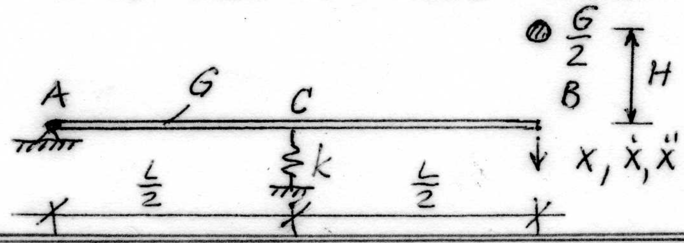
ŠTAP $\overline{AB}$ TEŽINE G, DULJINE L VEZAN JE ZGLOBNO U A I OSLONJEN NA OPRUGU KRUTOSTI k U TOČKI C.
ŠTAP MIRUJE U RAVNOTEŽNOM POLOŽAJU. SA VISINE H PADNE KUGLICA TEŽINE G/2 I UDARI U KRAJ B. ODREDI:

a) ZAKON MALIH OSCILACIJA ŠTAPA NAKON UDARA KUGLICE AKO JE KOEF. ELAST. SRAZA λ

b) ZAKON MALIH OSCILACIJA ŠTAPA NAKON UDARA KUGLICE AKO JE SRAZ PLASTIČAN.



AD a)

NAKON UDARA KUGLICE U ŠTAP DOĆI ĆE DO OSCILACIJA ŠTAPA.

DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA MALIH SLOBODNIH OSCILACIJA SISTEMA SA JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GLASI:

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

GDJE JE Ω KRUŽNA FREKVENCIJA (BROJ OSCILACIJA U 2π SEKUNDA)

ZAKON OSCILACIJA (RJEŠENJE GORNJE DIF. JEONADŽBE) GLASI:

$$x(t) = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t$$

GDJE SU C_1 I C_2 KONSTANTE KOJE OVISE O POČETNIM UVJETIMA.
POČETNI UVJETI SU POMAK x_0 I BRZINA $\dot{x}_0$ U TRENUTKU KAD OSCILACIJE POČINJU TJ. ZA $t=0$.
UVRŠTAVANJEM POČETNIH UVJETA U ZAKON OSCILACIJA DOBIJEMO DA JE:

$$C_1 = x_0 \quad ; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\Omega}$$

X JE POMAK JEDNE ODABRANE TOČKE SISTEMA MJEREN OD RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA

x_0 I $\dot{x}_0$ ODREĐUJU SE IZ PODATAKA ZADANIH ZADATKOM.

U NAŠEM SLUČAJU POČETNI POMAK $\underline{x_0 = 0}$ JER OSCILACIJE POČINJU IZ RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA A $\dot{x}_0$ JE BRZINA KOJU ĆE ŠTAP IMATI NEPOSREDNO NAKON UDARA KUGLICE (TJ. SRAZA KUGLICE I ŠTAPA).
TU BRZINU DOBITI ĆEMO IZ ZAKONA KOJI VAŽE ZA SRAZ:

1) MOMENT KOLIČINE GIBANJA PRIJE I POSLIJE SRAZA JE ISTI.

2) KOEF. ELASTIČNOSTI SRAZA $\quad \lambda = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{u}_2}{\vec{u}_1 - \vec{v}_1}$

$\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ SU BRZINE KUGLICE PRIJE I POSLIJE SRAZA
$\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ SU BRZINE TOČKE B ŠTAPA PRIJE I POSLIJE SRAZA.
(UZIMAJU SE POZITIVNE AKO SU SVE ISTOG SMJERA)
$v_1 = 0$

u_1 = BRZINA SLOBODNOG PADA NAKON PREVALJENOG PUTA H.

$$u_1 = \sqrt{2gH}$$

ad. 1) MOMENT KOL. GIBANJA ŠTAPA PRIJE SRAZA = 0.
POSLIJE SRAZA :

$$J_A \cdot \omega_2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{L^2}{3} \cdot \omega_2$$

GDJE JE ω = KUTNA BRZINA ŠTAPA

$$0 + \frac{G}{2g} \cdot u_1 \cdot L = \frac{G}{2g} \cdot u_2 \cdot L + \frac{G}{g} \cdot \frac{L^2}{3} \cdot \omega_2 \quad \ldots (1)$$

$$\lambda = \frac{v_2 - u_2}{\sqrt{2gH} - 0} \quad \ldots (2)$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{L} \quad \ldots (3)$$

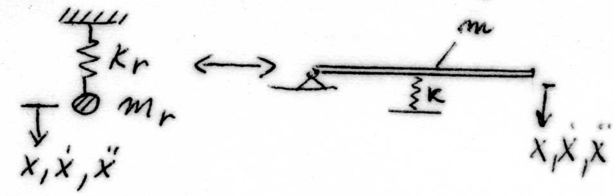
RJEŠENJEM OVIH JEDNADŽBI DOBIJEMO :

$$\underline{v_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2gH}\,(1+\lambda)} \qquad \underline{u_2 = \frac{1}{5}\sqrt{2gH}\,(3-2\lambda)}$$

v_2 = POČETNA BRZINA TOČKE B, U TRENUTKU POČETKA OSCILACIJA ($v_2 = \dot{x}_0$)

KRUŽNA FREKVENCIJA Ω ZA ZADANI SISTEM DOBIVA SE IZ IZRAZA

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$$



k_r I m_r SU MASA I KRUTOST REDUCIRANOG SISTEMA KOJI ZA ISTU BRZINU $\dot{x}$ I ISTI POMAK x IMA ISTU KINETIČKU I ISTU POTENCIJALNU ENERGIJU KAO I ZADANI SISTEM

REDUCIRANA KRUTOST :

$$\frac{k_r \cdot x^2}{2} = \frac{k \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$$

KOD POTENCIJALNE ENERGIJE UZIMA SE SAMO POTENCIJAL OPRUGE I TO OD DINAMIČKE DEFORMACIJE (BEZ x_{st})

$$\frac{k_r \cdot x^2}{2} = \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot 4}$$

$$\underline{\underline{k_r = \frac{k}{4}}}$$

REDUCIRANA MASA :

$$\frac{m_r \cdot \dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega^2 \qquad \omega = \frac{\dot{x}}{L} = \text{KUTNA BRZINA}$$

$$\frac{m_r \cdot \dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{G}{g} \cdot L^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{L^2}$$

$$\underline{\underline{m_r = \frac{G}{3g}}}$$

KRUŽNA FREKVENCIJA $\Omega = \sqrt{\dfrac{\frac{K}{4}}{\frac{G}{3g}}} = \sqrt{\dfrac{3g \cdot k}{4G}}$

ZAKON OSCILACIJA TOČKE B GLASI :

$$x_B(t) = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2gH}\,(1+\lambda) \cdot \sqrt{\frac{4G}{3gk}}\, \sin \sqrt{\frac{3gk}{4G}} \cdot t$$

ODNOSNO :

$$\boxed{x_B(t) = \frac{(1+\lambda)}{5} \sqrt{\frac{24H \cdot G}{k}} \cdot \sin \sqrt{\frac{3g \cdot k}{4G}} \cdot t}$$

PERIOD JEDNOG CIKLUSA OSCILACIJA :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{4G}{3g \cdot k}}$$

KRUŽNA FREKVENCIJA Ω JE DINAMIČKA KARAKTERISTIKA ZADANOG SISTEMA I OVISI ISKLJUČIVO O RASPOREDU MASA I ELASTIČNIH OPRUGA U SISTEMU, A NE O POČETNIM UVJETIMA.

ad B)

PROMJENOM KOEF. ELASTIČNOSTI SRAZA λ (ON JE ZA PLASTIČNI SRAZ $=0$) PROMJENITI ĆE SE POČETNI UVJETI, A ZBOG DODAVANJA MASE U SISTEM PROMJENITI ĆE SE I Ω.

ZA PLASTIČNI SRAZ JE KARAKTERISTIČNO DA SE TIJELA ILI MATERIJALNE TOČKE KOJE SE SUDARAJU, NAKON SRAZA NASTAVLJAJU GIBATI ZAJEDNO.

DAKLE : $u_2 = v_2$ (JER JE $\lambda = 0$) ... (1)

MOMENT KOLIČINE GIBANJA PRIJE I POSLIJE SRAZA OSTAJE ISTI :

$$\frac{G}{2g} \cdot u_1 \cdot L = \left(\frac{1}{3} \frac{G}{g} L^2 + \frac{G}{2g} \cdot L^2\right) \cdot \omega_2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

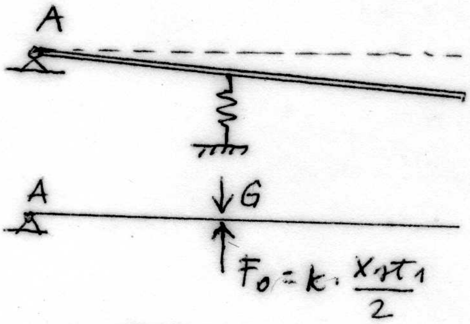
$$\omega_2 = \frac{v_2}{L} = \text{KUTNA BRZINA ŠTAPA} \qquad \ldots (3)$$

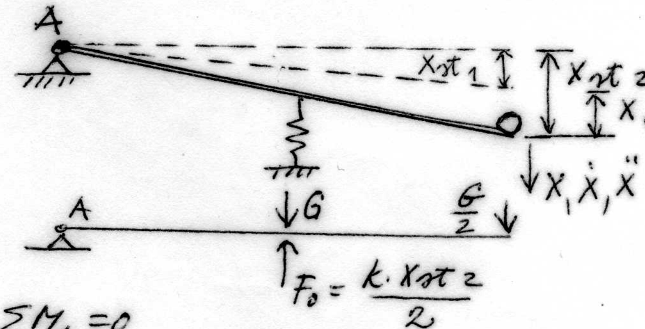
RIJEŠENJEM OVIH JEDNADŽBI DOBIVAMO POČETNU BRZINU OSCILACIJA.

$$v_2 = \frac{3}{5}\sqrt{2g\cdot H} = \dot{x}_0$$

KAKO SE ZAKON OSCILACIJA $x(t)$ IZRAŽAVA U ODNOSU NA RAVNOTEŽNI POLOŽAJ IMATI ĆEMO SADA I POČETNI POMAK x_0 POŠTO SE U SISTEMU POVEĆALA MASA (ZALIJEPILA SE KUGLICA) SISTEM ĆE OSCILIRATI OKO NOVOG RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA.

SISTEM KOJI OSCILIRA NAKON SRAZA JE ŠTAP I ZA NJEGA ZALIJEPLJENA KUGLICA, OSCILACIJE SE MJERE OD RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA TOG SISTEMA, A POČINJU OD RAVNOTEŽNOG POLOŽAJA SAMOG ŠTAPA (BEZ KUGLICE).





$$k\cdot\frac{x_{st1}}{2} = G \qquad\qquad \Sigma M_A = 0$$

$$x_{st1} = \frac{2G}{k} \qquad\qquad G\cdot\frac{L}{2} + \frac{G}{2}\cdot L - \frac{k\cdot x_{st2}}{2}\cdot\frac{L}{2} = 0$$

$$x_{st2} = \frac{4G}{k}$$

$$x_0 = -(x_{st2} - x_{st1}) = -\frac{4G}{k} + \frac{2G}{k} = -\frac{2G}{k}$$

$$x(t) = x_0\cdot\cos\Omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cdot\sin\Omega t$$

$$x(t) = -\frac{2G}{k}\cdot\cos\Omega t + \frac{3\sqrt{2gH}}{5\cdot\omega}\cdot\sin\Omega t$$

Ω JE KRUŽNA FREKVENCIJA SISTEMA KOJI OSCILIRA.

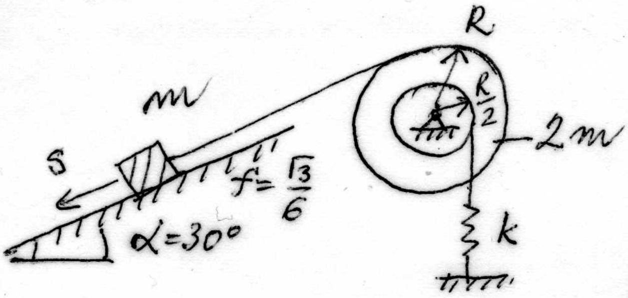
$\Omega = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$ $\qquad k_r$ SE NE MIJENJA JER NISMO MIJENJALI ELASTIČNA SVOJSTVA SISTEMA $k_r = \frac{k}{4}$

$$\frac{m_r\cdot\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{G}{g}L^2 + \frac{G}{2g}\cdot L^2\right)\cdot\frac{\dot{x}^2}{L^2} = \frac{1}{2}\,\frac{G}{g}\cdot\frac{5}{6}\dot{x}^2$$

$$m_r = \frac{5}{6}\frac{G}{g} \qquad\qquad \Omega = \sqrt{\frac{k\cdot 6\cdot g}{4\cdot 5\cdot G}} = \sqrt{\frac{3k\cdot g}{10G}}$$

ZAKON OSCILACIJA TOČKE B U OVOM SLUČAJU GLASI:

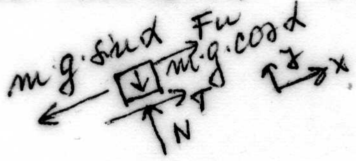
$$x(t) = -\frac{2G}{k}\cdot\cos\sqrt{\frac{3k\cdot g}{10G}}\cdot t + \sqrt{\frac{12GH}{5k}}\cdot\sin\sqrt{\frac{3k\cdot g}{10G}}\cdot t$$



NA ZADANI SISTEM KOJI MIRUJE U PRIKAZANOM POLOŽAJU DJELUJE IMPULS S. TREBA ODREDITI MAKSIMALNU DEFORMACIJU OPRUGE KOJA ĆE NASTATI NAKON DJELOVANJA IMPULSA.

---

1) POŠTO SISTEM MIRUJE BEZ VANJSKOG DODATNOG PRIDRŽANJA TREBA ISPITATI RAVNOTEŽU, ODNOSNO ODREDITI STATIČKU DEFORMACIJU OPRUGE AKO ONA POSTOJI:



– RAVNOTEŽA MASE m NA KOSINI:

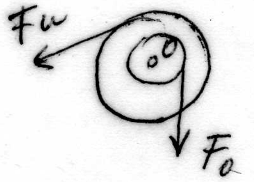
$\Sigma F_y = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_x = 0$

$N = m\cdot g\cdot\cos\alpha$ $\qquad$ $F_u = m\cdot g\sin\alpha - T$

$T = f\cdot N$

$F_u = m\cdot g\cdot\sin\alpha - f\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha = m\cdot g\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot m\cdot g\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_u = \frac{m\cdot g}{4}$

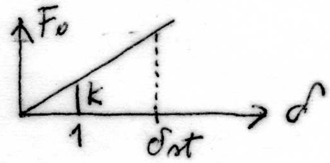


– RAVNOTEŽA KRUŽNOG DISKA ZGLOBNO VEZANOG U TOČKI O:

$\Sigma M_o = 0 \qquad F_u\cdot R - F_o\cdot\frac{R}{2} = 0 \quad /:R$

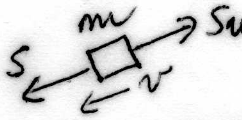
POŠTO JE SILA U OPRUGI PROPORCIONALNA KRUTOSTI I DEFORMACIJI ($F_o = k\cdot\delta_{st}$) RAVNOTEŽA JE MOGUĆA SAMO UZ ISTEGNUTU OPRUGU:

$\frac{m\cdot g}{4} = k\cdot\delta_{st}\cdot\frac{1}{2} \longrightarrow \delta_{st} = \frac{m\cdot g}{2k}$



2) USLJED DJELOVANJA IMPULSA MIJENJA SE KOLIČINA GIBANJA SISTEMA I ON IZ MIROVANJA PRELAZI U GIBANJE.

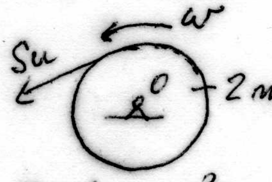
NEPOSREDNO NAKON IMPULSA MATERIJALNA TOČKA POČINJE GIBANJE NIZ KOSINU BRZINOM v I POVLAČI KRUŽNI DISK KOJI SE ZAROTIRA KUTNOM BRZINOM ω. U TRENUTKU DJELOVANJA VANJSKOG IMPULSA JAVLJAJU SE REAKTIVNI IMPULSI U VEZAMA SISTEMA.
PRESIJECANJEM UŽETA ODVAJAMO TOČKU OD KRUŽNOG DISKA TE MORAMO VEZU NADOKNADITI REAKTIVNIM IMPULSOM I POSTAVLJANJEM DODATNIH JEDNADŽBI KOMPATIBILNOSTI GIBANJA (3):



$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Sigma\vec{S}$

$v_2 = v \;;\; v_1 = 0$

$m\cdot v = S - S_u \quad \ldots(1)$ $\qquad$ $\omega\cdot R = v \quad \ldots(3)$



$J_o\vec{\omega}_2 - J_o\vec{\omega}_1 = \Sigma\vec{M}(s)_o$

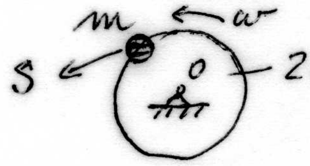
$\omega_2 = \omega \;;\; \omega_1 = 0$

$J_o = \frac{1}{2}2mR^2 = mR^2$ $\qquad$ $mR^2\cdot\omega = S_u\cdot R \quad \ldots(2)$

RIJEŠENJEM SISTEMA JEDNADŽBI (1), (2) i (3) DOBIVAMO:

$$\boxed{\omega = \frac{S}{2m\cdot R}} \quad i \quad \boxed{v = \frac{S}{2m}} \qquad \boxed{S_u = \frac{S}{2}}$$

UMJESTO PRIKAZANOG POSTUPKA MOGLI SMO PROMATRATI SISTEM U CJELINI POŠTO SVE MASE ROTIRAJU OKO JEDNOG CENTRA, A DUŽINA UŽETA NE UTJEČE NA RJEŠENJE:



$$J_o^* \cdot \vec{\omega}_2 - J_o^* \vec{\omega}_1 = \Sigma \vec{M}_o(S)$$

$$J_o^* = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot R^2 + m \cdot R^2 = 2mR^2$$

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \omega$$

$$2mR^2 \cdot \omega = S \cdot R$$

$$\underline{\omega = \frac{S}{2mR}} \qquad \underline{v = \omega \cdot R = \frac{S}{2m}}$$

3) KINETIČKA ENERGIJA SISTEMA NEPOSREDNO NAKON DJELOVANJA IMPULSA JEDNAKA JE UKUPNOJ KINETIČKOJ ENERGIJI ROTACIJE OBJE MASE OKO CENTRA O ILI ZBROJU KINETIČKIH ENERGIJA POJEDINIH MASA:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_o \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J_o^* \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2mR^2 \cdot \left(\frac{S}{2mR}\right)^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{4} \frac{S^2}{m}}$$

4) ZA ODREĐIVANJE MAKSIMALNE DEFORMACIJE OPRUGE TREBA UOČITI DA ĆE SE SISTEM NASTAVITI GIBATI NIZ KOSINU SVE DOK SE KINETIČKA ENERGIJA NE „UTROŠI" NA DEFORMACIJU OPRUGE I SVLADAVANJE TRENJA IZMEĐU MATERIJALNE TOČKE I PODLOGE. U TOM TRENUTKU SISTEM ĆE DOBITI MAKSIMALNI OTKLON OD POČETNOG POLOŽAJA TE ĆE SE NAKON TOGA GIBATI U SUPROTNOM SMJERU.

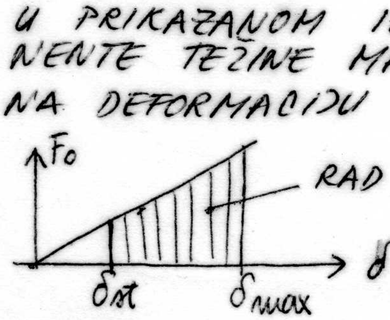
U TRENUTKU MAKSIMALNOG OTKLONA BRZINA SISTEMA JE JEDNAKA NULI (ZBOG PROMJENE PREDZNAKA v) TJ. $E_k = 0$.

OPĆENITO:

$$\Delta E_k = \Sigma A$$

$$0 - \frac{1}{4}\frac{S^2}{m} = (m \cdot g \cdot \sin\alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha) \cdot 2(\delta_{max} - \delta_{st}) - \left(\frac{1}{2} k \cdot \delta_{max}^2 - \frac{1}{2} k \cdot \delta_{st}^2\right)$$

U PRIKAZANOM IZRAZU POZITIVNI RAD JE USLJED KOMPONENTE TEŽINE MASE m, NEGATIVNI TJ. UTROŠENI RAD JE NA DEFORMACIJU OPRUGE ODNOSNO RAD SILE TRENJA.



RAD UTROŠEN NA DEFORMACIJU OPRUGE

IZ GORNJEG IZRAZA → $\boxed{\delta_{max} = \delta_{st} + \sqrt{\frac{S}{2m \cdot k}}}$