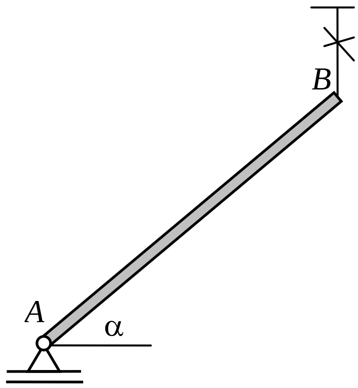
Zadatak 1,



Štap *AB* duljine *L* i mase *m* pridržan užetom u točki B, miruje u vertikalnoj ravnini kako je prikazano na skici. Treba odrediti reakciju u ležaju A u trenutku kad se presječe uže u točki B.

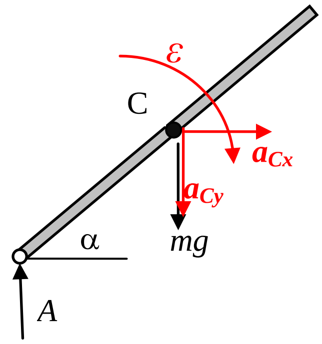
Rješenje:

Gibanje tijela u općem slučaju rastavlja se na translaciju centra mase i rotaciju oko centra mase. Ako postoje neki spojevi dodaju se pripadne reakcije u spojevima i jednadžbe ograničavanja gibanja koje uvodi pojedini spoj. U ovom slučaju to je spoj u A.

Diferencijalne jednadžba translacije i rotacije tijela pod djelovanjem sila prema 2. Newtonovom aksiomu su:

$$\frac{d}{dt}(m\cdot\vec{v}_c)=\sum\vec{F} \quad\Rightarrow\quad m\cdot\vec{a}_c=\sum\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt}=\sum\vec{M}_C^{(\vec{F})} \quad\Rightarrow\quad I_C\cdot\vec{\varepsilon}=\sum\vec{M}_C^{(\vec{F})}$$



Translacija tijela:

$$m\cdot\vec{a}_C=\sum\vec{F}$$

$$m\cdot a_{Cx}=\sum F_x \qquad m\cdot a_{Cy}=\sum F_y$$

$$m\cdot a_{Cx}=0 \qquad m\cdot a_{Cy}=mg-A \qquad \text{....(1)}$$

$$a_{Cx}=0$$

Rotacija tijela oko centra mase:

$$I_C\varepsilon=A\frac{L}{2}\cos\alpha \qquad I_C=\frac{mL^2}{12} \quad\Rightarrow\quad A=\frac{mL}{6\cos\alpha}\varepsilon \qquad \text{....(2)}$$

Jednadžbe ograničavanja gibanja u spoju A:

$$a_{Ay}=0$$

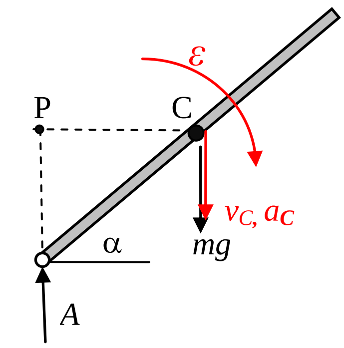
$$\vec{a}_A=\vec{a}_C+\vec{a}_{AC,n}+\vec{a}_{AC,t} \qquad \vec{a}_{AC,n}=0$$

$$a_{Ay}=0=a_{Cy}-\varepsilon\frac{L}{2}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad a_{Cy}=\varepsilon\frac{L}{2}\cos\alpha \qquad \text{....(3)}$$

Rješenjem sustava jednadžbi odredi se

$$\varepsilon=\frac{6\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\cdot\frac{g}{L}, \qquad a_{Cy}=\frac{3\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}\cdot g, \qquad A=\frac{1}{1+3\cos^2\alpha}\cdot mg$$

2.način:



Na štap djeluju isključivo vertikalne sile, što znači da se horizontalna komponenta količine gibanja pod djelovanjem sila ne mijenja u odnosu na početni trenutak, odnosno centar mase giba se po vertikali.

$$\frac{d}{dt}(m\cdot v_{cX})=0 \quad\Rightarrow\quad m\cdot v_{cX}=const.=0$$

$$\vec{v}_C=\vec{v}_{Cy}$$

Za dvije točke štapa znamo pravce vektora brzina i vektora ubrzanja. pa možemo odrediti trenutni pol rotacije. Trenutni pol ubrzanja za trenutak kada počinje gibanje identičan je polu brzina ($v_P=0$), jer u tom trenutku nema normalnih komponenti ubrzanja. Ako ishodište koordinatnog sustava postavimo u nepomičnu točku P, možemo promatrati rotaciju oko ishodišta:

$$I_P \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_P^{(\vec{F})}$$

$$I_P \varepsilon = mg\frac{L}{2}\cos\alpha \qquad I_P = I_C + m\cdot\left(\frac{L}{2}\cos\alpha\right)^2 = \frac{mL^2}{12}\left(1+3\cos^2\alpha\right)$$

$$\varepsilon = \frac{6\cos\alpha}{L(1+3\cos^2\alpha)}g$$

Sada jednostavno odredimo ubrzanje centra mase

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C,P} = -\varepsilon\cdot\frac{L}{2}\cos\alpha\,\vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad a_{Cy} = \frac{3\cos^2\alpha}{(1+3\cos^2\alpha)}\,.$$

Silu u spoju A odredimo iz

$$m\cdot\vec{a}_C = \sum \vec{F}$$

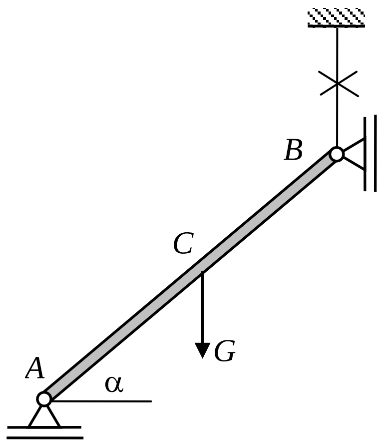
$$m\cdot a_{Cx} = \sum F_x \qquad m\cdot a_{Cy} = \sum F_y$$

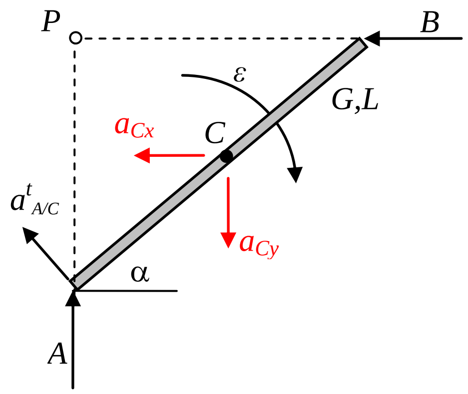
$$m\cdot a_{Cx} = 0 \qquad m\cdot a_{Cy} = mg - A \qquad \Rightarrow \qquad A = mg - m\cdot a_{Cy}$$

$$a_{Cx} = 0 \qquad A = mg\left(\frac{1}{1+3\cos^2\alpha}\right)$$

Zadatak 2.

Štap *AB* duljine *L*, mase *m*, pridržan užetom u točki B miruje u vertikalnoj ravnini kako je prikazano na skici. Treba odrediti reakciju u ležaju A u trenutku kad se presječe uže u točki B.
Rješenje:





Gibanje tijela u općem slučaju definirano je translacijom centra mase i rotacijom oko centra mase. Ako postoje neki spojevi dodaju se pripadne reakcije u spojevima i jednadžbe ograničavanja gibanja koje uvodi pojedini spoj. U ovom slučaju dodaju se sile A i B.

Diferencijalne jednadžba translacije i rotacije tijela pod djelovanjem sila prema 2. Newtonovom aksiomu su:

$$m\cdot\vec{a}_c = \sum \vec{F}$$

$$I_C \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_C^{(\vec{F})}$$

Translacija centra:

$$m \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F} \quad \Rightarrow \quad ma_{Cx} = B \qquad \text{....(1)}$$

$$ma_{Cy} = G - A \qquad \text{....(2)}$$

Rotacija oko centra:

$$I_C \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_C$$

$$I_C \varepsilon = A \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha - B \cdot \frac{L}{2}\sin\alpha, \qquad I_C = \frac{mL^2}{12} \qquad \text{........(3)}$$

Jednadžbe ograničenja gibanja zbog spojeva u A i B:

$$a_{Ay} = 0$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{A/C} + \vec{a}^t_{A/C} \quad \Rightarrow \quad a_{Ay} = 0 = a_{Cy} - \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a_{Cy} = \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha \qquad \text{....(4)}$$

$$a_{Bx} = 0$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{B/C} + \vec{a}^t_{B/C} \quad \Rightarrow \quad a_{Bx} = -a_{Cx} + \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{Cx} = \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\sin\alpha \qquad \text{....(5)}$$

Rješenjem sustava odrede se nepoznate veličine a_{Cx}, a_{Cy}, ε, *A* i *B*.

2. način

Analizom jednadžbi ograničenja gibanja u točkama *A* i *B*, uočavamo da se ubrzanje centra može riješiti iz rotacije oko pola ubrzanja ($a_P=0$). Pol ubrzanja za trenutak kada počinje gibanje identičan je polu brzina ($v_P=0$), jer u tom trenutku nema normalnih komponenti ubrzanja. Ako ishodište koordinatnog sustava postavimo u nepomičnu točku P, možemo promatrati rotaciju oko ishodišta:

$$I_P \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_P^{(\vec{F})}$$

Prednost ove jednadžbe je da nepoznate sile A i B ne daju moment na točku P, te se iz ove jednadžbe odredi kutno ubrzanje

$$I_P \cdot \varepsilon = mg \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha,$$

Moment tromosti mase štapa na točku P odredi se prema Steinerovom pravilu, a zatim i kutno ubrzanje. Na taj način izbjegli smo rješavanje sustava jednadžbi.

$$I_P = I_C + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} \quad ,$$

$$\frac{mL^2}{3} \cdot \varepsilon = mg \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{3g\cos\alpha}{2L}.$$

Zatim iz jednadžbi (4) i (5) odredimo ubrzanje centra mase, a nakon toga iz (1) i (2) sile u spoju A i B.

$$a_{Cy} = \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\cos\alpha \qquad \text{....(4)}$$

$$a_{Cx} = \varepsilon \cdot \frac{L}{2}\sin\alpha \qquad \text{....(5)}$$

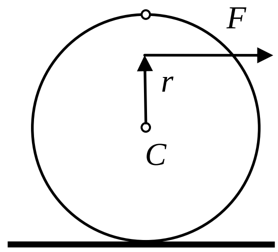
$$B = ma_{Cx} \qquad \text{....(1)}$$

$$A = G - ma_{Cy} \qquad \text{....(2)}$$

Zadatak 3.

Kružni disk polumjera R, kotrlja se po horizontalnoj podlozi pod djelovanjem sile F. Treba odrediti potrebnu veličinu sile trenja ako je udaljenost sile od centra diska:

a) na udaljenosti $r=R$
b) na udaljenosti $r=0$
c) na udaljenosti $r= R/2$



Možemo pisati diferencijalne jednadžbe translacije centra diska (1), i diferencijalne jednadžbe rotacije oko centra diska (2), uz dodatni uvjet kotrljanja (3), ili diferencijalnu jednadžbu rotacije oko pola (4) iz koje odredimo kutno ubrzanje bez rješavanja sustava jednadžbi.

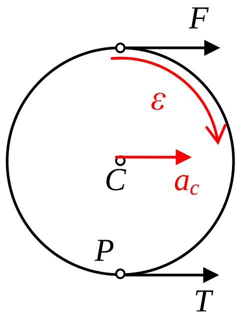
$$m \cdot \vec{a}_c = \sum \vec{F} \qquad (1)$$

$$I_C \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_C^{(\vec{F})} \qquad (2)$$

$$a_c = \varepsilon \cdot R \qquad (3)$$

$$ili \quad I_P \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_P^{(\vec{F})} \qquad (4)$$

a)



$$(4) \quad I_P \varepsilon = F \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2F \cdot 2R}{3mR^2}$$

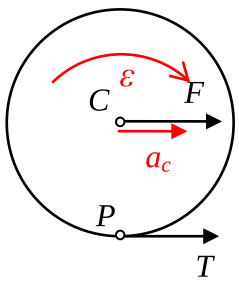
$$I_P = \frac{3}{2} mR^2 \qquad \varepsilon = \frac{4F}{3mR} \quad \Rightarrow \quad a_C = \varepsilon \cdot R = \frac{4F}{3m}$$

$$(1) \quad ma_C = F + T$$

$$m\frac{4F}{3m} = F + T$$

$$T = \frac{1}{3} F$$

b)



$$(4) \quad I_P \varepsilon = F \cdot R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2 \cdot F \cdot R}{3mR^2} = \frac{2F}{3mR} \quad \Rightarrow \quad a_c = \varepsilon \cdot R = \frac{2F}{3m}$$

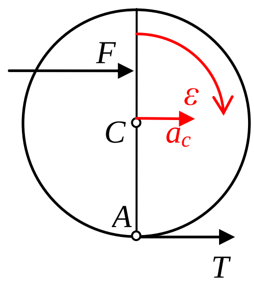
$$(1) \quad m \cdot a_c = F + T$$

$$m\frac{2F}{3m} \cdot = F + T$$

$$T = -\frac{1}{3} F$$

Sila trenja je usmjerena suprotno pretpostavci prikazanoj na crtežu.

c)



$$I_P \cdot \varepsilon = F \cdot \frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = F\frac{3 \cdot R \cdot 2}{2 \cdot 3mR^2} = \frac{F}{mR} \quad \Rightarrow \quad a_c = \varepsilon \cdot R = \frac{F}{m}$$

$$m \cdot a_c = F + T$$

$$m\frac{F}{m} = F + T$$

$$T = 0$$

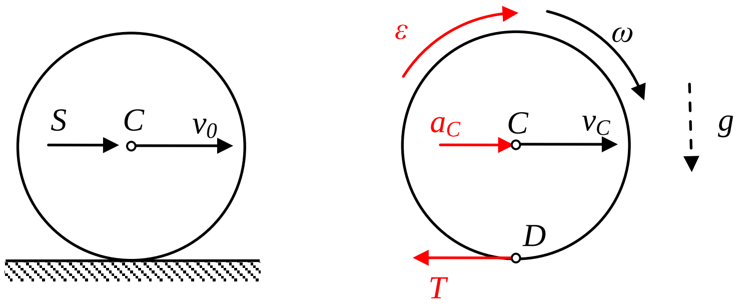
Disk će se kotrljati i po glatkoj podlozi!

Pripremila doc.dr.sc.Verica Raduka

Zadatak 4.

Kružni disk miruje na horizontalnoj hrapavoj podlozi kad na njega djeluje impuls S. Ako je poznat koeficijent trenja kotrljanja μ_k, treba odrediti:

- nakon koliko sekundi će se disk početi kotrljati bez klizanja po podlozi
- brzinu centra diska i kutnu brzinu u tom trenutku.



Gibanje tijela u općem slučaju rastavlja se na translaciju centra mase i rotaciju oko centra mase. Ako postoje neki spojevi dodaju se pripadne reakcije u spojevima i jednadžbe ograničavanja gibanja koje uvodi pojedini spoj.
Djelovanje impulsa S na tijelo:

$$m\vec{v}_{c,2} - m\vec{v}_{c,1} = \int_1^2 \vec{F}dt = \sum \vec{S} \qquad (\textit{translacija centra mase})$$

$$I_C\vec{\omega}_2 - I_C\vec{\omega}_1 = \sum \vec{M}_C^{(\vec{S})} \qquad (\textit{rotacija oko centra mase})$$

Od djelovanja trenutnog impulsa disk će promijeniti količinu gibanja. Kinetički moment se ne mijenja jer impuls djeluje u centru mase diska.

$$mv_{c,0} - m\cdot 0 = S \quad \Rightarrow \quad v_{c,0} = \frac{S}{m} \qquad (\textit{početna brzina})$$

$$I_C\omega_0 - I_C\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 0$$

U početnom trenutku disk se ne rotira, što znači da počinje klizati po podlozi. Sila trenja usmjerena je suprotno smjeru klizanja.
Diferencijalne jednadžba translacije i rotacije tijela pod djelovanjem sila, prema 2. Newtonovom aksiomu su:

$$m\cdot\vec{a}_c = \sum\vec{F}$$

$$I_C\cdot\vec{\varepsilon} = \sum\vec{M}_C^{(\vec{F})}$$

Translacija centra:

$$ma_c = -T \qquad \text{(disk usporava)}$$

$$T = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$a_c = -\mu_k g$$

Rotacija oko centra:

$$I_C\varepsilon = T\cdot R$$

$$\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = \mu_k mgR \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{2\mu_k g}{R}$$

Ubrzanje točke D u trenutku kad počne gibanje

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{D/C}\,. \qquad \text{(usporava!)}$$

$$a_{Dx} = a_C - \varepsilon\cdot R = -3\mu_k g$$

Pripremila doc.dr.sc.Verica Raduka

Kotrljanje će početi kad brzina u točki D postane jednaka nuli (pol brzina je u kontaktu diska s podlogom), a istovremeno i ubrzanje a_{Dx} postaje jednako nuli, jer ubrzanje pola brzina kod kotrljanja mora biti usmjereno okomito na podlogu. Brzina točke D odredimo iz brzine translacije centra i pribrojenog doprinosa od rotacije oko centra:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{D/C}$$
$$v_D = v_{Dx} = v_c - \omega R$$

Centar diska giba se po pravcu, tako da promjenu brzine centra u vremenu, uz zadanu početnu brzinu v_0 i poznato usporenje $a_c = const.$, možemo izraziti kao:

$$v_C = v_0 - a_C t\,.$$

Kutna brzina diska mijenja se po zakonu:

$$\omega = \int_0^t \varepsilon dt + \omega_0 = \varepsilon \cdot t \qquad (\omega_0 = 0)$$

Iz uvjeta $v_D=0$, slijedi vrijeme t_1 nakon kojeg će se disk početi kotrljati:

$$v_D = v_0 - \mu_k g t_1 - \frac{2\mu_k g}{R} t_1 R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_0}{3\mu_k g}$$

b) Brzina centra i kutna brzina u trenutku t_1 kad počinje kotrljanje:

$$\omega_1 = \frac{2\mu_k g}{R} t_1 = \frac{2\mu_k g}{R} \cdot \frac{v_0}{3\mu_k g} = \frac{2v_0}{3R}$$

$$v_{C,1} = v_0 - \mu_k g t_1 = \frac{2}{3} v_0$$