PRIMIJENJENA MATEMATIKA 1.KOLIKVIJ - FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE I PRIMJENA primjer

1. Funkcija kompleksne varijable zadana je pomoću ________ funkcije ________ realne varijable.

2. Funkcija e^z periodična je s periodom ________

3. Izračunaj e^i

$e^i =$ ____________________.

4. Izračunaj glavnu vrijednost Lni

$Lni =$ ________________________.

5. Riješi jedandžbu u skupu kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$

(a) $e^z = 4 + 4i$,

$z =$ ______________________________.

(b) $e^z = -2$

$z =$ ______________________________.

6. Funkcija $f(z) = \overline{z}$ nije derivabilna. DA NE

7. Za funkciju $f : D \to \mathbb{C}$, gdje je D područje u $\mathbb{C}$, kažemo da je analitička na D ako funkcija ima ________________ derivaciju na D.

8. Funkcija $f(z) = \frac{1}{z}$ je analitička na D=____________.

9. Ako je funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička na D onda funkcije $u(x, y)$, $v(x, y)$ zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednadžbe :

(1) ,(2) .

10. Za funkcija $U(x, y)$ kažemo da je harmonijska ako ima neprekinute druge parcijalne derivacije i ako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

__________________.

11. Cauchy-Riemannove jednadžbe u polarnom sustavu za $f(z) = u(r,\varphi)+ iv(r, \varphi)$ su:

(1) , (2) .

12. Za funkcija $U(r, \varphi)$kažemo da je harmonijska ako ima neprekinute druge parcijane derivacije i ako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\triangle U(r, \varphi) = 0$,tj.

__________________________.

13. Ako je funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička na D onda su funkcije $u(x, y)$, $v(x, y)$ __________________ na D.

14. Odredite analitičku funkciju $f(z)$ čiji je realni dio funkcija $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x$.

$f(z) =$ __________________________.

15. Parametrizacija krivulje Γ u kompleksnoj ravnini zadana je s :

$z(t) =$ __________________________, $t \in [t_1, t_2]$.

16. Ako je funkcija $f(z)$analitička na D u kojem leži po dijelovima glatka krivulja Γ zadana parametrizacijom $z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_1, t_2]$ onda je

$\int_\Gamma f(z)dz =$.

17. Napišite parametrizaciju krivulje $\Gamma = \overline{AB}$, $A = 0, B = 4 + 2i$.

$z(t) =$, $t \in [0, 4]$.

Izračunajte $\int_{\overline{AB}}(z+3)dz$

$\int_{\overline{AB}}(z+3)dz =$.

16. Napišite parametrizaciju krivulje $\Gamma = |z - i| = 1$.

$z(t) =$, $t \in [0, 2\pi]$.

Izračunajte $\int_\Gamma \frac{1}{z-i}dz$, ako je $\Gamma = |z - i| = 1$

$\int_\Gamma \frac{1}{z-i}dz =$.

18. Ako je funkcija $f(z)$ analitička na D u kojem leži po dijelovima glatka krivulja Γ onda

$\int_\Gamma f(z)dz$ ne ovisi o krivulji nego samo o A početnoj i B krajnjoj točki krivulje Γ:

$\int_A^B f(z)dz =$,gdje je F primitivna funkcija od f, tj. $F\prime(z) = f(z)$.

19. Izračunajte $\int_{\overline{AB}}(z+3)dz, A = 0, B = 4 + 2i$.

$\int_{\overline{AB}}(z+3)dz =$.

20.Cauchyjeva integralna formula kaže kako izračunati vrijednost analitičke funkcije na jednostruko povezanom području D u točki $z_0 \in D$:

$f(z_0) =$,

gdje je Γ zatvorena krivulja u D koja je orijentirana tako da joj unutrašnjost leži u D i sadrži $z_{0.}$.

21. Izračunajte $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z-i}dz$, ako je $\Gamma = |z - i| = 1$.

$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z-i}dz =$.

22. Cauchyjev teorem kaže da za analitičku funkciju na jednostruko povezanom području D, u kojem leži po dijelovima glatka zatvorena krivulja Γ koja je orijentirana tako da joj unutrašnjost leži u D vrijedi:

$\int_\Gamma f(z)dz =$.

23. Izračunajte $\int_\Gamma \frac{\sin z}{z-i}dz$, ako je $\Gamma = |z + i| = 1$.

$\int_\Gamma \frac{\sin z}{z-i}dz =$.

24. Izračunajte $\int_\Gamma \frac{1}{(z-i)(z+i)}dz$, ako je $\Gamma = |z| = 2$.

$\int_\Gamma \frac{1}{(z-i)(z+i)}dz =$.

25. Posljedica Cauchyeve integralne formule su __________________ formula za gornju poluravninu i ______________________ formula za krug.

26. Poissonova formula za krug koristi se za rješavanje Dirichletovog rubnog problema za Laplaceovu jednadžbu:

$\triangle u(r,\theta) = 0$ na K (K je krugu polumjera R)

$u(r,\theta)|\partial K = u(R,\theta), \theta \in [0, 2\pi]$

$u(r,\theta) =$.

27. Poissonova formula za gornju poluravninu koristi se za rješavanje Dirichletovog rubnog problema za Laplaceovu jednadžbu:

$\triangle u(x,y) = 0$ na D (D je gornja poluravnina)

$u(x,y)|(y=0) = u(x,0), x \in [-\infty, \infty]$

$u(x,y) =$.

28. Kompleksni operator $\nabla_C = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ koji djeluje na funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$grad\ f(z) = \nabla_C f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$.

Ako je $f(z)$ analitička funkcija onda je $grad\ f(z) = \nabla_C f(z) =$.

29. Kompleksni operator $\triangle_c = \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$koji djeluje na funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$\triangle f(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$.

Ako je $f(z)$ analitička funkcija onda je $\triangle f(z) =$.

30. Ako je funkcija $F(x,y)$ realni ili imaginarni dio $f(z)$ onda $F(x,y) = \widetilde{F}(z,\overline{z})$,

gdje je $z = x + iy, z = x - iy$.

$\triangle F(x,y) =$.

31. Primjena kompleksnih opreatora za rješavanje Poissonove jednadžbe:

$\triangle u(x,y) = h(x,y)$ na području D.

Problem se svodi na rješavanje parcijalne dif. jed.:

$4\frac{\partial \widetilde{u}(z,\overline{z})}{\partial z \partial \overline{z}} = \widetilde{h}(z,\overline{z})$.

Problem $\triangle u(x,y) = \frac{8}{x^2+y^2}$ ekvivalentan je

problemu ________________________.

32. Ravninsko, bezvrtložno gibanje nestlačivog fluida s vektorom brzine $\overrightarrow{v}(x,y) = v_1(x,y)\overrightarrow{i} + v_2(x,y)\overrightarrow{j}$ opisano je jednadžbama

$div\overrightarrow{v}(x,y) = 0$, $rot\overrightarrow{v}(x,y) = \overrightarrow{0}$.

Kompleksna brzina je analitička funkcija $g(z) = v_1(x,y) - iv_2(x,y)$.

Brzina je potencijalno vektorsko polje.

Veza potencijala brzine $\varphi(x,y)$ i brzine $\overrightarrow{v}(x,y)$ je: $grad\varphi(x,y) =$.

Potencijal brzine $\varphi(x,y)$ je _______________ funkcija.

Funkcija $\psi(x,y)$ koja je konjugirano harmonijska potencijalu brzine zove se funkcija toka.

Kompleksni potencijal je analitička funkcija $\Omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$.

Veza kompleksnog potencijala i kompleksne brzine je $\Omega'(z) =$.

33. Preslikavanje $w = f(z)$ je ____________________ ako čuva kuteva koje zatvaraju tangente na krivulje koje se sijeku točki, u iznosu i smjeru.

34. Preslikavanje $w = f(z)$ je konformno na području D

ako je funkcija $f(z)$ ____________ na D i $f\prime(z) \neq 0$.

35. Riemannov teorem kaže da za zadane D i D*, područja u z-ravnini i w-ravnini, $z_0 \in D, w_0 \in D^*, \alpha \in R$, postoji jedinstveno konformno preslikavanje $w = f(z)$ takvo da preslikava D u D* i da vrijedi $w_0 = f(z_0), \alpha =$.

36. Ako je $f\prime(z_0) \neq 0$, tangenta na krivulju u z-ravnini u točki z$_0$ pri preslikavanju $w = f(z)$ zarotira se u w-ravnini za kut $\alpha =$.

37. Preslikavanje $w = e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ preslikava

gornju z-poluravninu u ____________u w-ravnini.

38. Preslikavanje $w = f(z) = e^{i\theta_0}z$ predstavlja rotaciju u w-ravnini za kut __________.

39. Preslikavanje $w = f(z) = \frac{1}{z}$, preslikava kružnicu polumjera 2 u z-ravnini u kružnicu polumjera ___________ u w-ravnini.

40. Razlomljena linearna transformacija $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, je

__________________ preslikavanje ako je $ad - cb \neq 0$.

41. Razlomljena linearna transformacija $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ preslikava:

(a) z-poluravninu u w- poluravninu ili krug u w-ravnini;

(b) krug u z-ravnini u ____.

42. Razlomljena linearna transformacija $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ zadana je implicitno

jednadžbom ,

gdje su zadani z_1, z_2, z_3, i $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), w_3 = f(z_3)$.

43. Djelovanjem konformnog preslikavanja na harmonijsku funkciju dobivamo opet harmonijsku funkciju:

Neka je $\Phi^*(u,v)$ harmonijska funkcija na D* u w-ravnini i ako je $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitička funkcija na D koja konformno preslikava D na D* onda je i funkcija

$\Phi(x,y) = \Phi^*(u(x,y), v(x,y))$ harmonijska na ____________.