Zadatak 1.

Čestica mase m giba se pod djelovanjem sile čija je funkcija sila $U(x,y,z)=2x^2-4xy+y^2+8x-3\sin z+4$. U položaju $1(1,0,-2\pi)$ čestica ima kinetičku energiju $E_{k,1}=8\,Nm$. Kolika je maksimalna kinetička energija čestice $E_{k,\max}$?

$$E_{k,1}+E_{p,1}=const.=E_{k,\max}+E_{p,\min}$$

$$E_p=-U\ ,$$

$$\nabla U=\vec{F}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial U}{\partial x}=F_x=4x-4y+8$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=F_y=2y-4x$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}=F_z=-3\cos z$$

Potencijalna energija u položaju 1 $(1,0,-2\pi)$:

$$E_{p,1}=-U\,(1,0,2\pi)=-(2+8+4)=-14\,J$$

Potencijalna energija je minimalna u položaju stabilne ravnoteže. Da bi odredili taj položaj postavljamo jednadžbu ravnoteže

$$\sum\vec{F}=\vec{0}$$

1) $F_x=0=4x-4y+8$
2) $F_y=0=2y-4x$
3) $F_z=0=-3\cos z$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo koordinate položaja ravnoteže:

$$x=2$$
$$y=4$$
$$z=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

Pošto funkcija $\sin z$ poprima različite vrijednosti za $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$, a nama treba $E_{p,min}$, potrebno je provjeriti veličinu potencijalne energije u oba ravnotežna položaja.

položaj $2(2,4,\frac{\pi}{2})$ $\quad E_{p,2}=-U\,(2,4,\frac{\pi}{2})=-(8-32+16+16-3+4)=-9\,J$

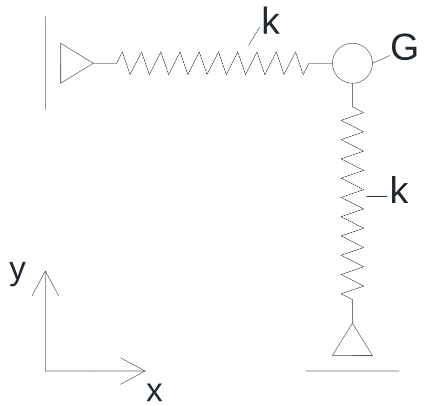
položaj $3(2,4,\frac{3\pi}{2})$ $\quad E_{p,3}=-U\,(2,4,\frac{3\pi}{2})=-(8-32+16+16+3+4)=-15\,J=E_{p,\min}$

$$E_{k(1)}+E_{p(1)}=E_{k,\max}+E_{p,\min}\quad\Rightarrow\quad 8+(-14)=E_{k,\max}-15\quad\Rightarrow\quad E_{k,\max}=9J$$

Pripremila doc.dr.sc.Verica Raduka

Zadatak 2.

Čestica težine G=80 N pričvršćena je za dvije opruge krutosti k=40 N/cm. Čestica i opruge mogu se pomicati u vertikalnoj ravnini tako da opruge ostaju paralelne prikazanom položaju. Odredi funkciju potencijalnog polja sila i jednadžbe ekvipotencijalnih krivulja potencijalnog polja sila (krivulje jednake potencijalne energije).



Funkcija potencijalne energije sustava pisana je u odnosu na položaj u kojem opruge nisu deformirane (nivo *c*-*c*):

$$V = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 + G\cdot y + c$$

$$\vec{F} = \nabla V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = F_x = k\cdot x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = F_y = k\cdot y + G$$

Ravnotežni položaj:

$$F_x = 0 = k\cdot x \qquad \qquad x = 0$$
$$F_y = 0 = k\cdot y + G \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{G}{k} = -\frac{80}{40} = -2\,cm$$

$$V = const = \frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 + G\cdot y \;\; / \cdot\frac{2}{k}$$

$$c_1 = x^2 + y^2 + \frac{2G}{k}\cdot y$$

$$c_1 = x^2 + y^2 + 4y$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = c_1 + 4$$

$$x^2 + (y+2)^2 = c_2$$

Ekvipotencijalne krivulje su kružnice sa središtem u $x = 0$, $y = -2$, i polumjerom r koji ovisi o odabranoj veličini konstante c_2, $r = c_2$.