti o kojoj se od njih dvije radilo. Kōd odabira frekvencije otipkavanja neprekinutog signala dan je Nyquist-ovim teoremom otipkavanja.

7.7.1 Brza Fourierova transformacija-(FFT)

U primjenama je potrebno uzeti veliki broj točaka. Efekt aliasing se pojavljuje pri uzorkovanju malim brojem točaka (npr. kod pokretne slike - rotacija kotača je prespora ili u obrnutom smjeru.) Zato je u primjenama potrebno uzeti veliki broj točaka N i to predstavlja problem. Prema formuli za $\widehat{f_n}$ potrebno je $O(N)$ operacija za svaki n, tj. $O(N^2)$ operacija za npr. sve

$n < N/2$. Za N=1000 uzorkovanih točaka potrebno je milijun operacija. Ovaj problem se može riješiti brzom Fourierovom metodom (FFT) čiji je kōd dostupan. FFT je metoda za DFT kojoj treba samo $O(log_2(N)$ operacija umjesto $O(N^2)$. Zato se FFT primjenjuje za velike N. Za N=1000 uzorkovanih točaka potrebno je $O(log_2(N) \approx 10000$ operacija (sto puta manje nego DFT metodom).

Kod brze Fourierove metode broj $N = 2M$ kako bi rastavili problem na dva manje problema veličine M. Zadani vektor $\mathbf{f} = [f_0 \, ... \, f_{N-1}]$ promatramo kao dva vektora

$$\mathbf{f}_{par} = [f_0 \;\, f_2 \;\, f_4 \, ... \, f_{N-2}]$$

$$\mathbf{f}_{nep} = [f_1 \;\, f_3 \, ... \, f_{N-1}].$$

Za zadane signale $\mathbf{f}_{par}$ i $\mathbf{f}_{nep}$ odredimo DFT

$$\widehat{\mathbf{f}}_{par} = E_M \, \mathbf{f}_{par}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_{nep} = E_M \, \mathbf{f}_{nep}.$$

Komponente $\widehat{\mathbf{f}}$, $\widehat{\mathbf{f}}_{par}$ i $\widehat{\mathbf{f}}_{nep}$ vezane su sljedećim relacijama

$$\widehat{f_n} = \widehat{f_{par,n}} + w_N^n \, \widehat{f_{nep,n}}, \quad n = 0, 1, ..., M-1$$

$$\widehat{f_{n+M}} = \widehat{f_{par,n}} - w_N^n \, \widehat{f_{nep,n}}, \quad n = 0, 1, ..., M-1.$$

Pretpostavimo da je $N = 2^p$ i $p-1$ put ponovimo gornji postupak kako bi se dobile matrice reda 2.

PRIMJER 7.29 *Neka je zadan signal* $\mathbf{f} = [0149]^T$. *Odredite brzu Fourierovu transformaciju* $\widehat{\mathbf{f}}$.

Rješenje:
Za $N = 4 = 2M$ odredimo

$$w_M = e^{\frac{-2\pi i}{M}} = -1,$$

$$w_N = e^{\frac{-2\pi i}{M}} = -i,$$

Matrica transformacije

$$E_2 = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_{par} = E_2 \mathbf{f}_{par}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_{par} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+4 \\ 0-4 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_{nep} = E_2 \mathbf{f}_{nep}$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_{nep} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9 \\ 1-9 \end{bmatrix}$$

Koristeći relacije

$$\widehat{f_n} = \widehat{f_{par,n}} + w_N^n \widehat{f_{nep,n}}, \quad n = 0, 1, ..., M-1$$

$$\widehat{f_{n+M}} = \widehat{f_{par,n}} - w_N^n \widehat{f_{nep,n}}, \quad n = 0, 1, ..., M-1$$

odredit ćemo

$$\widehat{f_0} = \widehat{f_{par,0}} + w_N^0 \widehat{f_{nep,0}} = 14$$

$$\widehat{f_1} = \widehat{f_{par,1}} + w_N^1 \widehat{f_{nep,1}} = -4 + 8\,i$$

$$\widehat{f_{0+2}} = \widehat{f_{par,0}} - w_N^0 \widehat{f_{nep,0}} = -6$$

$$\widehat{f_{1+2}} = \widehat{f_{par,1}} - w_N^1 \widehat{f_{nep,1}} = -4 - 8\,i$$

Frekventni spektar signala je

$$\widehat{\mathbf{f}} = [14,\ -4+8,\ i\ -6,\ -4-8\,i].$$

7.8 Primjer kolokvija

PRIMIJENJENA MATEMATIKA - KOLOKVIJ- FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

1. (15 bodova) Štap je dug 100cm. Temperatura na rubovima je 0°C, (konstanta $c = 1$)

Napišite rješenje $u(x, t)$ -temeperatura u trenutku t na mjestu x (koristite Fourierovu metodu separacije varijabli- možete koristiti završnu formulu).

(a) Početna rapodjela temperature je $f(x) = 200\sin\frac{2\pi x}{100}$.

Odredite rješenje $u(x,t)$ -temeperatura u trenutku t na mjestu x (koristite Fourierovu metodu separacije varijabli- možete koristiti završnu formulu).

Nakon koliko minuta će maksimalana temperatura biti ispod $100°C$?

(b) Početna rapodjela temperature je

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 50 \\ 100 - x, & 50 < x < 100. \end{cases}$$

Napišite rješenje $u(x,t)$-temperaturu u trenutku $t = 10000$.

(Koristite razvoj funkcije $f(x)$ u Fourierov red)

(c) Napišite parcijalnu diferencijalnu jednadžbu provođenja topline kroz štap čiji je jedan kraj u ishodištu, a drugi teži u beskonačnost, tako da je temperatura na rubovima $0°C$, a početna raspodjela temperature zadana funkcijom $f(x)$. Izvedite rješenje za temperaturu u štapu $u(x,t)$ koristeći Fourierovu sinusnu transformaciju. (Koristite $\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + w\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$)

2. (5 bodova) Odredite Fourierovu transformaciju funkcije

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & 0 \le x \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Koristeći definiciju Fourierove transformacije;

(b) Koristeći svojstva Fourierove transformacije i poznatu činjenicu da je Fourierova transformacija funkcije

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \le x \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iw}$.

Dio III

Literatura

Bibliografija

[1] J. W. Dettman, Applied Complex Variables Mathematics, Series: Dover Books on Mathematics, Dover Publications Inc. New York, 2010

[2] N. Elezović, Matematika 3: Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, Element, Zagreb, 2008.

[3] N. Elezović, Matematika 3: Funkcije kompleksne varijable, Element, Zagreb, 2011.

[4] I. Ivanšić, Fourierov red i integral- Diferencijalne jednadžbe, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1987.

[5] V. Jović, Osnove hidromehanike, Element, Zagreb, 2006.

[6] E. Kreyszig, Advanced engineering mathematics, John Wiley & sons, Inc., New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1993.

[7] J. H. Mathews and R. W. Howell, COMPLEX ANALYSIS: for Mathematics and Engineering, Sixth Edition, Jones and Bartlett Pub. Inc. Sudbury, MA, 2012.

[8] M. R. Spiegel, Shaum's outline of Theory and problems of Complex variables, McGRAW-Hill Book Company, New York St. Louis San Francisco Toronto Sydney, 1972.