3.1.3 Volumen pomoću dvostrukog integrala

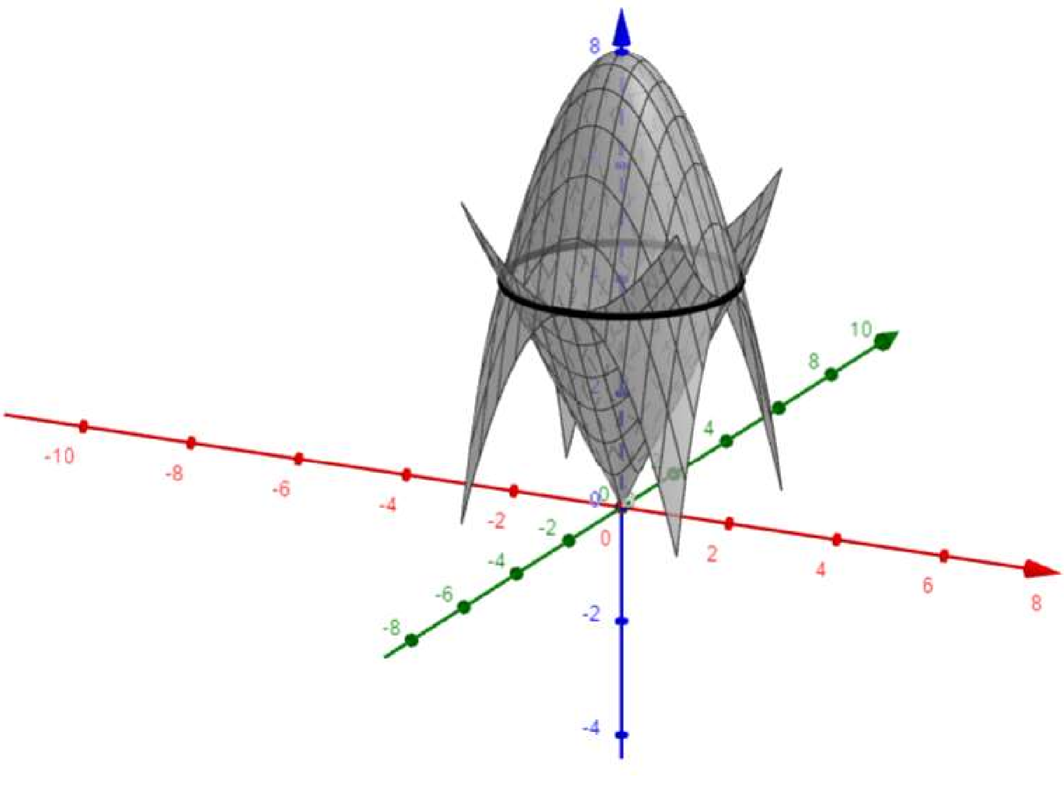
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tijelo u prostoru ograničeno plohom $z = f(x,y)$ odozgo, te plohom $z = g(x,y)$ odozdo. *Volumen* tijela Ω možemo računati pomoću formule

$$V = \iint_D \Big(f(x,y) - g(x,y)\Big)\,dx\,dy,$$

gdje je D ortogonalna projekcija tijela Ω na xy-ravninu.

Zadatak 3.14. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = 8-x^2-y^2$ i $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo kružnim paraboloidom $z = 8-x^2-y^2$, a odozdo kružnim stošcem $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ (pogledajte sliku 3.1).



Slika 3.1: Tijelo Ω omeđeno paraboloidom i stošcem

Odredimo presjek ploha, a ujedno i projekciju D tijela na xy-ravninu:

$$8 - x^2 - y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Uz oznaku $r^2 = x^2 + y^2$, rješavamo kvadratnu jednadžbu $r^2 + 2r - 8 = 0$. Pozitivno rješenje $r = 2$ predstavlja radijus projekcije D tijela na xy-ravninu. Budući da je projekcija D krug sa središtem u ishodištu, volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (8 - x^2 - y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (8 - r^2 - 2r)r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 (8r - r^3 - 2r^2)\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \Big(4r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3}\Big)\Big|_0^2 \mathrm{d}\varphi \\
&= \Big(16 - 4 - \frac{16}{3}\Big) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{36 - 16}{3} 2\pi = \frac{40\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 3.15. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo sferom radijusa $\sqrt{2}$. Naime, kada kvadriramo jednakost $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ dobijemo da je $z^2 = 2 - x^2 - y^2$, tj. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tijelo je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$ (pogledajte sliku 3.2).

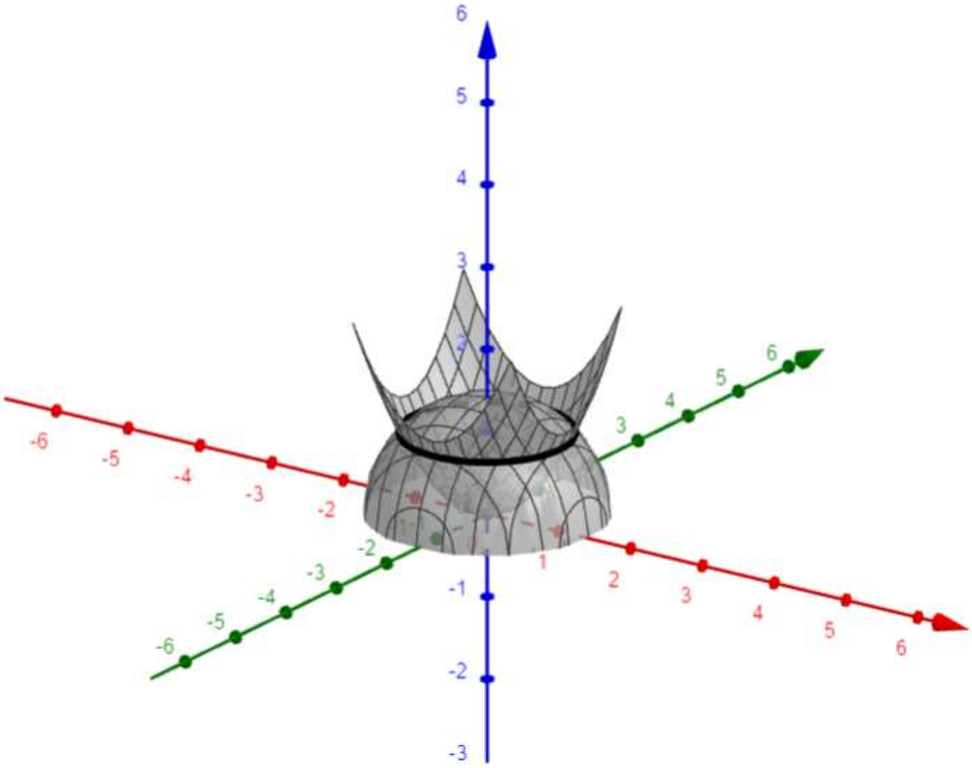
Odredimo presjek ploha, a ujedno i projekciju D tijela na xy-ravninu:

$$
x^2 + y^2 = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.
$$

Uz oznaku $r = x^2 + y^2$, rješavamo jednadžbu $r = \sqrt{2 - r}$, tj. kvadratnu jednadžbu $r^2 + r - 2 = 0$. Pozitivno rješenje $r = 1$ predstavlja radijus projekcije D tijela na xy-ravninu. Budući da je projekcija D krug sa središtem u ishodištu, volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \Big(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \Big[\underbrace{\int_0^1 r\sqrt{2 - r^2}\mathrm{d}r}_{t=2-r^2,\, dt=-2rdr} - \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r\Big] \\
&= 2\pi\Big[-\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\Big] = 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^1 - \frac{1}{4}\Big) \\
&= 2\pi\Big(\frac{2\sqrt{2} - 1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12} 2\pi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}\pi.
\end{aligned}
$$

□



Slika 3.2: Tijelo Ω omeđeno sferom i paraboloidom

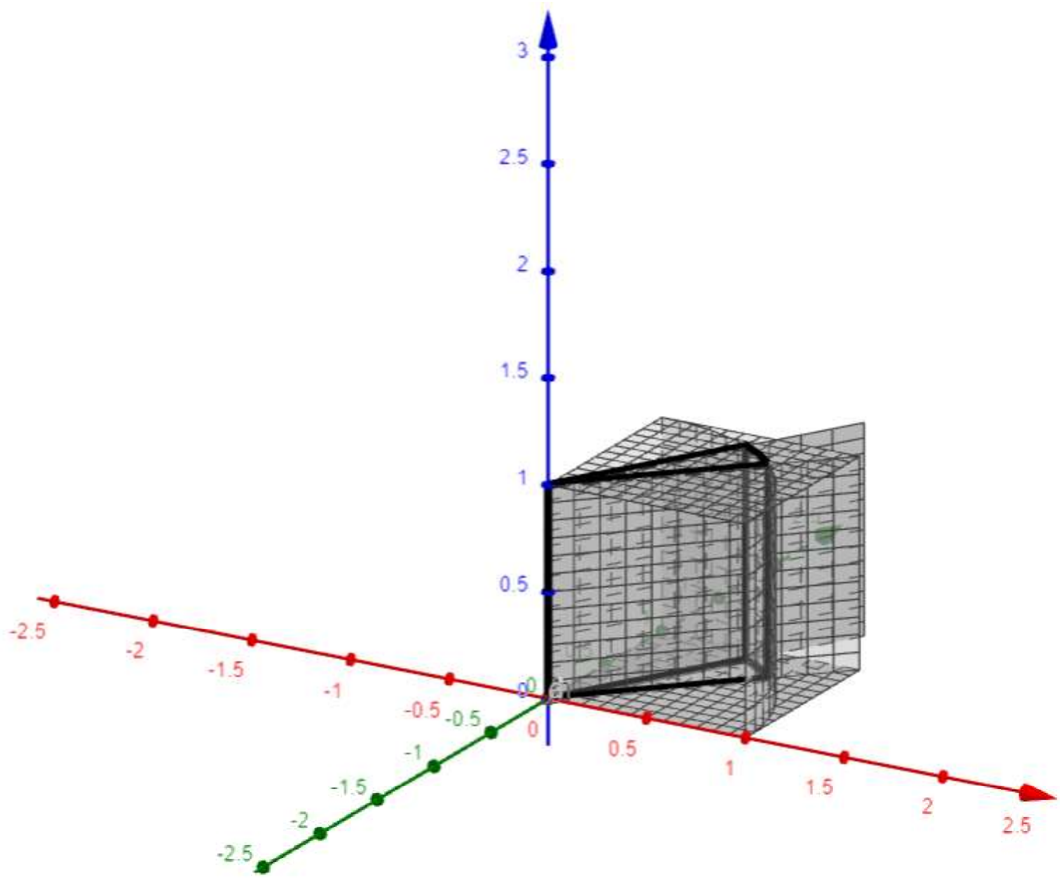
Zadatak 3.16. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi u *prvom oktantu* ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), a omeđeno je plohama $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ i $y = \sqrt{3}\,x$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozgo ravninom $z = 1$, a odozdo ravninom $z = 0$. Bočne stranice tijela su dijelovi okomitih ravnina $y = x$ i $y = \sqrt{3}\,x$ u 1. oktantu, te dio plašta kružnog stošca $x^2 + y^2 = 1$ također u 1. oktantu (pogledajte sliku 3.3).

Projekcija D tijela na xy-ravninu je kružni isječak kruga radijusa 1 sa središtem u ishodištu i to od pravca $y = x$ do pravca $y = \sqrt{3}\,x$. Stoga volumen tijela računamo pomoću polarnih koordinata u ravnini na sljedeći način:

$$V = \iint_D (1-0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi$$



Slika 3.3: Tijelo Ω

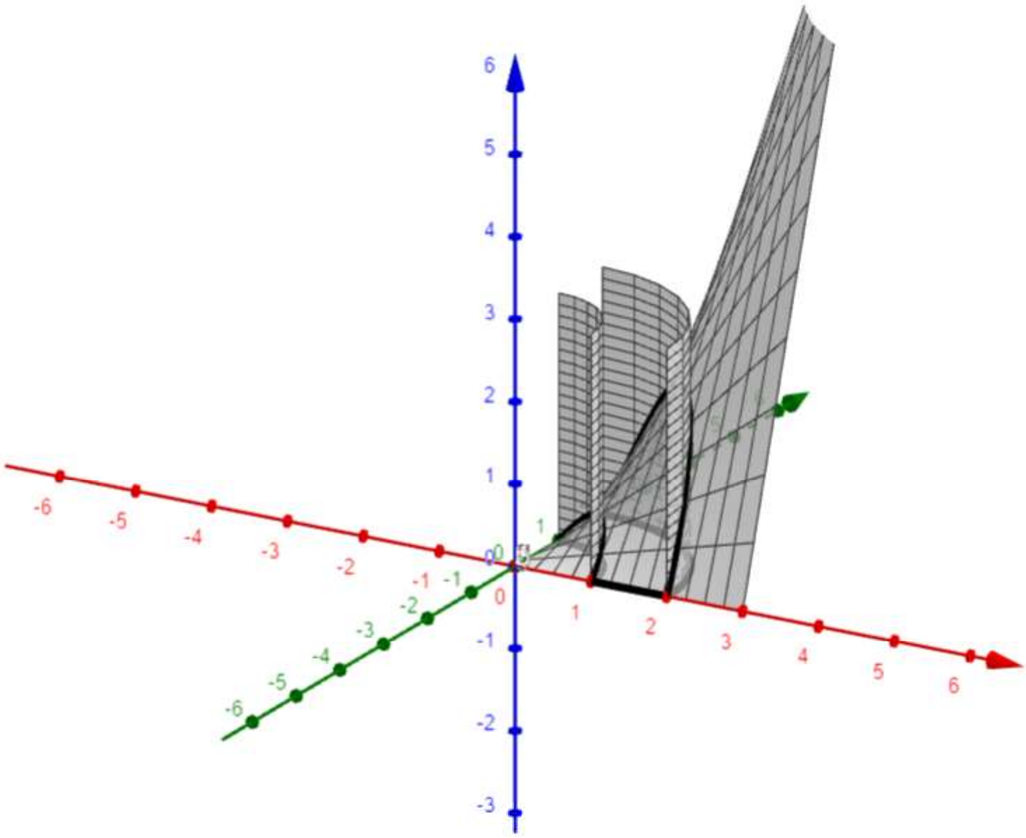
$$= \frac{1}{2}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}.$$

$\square$

Zadatak 3.17. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi u prvom oktantu, a omeđeno je plohama $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ i $z = xy$.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo sedlastom plohom $z = xy$, dok su bočne stranice tijela dijelovi koordinatnih ravnina $x = 0$ i $y = 0$, te dijelovi plašteva kružnih stožaca $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$ (pogledajte sliku 3.4).

Projekcija tijela na xy-ravninu je dio kružnog vijenca između kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$ u 1. kvadrantu. Volumen tijela računamo na sljedeći



Slika 3.4: Tijelo Ω

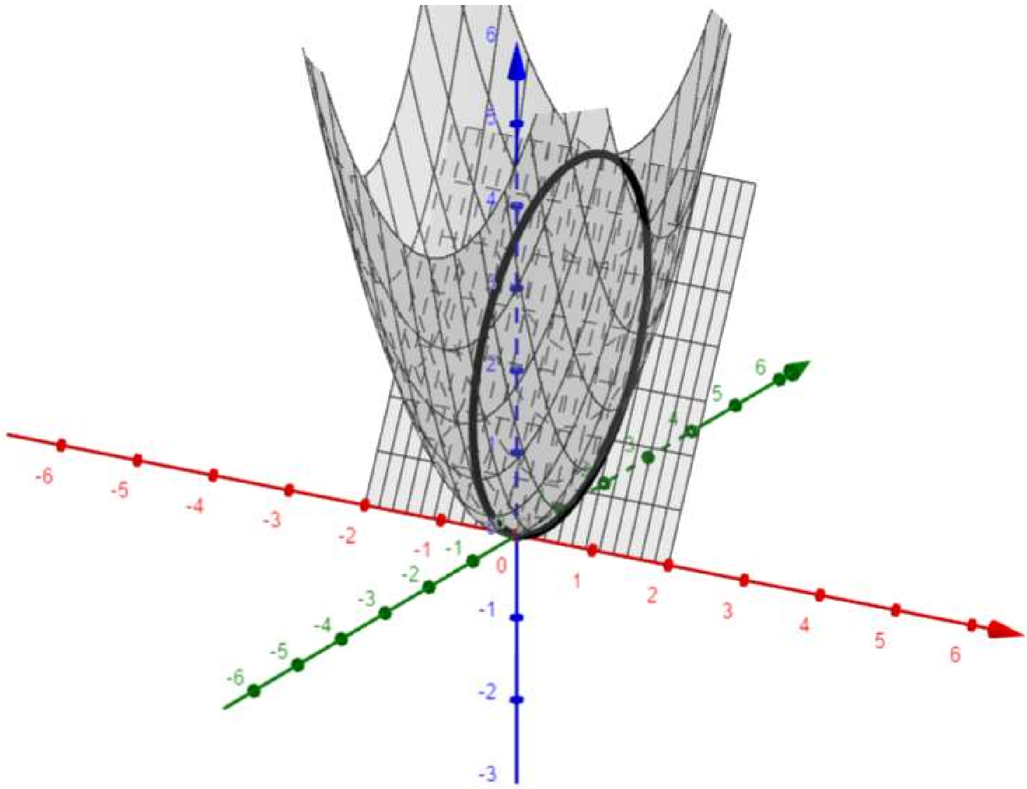
način:

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (xy - 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 r^2 \cos\varphi \sin\varphi \, r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_1^2 r^3 \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \frac{r^4}{4}\Big|_1^2 \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{15}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{15}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{15}{16} \cos(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{15}{16}(-1-1) = \frac{15}{8}.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 3.18. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = 2y$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, a odozgo ravninom $z = 2y$(pogledajte sliku 3.5).



Slika 3.5: Tijelo omeđeno ravninom i paraboloidom

Odredimo presjek paraboloida i ravnine, odnosno projekciju D tijela na xy-ravninu:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Budući da jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = 2y$ koja omeđuje projekciju D u polarnom koordinatnom sustavu ima oblik $r = 2\sin\varphi$, volumen tijela računamo po formuli:

$$V = \iint_D (2y - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2r\sin\varphi - r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2r^2\sin\varphi - r^3)\mathrm{d}r = \int_0^\pi \Big(\frac{2\sin\varphi}{3}r^3 - \frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^{2\sin\varphi}$$

$$= \int_0^\pi \Big(\frac{16}{3}\sin^4\varphi - \frac{16}{4}\sin^4\varphi\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\int_0^\pi \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\Big)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1-2\cos(2\varphi)+\cos^2(2\varphi))\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \Big(1-2\cos(2\varphi)+\frac{1+\cos(4\varphi)}{2}\Big)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\Big(\frac{3}{2}\varphi - \sin(2\varphi) + \frac{\sin(4\varphi)}{8}\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

□

Zadatak 3.19. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z = x+y+1$ i $z = \big(x+\frac{1}{2}\big)^2 + \big(y+\frac{1}{2}\big)^2$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Zadaća. $(V = \frac{\pi}{8})$ □

Zadatak 3.20. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = \sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$.

Rješenje: Tijelo je omeđeno odozdo ravninom $z = 0$, a odozgo rotacijskom plohom $z = \sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}}$, dok je bočna stranica tijela dio vertikalnog kružnog stošca $x^2 + y^2 = 4$. Odatle je jasno da je projekcija D tijela na xy-ravninu zapravo kružnica sa središtem u ishodištu radijusa $r = 2$. Prema tome, volumen tijela računamo po formuli:

$$V = \iint_D (\sqrt{2}\, e^{3+\sqrt{x^2+y^2}} - 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \sqrt{2} e^{3+r} r\, \mathrm{d}r$$

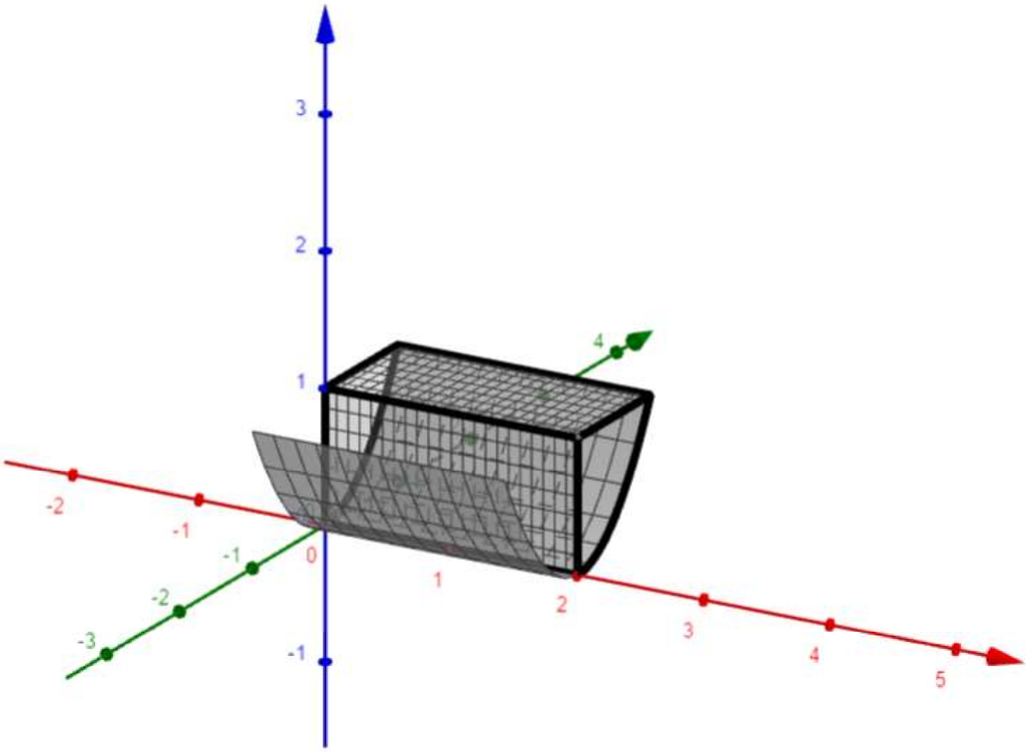
$$= 2\pi\sqrt{2}\, e^3 \underbrace{\int_0^2 r e^r \mathrm{d}r}_{u=r,\, dv=e^r dr} = 2\sqrt{2}\pi\, e^3 (re^r - e^r)|_0^2$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi e^3(2e^2 - e^2 + 1) = 2\sqrt{2}\,\pi(e^5 + e^3).$$

□

Zadatak 3.21. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$ i $z = y^2$, koje se nalazi u prvom oktantu. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo paraboličkim cilindrom $z = y^2$, a odozgo ravninom $z = 1$. Lijeva bočna stranica tijela je dio ravnine $y = 0$, dok su stražnja i prednja stranica tijela omeđene redom ravninama $x = 0$ i $x = 2$(pogledajte sliku 3.6).



Slika 3.6: Tijelo Ω

Projekcija tijela na xy-ravninu je pravokutnik $[0,2]\times[0,1]$, tako da ćemo za računanje volumena tijela koristiti kartezijeve koordinate:

$$V = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 (1-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

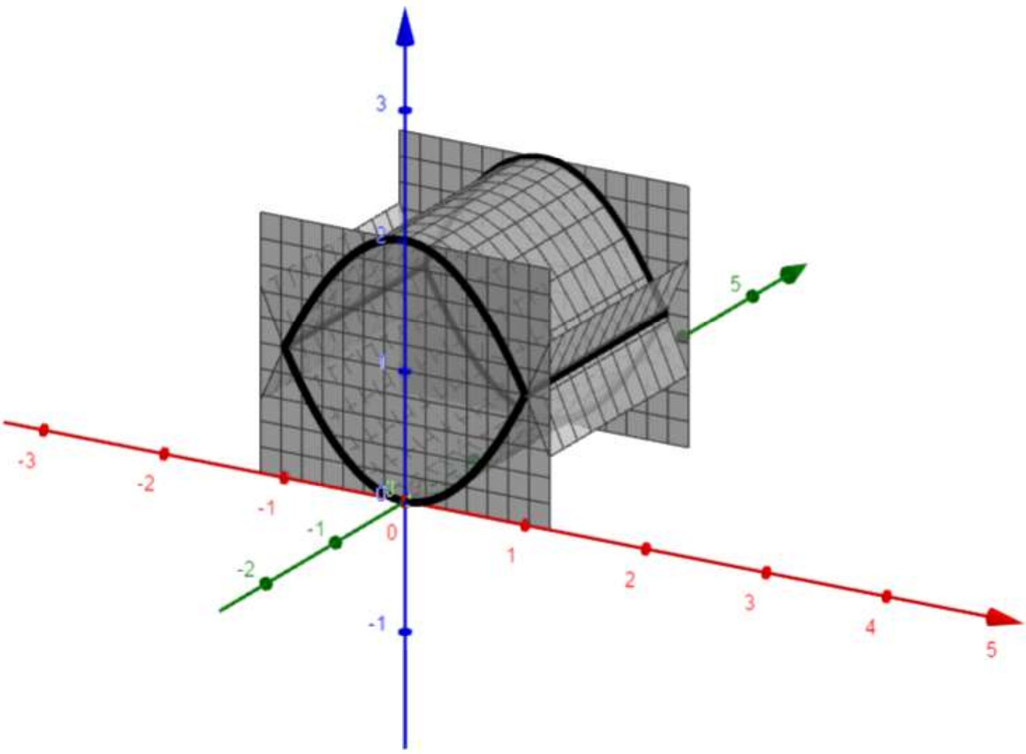
□

Zadatak 3.22. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = 0$, $y = 3$, $z = 4$ i $z = x^2$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Zadaća. ($V = 32$) □

Zadatak 3.23. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = 0$, $y = 2$, $z = x^2$ i $z = 2 - x^2$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo paraboličkim cilindrom $z = x^2$, a odozgo paraboličkim cilindrom $z = 2 - x^2$. Lijeva i desna stranica tijela su omeđene redom ravninama $y = 0$ i $y = 2$ (pogledajte sliku 3.7).



Slika 3.7: Tijelo Ω

Odredimo projekciju tijela na xy-ravninu:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ i } x = 1.$$

Prema tome, projekcija tijela na xy-ravninu je pravokutnik $[-1, 1] \times [0, 2]$. Volumen tijela računamo po formuli:

$$V = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{2} (2 - x^2 - x^2)\mathrm{d}y = 2 \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\mathrm{d}x$$

$$= 2\Big(2x - \frac{2}{3}x^3\Big)\Big|_{-1}^{1} = 4\Big(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\Big) = 4\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

$\square$