Analizu gibanja čestice pod djelovanjem sila možemo provesti na dva načina:

- primijeniti drugi Newtonow aksiom

$$\frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt}=\sum\vec{F} \quad\Rightarrow\quad m\cdot\vec{a}=\sum\vec{F} \qquad \text{(za translaciju)}$$

$$I_0\cdot\vec{\varepsilon}=\sum\vec{M}_0^{(F)} \qquad \text{(za rotaciju)}$$

- primijeniti jednadžbe dinamičke (ili fiktivne) ravnoteže. Prema D'Alambertovom principu za sustav u gibanju vrijede sve jednadžbe ravnoteže, ako se uz sve vanjske sile **dodaju i sile inercije** Sile inercije proporcionalne su masi i ubrzanju čestice i usmjerene su suprotno od ubrzanja.

$$\vec{F}_I=-m\vec{a}$$

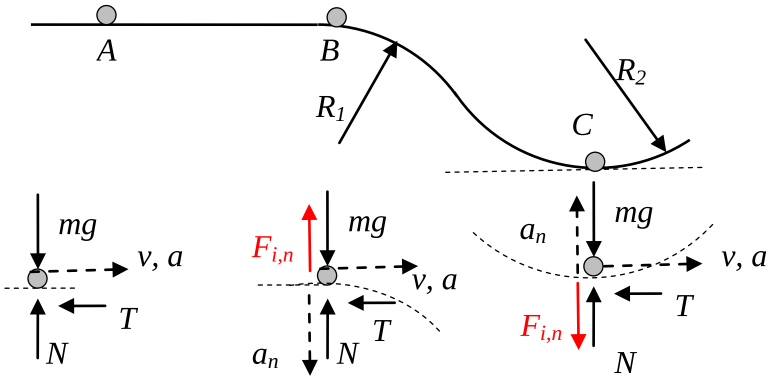
Zadatak 1.

Automobil (čestica) giba se po prikazanom putu u vertikalnoj ravnini. Treba odrediti njegovo usporenje ako u trenutku aktiviranja kočnica u prikazanim položajima ima brzinu *v*. Zadan je koeficijent trenja μ između kotača i podloge.

a) na horizontalnom dijelu A

b) na početku zakrivljenog dijela u točki B

c) u najnižem položaju u točki C



Usporenje ovisi o veličini sile trenja, a sila trenja ovisi o koeficijentu trenja i normalnoj reakciji. Za svaki položaj u smjeru gibanja vrijedi jednadžba

$$m\cdot\vec{a}=\sum\vec{F} \quad\Rightarrow\quad m\cdot a=-T \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{T}{m},$$

ali je sila trenja u svakom položaju različita. Negativni predznak znači suprotnu orijentaciju vektora *a* (usporavanje!). Normalna reakcija pri gibanju po zakrivljenoj podlozi ovisi o sili pritiska na podlogu. Prema D'Alambetrovom pravilu moramo dodati sile inercije od normalnog ubrzanja, te zatim smijemo primijeniti jednadžbe ravnoteže.

a)

$$T=\mu N$$
$$N=mg$$
$$a_A=-\mu g$$

b)

$$T=\mu N$$
$$N=mg+F_{i,n}=mg+\frac{mv^2}{R}$$
$$a_B=-\mu(g+\frac{v^2}{R})$$

c)

$$T=\mu N$$
$$N=G-\frac{mv^2}{R}$$
$$a_C=-\mu\left(g-\frac{v^2}{R}\right)$$

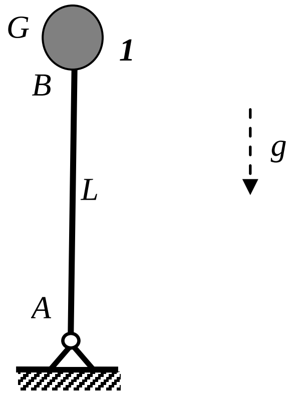
Zadatak 2.

Za štap duljine *L*, zanemarive mase, vezana je u točki B čestica mase *m*. Štap se počne gibati u vertikalnoj ravnini iz prikazanog položaja. Treba odrediti reakcije u zglobu A za trenutak kada:

a) štap zatvara kut α prema horizontalnoj ravnini

b) čestica prolazi kroz horizontalnu ravninu

c) čestica prolazi kroz najniži položaj



Rješenje:

Analiziramo zašto i kako se čestica giba: čestica rotira oko točke zglobnog spoja A, zbog djelovanja gravitacijskih sila.
Dakle, zbog gibanja po kružnici radijusa L, čestica može imati tangencijalno i normalno ubrzanje.

$$a^t = \varepsilon L$$

$$a^n = \frac{v^2}{L} = \omega^2 \cdot L$$

Prema D'Alambertovom principu reakcije možemo odrediti iz jednadžbi ravnoteže **ako u sustav dodamo sile inercije**. Veličina sila inercije ovisi o kutnoj brzini i kutnom ubrzanju čestice u položaju za kojeg se traže reakcije, a smjer je suprotan smjeru ubrzanja.

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

Zbog promjene položaja u gravitacijskom polju mijenja se potencijalna energija čestice, a zbog održanja energije i kinetička energija čestice.

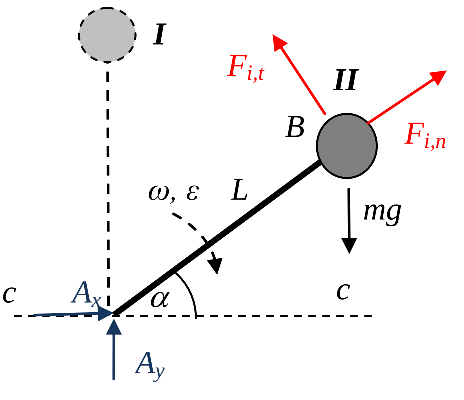
Brzina u položaju II odredi se iz zakona održanja mehaničke energije između početnog i promatranog položaja, a kutno ubrzanje iz zakona rotacije oko točke A.

a)

$$E_{K1} + E_{P1} = E_{K\alpha} + E_{P\alpha}$$

$$0 + mgL + c = \frac{mv_{II}^2}{2} + c + mgL\sin\alpha$$

$$v_{II} = \sqrt{2gL(1-\sin\alpha)}$$



$$I_A \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_A^{(F)},$$

$$mL^2\varepsilon = m\,g\,L\cos\alpha \qquad \rightarrow \varepsilon = \frac{g\cos\alpha}{L}$$

Sile inercije su

$$F_{i,n} = m\frac{v_{II}^{\;2}}{L}\;, \qquad F_{i,t} = ma_t = m\varepsilon L$$

Iz uvjeta dinamičke ravnoteže slijede jednadžbe:

$$\sum F_X = 0 \qquad A_x + F_{i,n}\cos\alpha - F_{i,t}\sin\alpha = 0$$

$$A_x = -F_{i,n}\cos\alpha + F_{i,t}\sin\alpha$$

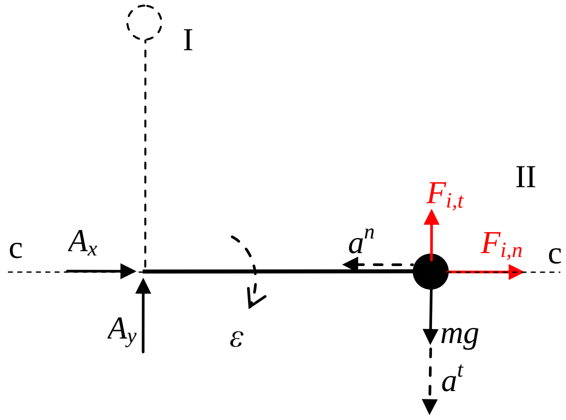
$$A_x = -m\frac{v^2}{L}\cos\alpha + mL\varepsilon\sin\alpha$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad A_y - mg + F_{i,n}\sin\alpha + F_{i,t}\cos\alpha = 0$$

$$A_y = mg - F_{i,n}\sin\alpha - F_{i,t}\cos\alpha$$

$$A_y = mg - m\varepsilon L\cos\alpha - m\frac{v^2}{L}\sin\alpha$$

b) čestica prolazi kroz horizontalni položaj



$$E_{K,1}+E_{P,1}=E_{K,II}+E_{P,II}$$

$$0+mgL+c=\frac{mv_{II}^2}{2}+c$$

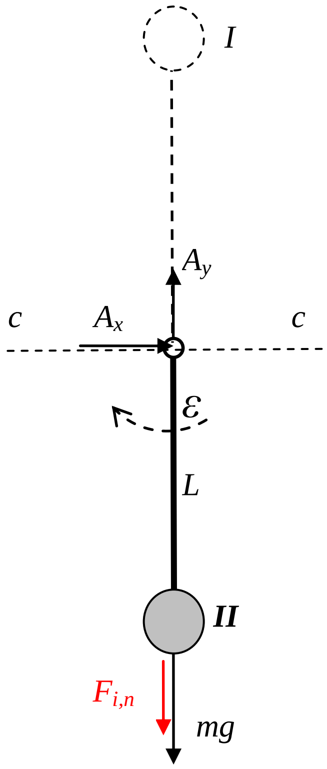
$$v_{II}=\sqrt{2gL}$$

$$I_A\cdot\vec{\varepsilon}=\vec{M}_A^{(F)},$$

$$mL^2\varepsilon=m\,g\,L \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon=\frac{g}{L},$$

$$A_x=-m\frac{2gL}{L}=-2mg, \qquad A_y=mg-m\frac{g}{L}L=0$$

c) čestica prolazi kroz najniži položaj



$$E_{K,1}+E_{P,1}=E_{K,II}+E_{P,II}$$

$$0+mgL+c=\frac{mv_{II}^2}{2}-mgL+c$$

$$v_{II}=2\sqrt{gL}$$

$$I_A\cdot\vec{\varepsilon}=\vec{M}_A^{(F)},$$

$$mL^2\varepsilon=0 \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon=0$$

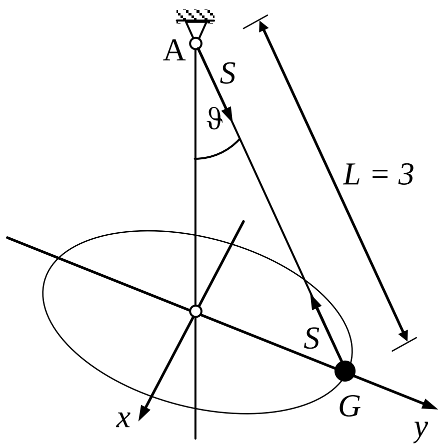
$$\sum X=0 \qquad A_x=0,$$

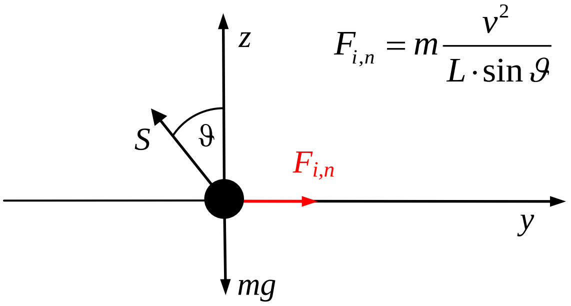
$$\sum Y=0 \qquad A_y=mg+4mg$$

$$A_y=5mg=5G$$

Zadatak 3.

Odredi s kojom maksimalnom brzinom smije rotirati kuglica težine *G=4N* oko vertikalne osi, ako maksimalna nosivost niti kojom je vezana za zglob A iznosi *10 N*.
Položaj niti prema osi rotacije (kut ϑ) ovisi o brzini rotacije $r=L\sin\vartheta$.





$$F_{i,n}=m\frac{v^2}{L\cdot\sin\vartheta}$$

Prema D´Alambertovom principu definiramo sile koje djeluju na česticu i postavimo jednadžbe dinamičke ravnoteže.

$$\sum F_y = 0$$

$$mg - S \cdot \cos\vartheta = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{mv^2}{L\sin\vartheta} - S \cdot \sin\vartheta = 0$$

$$mg - S\cos\vartheta = 0$$

$$\cos\vartheta = \frac{mg}{S} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\vartheta = 66,4°$$

$$v = \sqrt{\frac{SL}{m}}\sin\vartheta = \sqrt{\frac{10 \cdot 3 \cdot 9,81}{4}} \cdot 0,916$$

$$v = 7,86\ m/s$$

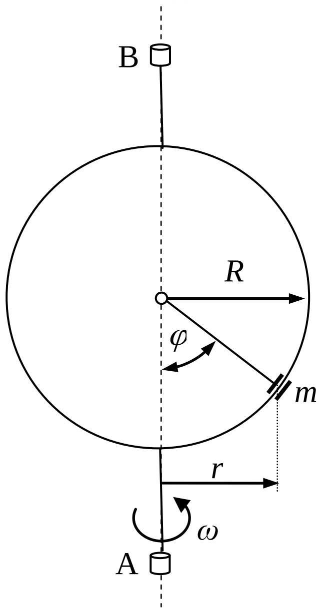
Točnost rezultata možemo provjeriti momentnom jednadžbom na zglob A.

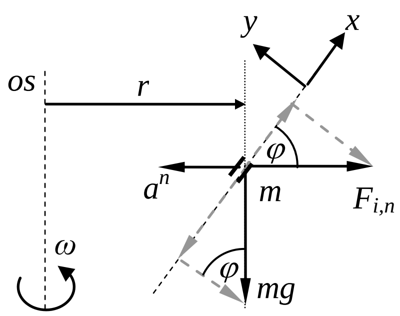
$$\sum M_A = 0$$

$$mg \cdot L \cdot \sin\vartheta - F_{i,n} \cdot L \cdot \cos\vartheta = 0$$

Zadatak 4

Prsten mase *m* navučen na zakrivljenu žicu rotira oko vertikalne osi konstantnom kutnom brzinom. Treba odrediti tri položaja, u kojima prsten neće kliziti po žici.
U prikazanom položaju prsten se giba po kružnici polumjera *r* u horizontalnoj ravnini.





$$F_{i,n} = m \cdot \omega^2 r$$

$$F_{i,n} = m \cdot \omega^2 R\sin\varphi$$

$$\sum F_X = 0$$

$$F_{IN}^n \cdot \cos\varphi - mg\sin\varphi = 0$$

$$\omega^2 mR\sin\varphi\cos\varphi - mg\varphi = 0$$

$$\sin\varphi(\omega^2 mR\cos\varphi - mg) = 0$$

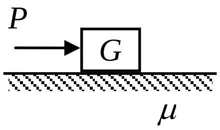
$$\Rightarrow \qquad \omega^2 mR\cos\varphi - mg = 0$$

$$\sin\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = \pi$$

$$\varphi_3 = \frac{g}{R\omega^2}$$

Zadatak 5.

Na česticu težine G, koja miruje na hrapavoj horizontalnoj podlozi počne djelovati konstantna horizontalna sila P. Djelovanje sile prestaje nakon t_1 sekundi.
Treba odrediti put $\boldsymbol{s}$ kojeg će točka prijeći do zaustavljanja, ako je koeficijent trenja između čestice i podloge μ.

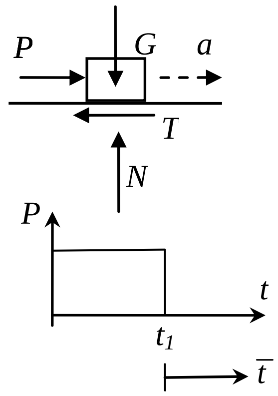


1. način:

Pri rješavanju treba razlikovati dva intervala vremena tijekom trajanja gibanja:

1. za vrijeme trajanja aktivne sile P, od $t_0=0$ do $t=t_1$
2. od trenutka $t=t_1$ kada prestaje djelovanje sile P, do trenutka zaustavljanja $t=t_2$

Za vrijeme $0 < t < t_1$ čestica se giba s ubrzanjem a_1 u smjeru djelovanja sile P, a sila trenja djeluje u suprotnom smjeru. Početna brzina jednaka je nuli (definirano u tekstu zadatka).



$$m\cdot\vec{a}=\sum\vec{F}$$
$$m\,a=P-T$$
$$T=\mu\,G$$
$$a(t)=\frac{1}{m}(P-\mu\,G)=const$$
$$v(t)=\int_0^t a(t)\;dt+v_0=\frac{1}{m}(P-\mu G)t \qquad (v_0=0)$$
$$s(t)=\int_0^t v(t)\,dt+s_0=\frac{1}{m}(P-\mu G)\frac{t^2}{2} \qquad (s_0=0)$$
$$za \qquad t=t_1 \quad\Rightarrow\quad s_1=\frac{1}{m}(P-\mu G)\frac{t_1^2}{2}$$
$$v_1=\frac{1}{m}(P-\mu G)t_1$$

Za vrijeme $t > t_1$ na česticu djeluje samo sila trenja suprotno od smjera gibanja i čestica usporava. Na početku drugog intervala uvodi se nova varijabla za vrijeme. Brzina na kraju prvog intervala početna je brzina za drugi, a isto vrijedi i za prijeđeni put. Čestica se zaustavlja u trenutku t_2.

$$ma(\bar{t})=-T=-\mu G=-\mu mg \qquad \bar{t}=t-t_1 \quad (\text{"}novo\text{" } vrijeme)$$
$$a(\bar{t})=-\mu g \qquad (usporavanje)$$
$$v(\bar{t})=-\int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}} a\;d\bar{t}\;+v_{(\bar{t}=0)}=v_1-\mu g\bar{t} \qquad v_{(\bar{t}=0)}=v_1=\frac{1}{m}(P-\mu G)t_1$$
$$v(\bar{t})=\frac{1}{m}(P-\mu G)t_1-\mu g\bar{t}$$
$$v(\bar{t}_2)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{t}_2=\frac{(P-\mu G)t_1}{\mu gm} \quad\Rightarrow\quad t_2=t_1+\bar{t}=t_1\left(1+\frac{(P-\mu G)}{\mu gm}\right)$$

Prijeđeni put:

$$s(\bar{t}) = \int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}} v(\bar{t})d\bar{t} + s_{(\bar{t}=0)} = v_1\bar{t} - \mu g \frac{\bar{t}^2}{2} + s_1 \qquad s_{(\bar{t}=0)} = s_1 = \frac{1}{m}(P-\mu G)\frac{t_1^2}{2}$$

$$s(\bar{t}) = \frac{1}{m}(P-\mu G)t_1 \cdot \bar{t} - \mu g \frac{\bar{t}^2}{2} + \frac{1}{m}(P-\mu G)\frac{t_1^2}{2}$$

$$s(\bar{t}_2) = +\frac{1}{m^2 \mu g}(P-\mu G)^2 t_1^2 - \cancel{\mu}\,\cancel{g}\frac{(P-\mu G)^2 t_1^2}{2\mu^{\cancel{2}} m^2 g^{\cancel{2}}} + \frac{(P-\mu G)}{m}\frac{t_1^2}{2}$$

$$s_2 = \frac{(P-\mu G)}{m}\frac{t_1^2}{2} + \frac{(P-\mu G)^2 t_1^2}{2m^2 \mu g}$$

Prijeđeni put do trenutka zaustavljanja je s_2.

2. način

Postupak je mnogo kraći ako se koristi zakon impulsa i zakon o promjeni kinetičke energije. U prvom intervalu $0 < t < t_1$ djeluje sila P i trenje. Početna brzina jednaka je nuli.

Pomoću zakona impulsa vrlo jednostavno odredi se brzina u trenutku t_1. Impuls od konstantne sile jednak je umnošku sile i vremena.

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{S}$$

$$mv_1 - m \cdot 0 = (P-T)\cdot t_1$$

$$v_1 = \frac{1}{m}(P-\mu G)\cdot t_1$$

Prijeđeni put u prvom intervalu odredi se pomoću zakona o promjeni kinetičke energije.

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{1,2}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (P-T)\cdot s_1 \qquad v_0 = 0$$

$$s_1 = \frac{mv_1^2}{2(P-T)} = \frac{1}{2m(P-\mu G)}(P-\mu G)^2 t_1^2$$

$$s_1 = \frac{(P-\mu G)t_1^2}{2m}$$

Prijeđeni put tijekom drugog intervala dobije se opet iz zakona promjene kinetičke energije. Poznate su brzine na početku i kraju tog vremenskog intervala, a nepoznat je samo put Δs_2.

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{1,2}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -T\cdot\Delta s_2 \qquad v_2 = 0$$

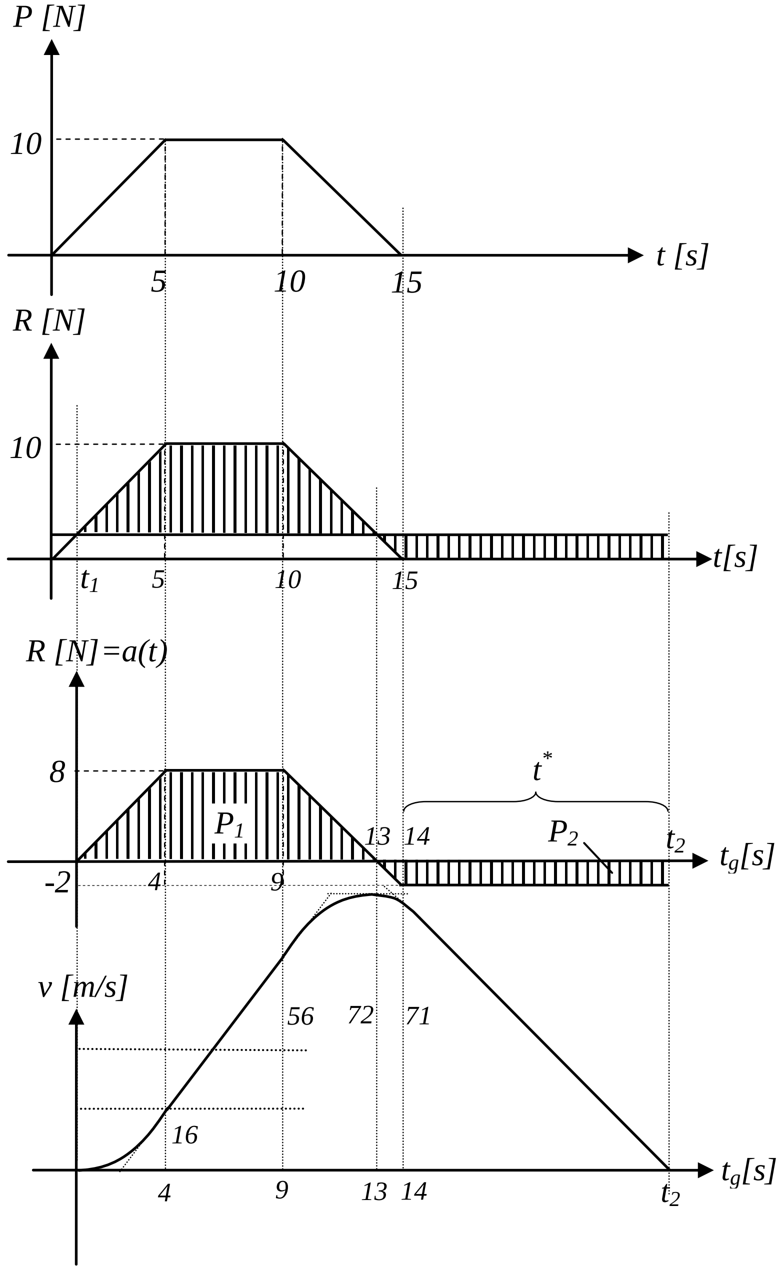
$$\frac{G}{2g}\cdot\frac{g^2}{G^2}(P-\mu G)^2 t_1^2 = \mu\cdot G\cdot\Delta s_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta s_2 = \frac{g(P-\mu G)^2 t_1^2}{2\mu G^2}$$

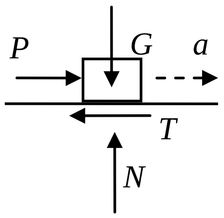
Prijeđeni put od početka gibanja do zaustavljanja jednak je sumi prijeđenih puteva tijekom prvog i drugog intervala.

$$s_2 = s_1 + \Delta s_2 = \frac{(P-\mu G)t_1^2}{2m} + \frac{(P-\mu G)^2 t_1^2}{2m^2 \mu g}$$

Zadatak 6.
Na česticu mase $m=1\ kg$, koja miruje na hrapavoj horizontalnoj podlozi ($\mu = 0.2$), počne djelovati horizontalna sila $P(t)$ prema prikazanom dijagramu. Treba odrediti put koji će čestica prijeći do zaustavljanja, i trajanje gibanja.

Rješenje:
Zadatak možemo riješiti slično kao i prethodni, sada uz podjelu gibanja unutar četiri intervala vremena, Prikazan je drugi, mnogo kraći postupak. Bitno je uočiti da će gibanje početi tek kada aktivna sila *P* postane veća od sile trenja, a ne istovremeno s početkom djelovanja sile *P*!





$G=9{,}81\ N$

$T = \mu \cdot G = 1{,}96 \approx 2\ N$

Uvjet gibanja:

$$P > T$$
$$2\,t_1=2$$
$$t_1=1s$$

Gibanje će početi jednu sekundu nakon početka djelovanja sile. Uvodimo oznaku za vrijeme gibanja:

$$t_g = t - 1.$$

Ukupno vrijeme trajanja gibanja odredimo primjenom zakona impulsa, i kinematike (integralne veze između funkcije brzine i ubrzanja).

$$a(t) = \frac{R(t)}{m}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_1^2 \vec{R}(t)dt$$

$$0 - 0 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}(t)dt = P_1 - P_2$$

Čestica će se zaustaviti kada se površine P_1 i P_2 izjednače.

$$P_2 = 2 \cdot t^* + 1$$

$$P_1 = \frac{8 \cdot 4}{2} + 8 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 + 40 + 16$$

$$72 - 1 - 2 \cdot t^* = 0$$

$$t^* = 35{,}5\,s \qquad t_2 = 49{,}5\,s$$

Gibanje traje *49,5 s*.
Od početka djelovanja sile do zaustavljanja prošlo je *50,5 s*.

Pripremila doc.dr.sc.Verica Raduka

Prijeđeni put do trenutka zaustavljanja

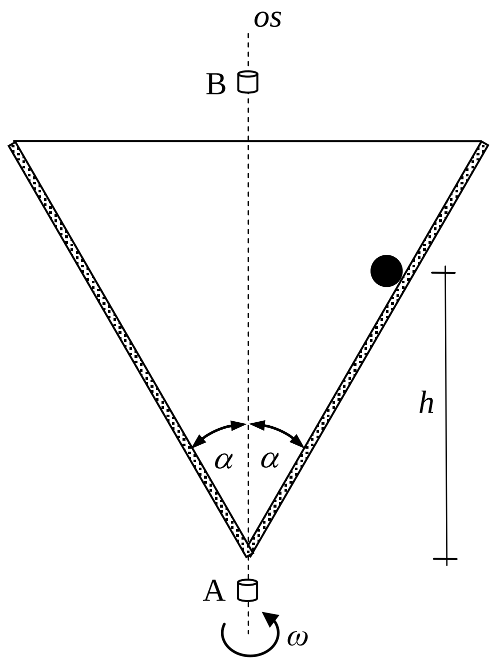
$$s_2 = \int_{t_g=0}^{t_g=49,5} v(t_g)dt_g$$

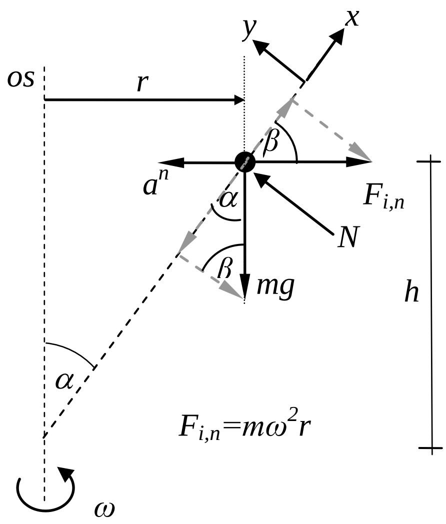
$$s_2 = \frac{4\cdot 16}{3} + \frac{16+56}{3}\cdot 5 + 56\cdot 4 + \frac{2}{3}16\cdot 4 + \frac{2}{3}1\cdot 1 + \frac{71\cdot 35,5}{2} = 21,33 + 120 + 216 + 42,67 + 0,67 + 12,6025$$

$$s_2 = 166,1m$$

Zadatak 7.

Posuda u obliku stošca rotira oko svoje vertikalne osi konstantnom kutnom brzinom $\omega=2r/s$. Treba odrediti na kojoj će visini $h=?$, kuglica mirovati unutar posude, i koliki je pritisak kuglice na posudu. Kut $\alpha=30^0$.





U sustav smo dodali silu inercije i možemo primijeniti jednadžbe ravnoteže (D'Alambert)!

$$\sum F_X = 0$$

$$m\cdot r\cdot\omega^2\sin\alpha - m\cdot g\cdot\cos\alpha = 0 \quad \Big| \frac{1}{\cos\alpha} \qquad\qquad r = h\cdot tg\alpha$$

$$m\cdot h\cdot tg^2\alpha\cdot\omega^2 - m\cdot g = 0$$

$$h\cdot tg^2\alpha\cdot\omega^2 = g$$

$$h = \frac{g}{\omega^2 tg^2\alpha}$$

$$h = 7,3575m$$

Pritisak na posudu:

$$\sum F_y = 0$$

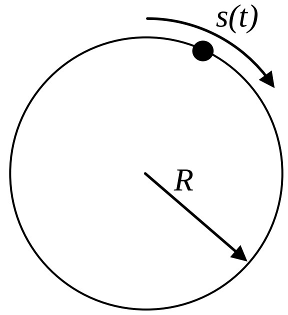
$$N = m\cdot r\cdot\omega^2\cos\alpha - m\cdot g\cdot\sin\alpha \qquad\qquad r = h\cdot tg\alpha$$

$$N = mg\cdot(1+\frac{h}{g}\cdot\omega^2)\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad N = 2mg = 2G$$

Zadatak 8.

Čestica mase *m=2 kg* , počne se gibati pod djelovanjem sile *F* po kružnici polumjera *R= 0.5 m*.

Za zadani zakon gibanja čestice po kružnici $s(t)=\frac{1}{2}t^2$, treba odrediti:



a) rad sile *F* za vrijeme dok čestica jednom obiđe kružnicu
b) veličinu impulsa sile *F* u istom intervalu vremena
c) Silu *F*

Za jedan obilazak kružnice potrebno je vrijeme t_1.

$$s_1 = 2R\pi = \frac{1}{2}t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{4R\pi}$$

Zakonom gibanja određen je i zakon promjene brzine i ubrzanja. Brzina u trenutku t_1 je:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{4R\pi}\ m/s$$

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = 1\ \ m/s^2$$

a)
Izvršeni rad na putu s_1 može se odrediti iz zakona promjene kinetičke energije. ($v_0=0$)

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{1,2}$$

$$W_{0,1} = \frac{m\cdot v_1^2}{2} - \frac{m\cdot v_0^2}{2} = m\cdot 2R\pi\ J \qquad (v_0=0)$$

b)
Impuls sile odredi se iz zakona impulsa.

$$m\cdot\vec{v}_2 - m\cdot\vec{v}_1 = \int_1^2 \vec{F}(t)dt = \vec{S}$$

$$m\cdot v_1 - m\cdot 0 = S_{0,1} \qquad v_1 = \sqrt{4R\pi}$$

$$S_{0,1} = m\sqrt{4R\pi}$$

c)
Sila se odredi primjenom 2. Newtonovog aksioma:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad a_t = 1, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{t^2}{R}$$

$$F_t(t) = m \qquad F_n(t) = m\cdot\frac{t^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad F(t) = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = m\sqrt{1+\frac{t^4}{R^2}}$$

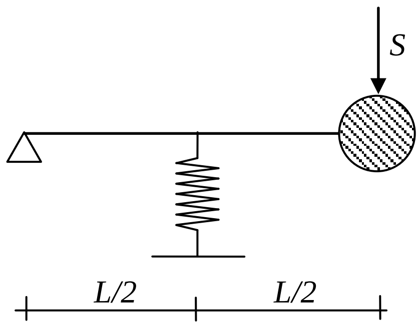
Sila ima dvije komponente: konstantnu u smjeru tangente na kružnicu i promjenjivu usmjerenu prema središtu kružnice.

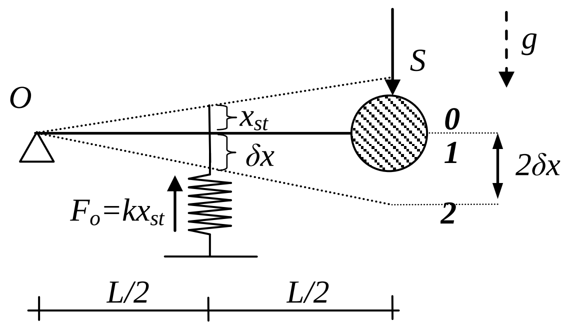
Sada rad možemo odrediti i iz integrala elementarnog rada, pri čemu je samo tangencijalna komponenta sile u smjeru puta.

$$W_{0,1} = \int_0^1 \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad W_{0.1} = m\cdot 2R\pi$$

Zadatak 9.

Čestica mase **m** pričvršćena je za kraj štapa bez mase, duljine **L**. U svojoj sredini štap je oslonjen na elastičnu oprugu krutosti *k*. Sustav miruje tako da je opruga uslijed djelovanja težine čestice deformirana za x_{st}. Na česticu u jednom trenutku djeluje impuls S. Kolika je maksimalna deformacije opruge nastala od djelovanja impulsa?





Prije djelovanja impulsa sustav miruje u ravnotežnom položaju. Veličinu statičke deformacije najjednostavnije odredimo iz momentne jednadžbe oko nepomične točke.

$$\sum M_O = 0$$

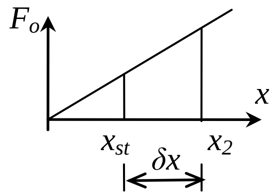
$$Fo \cdot \frac{L}{2} - mg \cdot l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad kx_{st} \cdot \frac{L}{2} - m \cdot g \cdot L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{st} = \frac{2mg}{k}$$

Djelovanje impulsa mijenja količinu gibanja. Primjenjujemo zakon impulsa, pri čemu impuls djeluje trenutno, što znači da čestica počinje gibanje brzinom v_1 iz početnog (ravnotežnog) položaja.

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S} \qquad \Rightarrow \qquad mv_1 - mv_0 = S \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{S}{m}$$

U trenutku maksimalnog otklona od ravnotežnog položaja, u položaju 2, čestica mijenja smjer gibanja, što znači da je u tom trenutku brzina čestice jednaka nuli! Primijenimo zakon očuvanja mehaničke energije ili zakon promjene kinetičke energije od položaja 1 do položaja 2. Promjena sile u opruzi i oznake pripadnih deformacija prikazane su na crtežu.

$$E_{k2} - E_{k1} = \sum W_{1,2}$$



$$0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\left(\frac{k(\delta x + x_{st})^2}{2} - \frac{kx_{st}^2}{2} \right) + mg \cdot 2\delta x$$

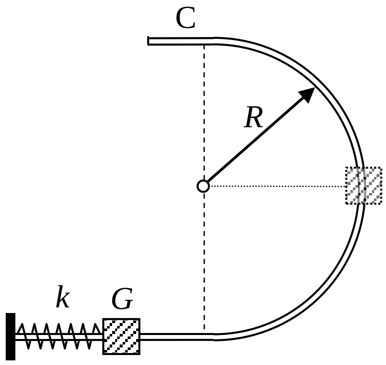
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{k \cdot \delta x^2}{2} + 2\frac{k}{2}\delta x \cdot x_{st} + \frac{kx_{st}^2}{2} - \frac{kx_{st}^2}{2} - mg \cdot 2\delta x$$

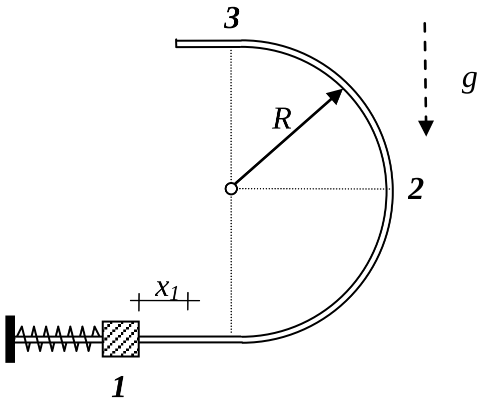
$$\frac{m}{2} \cdot \frac{S^2}{m^2} = \frac{k \cdot \delta x^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \delta x = \pm\sqrt{\frac{1}{km}}S$$

Maksimalna deformacija opruge od djelovanja impulsa je δx.
Najveća ukupna deformacija opruge za vrijeme nastalog gibanja događa se u položaju 2, i jednaka je $x_2 = x_{st} + \delta x$.

Zadatak 10.

Prsten težine $G=5N$ navučen je na glatki štap prikazanog oblika u vertikalnoj ravnini, i pridržan tako da je oprugu krutosti $k=30N/cm$ stisnuta za $x_1=3,5\ cm$. Nakon uklanjanja pridržaja prsten će se početi gibati po štapu. Prsten nije vezan za oprugu.
Treba odrediti:
a) brzinu prstena u trenutku prolaza kroz točku C
b) pritisak štapa na prsten u prikazanom položaju





a) Brzinu u položaju 3 odredi se primjenom zakona promjene kinetičke energije.

$$E_{k2}-E_{k1}=\sum W_{1,2}$$

$$\frac{mv_3^2}{2}-0=\frac{kx_1^2}{2}-mg\cdot 2R$$

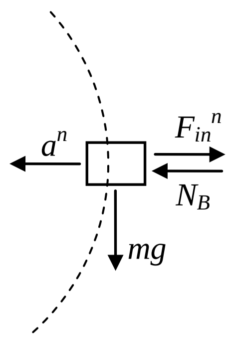
$$v_3^2=\frac{kx_1^{\ 2}}{m}-g\cdot 4R$$

$$v_3^2=\frac{30\cdot 3,5^2\cdot 9,81}{5}-9,81\cdot 4\cdot 10 \qquad \Rightarrow \qquad v_3=181,28cm/s \qquad \Rightarrow \qquad v_3=1,81m/s$$

b) Pritisak na podlogu ovisi o komponenti normalnog ubrzanja, dakle o brzini čestice u tom položaju. Brzina u položaju 2 odredimo na isti način kao u položaju 3, a zatim primijenimo jednadžbe dinamičke ravnoteže (D'Alambert).

$$E_{k2}-E_{k1}=\sum W_{1,2}$$

$$\frac{mv_2^2}{2}-0=\frac{kx_1^2}{2}-mg\cdot R \qquad \Rightarrow \qquad v_2^2=\frac{kx_1^{\ 2}}{m}-2gR$$



$$\sum F_X=0$$

$$N_B=F_i^n=m\cdot\frac{v_2^2}{R}$$

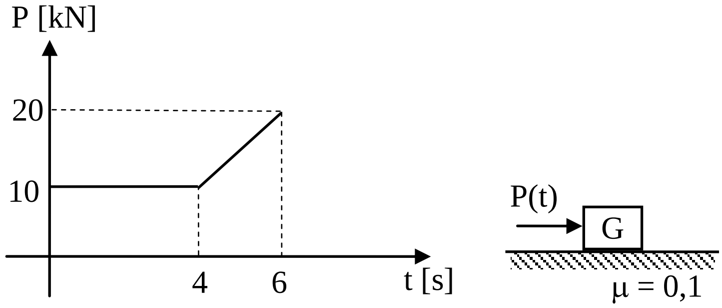
$$N_B=\frac{kx_1^{\ 2}}{R}-2mg$$

$$N_B=\frac{30\cdot 3,5^2}{10}-2\cdot 5 \qquad \Rightarrow \qquad N_B=26,75N$$

Zadaci za samostalno rješavanje

1. Na česticu mase $m=2\ kg$, koja miruje na hrapavoj horizontalnoj podlozi ($\mu=0,4$) , počinje djelovati sila P, koja se u vremenu mijenja prema prikazanom dijagramu. Treba odrediti :

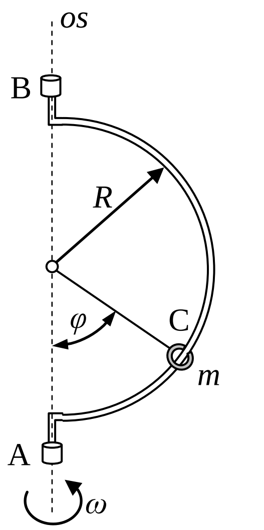
a) veličinu impulsa sile koje su na česticu djelovale u vremenskom intervalu od $t=0$ do $t_1=6\ (s)$
b) brzinu čestice u istom trenutku



Rješenje: $S=22,912\ Ns$, $v_6=11,456\ m/s$

2. Na glatku zakrivljenu cijev navučen je prsten mase $m=0,250kg$. Treba odrediti za koje vrijednosti kuta φ prsten neće klizati po cijevi, ako štap rotira oko vertikalne osi konstantnom kutnom brzinom $\omega=7,5rad/s$.

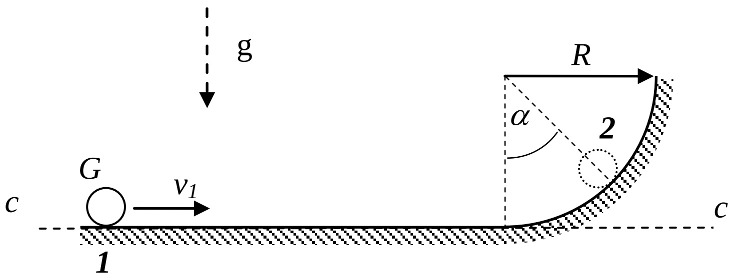
$R=50\ cm$
$\omega=2,5\ r/s$



Rješenje: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, $\varphi=69,586^0$

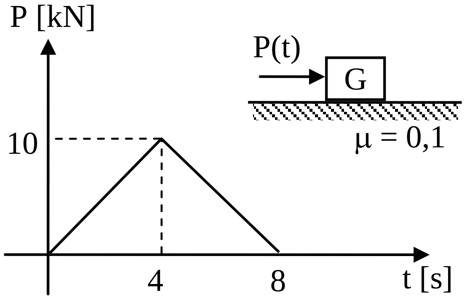
3. Čestica težine $G=10\ KN$ počne se gibati iz položaja "1" sa početnom brzinom $v_1=10\ m/s$ po glatkom putu prikazanom na slici.
Odrediti pritisak čestice na podlogu u položaju "2" ako je $\alpha=60^0$ i $R=1\ m$. Primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije

Rješenje:
Pritisak na podlogu je $97\ N$.

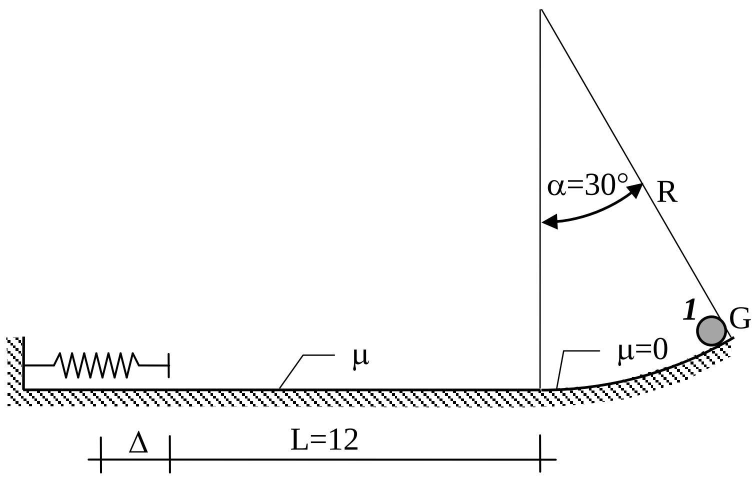


4. Na kuglicu težine G=50 KN koja miruje na hrapavoj horizontalnoj podlozi (μ = 0,1) počne djelovati sila P čiji se intenzitet tijekom 8 s. mijenja prema prikazanom grafu.
Odredi koliki put će kuglica prevaliti do zaustavljanja i vrijeme kada će se zaustaviti.

Rješenje: $s_1=7,6845m$,
$t_1=9s$

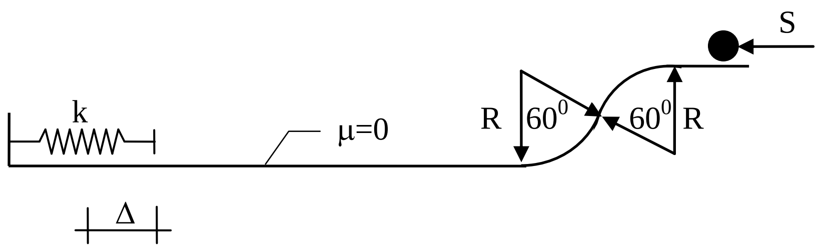


5. Čestica težine *10 N* spusti se bez početne brzine niz glatku zakrivljenu podlogu radijusa *R = 10m*, i hrapavu horizontalnu podlogu duljine *L = 12 m*. Koeficijent trenja μ = *0,1*. Na kraju udari u elastičnu oprugu krutosti *k = 20 N/m* ispod koje je podloga opet glatka. Koliko je maksimalno skraćenje opruge?

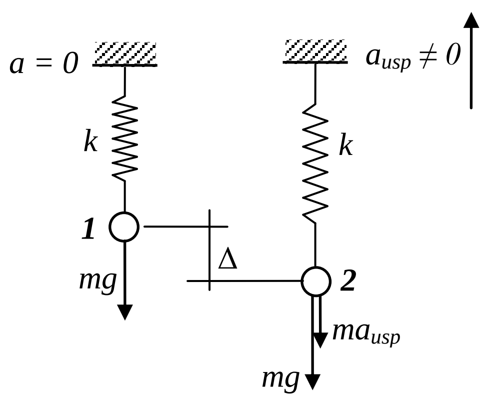


Rješenje: $\Delta = 37,3826\, cm$

6. Na materijalnu točku mase *m=1 k*g koja miruje u položaju "1" djelovao je impuls *S=4 Ns*. Odredi koliko je maksimalno skraćenje opruge krutosti *k=5,0 N/cm* izazvano naletom kuglice. Podloga je glatka.



7. Dizalo se spušta konstantnom brzinom. Za strop dizala pričvršćeno je elastična opruga krutosti k, za koju je pričvršćena materijalna točka mase m, koja miruje u odnosu na dizalo. Odjednom se dizalo počinje usporavati sa konstantnim usporenjem a. Koliko je maksimalno produljenje opruge?



Rješenje

$$\Delta_{\max} = 2\frac{ma_{usp}}{k} - \frac{mg}{k}$$