

Mini-simpozij

Numerički postupci

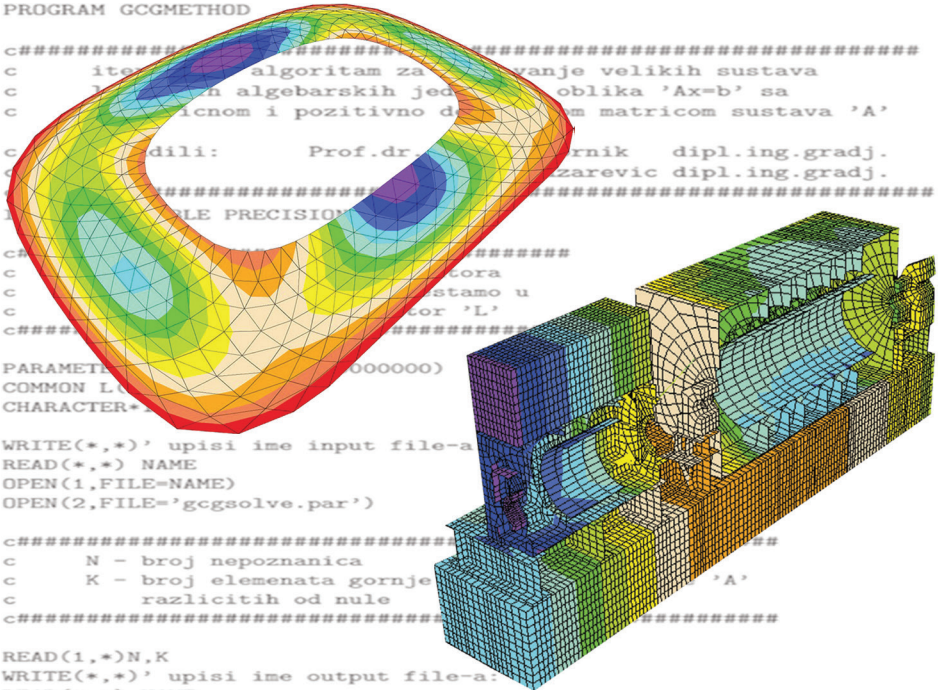
u okviru projekta

**Novi, učinkoviti iteracijski postupak proračuna konstrukcija
– poopćenje suvremenih postupaka**

YODA IP – 2014 – 09 – 2899

PROGRAM GCGMETHOD

```
c#####
c      ite      algoritam za      vanje velikih sustava
c      en algebarskih jed      oblika 'Ax=b' sa
c      icnom i pozitivno d      om matricom sustava 'A'
c      dili:      Prof.dr      rnik      dipl.ing.gradj.
c      zarezovic dipl.ing.gradj.
c#####
c      FILE PRECISION
c#####
c      lora
c      stamo u
c      lor 'L'
c#####
PARAMETER      (000000)
COMMON L
CHARACTER*
WRITE(*,*)' upisi ime input file-a
READ(*,*) NAME
OPEN(1,FILE=NAME)
OPEN(2,FILE='gcgsolve.par')
c#####
c      N - broj nepoznanica
c      K - broj elemenata gornje      'A'
c      razlicitih od nule
c#####
READ(1,*)N,K
WRITE(*,*)' upisi ime output file-a:
READ(*,*) NAME
OPEN(3,FILE=NAME)
```



10. lipnja 2019.

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb

Izdavač

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet
Zagreb, Kačićeva 26

Urednici

Elizabeta Šamec, mag.ing.aedif.
doc.dr.sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević
doc.dr.sc. Petra Gidak
doc.dr.sc. Mario Uroš

Prijelom

Tanja Vrančić

Tisak

Tiskara Zelina d.d., 2019.

Naklada

150 kom.

ISBN

ISBN 978-953-8168-32-1

Zagreb, lipanj 2019.

CIP zapis

je dostupan u računalnome katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu
pod brojem 001031594.

Iako su poduzete sve mjere da se sačuva integritet i kvaliteta ove publikacije i u njoj sadržanih podataka, izdavač, urednici i autori ne smatraju se odgovornima za bilo koju štetu nanесenu imovini ili osobama zbog primjene ili korištenja ove knjige ili zbog korištenja u njoj sadržanih informacija, uputa ili ideja. Radovi objavljeni u knjizi izražavaju mišljenja autora koji su i odgovorni za objavljene sadržaje. Cjeloviti radovi smiju se reproducirati ili prenositi samo uz pismenu suglasnost izdavača. Manji dijelovi mogu se reproducirati samo uz odgovarajuće citiranje izvora.

Mini-simpozij

Numerički postupci

u okviru projekta

**Novi, učinkoviti iteracijski postupak
proračuna konstrukcija
– poopćenje suvremenih postupaka**

YODA IP – 2014 – 09 – 2899

Zbornik radova

Organizacijski odbor simpozija

Elizabeta Šamec , mag.ing.aedif.	Građevinski fakultet Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku
Doc.dr.sc. Antonia Jaguljnjak Lazarević	Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zavod za rudarstvo i geotehniku
Doc.dr.sc. Petra Gidak	Građevinski fakultet Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku
Doc.dr.sc. Mario Uroš	Građevinski fakultet Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku

Predgovor

Namjena je mini-simpozija razmjena iskustava među istraživačima iz područja suvremenih postupaka proračuna, uz raspravu o nekim trendovima u građevinarstvu. Skup je ujedno i zadnja sastavnica istraživačkoga projekta **Novi, učinkoviti iteracijski postupak proračuna konstrukcija – poopćenje suvremenih postupaka**, koji je financirala Hrvatska zaklada za znanost od 2014. do 2019. godine.

Ritzov postupak i njegove inačice primjenjuju se uspješno za diskretizaciju kontinuiranih problema, ali primijećeno je da sama zamisao i interpretacija postupka nemaju širu primjenu u području rješavanja sustava algebarskih jednadžbi. Na Katedri za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija Zavoda za tehničku mehaniku zagrebačkoga Građevinskog fakulteta razvijen je iterirani Ritzov postupak (engl. *Iterated Ritz Method* – IRM), novi iteracijski algoritam utemeljen na razvoju prirasta rješenja unutar skupa Ritzovih vektora u svakom koraku iteracije. Postupak predstavlja poopćenje brojnih iteracijskih postupaka, daje motivaciju za njihovo poboljšanje, a kao samostalan pristup obećava u linearnim, nelinearnim i optimizacijskim problemima. Pokazuje dobre rezultate u primjeni na velike sustave slabo popunjenih matrica iz konstruktorske prakse. Istraživanje i realizacija algoritma nisu niti izbliza završeni, nove zamisli su dobrodošle, a mogućnosti suradnje s kolegama koji se bave proračunima velikih modela, poput sudionika ovoga skupa, praktično su neograničene.

U tri pozvana predavanja i deset izlaganja prikazano je stanje razvoja nekih numeričkih i eksperimentalnih postupaka za rješavanje inženjerskih problema. Skup je namijenjen članovima znanstvene zajednice koje želimo upoznati s rezultatima projekta. Nadamo se da će širi pogled na prikazane inženjerske probleme otvoriti nova područja primjene predloženog postupka i potaknuti njegov daljnji razvoj.

Članovi projekta YODA zahvaljuju Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu na financijskoj potpori za tiskanje Zbornika radova.

Uređivački odbor skupa

Sadržaj

1. ITERIRANI RITZOV POSTUPAK

- 1.1 Iterirani Ritzov postupak: počela, trenutačno stanje i budući razvoj 11
Josip Dvornik, Damir Lazarević, Antonia Jaguljnjak Lazarević
- 1.2 O optimizaciji programskoga koda iteriranog Ritzova postupka 39
Krešimir Fresl, Elizabeta Šamec, Petra Gidak

2. MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

- 2.1 Modelling corrosion of steel in concrete. Past, present and future 55
(pozvano predavanje)
Joško Ožbolt, Gojko Balabanić, Filip Oršanić
- 2.2 Procjena parametara i opterećenja iz mjerenja na konstrukcijama i modelima 69
(pozvano predavanje)
Ivica Kožar
- 2.3 Eksperimentalna i numerička analiza zidova od pune opeke 79
Senad Medić, Mustafa Hrasnica
- 2.4 Damage detection in steel fiber reinforced concrete using resonant method 95
Neira Torić Malić, Natalija Bede, Ivica Kožar
- 2.5 Effect of dynamic loading on concrete properties 105
Natalija Bede, Joško Ožbolt

3. GEOTEHNIKA

- 3.1 Numerička analiza mehanizama loma tla ispod temelja 119
(pozvano predavanje)
Emina Hadžalić, Adnan Ibrahimbegović, Samir Dolarević
- 3.2 Primjena numeričkih postupaka pri provjeri stanja naprezanja
i deformacija podzemnih prostorija rudnika 129
Petar Hrženjak, Antonia Jaguljnjak Lazarević, Mario Uroš

4. SEIZMIČKO INŽENJERSTVO

- 4.1 Krivulje vjerojatnosti oštećenja za armiranobetonski okvir
neproračunan na djelovanje potresa 141
Marijana Hadzima-Nyarko, Gordana Pavić, Dijana Nikić
- 4.2 Proračunski mikromodel za procjenu potresne otpornosti armiranobetonskih
okvira s ispunskim zidom u kojem se nalaze omeđeni otvori 151
Davorin Penava, Filip Anić, Sarah Šćurla
- 4.3 Nonlinear vibration analysis: analytic versus numerical methods
– application to cable dynamics 163
Marija Demšić
- 4.4 Procjena ponašanja postojećih zgrada pri djelovanju potresa 173
Mario Uroš, Marta Šavor Novak, Josip Atalić, Snježan Prevolnik

1. ITERIRANI RITZOV POSTUPAK

Iterirani Ritzov postupak: počela, trenutačno stanje, budući razvoj

Josip Dvornik¹, Damir Lazarević¹, Antonia Jaguljnjak Lazarević²

¹Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

²Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko – geološko – naftni fakultet

Sažetak

U članku je opisan razvoj novoga iteracijskog postupka za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi, utemeljen na primjeni diskretnoga Ritzova postupka u svakom koraku. Pogodan je za izrazito velike sustave slabo popunjenih, čak loše uvjetovanih, matrica. Osim vlastitih obilježja posjeduje i svojstvo općenitosti, jer su mnogi iteracijski postupci samo poseban slučaj ovoga pristupa. To pomaže drugačijoj interpretaciji tih postupaka, što doprinosi razumijevanju njihovih prednosti i nedostataka, a time i zamisliva poboljšanja. Algoritam je realiziran samostalno, a potom je pridružen programu otvorena koda FEAP. Provedene su raznolike provjere, posebice na praktičnim modelima. Postupak je tek djelomice istražen, ali već pokazuje dobre rezultate.

Ključne riječi: Ritzov postupak, metoda konjugiranih gradijenata, postupak uzastopne prekomjerne relaksacije, preduvjetovanje, točna aritmetika

Iterated Ritz Method: fundamentals, current state and future development

Abstract

Development of a novel iterative solver for linear systems of algebraic equations, based on a discrete Ritz method, is described. It is suitable for extremely large, even ill-conditioned, sparse systems. In addition to its own characteristics, it also has a feature of generality, as many iterative methods are only special cases of this approach. It also helps in different interpretation of these methods, which contributes to understanding of their advantages and limitations, and hence gives motivation for their improvement. The algorithm was developed independently, and then implemented into the open source finite element program FEAP. Also, various checks were conducted, especially on practical models. Although the method has been only partially studied, good results have already been obtained.

Key words: Ritz method, conjugate gradient method, Method of successive overrelaxation, preconditioning, exact arithmetic

1. Kratki teorijsko – povijesni uvod

Poznato je, rješavanje realnoga, linearnog sustava

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1)$$

sa simetričnom i pozitivno definitnom (SPD) matricom, ekvivalentno je minimizaciji pripadajućega funkcionala energije (kvadratne forme)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}. \quad (2)$$

Godine 1978. J. Dvornik je objavio iteracijski postupak minimizacije izraza utemeljen na rješavanju maloga sustava jednadžbi unutar svakoga koraka [1]. Ukratko, ako prirast rješenja u (i)-tom koraku prikažemo diskretiziranim Ritzovim postupkom

$$\mathbf{p}_{(i)} = \Phi_{(i)} \mathbf{a}_{(i)} \quad (3)$$

gdje je $\Phi_{(i)} = [\phi_{1,(i)} \phi_{2,(i)} \dots \phi_{m,(i)}]$ matrica linearno nezavisnih koordinatnih vektora, a $\mathbf{a}_{(i)}$ vektor pripadajućih koeficijenata, smanjenje energije nakon prirasta (3) također je kvadratna forma

$$\Delta f(\mathbf{a}_{(i)}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}_{(i)}^T \bar{\mathbf{A}}_{(i)} \mathbf{a}_{(i)} - \mathbf{a}_{(i)}^T \bar{\mathbf{r}}_{(i)}, \quad (4)$$

gdje je $\bar{\mathbf{A}}_{(i)} = \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} \Phi_{(i)}$ poopćena (Ritzova) SPD matrica, a $\bar{\mathbf{r}}_{(i)} = \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)}$ poopćeni (Ritzov) vektor reziduala, oboje reda m . Minimizacijom (4) dobivamo sustav jednadžbi

$$\bar{\mathbf{A}}_{(i)} \mathbf{a}_{(i)} = \bar{\mathbf{r}}_{(i)}, \quad (5)$$

koji treba riješiti u svakom koraku. Rješenjem odredimo prirast (3), a potom i trenutačnu aproksimaciju $\mathbf{x}_{(i+1)} = \mathbf{x}_{(i)} + \omega_{(i)} \mathbf{p}_{(i)}$, gdje je $\omega_{(i)} \in (0,2)$ faktor relaksacije, poznat iz postupka uzastopne prekomjerne relaksacije (engl. *successive overrelaxation*) koji može ubrzati konvergenciju. Određivanje optimalnoga $\omega_{(i)}$ u svakom koraku nije isplativo (koraka je manje, ali predugo traju), pa se prema numeričkim pokusima i iskustvu bira konstantan iznos na početku proračuna. Rezidual obično definiramo rekursivno kao $\mathbf{r}_{(i+1)} = \mathbf{r}_{(i)} + \omega_{(i)} \mathbf{A} \mathbf{p}_{(i)}$ i povremeno ga (svakih k koraka), zbog gomilanja pogrešaka zaokruživanja, obnavljamo iz uvjeta ravnoteže $\mathbf{r}_{(i+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{(i)}$. Iteracijski slijed završava ako je $\|\mathbf{r}_{(i)}\|_2 \leq \varepsilon \|\mathbf{r}_{(0)}\|_2$, gdje je \mathbf{r}_0 početni rezidual ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$), a ε je vrlo mali pozitivan broj.

Znači, u svakom koraku tvorimo koordinatne vektore koji razapinju potprostor unutar kojega smanjujemo energiju sistema. Zato treba riješiti sustav (5). Ako je $\omega = 1$, riječ je o najvećem smanjenju (lokalnom minimumu), što za globalnu konvergenciju

nije nužno optimalno. Dimenzija sustava je mala, puno manja od broja nepoznanica (n), jer ga nekim (najčešće izravnim) postupkom treba riješiti u svakom koraku. Time postupno reduciramo energiju (2), do pronalaska globalnoga minimuma. Očito je riječ o kombinaciji iteracijskoga (preciznije, gradijentnog) i izravnoga postupka rješavanja sustava. Pseudokod je prikazan u nastavku.

Iterirani Ritzov postupak

- 1: **Potrebno:** \mathbf{A} , \mathbf{b} , ω , k , ε
 - 2: **Rezultat:** $\mathbf{x}_{(i)}$ približno rješenje
 - 3: $i \leftarrow 0$ brojač koraka
 - 4: $\mathbf{x}_{(i)} \leftarrow \mathbf{0}$ početno rješenje nul-vektor
 - 5: $\mathbf{r}_{(i)} \leftarrow \mathbf{b}$ rezidual jednak opterećenju
 - 6: **repeat**
 - 7: $\Phi_{(i)} \leftarrow [\phi_{1,(i)} \ \phi_{2,(i)} \ \cdots \ \phi_{m,(i)}]$ definiranje koordinatnih vektora
 - 8: $\bar{\mathbf{A}}_{(i)} \leftarrow \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} \Phi_{(i)}$ tvorba „male” matrice sustava
 - 9: $\bar{\mathbf{r}}_{(i)} \leftarrow \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)}$ tvorba „maloga” vektora desne strane
 - 10: $\mathbf{a}_{(i)} \leftarrow \bar{\mathbf{A}}_{(i)}^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{(i)}$ rješavanje „maloga” sustava
 - 11: $\mathbf{p}_{(i)} \leftarrow \Phi_{(i)} \mathbf{a}_{(i)}$ određivanje prirasta rješenja
 - 12: $\mathbf{x}_{(i+1)} \leftarrow \mathbf{x}_{(i)} + \omega \mathbf{p}_{(i)}$ proračun novoga pomaka
 - 13: **if** $i \bmod k \neq 0$ **then**
 - 14: $\mathbf{r}_{(i+1)} \leftarrow \mathbf{r}_{(i)} - \omega \mathbf{A} \mathbf{p}_{(i)}$ rezidual rekurzivno
 - 15: **else**
 - 16: $\mathbf{r}_{(i+1)} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{(i+1)}$ rezidual iz ravnoteže
 - 17: **end if**
 - 18: $i \leftarrow i + 1$ povećanje brojača koraka
 - 19: **until** $\|\mathbf{r}_{(i)}\|_2 / \|\mathbf{r}_{(0)}\|_2 < \varepsilon$
-

U radu [1] istaknuta je i općenitost algoritma. Pokazano je, postupci Gauß–Seidela, najstrmijega silaska i konjugiranih gradijenata mogu se interpretirati kao posebni slučajevi pristupa. Predloženo je nekoliko načina tvorbe koordinatnih vektora, napravljene su usporedbe među postupcima, a riješeni su i karakteristični primjeri. Rad je zaključen osvrtom na mogućnosti rješavanja nelinearnih sustava. Članak je

1979. godine u izvornom obliku otisnut u časopisu *Computers & Structures* [2]. Početak prve stranice vidi se na sljedećoj slici.

Computers & Structures Vol. 10, pp. 217-223
© Pergamon Press Ltd., 1979. Printed in Great Britain

0045-7949/79/0401-0217\$02.00/0

GENERALIZATION OF THE CG METHOD APPLIED TO LINEAR AND NONLINEAR PROBLEMS

JOSIP DVORNIK

Gradjevinski Institut, Janka Rakuse 1, 41000 Zagreb, Yugoslavia

(Received 19 May 1978)

Abstract—A method of solving a set of linear equations through iteration process is described. In every step of the process the Ritz method is applied. With a suitably chosen procedure for generating coordinate vectors, the process is efficient when applied to nonlinear and in some cases even to linear problems. Present experience is limited, and no objective criteria have been developed for an *a priori* judgment of coordinate vectors what would very probably contribute to the efficiency. Some standard iterative algorithms can be interpreted as special cases of this procedure.

Na žalost, rad je praktički ostao bez odjeka. Jedino je, prema šturim podacima i saznanjima J. Dvornika, osamdesetih godina postupak primijenilo nekoliko istraživačkih ustanova, koje nisu publicirale područje i način primjene postupka. Prema našim saznanjima, članak je tih godina citiran tri puta [3-5].

Početak devedesetih matematičar S. Polić radio je na volumnom pristupu pločama umjerene debljine primjenom metode konačnih razlika. Dobivao je (za tadašnje prilike) velike sustave, široke vrpce, pa su 1994. godine za njegove potrebe J. Dvornik i D. Lazarević napravili poboljšanu inačicu postupka. Tada je, primjenom štednoga zapisa matrice po redcima, riješeno pristojnih jednadžbi. Rezultati nikada nisu objavljeni. Početak programa koji je primijenio Polić priložen je u nastavku.

PROGRAM GCGMETHOD

```
c#####  
c   iterativni algoritam za rjesavanje velikih sustava  
c   linearnih algebarskih jednadzbi oblika 'Ax=b' sa  
c   simetricnom i pozitivno definitnom matricom sustava 'A'  
  
c   izradili:      Prof.dr. Josip Dvornik   dipl.ing.gradj.  
c                Damir Lazarevic dipl.ing.gradj.  
c#####
```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```
c#####
c      NM - broj koordinatnih vektora
c      sve potrebne vektore smjestamo u
c      dinamički alocirani vektor 'L'
c#####
```

```
PARAMETER (NM=5, NMAX=100000000)
COMMON L(NMAX)
CHARACTER*12 NAME
```

```
WRITE(*,*)' upisi ime input file-a: '
READ(*,*) NAME
OPEN(1,FILE=NAME)
OPEN(2,FILE='gcsolve.par')
```

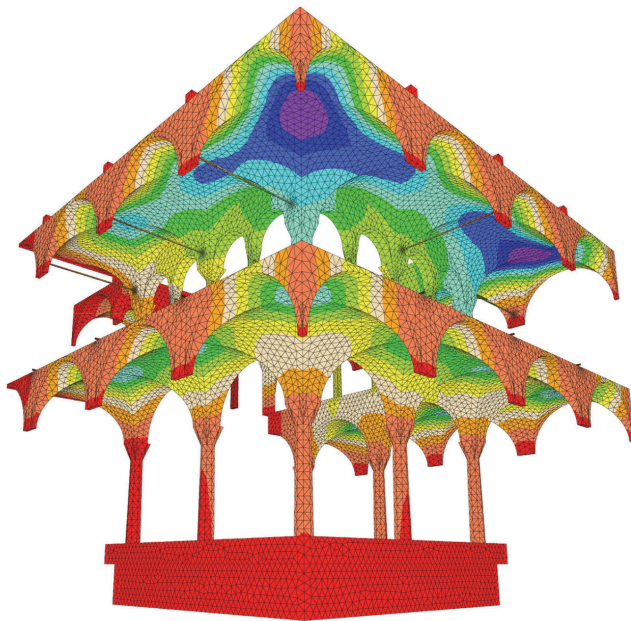
```
c#####
c      N - broj nepoznanica
c      K - broj elemenata gornje trokutaste matrice 'A'
c      razlicitih od nule
c#####
```

```
READ(1,*)N,K
WRITE(*,*)' upisi ime output file-a: '
READ(*,*) NAME
OPEN(3,FILE=NAME)
```

```
c#####
c      odredjivanje pocetaka svih vektora
c#####
```

```
I1=2*K+1
I2=I1+K
I3=I2+N+1
I4=I3+2*N
I5=I4+2*N
I6=I5+2*N
I7=I6+2*N
I8=I7+2*N*NM
I9=I8+2*N*NM
I10=I9+2*N
I11=I10+2*NM*NM
I12=I11+2*NM
I13=I12+2*NM
I14=I13+NM-1
```

Autori su se postupku vratili 2014. godine i na temelju dotadašnjih iskustava, ali i novih zamisli, 2015. godine dobili istraživački projekt Hrvatske zaklade za znanost *Novi, učinkoviti iteracijski postupak poračuna konstrukcija – poopćenje suvremenih postupaka*, u trajanju od četiri godine. Istraživanjima su se pridružili N. Bićanić (koji je iznenada preminuo 2016. godine), zatim A. Jaguljnjak Lazarević, K. Fresl, M. Uroš, P. Gidak, E. Šamec, M. Šavor Novak i M. Demšić. Poboljšani postupak, skraćena naziva IRM (od engl. *Iterated Ritz Method*), pridružen je programu otvorena koda za realizaciju metode konačnih elemenata FEAP [6, 7]. Sredstvima zaklade nabavljeno je moćno računalo pa su riješeni problemi reda veličine od [8], do čak nepoznanica [9]. Dio novijih, kontrolnih proračuna atrija *Kneževa dvora* u Dubrovniku napravljen je suvremenom inačicom postupka [10].



2. O izvornosti, konvergenciji i općenitosti postupka

Lako je uočiti prirodnu i ne odveć tešku zamisao IRM-a. Unatoč tomu, niti nakon četrdeset godina, pristup i interpretacija nisu naišli na širu primjenu među istraživačima koji se bave iteracijskim postupcima rješavanja sustava [11, 12].

Neslužbeno, prema još jednoj povijesnoj crtici, riječ je o gotovo pedeset godina. Naime, 1970. godine J. Dvornik prvi je put čuo o metodi konjugiranih gradijenata od matematičara N. Ivančića [13], s kojim je radio u tadašnjem *Institutu građevinarstva Hrvatske*. Nije bio zadovoljan svojim shvaćanjem postupka, pa ga je pokušao razjasniti na drugačiji, više interpretativan, inženjerski način. U traganju za zornijim

predočenjem zapazio je ekvivalenciju algoritma s rješavanjem sustava reda dva u svakom koraku, što se podudara s lokalnom minimizacijom energije u ravnini razapetoj s $\mathbf{r}_{(i)}$ i $\mathbf{p}_{(i-1)}$. Potom je uočio, i drugi osnovni iteracijski postupci mogu se slično interpretirati, a dovoljan je jedan vektor, rješavanje samo jedne jednadžbe u svakom koraku. Uvidjevši ove analogije postavio je logično pitanje: Ako imamo postupke s jednim ili dva koordinatna vektora, zašto ne pokušati s tri, četiri, pa i više? Tako je nastao IRM.

Postupak je samo površno sličan iteraciji po potprostorima u dinamici konstrukcija. Tamo niz potprostora konvergira prema potprostoru vlastitih vektora i nakon ispunjenja kriterija podudara se s približnim rješenjem. Kod IRM-a približno konvergentno rješenje vektor je izvan potprostora, a potprostor ne treba konvergirati. Drugim riječima, niz potprostora nema niti treba svojstvo konvergencije.

Za konvergenciju postupka dovoljan je (jedan) vektor potprostora koji nije ortogonalan na trenutačni rezidual. To može biti baš $\mathbf{r}_{(i)}$ ili pomnožen nekom pozitivno definitnom matricom. Ostali vektori biraju se slobodno (i različito su učinkoviti), ali moraju biti linearno nezavisni. Uzima se i $\mathbf{p}_{(i-1)}$, doduše ortogonalan na rezidual, ali doprinosi brzini konvergencije. Poznat je od ranije, pa je "besplatan", za razliku od ostalih vektora koje treba nekako generirati. Ako je proračun konvergentan, suma rješenja malih sustava teži prema rješenju velikoga sustava, a suma prirasta energije malih sustava monotono pada i teži prema minimumu energije (2) velikoga sustava. Prema matematičkoj interpretaciji, postupak bi spadao u skup projekivnih postupaka [14, 15] kod kojih je projekcija -dimenzijskog prostora na tzv. potprostor pretraživanja (engl. *search subspace*) dimenzije definirana uvođenjem dodatnih uvjeta. Najčešće je riječ o ograničenju Petrov–Galerkin: ortogonalizaciji reziduala na linearno nezavisnih vektora koji tvore tzv. potprostor ograničenja (engl. *subspace of constraints*). Potprostori pretraživanja i ograničenja mogu se podudarati, pa je riječ o ortogonalnom projekivnom postupku.¹ To je slučaj IRM-a, ali samo ako je $\omega = 1$. Izvodom IRM-a iz Ritzova rastava (3), uz energijsku interpretaciju iteracije, uvjet ortogonalnosti reziduala na potprostor nije potreban – proizlazi izravno iz postupka [8]:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i+1)} &= \Phi_{(i)}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{(i+1)}) \\
 &= \Phi_{(i)}^T \mathbf{b} - \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} (\mathbf{x}_{(i)} + \mathbf{p}_{(i)}) \\
 &= \Phi_{(i)}^T \mathbf{b} - \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_{(i)} - \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} \mathbf{p}_{(i)} \\
 &= \Phi_{(i)}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_{(i)}) - \Phi_{(i)}^T \mathbf{A} \Phi_{(i)} \mathbf{a}_{(i)} \\
 &= \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} - \bar{\mathbf{A}}_{(i)} \mathbf{a}_{(i)} = \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} - \bar{\mathbf{r}}_{(i)} \\
 &= \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} - \Phi_{(i)}^T \mathbf{r}_{(i)} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

1 U protivnom, projekivni postupak nazivamo posrednim (engl. *oblique*).

Ako je $\omega \neq 1$, ortogonalnost ne vrijedi. U člancima o projektivnim postupcima raspravlja se o konvergenciji, uz određena svojstva sustava i potprostora, ali se za tvorbu koordinatnih vektora upotrebljavaju rekurzije i ortogonalizacije (općenito transformacije), kojima se nepotrebno sužava podskup dobrih vektora i izbjegava rješavanje maloga sustava. Time, prema našim numeričkim testovima, iskustvu na praktičnim primjerima i strogim dokazima na posebnim slučajevima, postupci postaju manje stabilni od IRM-a. Za opći dokaz ove tvrdnje (i stabilnosti IRM-a općenito), trebalo bi tražiti pomoć matematičara.

Ovisno o izboru matrice $\Phi_{(l)}$ razlikujemo brojne iteracijske postupke. Analogije ne služe bržoj realizaciji tih postupaka u odnosu na uvriježene načine [16], nego doprinose njihovu pojašnjenju i ističu općenitost ovoga iteracijskog algoritma. I jednostruko ili višestruko preduvjetovanje (engl. *preconditioning*) sustava [17, 18] možemo interpretirati primjenom (jednoga ili više) koordinatnih vektora [8, 9]. Za IRM preduvjetovanje ne znači nikakvu bitnu promjenu algoritamskoga slijeda.

3. Sve je u koordinatnim vektorima

Mi bismo htjeli odrediti matricu $\Phi_{(l)}$ tako da postupak bude brži od postojećih. Premda želimo da broj koordinatnih vektora m ostane malen, čini nam se da je samo jedan vektor (kao kod Jacobija, Gauß – Seidela, uzastopnoga prekoračenja i najstrmijega silaska) ili dva (kao kod konjugiranih gradijenata) manje od optimuma. Jasno, broj je vektora puno manji od n , pa približni prirast $\mathbf{p}_{(l)}$ može u ranoj fazi postupka samo s vrlo malom vjerojatnošću pronaći rješenje \mathbf{x} .

Zamislimo da dvama koordinatnim vektorima metode konjugiranih gradijenata dodamo treći. Time potprostor proširujemo na tri vektora, pa je u usporedbi s onim koji sadrži samo dva razumno očekivati veće smanjenje energije po koraku. U najgorem slučaju, doprinos dodatnoga vektora može biti jednak nuli.² Tako razmišljajući možemo dodati četvrti, peti i sljedeće vektore, te očekivati još veće smanjenje energije po koraku. Na taj bi način trebalo statičkom sistemu u par koraka oduzeti većinu energije i “prigušiti ga” prema najnižoj točki – rješenju. Očito je zamisao o proširenju potprostora privlačna, ali samo do neke mjere. S jedne strane, generiranje vektora ne smije biti vremenski zahtjevno, a s druge strane, pretjerivanje s njihovim brojem povećava mali sustav kojega treba riješiti u svakom koraku. U krajnjem slučaju, ako bi dimenzija potprostora bila jednaka broju nepoznanica, minimizirali bismo ukupnu energiju i odredili rješenje u prvom koraku (zbog pogrešaka zaokruživanja možda u drugom), ali po “cijeni” jednako ili većoj od one za izravno rješavanje sustava.

2 Možemo zaključiti i ovako: minimum funkcije energije u širem potprostoru ne može biti veći (više razine) od minimuma u manjem potprostoru.

Mala matrica $\mathbf{A}_{(j)}$ može biti singularna (ili skoro singularna – loše uvjetovana), ako su neki koordinatni vektori točno (ili približno) linearno zavisni. Ako ih je više od dva, nije jednoznačno definirano koji treba odbaciti. Tada bismo mogli razmišljati o točnoj ili približnoj ortogonalizaciji takvih vektora, što “poskupljuje” korak.

Zato treba razmišljati o postupku tvorbe kojim nije (ili je rijetko) moguće generirati (gotovo) zavisne vektore. Radi lakše realizacije zamisli i tijekom proračuna možemo mijenjati način generiranja vektora. Ako se zavisnost ipak dogodi, postoji “spas u zadnji čas”, jer u postupku dekompozicije neke uporišne komponente (engl. *pivots*) od $\mathbf{A}_{(j)}$ postaju jednake (bliske) nuli. To možemo prepoznati i upotrijebiti za izbacivanje pripadajućih jednadžbi iz maloga sustava. Time smanjujemo dimenziju potprostora, ali mala matrica postaje regularna i bolje uvjetovana. Ovaj se pristup pokazao brzim i jednostavnim rješenjem problema linearne zavisnosti.

Skup iz kojega možemo odabrati dobre koordinatne vektore iznimno je velik. Na žalost, nisu nam unaprijed poznati (i koliko smo upućeni nitko ne zna), kriterije za izbor općeučinkovitih vektora. Niti je dovoljno poznata pozadinska teorija koja bi olakšala biranje. Mogućnosti je mnogo i možemo se (za sada) zadovoljiti provedbom i usporedbom numeričkih pokusa na brojnim primjerima. U pravilu, određeni podskup vektora za neke modele radi dobro, a za druge ne. U ovim uvjetima bili bismo zadovoljni izborom dobrih vektora, a najbolji podskup (nekoliko brzih i o modelima neovisnih vektora), bio bi ravan velikom otkriću.

Dva su temeljna pristupa tvorbi koordinatnih vektora: opći i posebni. U prvomu nisu potrebni nikakvi dodatni podaci o modelu. Matrica sustava i vektor desne strane dovoljni su za generiranje vektora. Ako je izbor vektora dobar, u većini smo praktičnih slučajeva zadovoljni s konvergencijom postupka. U drugom pristupu upotrebljavamo posebnosti koje vrijede za model koji rješavamo. Tada očekujemo odličnu konvergenciju, ali samo za taj model (i možda za mali skup njemu bliskih modela). Postoji i mješoviti postupak generiranja, kombinacija temeljnih pristupa. Neki načini realizacije opisani su u [8] i [9].

4. Trenutačno stanje postupka

Za sada su najbolji rezultati postignuti koordinatnim vektorima generiranim primjenom simetričnoga postupka prekomjerne relaksacije (engl. *symmetric successive overrelaxation*) [19]. Dakle, prvi je vektor određen kao

$$\phi_{1,(i)} = \mathbf{L}_{\Omega}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}_{\Omega}^{-1} \mathbf{r}_{(i)}, \quad (7)$$

a za ostale smo upotrijebili rekurzivnu formulu

$$\phi_{j,(i)} = \mathbf{L}_{\Omega}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{U}_{\Omega}^{-1} (\mathbf{A} \phi_{j-1,(i)}), \quad j = 2, \dots, m, \quad (8)$$

gdje su \mathbf{L}_Ω i \mathbf{U}_Ω donja i gornja trokutna matrica od \mathbf{A} s dijagonalnim elementima pomnoženim faktorom Ω . Riječ je o lokalnom faktoru relaksacije koji se ne mora podudarati s globalnim ω , niti mora ležati unutar intervala $(0,2)$. Zapravo, upravo istaknute trokutne matrice dobivamo ako napravimo prvi korak postupka obične prekomjerne relaksacije odozgo i odozdo, počevši od nul-vektora. Ovako generiranim vektorima pridružen je i prethodni prirast rješenja $\mathbf{p}_{(i-1)}$. Upotrebljavali smo od dva do deset koordinatnih vektora, uz $\omega = 1$ i Ω jednak 1 ili 1,65 (pogledajte odjeljak 6).

Pojasnimo malo umnožak u zagradi. Budući da jedan korak u smjeru vektora ϕ_1 daje trenutačni prirast pomaka $\alpha\phi_1$, gdje je α neki broj, rekursivna formula za rezidual daje $\mathbf{r}_{(i)} - \alpha\mathbf{A}\phi_1$. Ako na izraz primijenimo simetričnu prekomjernu relaksaciju, zbog (7) dobivamo drugi vektor kao $\phi_2 = \phi_1 - \alpha\mathbf{L}_\omega^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}_\omega^{-1}(\mathbf{A}\phi_1)$. Vektor ϕ_1 već sudjeluje u tvorbi potprostora, a α utječe samo na duljinu novoga vektora (ne mijenja potprostor koji taj vektor proširuje), pa ϕ_1 i α možemo izostaviti. Time dobivamo oblik (8). Brža realizacija ovoga pristupa, koju bi trebalo dodatno istražiti, jest umjesto \mathbf{A} upotrijebiti \mathbf{D} .

5. Ukratko o realizaciji i testiranju

Priloženi pseudokod realiziran je programskim jezikom gfortran [20]. Upotrijebljena je 64 bitna Ubuntu inačica 5.3.1 i OS X inačica 6.1.0. Nakon provjere programa na malim sustavima, generirali smo matrice krutosti i opterećenja velikoga broja ravninskih i prostornih rešetkastih nosača. S jedne strane, štapove smo postavljali klasično, tako da rešetke tvore dobar statički sistem. S druge strane, radi svjesnoga pogoršanja uvjetovanosti sustava, broja $\kappa(\mathbf{A})$, štapovima velikih razlika u krutostima nepravilno smo spajali udaljene čvorove. Time smo tvorili nelogične rešetke koje ne možemo smatrati konstrukcijama. Na taj smo način program testirali na, s numeričkoga gledišta, dobrim i lošim modelima. Upotrijebili smo potpuno knjiženje matrice po stupcima, a probali smo i po redcima [21]. Slični načini spremanja postoje i u FEAP-u, što je olakšalo spajanje koda s tim programom. Upotrijebili smo inačicu 8.4.1 [7]. Spajanje, programsko prevođenje i povezivanje s FEAP-om također je realizirano gfortran-om.

6. Rezultati proračuna praktičnih modela

Nakon temeljnih provjera, analizirali smo nekoliko modela iz konstruktorske prakse na kojima smo radili prijašnjih godina (slike 1. do 8.). Radi jasnoće, na slikama su izostavljeni prikazi opterećenja i ležajeva. Nepoznanice su pomaci, a ponegdje i kutovi zaokreta. Popunjenost matrice krutosti određena je kao omjer broja članova štednoga zapisa i broja svih elemenata matrice. Osnovni podaci o modelima prilože-

ni su u tablici. Istaknimo još, najveći $\kappa(\mathbf{A})$, određen kao omjer ekstremnih uporišnih komponentata pri dekompoziciji matrice \mathbf{A} , iznosi 10^{11} (primjer 6.), a najmanji 10^3 (primjer 4.).³

Broj slike	Broj čvorova	Broj elemenata	Broj nepoznanica	Broj članova štednog zapisa	Popunjenost matrice	
1.	lijevo desno	1 030 301 276 244	1 000 000 1 461 134	3 060 300 820 446	123 026 091 17 723 235	$1,31 \cdot 10^{-5}$ $2,63 \cdot 10^{-5}$
2.	lijevo desno	71 3078 11 844	278 499 11 664	206527 69 984	3 826 156 1 635 876	$8,97 \cdot 10^{-5}$ $3,34 \cdot 10^{-4}$
3.	lijevo desno	3 018 960 486	2 918 728 1 782	8 955 164 2 754	358 190 300 54 594	$4,47 \cdot 10^{-6}$ $7,20 \cdot 10^{-3}$
4.		132 651	125 000	397 947	15 692 116	$9,90 \cdot 10^{-5}$
5.		10 329	16 104	61 776	1 434 447	$3,76 \cdot 10^{-4}$
6.		21 420	27 411	117 936	3 133 980	$2,25 \cdot 10^{-4}$
7.		43 815	43 072	258 954	7 053 951	$1,10 \cdot 10^{-4}$
8.		79 162	74 247	289 986	10 251 174	$1,22 \cdot 10^{-4}$

Modeli sadrže štapne, plošne i volumne elemente velikih razlika u krutostima, što je za statičke sisteme u građevinarstvu uobičajeno. Primjerice, često spajamo elemente velike uzdužne krutosti (debelih armiranobetonskih zidova) i male fleksijske krutosti (tankih čeličnih limova) u ne baš uvijek optimalan oblik mreže. Zato je veliki $\kappa(\mathbf{A})$ za modele građevinskih konstrukcija neizbježan. Također, razdioba je vlastitih vrijednosti modela jednolična, što je svojstvo dobro osmišljene konstrukcije, jer gomilišta vlastitih vrijednosti nepovoljno utječu na dinamički odziv i stabilnost (osjetljivost) statičkoga sistema.

Raznovrsne su provjere iteracijskih algoritama nužne, jer je poznata njihova ovisnost o naravi problema. Odnosno, mogu se prilagoditi za izrazito brzo rješavanje tipičnih primjera, s unaprijed poznatim podacima kojima namjestimo ključne parametre postupka. Međutim, čim problem odstupa od očekivanoga, učinkovitost pada.

Na slikama 1. do 3. priložene su razdiobe vertikalnih pomaka modela [pod a)], te ovisnosti logaritma omjera reziduala $\|\mathbf{r}_i\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2$ i energije $(\Pi_0 - \sum_i \Delta \Pi_i) / \Pi_0$ o broju koraka [pod b) i c)]. Crvena boja označava područje najmanjih, a ljubičasta najvećih pomaka. Provedeni su proračuni IRM-om s dva, četiri, šest i deset koordinatnih vektora (argument uz IRM) i $\Omega = 1,65$ te metodom konjugiranih gradijenata bez dijagonalnoga preduvjetovanju (CG) i s njim (CGD). Na slikama pod b) i c) možemo uočiti: s povećanjem potprostora opada broj potrebnih koraka, odnosno veće je smanjenje reziduala i energijske norme po koraku. Čak i za dva koordinatna vektora postupak brže konvergira od CG i CGD (koje također interpretiramo s dva vektora).

3 Dekompozicija matice sustava napravljena je samo radi procjene .

Broj slike	Broj koraka za $\varepsilon < 10^{-8}$ ($\omega = 1$ i $\Omega = 1,65$)					
	CG	CGD	IRM(2)	IRM(4)	IRM(6)	IRM(10)
1. lijevo	580	567	243	102	67	38
desno	$> 10^4$	5 083	2 381	1 097	682	410
2. lijevo	$> 10^5$	53 002	24 9995	8 608	5 166	2 871
desno	11 091	8 966	4 124	1 381	888	498
3. lijevo	2 157	1 936	623	208	126	71
desno	2 769	987	703	269	169	94

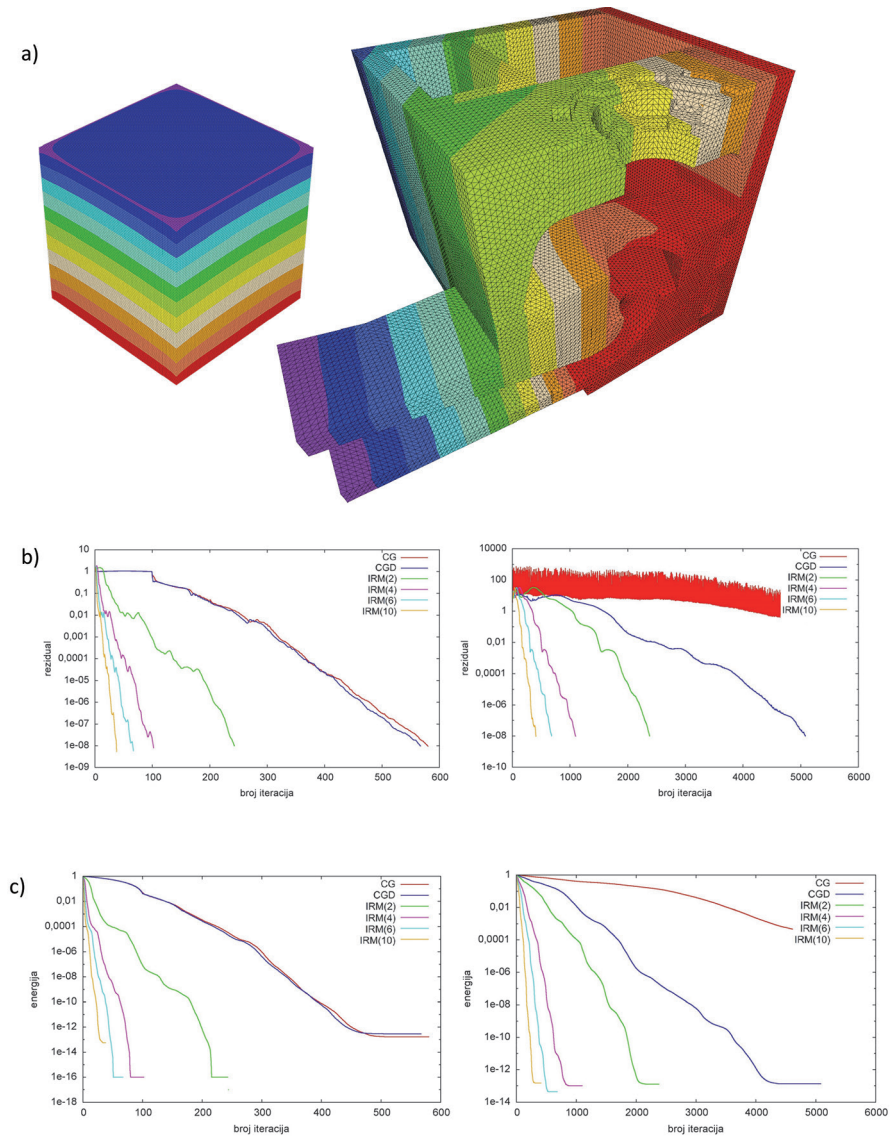
Na slikama 4. do 8. dodani su rezultati proračuna postupkom najstrmijega silaska (SD), Jacobijevim postupkom (JAC) i metodom konjugiranih gradijenata s blok–čvor-nim (engl. *block nodal*) preduvjetovanjem (CGBN). IRM proračuni napravljeni su za $\Omega = 1$ i prema broju iteracija postupak ostaje u prednosti. Opadanje energije slično je kao na slikama 1. do 3., pa smo funkcije izostavili. Za odabrane primjere proračuni postupcima SD, JAC i CG presporo konvergiraju – potreban broj koraka nismo prilagali. Istaknimo još, rezultati svih primjera podudaraju se s rješenjima dobivenima izravnim i iteracijskim postupcima koji su standardni dio FEAP-a.

Broj slike	Broj koraka za $\varepsilon < 10^{-8}$ ($\omega = \Omega = 1$)					
	CG	CGD	IRM(2)	IRM(4)	IRM(6)	IRM(10)
4.	1 396	1 394	456	305	233	159
5.	2 049	757	704	235	141	79
6.	4 155	3 114	1 303	502	324	167
7.	4 682	4 040	1 509	501	300	166
8.	5 708	5 155	1 559	565	313	191

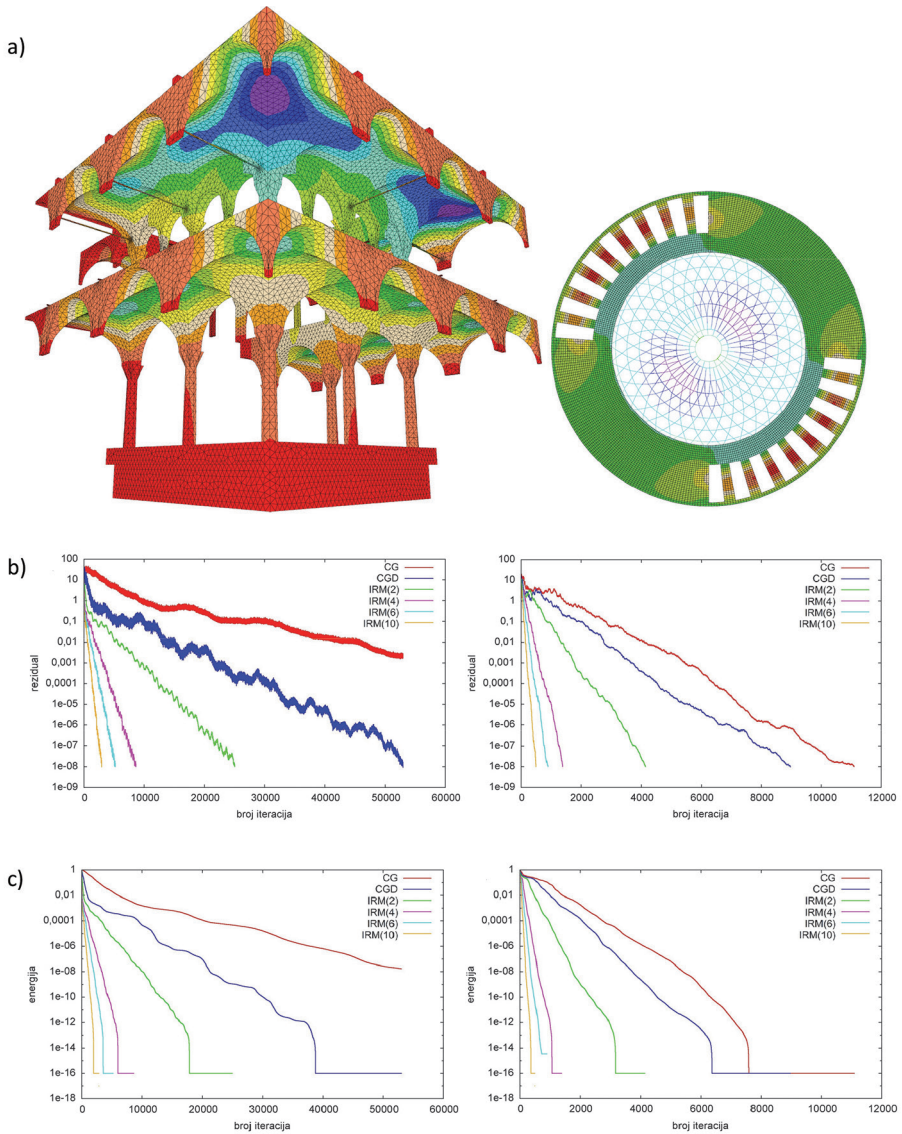
Treba priznati, postoji bolje preduvjetovanje metode konjugiranih gradijenata, primjerice (ne uvijek stabilnim) nepotpunim rastavom Choleskoga (engl. *incomplete Cholesky factorization*) [22], zatim primjenom algebarskoga višemrežnog (engl. *algebraic multigrid*) postupka [23] ili približne inverzije (engl. *approximate inverse*) [24].

7. Budući razvoj

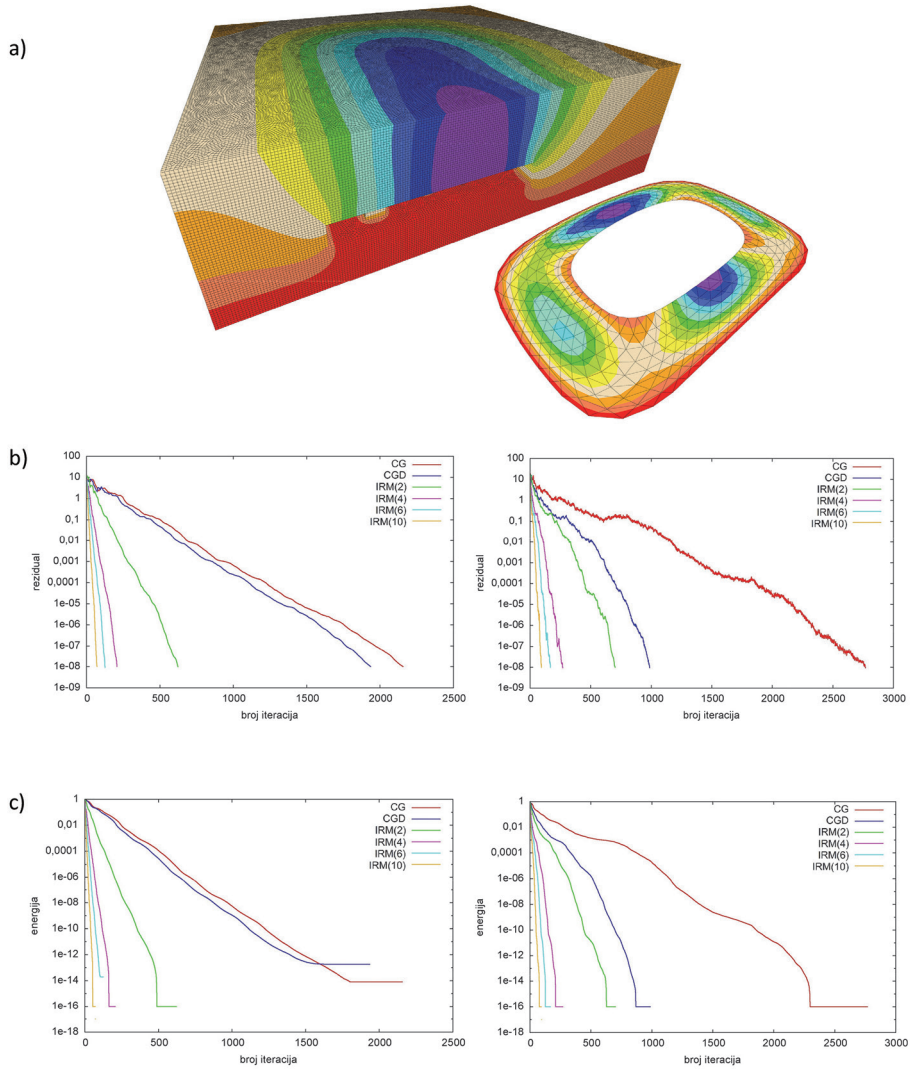
Međutim, sigurno postoji bolji potprostor za IRM. Koordinatne vektore možemo generirati bilo kojim od istaknutih ili drugim iteracijskim postupcima, pobrojavanjem nepoznanica prema naprijed (engl. *forward*), unatrag (engl. *backward*), u skladu s opadanjem komponenata reziduala, ili drugim obećavajućim redosljedom. Potonja dva pristupa iziskuju sortiranje što “poskupljuje” korak. Zato se može razmišljati o povremenoj obnovi reziduala, općenito redosljeda obilaženja nepoznanica.



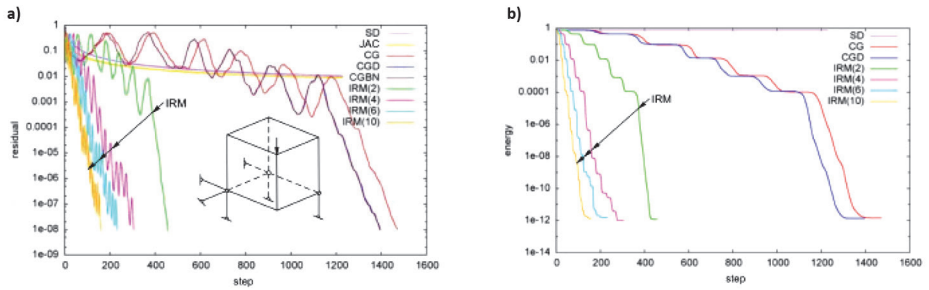
Slika 1. Proračun modela kocke (lijevo) i strojarnice HE Rama (desno; prikazana je samo polovina modela) [28]: a) razdioba vertikalnih pomaka, b) opadanje reziduala, c) smanjenje energije



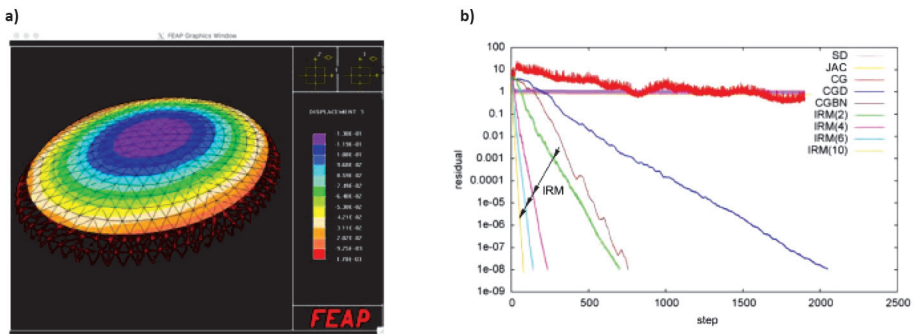
Slika 2. Proračun atrija Kneževa dvora u Dubrovniku (lijevo) [29] i kupole dvorane “Krešimir Čosić” u Zadru (desno) [30]: a) razdioba vertikalnih pomaka, b) opadanje reziduala, c) smanjenje energije



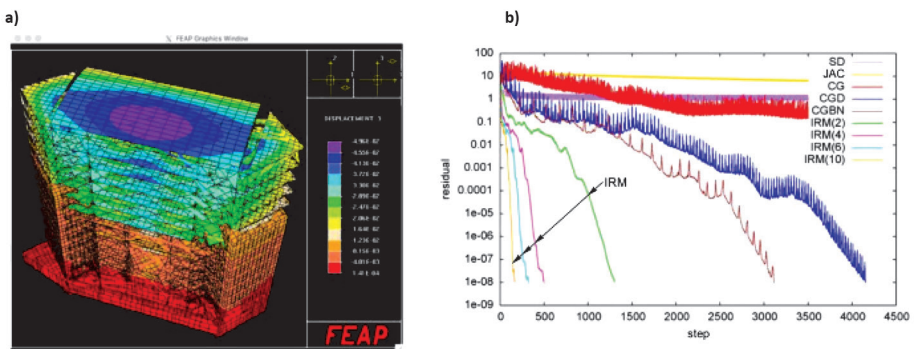
Slika 3. Proračun podzemnoga kamenoloma Kanfanar s okolnim područjem (lijevo; unutarnje prostori i stupovi nisu vidljivi) [31] i krovišta budućega stadiona Kantrida na Rijeci (desno) [32]: a) razdioba vertikalnih pomaka, b) opadanje reziduala, c) smanjenje energije



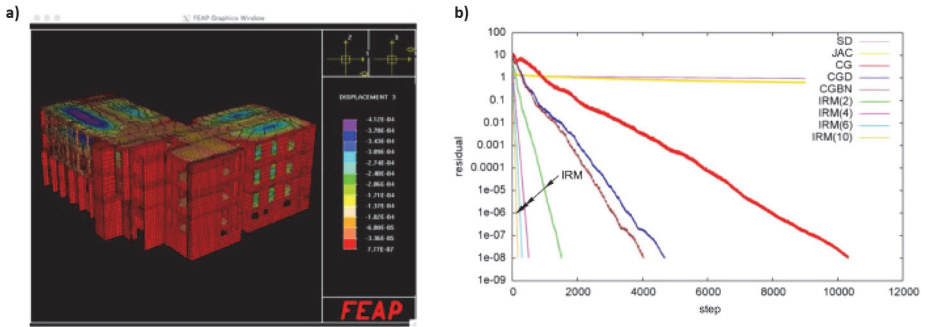
Slika 4. Jednostavan test: a) model, b) opadanje reziduala



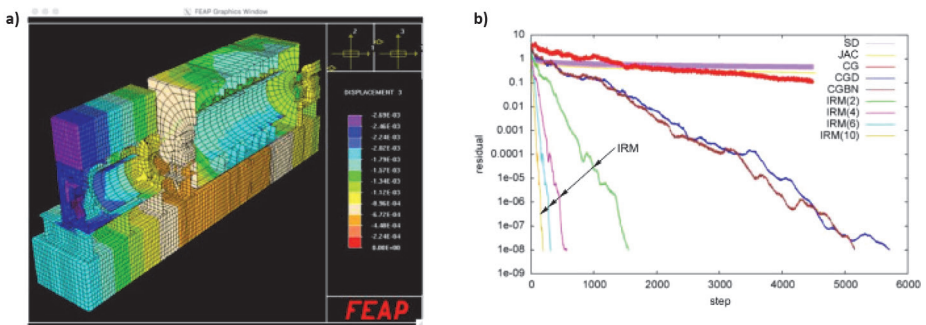
Slika 5. Košarkaška dvorana Cibona [33]: a) model, b) opadanje reziduala



Slika 6. Nadogradnja zgrade Euroherc osiguranja u Zagrebu [37]: a) model, b) opadanje reziduala



Slika 7. Dio bolnice *Sveti duh* u Zagrebu [35]: a) model, b) opadanje reziduala



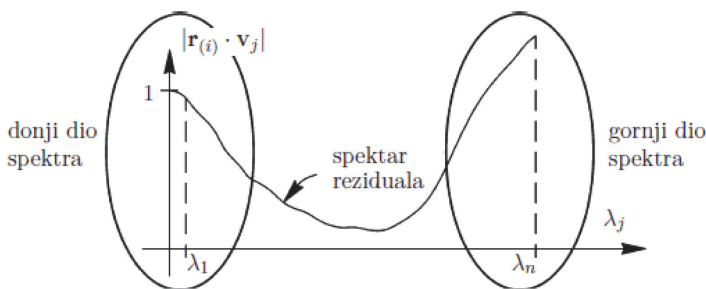
Slika 8. Temelj i generator u tvornici *SMIT transformers* u Nijmegenu (presjek) [36]: a) model, b) opadanje reziduala

Možemo raditi i više ciklusa za tvorbu jednoga vektora. Primjerice, nekoliko puta naprijed–nazad s različitim iznosima Ω . Time izgladujemo koordinatne vektore pa i rezidual, što doprinosi brzini konvergencije.

Postupci koji služe generiranju ne moraju biti optimizirani, kao za slučaj neovisne primjene. Vrijede čak i oni koji se ne upotrebljavaju samostalno, jer nisu dovoljno brzi, robusni, numerički stabilni i slično. Za IRM su dovoljni razmjerno “grubi” koordinatni vektori koji se međusobno nadopunjuju u smislu smanjenja reziduala uzduž različitih dijelova spektra.

Preciznije, ako $\mathbf{r}_{(i)}$ rastavimo na vlastite vektore \mathbf{v}_j od \mathbf{A} ($j = 1, \dots, n$), trebalo bi formirati dva ili tri koordinatna vektora koji izgladuju donji dio spektra reziduala (malih vlastitih vrijednosti λ_j) i dodati još dva, tri, specijalizirana za gornji dio spektra, velikih λ_j (slika 9.). Ne mora pri tome pojedini vektor dobro aproksimirati $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}_{(i)}$, nego potprostor koji razapinju svi vektori treba sadržavati što bolju aproksimaciju toga umnoška. Njima bi trebalo dodati i $\mathbf{p}_{(i-1)}$ – bit uspješnosti metode konjugiranih gradijenata. Slično učinku većega broja ciklusa kod tvorbe jednoga vektora, ovdje svi

vektori izglađuju potprostor. S porastom njihova broja (i/ili ciklusa za jedan vektor), glatkoća reziduala raste, a broj koraka pada.



Slika 9. Skica čestoga oblika spektra reziduala modela građevinskih konstrukcija

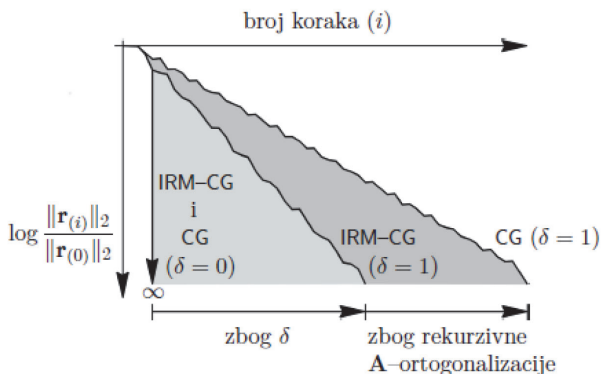
Ako se netko sjeti boljega skupa (s jednim ili više) koordinatnih vektora, bez teškoća može formirati matricu $\Phi_{(i)}$ i upotrijebiti opisani postupak. Na taj način IRM možemo smatrati općim iteracijskim algoritmom, kojemu kao ulazne podatke (osim nužnih koje trebaju svi iteracijski postupci), zadajemo i koordinatne vektore, odnosno potprostor.

Primjena egzaktno aritmetike. U raspravama o stabilnosti iteracijskih postupaka, pa i IRM-a, programi s egzaktnom aritmetikom mogu pomoći, jer eliminiramo pogrešku zaokruživanja. Samo trebamo točnu prezentaciju ulaznih podataka (primjerice u obliku racionalnih brojeva) i sve se veličine računaju točno. Promotrimo jednostavan cjelobrojni primjer:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Broj uvjetovanosti je malen, $\kappa(\mathbf{A}) = \lambda_1/\lambda_3 \approx 5,95$, gdje su λ_i nul-točke vlastitoga polinoma. Rješenje potražimo postupkom CG i IRM-om s dva koordinatna vektora, $\mathbf{r}_{(i)}$ i $\mathbf{p}_{(i-1)}$, što je (istaknuli smo) ekvivalentno CG-u. Postupak smo nazvali IRM-CG [25]. Oba pristupa daju točan rezultat nakon tri koraka, odnosno $\mathbf{x}_{(3)} = [31/13 \ 42/13 \ 69/13]^T$. To je u skladu s poznatim teoremom M. R. Hestensa i E. Stiefela [27], jer sustav sadrži tri nepoznanice. Početna relativna norma reziduala jednaka je (cjelobrojnoj) jedinici, a ostale su redom $\sqrt{179}/16$, $19/567\sqrt{358/15}$ i (cjelobrojna) nula. Unesimo (samo) u prvom koraku cjelobrojni poremećaj \mathbf{A} - ortogonalnosti za oba postupka, nazovimo ga δ . Primjerice, poremetimo treću komponentu prirasta rje-

šenja $\mathbf{p}_{3,(1)} \leftarrow \mathbf{p}_{3,(1)} + \delta$. To u realnomu numeričkom okruženju odgovara gubitku ortogonalnosti zbog gomilanja pogrešaka zaokruživanja, izraženoga kod velikih i slabo uvjetovanih sustava. Tada se IRM–CG ponaša stabilnije od CG-a (slika 10.). Zbog poremećaja više ne vrijede pretpostavke teorema iz [27] i premda je riječ o egzaktnoj aritmetici, nisu dovoljna tri koraka niti se može pronaći egzaktno rješenje. Kriterij konvergencije može biti neubičajeno malen (uzmimo $\varepsilon = 10^{-50}$), jer sustav rješavamo bez pogreške zaokruživanja, ali trebamo više koraka i vremena za proračun. To je razumljivo, jer rastu cijeli brojevi, zatim onih pod drugim korijenom, te brojnici i nazivnici koji određuju točne vrijednosti svih varijabli. Međutim, manji ε znači sve veću prednost IRM–CG-a.



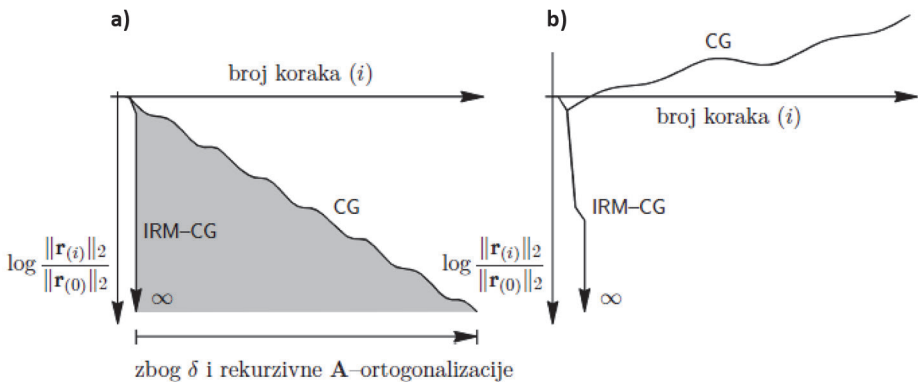
Slika 10. Egzaktno opadanje reziduala uz poremećaj $\mathbf{p}_{3,(1)} + 1$

Razlika nastaje, jer u istaknutoj ravnini IRM–CG nalazi točno rješenje unutar koraka (zato se rješava sustav reda dva), a CG samo približno rješenje (određeno rekurzivnom \mathbf{A} – ortogonalizacijom, premda je provedena egzaktno). Drugim riječima, zbog δ , CG rekurzijom dobiva egzaktnu grešku koja u svakom koraku egzaktno raste. Kod IRM–CG-a ona postoji samo u prvom koraku (gdje je i uvedena), a budući da se rekurzija ne upotrebljava, te greške u ostalim koracima nema (ne nasljeđuje se). Zato se IRM–CG bolje “oporavlja” od (možemo reći i perturbacije) δ .

Leži li poremećaj ortogonalnosti u ravnini razapetoj vektorima $\mathbf{p}_{(i-1)}$ i $\mathbf{r}_{(i)}$, primjerice u prvom koraku unesemo $\mathbf{p}_{(1)} \leftarrow \mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{r}_{(2)}$, IRM–CG daje egzaktno rješenje u tri koraka, kao da poremećaja nema, a CG “osjeća” teškoću (slika 11.a). Ako zadamo poremećaj ortogonalan na ravninu, uzmimo $\mathbf{p}_{(1)} \leftarrow \mathbf{p}_{(1)} \times \mathbf{r}_{(2)}$, IRM–CG daje točno rješenje u četiri koraka (posljednja relativna norma reziduala je cjelobrojna nula), a CG ne konvergira (slika 11.b).

Promotrimo jedan veći, realističniji primjer – kocku s minimalno potrebnim brojem ležajeva, opterećenu jediničnom silom na vrhu (slika 12.). Diskretizirana je Lagran-geovim C^0 konačnim elementom sa 192 stupnja slobode. Unutarnji čvorovi nisu

kondenzirani, a matrica krutosti određena je egzaktno, racionalnim brojevima [37]. Vektor opterećenja također je točan, zadan cijelim brojevima. Kocka je pridržana minimalnim brojem opruga cjelobrojnih krutosti, kojima smo utjecali na $\kappa(\mathbf{A})$. Sustav ima 192 nepoznanice. Problem je riješen postupcima IRM–CG i CG, egzaktnom aritmetikom (indeks E) i primjenom dvostruke točnosti (indeks DT), uz $\varepsilon = 10^{-10}$. Bez obzira na $\kappa(\mathbf{A})$, tijekom točnoga proračuna podudara se za oba postupka i završava nakon 188 koraka. Riječ je o broju nepoznanica umanjenom za četiri, koliko je “neaktivnih” λ_j , onih kojima pripada $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{b}$ jednak (u egzaktnoj aritmetici cjelobrojnoj) nuli [25, 26]. Ili drugačije, potreban broj koraka jednak je broju “aktivnih” vlastitih vrijednosti, za koje je $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{b} \neq 0$.⁴

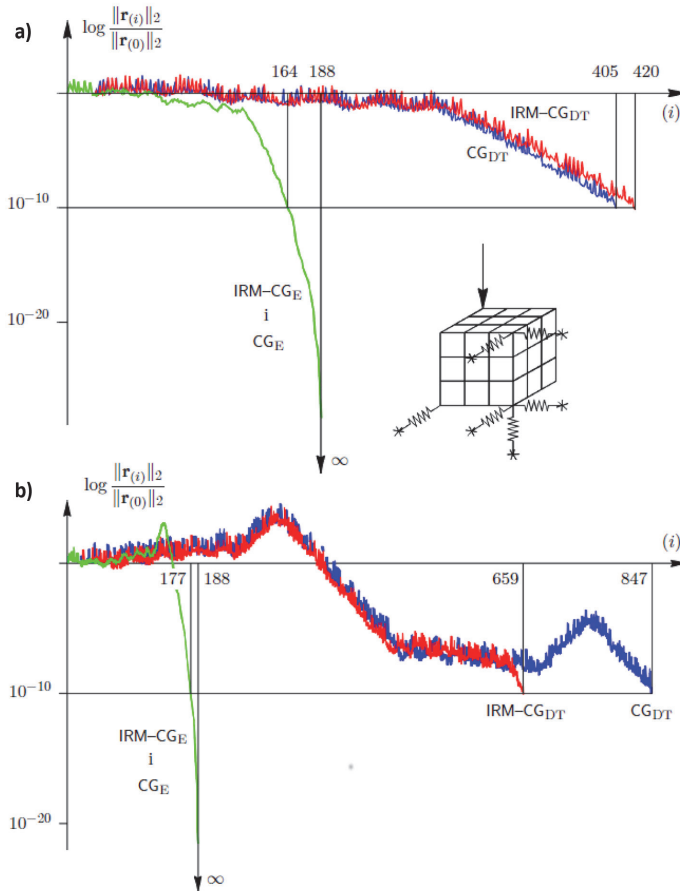


Slika 11. Egzaktno (ne)opadanje reziduala uz poremećaj: a) $\mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{r}_{(2)}$, b) $\mathbf{p}_{(1)} \times \mathbf{r}_{(2)}$

Zanimljiva je velika razlika u broju koraka između točnoga i numeričkih pristupa, čak i za dobro uvjetovani primjer. A osim numeričkog, drugoga praktičnog načina proračuna nemamo. Očito, povećanje točnosti na više od šesnaest znamenaka može biti opravdano.⁵ I dok se u numeričkom okruženju za dobro uvjetovani model funkcije opadanja reziduala gotovo podudaraju (slika 12.a), za lošije uvjetovani model IRM–CG je stabilniji (slika 12.b). Naravno, u oba slučaja numerička su rješenja bliska i zanemarivo odstupaju od točnoga. Ističemo, riječ je o malim primjerima. Ako bi rezultati sa slike 12. vrijedili za velike sustave, postupci bi bili neučinkoviti. A znamo iz prakse, upravo je suprotno – broj koraka puno je manji od broja nepoznanica.

4 Ako opterećenje možemo prikazati linearnom kombinacijom ℓ vlastitih vektora, primjenom egzaktno aritmetike postupci daju točno rješenje nakon ℓ koraka.
 5 S porastom broja značajnih znamenaka krivulje numeričkih pristupa međusobno se približavaju i teže prema krivulji egzaktnog pristupa. Radi preglednosti slika, rezultate proračuna s povećanom točnošću nismo priložili.

Zašto je tako vidi se na slici 13. Skicirano je tipično ponašanje reziduala za veliki broj stupnjeva slobode (aktivnih vlastitih vrijednosti ℓ).



Slika 12. Opadanje reziduala uz egzaktne i numeričke pristupe CG-u i IRM-CG-u za različite uvjetovanosti modela: a) $\kappa(A) = 7,7 \cdot 10^5$, b) $\kappa(A) = 6,4 \cdot 10^{12}$

Minimizacija kvadrata reziduala. Rješenje sustava (1) ne minimizira samo (2) nego i kvadrat duljine reziduala:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \mathbf{b} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}. \quad (10)$$

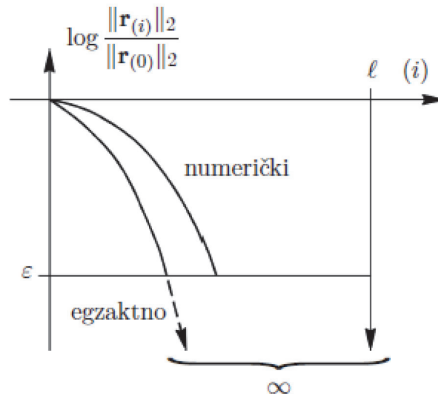
Pronalaskom egzaktne rješenja vrijednost funkcionala je točno, a u slučaju numeričkoga rješenja, približno jednaka nuli. Ako izraz pomnožimo s 1/2 i zanemarimo konstantu $\mathbf{b}^T \mathbf{b}$ (jer će derivacijom iščeznuti) dobivamo kvadratnu formu

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (11)$$

koja podsjeća na (2), samo \mathbf{A}^2 i $\mathbf{A} \mathbf{b}$ zamijenimo s \mathbf{A} i \mathbf{b} . Minimizacijom (10) ili (11) dobivamo

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (12)$$

što je zapravo (1), loše preduvjetovan matricom \mathbf{A} , jer je \mathbf{A}^2 više popunjena i kvadratno slabije uvjetovana od \mathbf{A} , odnosno $\kappa(\mathbf{A}^2) = \kappa(\mathbf{A})^2$. Matrice imaju iste vlastite vektore, a vlastite vrijednosti od \mathbf{A}^2 jednake su kvadratu vlastitih vrijednosti od \mathbf{A} . Zato su familije elipsoida $f(\mathbf{x}) = c$ i $g(\mathbf{x}) = c$ (c je konstanta) međusobno centrične, a druga je familija izduljenija od prve, jer su duljine poluosi jednake vlastitim vrijednostima. Naravno, elipsoidima pripada zajedničko središte – rješenje (slika 14.a).

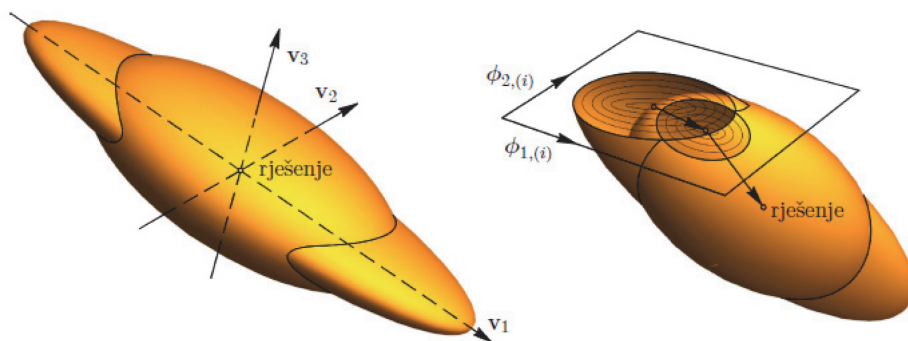


Slika 13. Skica tipičnoga opadanja reziduala pri rješavanju velikih sustava

Ako problem rješavamo minimizacijom $f(\mathbf{x})$ ili $g(\mathbf{x})$, primjenom IRM-a rješenju prilazimo na različite načine, jer se lokalni minimumi energije i kvadrata reziduala u potprostoru koordinatnih vektora ne poklapaju (slika 14.b). U prvom slučaju norma energije monotono pada, a norma reziduala je vrlo nepravilna funkcija koja tijekom postupka može značajno rasti. Tada je trenutačno rješenje grubo i konvergencija je spora. U drugom slučaju obje su funkcije glatke i monotono padaju, što postupak čini stabilnijim i često bržim od prvoga pristupa. Zato očekujemo dobro ponašanje i pri rješavanju nelinearnih, posebice o putu ovisnih (engl. *path dependent*) problema. Primijetite još, postupak vrijedi i za nesimetrične matrice, samo u gornjim izrazima umjesto \mathbf{A}^2 treba upotrijebiti nesimetrični umnožak $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Zašto je ponašanje dobro, a minimizacijom rješavamo sustav lošije uvjetovan od izvornoga? Naime, budući da ne primjenjujemo rezidual sustava (12), jednak $\mathbf{A}\mathbf{r}$, nego \mathbf{r} , sustava (1), to je istoznačno preduvjetovanju (12) matricom \mathbf{A}^{-1} , čime vraćamo uvjetovanost izvornog sustava.

Tijekom istraživanja uočili smo i mješoviti način koji može ubrzati IRM: u nekim koracima minimizirati $f(\mathbf{x})$, a u nekim $g(\mathbf{x})$ (slika 14.b). Koordinatni vektori ne moraju biti isti za obje minimizacije. Prelazak s jedne minimizacije na drugu ovisi o obliku funkcija reziduala i energije, a kriterije prelaska, načine njihove automatizacije i prikladne vektore upravo istražujemo. Ovaj je pristup zapravo poopćenje postupka Barzilai–Borwein [38].



Slika 14. Grafički prikaz mješovitoga postupka IRM s dva koordinatna vektora u primjeni na sustav od tri nepoznanice: a) elipsoidi $f(\mathbf{x}) = c$ i $g(\mathbf{x}) = c$, b) presjek ravninom koordinatnih vektora

8. Zaključak

U skladu s opisanim svojstvima i našim iskustvima, iterirani Ritzov postupak može imati prednosti kod rješavanja velikih linearnih sustava. Neki naši primjeri imali su preko 10^8 nepoznanica, popunjenosti oko 10^{-7} . Tumačenje postupka blisko je inženjerskomu načinu razmišljanja, Ritzovoj energijskoj interpretaciji, za razliku od primjerice metode konjugiranih gradijenata koja se uobičajeno pojašnjava geometrijski, u apstraktnomu n -dimenzijskom prostoru.

Ovaj postupak ne bi smio biti lošiji od metode konjugiranih gradijenata (s preduvjetovanjem i bez njega). Odnosno, dobro proširenje potprostora ne donosi pogoršanje konvergencije. Pri tomu možemo upotrijebiti više načina generiranja koordinatnih vektora. Kao da radimo s nekoliko iteracijskih postupaka istodobno. Dobrim izborom vektora konvergencija je puno brža od konvergencije pojedinačnoga postupka. Ponovno pokretanje (engl. *restart*), poznato iz metode konjugiranih gradijenata, kojim se zbog gubitka ortogonalnosti ponovno započinje postupak, ovdje nije op-

ravdano. Rekurzivna ortogonalizacija se ne upotrebljava, a iz prethodnoga koraka nasljeđujemo samo prirast pomaka koji poboljšava trenutna rješenje.

Preduvjetovanje postupka nije potrebno, ali se takvi algoritmi mogu uspješno primijeniti za tvorbu vektora, bez transformiranja sustava koje prati preduvjetovanje.

Budući da ne zahtijevamo ortogonalnost među iteracijskim veličinama, dodatno ubrzanje treba očekivati u primjeni na nelinearne probleme. Naime, tada se gube svojstva ortogonalnosti na kojima ustrajavaju brojni iteracijski algoritmi. Zbog toga se postupak može uspješno primijeniti i u području optimizacije.

Jasno je, izrazito velike sustave nije ekonomično rješavati jednim procesorom. Tada paralelan pristup postaje nužnost. Zanimljivo bi bilo svakomu koordinatnom vektoru pridružiti njegov procesor.

Radi brojnih mogućnosti, još smo u intenzivnoj istraživačkoj fazi algoritma (već samo izmjene iznosa Ω i ω izrazito utječu na brzinu konvergencije, a o boljim koordinatnim vektorima i načinima njihova generiranja da ne raspravljamo), još nema smisla uspoređivati IRM s drugim izravnim i iteracijskim postupcima. To je moguće napraviti tek nakon brižljivoga programiranja, programskoga prevođenja i povezivanja konačne inačice programa, s uključenim optimizacijskim opcijama koje doprinose brzini izvođenja koda [39].

Zahvale

Ovaj je rad financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP – 2014 – 09 – 2899. Zahvaljujemo prof. dr. sc. Sonji Gorjanc na pomoći oko geometrijske interpretacije postupka.

Literatura

- [1] Dvornik, J.: *Generalization of the CG Method Applied to Linear and Nonlinear Problems*, Trends in computerized structural analysis and synthesis; Proceedings of the Symposium (urednici Noor, A. K. i McComb, H. G. Jr.), NASA, Langley Research Center, Washington D. C., 30. X – 1. XI 1978., Pergamon Press, str. 217. – 223.
- [2] Dvornik, J.: *Generalization of the CG Method Applied to Linear and Nonlinear Problems*, Computers & Structures **10** (1979) 1/2, str. 217.–223.
- [3] Doblaré, M.; Alarcon, E.: *A Three-Dimensional B.I.E.M. Program*, Finite Element Systems (urednik Brebbia, C. A.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1982., str. 325. – 345.
- [4] Ryu, Y.-S.; Arora, J. S.: *Review of Nonlinear FE Methods with Substructures*, Journal of Engineering Mechanics, **111** (1985) 11, str. 1361. – 1379.
- [5] Doblaré, M.: *Computational Aspects of the Boundary Element Method*, Topics in Boundary Element Research, Computational Aspects, (urednik Brebbia, C. A.), Vol 3., Springer, Berlin, Heidelberg, 1987., str. 51. – 131.

- [6] Taylor, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*, Version 8.4, User Manual, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, 2013.
- [7] Taylor, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*, Version 8.4, Programmer Manual, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, 2014.
- [8] Dvornik, J.; Lazarević, D.: *Iterirani Ritzov postupak za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi*, *Građevinar*, **69** (2017) 7, str. 521. – 535.
- [9] Dvornik, J.; Lazarevic, D.; Uros, M.; Savor Novak, M.: *The Iterated Ritz Method: Basis, implementation and further development*, *Coupled Systems Mechanics*, **6** (2018) 7, str. 755. – 774.
- [10] Atalić, J.; Uroš, M.; Šavor Novak, M.: *Sanacija tradicijskih kamenih stupova olovnom umetkom*, *Građevinar*, **70** (2018) 9, str. 741. – 756.
- [11] Saad, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [12] Olshanskii, M. A.; Tyrtshnikov, E. E.: *Iterative Methods for Linear Systems. Theory and Application*, Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2014.
- [13] Ivančić, N.: *Metoda konjugiranih gradijenata*, *Građevinar*, **24** (1972) 9–10, str. 369. – 374.
- [14] Maess, G.: *Projection methods solving rectangular systems of linear equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **24** (1988) 1 – 2, str. 107. – 119.
- [15] Brezinski, C.: *Projection methods for linear systems*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **77** (1997) 1 – 2, str. 35. – 51.
- [16] Barrett, R.; Berry, M.; Chan, T. F.; Demmel, J.; Donato, J.; Dongarra, J.; Eijkhout, V.; Pozo, R.; Romine, C.; van der Vorst, H.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1987.
- [17] Benzi, M.: *Preconditioning techniques for large linear systems: A survey*, *Journal of Computational Physics*, **182** (2002), str. 418. – 477.
- [18] Korneev, V. G.; Langer, U.: *Domain Decomposition Methods and Preconditioning*, u: *Encyclopedia of Computational Mechanics* (Editors: Erwin Stein, René de Borst, Thomas J. R. Hughes), Chapter 22, Volume 1: Fundamentals, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2004., str. 617. – 649.
- [19] Young, D. M.: *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2003.

- [20] The gfortran team: *Using GNU Fortran*, For GCC version 7.0.0 (pre – release), (GCC), Free Software Foundation, Boston, 2016.
- [21] Nour – Omid, B.; Taylor, R. L.: *An Algorithm for Assembly of Stiffness Matrices into a Compacted Data Structure*, Report No. UCB/SESM – 84/06, Structural Engineering and Structural Mechanics, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1984.
- [22] Van’t Wout, E.; Van Gijzen, M. B.; Ditzel, A.; van der Ploeg, A.; Vuik, C.: *The Deflated Relaxed Incomplete Cholesky CG method for use in a real-time ship simulator*, *Procedia Computer Science* **1** (2010) 1, str. 249. – 257.
- [23] Iwamura, C.; Costa, F. S.; Sbarski, I.; Easton, A.; Li, N.: *An efficient algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192** (2003) 20–21, 2299.–2318.
- [24] Pereira, F. H.; Verardi, S. L. L.; Nabeta, S. I.: *A fast algebraic multigrid preconditioned conjugate gradient solver*, *Applied Mathematics and Computation*, **179** (2006) 1, str. 344. – 351.
- [25] Dvornik, J.; Lazarevic, D.; Jaguljnjak Lazarevic, A.; Demsic, M.: *Nonrecursive Equivalent of the Conjugate Gradient Method without the Need to Restart*, *Advances in Civil Engineering*, (2019), str. 1. – 5.
- [26] Van der Vorst, H. A.: *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [27] Hestens, M. R.; Stiefel, E.: *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **49** (1952) 6, str. 409. – 436.
- [28] *Statički i dinamički proračun postojećih temelja agregata na nova opterećenja i djelovanja*, knjiga G3, glavni projekt (projektant konstrukcije za ovu projektnu obradu Milan Crnogorac), Javno poduzeće Elektroprivreda hrvatske zajednice Herceg bosne d. d. Mostar, Zagreb, 2012.
- [29] Lazarević, D.; Dvornik, J.; Fresl. K.: *Analiza oštećenja atrija Kneževa dvora u Dubrovniku*, *Građevinar*, **56** (2004) 10, str. 601. – 612.
- [30] Lazarević, D.; Anđelić, M.; Uroš. M.: *Oblikovanje i proračun kupole dvorane “Krešimir Čosić” u Zadru*, *Građevinar*, **62** (2010) 10, str. 875. – 886.
- [31] Hrženjak, P.; Petzel, M.; Vujec. S.: *Kontrolna mjerenja i numeričke analize za dimenzioniranje stupova i komora pri podzemnom otkopavanju arhitektonsko–građevnog kamena*, Znanstvenostručno savjetovanje s međunarodnim sudjelovanjem “Mehanika stijena i tuneli”, Zagreb 30. 09.–2. 10. 1999. (urednici Jašarević, I.; Hudec, M.; Vujec, S.), Vol. 1, str. 127. – 133.

- [32] Uroš, M.; Gidak, P.; Lazarević, D.: *Optimization of stadium roof structure using force density method*, Proceedings of the third international conference on structures and architecture (ICSA2016) – Structures and Architecture – Beyond their Limits (editor Paulo J.S. Cruz), CRC Press/Balkema, Taylor & Francis Group, Guimaraes, 2016. str. 693. – 700.
- [33] Anđelić, M.: *Konstrukcija košarkaške dvorane "Cibona"*, Zbornik II. kongresa Društva građevinskih konstruktora Hrvatske, Split, 1986., str. 19. – 23.
- [34] Lazarević, D.; Anđelić, M.; Atalić, J.: *Projekt konstrukcije nadogradnje zgrade Euroherca u Zagrebu*, Građevinar, **63** (2011) 12, str. 1021. – 1032.
- [35] *Studija za saniranje posljedica potresa. 5. faza*, (voditelj projekta J. Atalić), Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Zagreb, 2017., str. 87. – 111.
- [36] Anđelić, M.; Lazarević, D.; Uroš, M.: *Analiza postojećeg stanja i prijedlog sanacije temelja agregata u tvornici "SMIT transformers" u Nijmegenu, Nizozemska*, Končar, inženjering za energetiku i transport, d. d., Zagreb, 2014.
- [37] Jaguljnjak Lazarević, A.; Dvornik, J.; Frgić, L.: *Utjecaj pogreške zaokruživanja na točnost proračuna konstrukcije*, Građevinar, **63** (2011) 11, str. 911. – 921.
- [38] Barzilai, J.; Borwein, J. M.: *Two-Point Step Size Gradient Methods*, IMA Journal of Numerical Analysis, **8** (1988) 1, str. 141. – 148.
- [39] Fresl, K.; Šamec, E.; Gidak, P.: *O optimizaciji programskoga kôda iteriranoga Ritzova postupka*, Zbornik mini-simpozija "Novi, učinkoviti iteracijski postupak proračuna konstrukcija – poopćenje suvremenih postupaka" (ovaj zbornik), Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2019., str. 39.-52.

O optimizaciji programskoga kôda iteriranoga Ritzova postupka

Krešimir Fresl, Elizabeta Šamec, Petra Gidak

Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

Sažetak

U radu su prikazana tri primjera optimizacije kôda u realizaciji iteriranoga Ritzova postupka (IRM) i njegove inačice istovrijedne metodi konjugiranih gradijenata (IRM–CG) u programskom jeziku C++. Nakon opisa osnovnih shema pohranjivanja rijetko popunjenih matrica, uključujući posebnosti simetričnih matrica, prikazano je izračunavanje umnoška rijetko popunjene matrice i vektora, izračunavanje umnoška rijetko popunjene i pune matrice te ispitivanje zadovoljenja uvjeta za prekid iteracije. Optimizacije su provedene radi ublažavanja „uskih grla” u algoritmima IRM-a i IRM–CG-a.

Ključne riječi: iterirani Ritzov postupak, metoda konjugiranih gradijenata, rijetko popunjena matrica, optimizacija programskoga kôda

On programme code opimisation for Iterated Ritz Method

Abstract

In the paper, three code optimisation examples in implementation of Iterated Ritz Method (IRM) and nonrecursive equivalent of conjugate gradient method (IRM–CG, as a special case of IRM) are presented in programming language C++. After describing the basic storage schemes for sparse matrices, including particularities of symmetric matrices, calculation of sparse matrix and vector product, calculation of sparse and full matrix product and testing the condition for terminating the iteration are shown. Optimisation was carried out to mitigate bottlenecks in IRM and IRM–CG algorithms.

Key words: Iterated Ritz Method, conjugate gradient method, sparse matrix, programme code optimisation

1. Uvod

U radovima [2], [3], [5] autori su pokazali da je iterirani Ritzov postupak (IRP ili IRM, od engl. *Iterated Ritz Method*) vrlo učinkovit za rješavanje izrazito velikih sustava linearnih jednadžbi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

U rješavanju malih sustava brzina toliko ne dolazi do izražaja, budući da je i primjena manje učinkovitih postupaka dovoljno kratkotrajna.

Sustavi nelinearnih jednadžbi rješavaju se iteracijskim postupcima. U većini se postupaka te jednadžbe na neki način zamjenjuju ili aproksimiraju linearnima. Primjerice, interpretiramo li Newton–Raphsonov postupak geometrijski, reći ćemo da se hiperplohe, koje su grafovi nelinearnih funkcija, zamjenjuju dirnim hiperravninama. Kako su ti postupci iteracijski, u svakomu koraku postupka nastaje sustav linearnih jednadžbi koji treba riješiti. Slično tome, pri nalaženju oblika kabelskih mreža i konstrukcija od platna nelinearne se jednadžbe ravnoteže uvođenjem gustoća sila i gustoća naprezanja lineariziraju [12], [10]. Primijenimo li metodu gustoća sila iteracijski [6], [14], sustavi linearnih jednadžbi rješavat će se veći broj puta. Brzina rješavanja sustava linearnih jednadžbi ponovno će stoga dobiti značajnu ulogu.

U sljedećemu je odjeljku prikazana programska realizacija algoritama IRM i njegove inačice istovrijedne metodi konjugiranih gradijenata u jeziku C++ uz primjenu matrične biblioteke Eigen. U odjeljcima 4., 5. i 6. opisani su primjeri optimizacije kôda za izračunavanje umnoška rijetko popunjene matrice i vektora, za izračunavanje umnoška rijetko i gusto popunjene matrice te za kriterij prekida iteracije. Odjeljak 3. svojevrsan je uvod u odjeljke 4. i 5.; u njemu su opisane osnovne sheme pohranjivanja rijetko popunjenih matrica.

2. Realizacija u programskom jeziku C++

Autori algoritma IRM programski su kôd razvili u programskom jeziku Fortran 90 (podrobnije, primjerice, u odjeljku 8. u [2]). Programska je podloga ovoga rada realizacija algoritma u kôdu napisanom u jeziku C++ [13] uz primjenu biblioteke matričnih razreda i funkcija Eigen [8]. U oblikovanju i programskoj realizaciji biblioteke primijenjene su neke napredne sastavnice jezika C++, ponajprije razredi–predložci (engl. *class templates*), nasljeđivanje razreda (engl. *inheritance*) i njihove međuigre (primjerice, nasljeđivanje razreda kojemu je izvedeni razred parametar–predložak, nazvano *curiously recurring template pattern*) te preopterećivanje operatora (engl. *operator overloading*) uz predložke izrazâ (engl. *expression templates*) [15].

Sažetosti i čitljivosti kôda radi uvest ćemo nazive za tipove podataka:


```

typedef int index_t;    // cijeli brojevi
typedef double scalar_t; // pseudorealni brojevi
typedef Matrix<scalar_t, Dynamic, 1> vector_t; // vektori
typedef Matrix<scalar_t, Dynamic, Dynamic, ColMajor> dense_matrix_t;
// gusto popunjene matrice
typedef SparseMatrix<scalar_t, ColMajor> sparse_matrix_t;
// rijetko popunjene matrice

```

Primjena biblioteke Eigen omogućava gotovo doslovan prijepis pseudokôda (iz, primjerice, [4]) u programski kôd:

```

1  vector_t solve (sparse_matrix_t const& A, // matrica sustava
2                vector_t const& b, // vektor slobodnih članova
3                vector_t const& x0, // pretpostavka rješenja
4                scalar_t tolerance, // točnost
5                index_t max_steps // dopušteni broj koraka
6                ) {
7      index_t i = 0;
8      vector_t x = x0;
9      vector_t r = b - A * x; // rezidual
10     scalar_t q = r.dot (r) / r.dot (A * r);
11     vector_t p = q * r; // prirast rješenja: najstrmiji silazak
12     while (r.norm() >= tolerance * b.norm() && i <= max_steps) {
13         x += p; // poboljšana aproksimacija rješenja
14         r = b - A * x;
15         dense_matrix_t F = [ $\phi_0$   $\phi_1$  ...  $\phi_{m-1}$ ]; // baza potprostora
16         dense_matrix_t FTAF = F.transpose() * A * F;
17 // matrica maloga sustava
18         vector_t FTr = F.transpose() * r;
19 // slobodni članovi maloga sustava
20         LLT< Ref<dense_matrix_t> > llt (FTAF);
21 // rastav prema Choleskomu
22         a = llt.solve (FTr); // uvrštavanje unazad
23         p = F * a; // prirast rješenja
24         ++i;
25     }
26     return x;
27 }

```

(Ipak, redak 15. nije programski kôd, nego sažeta zamjena za nekoliko zamršenijih i nečitljivijih redaka u kojima se oblikuju bazni vektori potprostora i svrstavaju u matricu F.)

Poseban slučaj, ali i inačica iteriranoga Ritzova postupka postupak je koji su autori nazvali nerekurzivnom istovrijednicom postupka konjugiranih gradijenata, s akronimom IRM–CG [4]. Potprostor pretraživanja razapinju (samo) dva vektora: trenutni rezidual i prirast rješenja u prethodnom koraku. S pomoću nekoliko algebarskih akrobacija, podrobnije opisanih u [4], autori su umnožak triju matrica u retku 16. zamijenili umnoškom matrice i vektora te izbjegli množenje matrice i vektora u retku 14., tako da petlja, kao i u klasičnoj metodi konjugiranih gradijenata, sadrži samo jedno množenje matrice i vektora:

```

1   vector_t solve (sparse_matrix_t const& A,
2                   vector_t const& b,
3                   vector_t const& x0,
4                   scalar_t tolerance,
5                   index_t max_steps
6                   ) {
7       index_t i = 0;
8       vector_t x = x0;
9       vector_t r = b - A * x;
10      vector_t alpha = A * r;
11      scalar_t q = r.dot (r) / r.dot (alpha);
12      vector_t p = q * r;
13      vector_t beta = A * p;
14      while (r.norm() >= tolerance * b.norm() && i <= max_steps) {
15          x += p;
16          r -= beta;
17          alpha = A * r;    // jedino množenje matrice i vektora
18          scalar_t FTAF00 = r.dot (alpha);
19          scalar_t FTAF11 = p.dot (beta);
20          scalar_t FTAF01 = r.dot (beta);
21          scalar_t FTr0 = r.dot (r);
22          scalar_t detFTAF = FTAF00 * FTAF11 - FTAF01 * FTAF01;
23          scalar_t a0 = FTr0 * FTAF11 / detFTAF;
24          scalar_t a1 = -FTr0 * FTAF01 / detFTAF;
25          p = a0 * r + a1 * p;
26          beta = a0 * alpha + a1 * beta;
27          ++i;
28      }
29      return x;
30  }
```

FTAF00, FTAF11 i FTAF01 komponente su matrice FTAF (redak 16. kôda za IRM); komponenta FTAF10 jednaka je komponenti FTAF01. FTr0 prva je komponenta vektora FTr (redak 18. kôda za IRM); druga je komponenta jednaka nuli. Redci 22., 23. i 24. prijevod su u kôd izrazâ za rješenje sustava dviju jednadžbi primjenom determinanata (što je za tako mali sustav optimalan način rješavanja).

3. Rijetko popunjene matrice

Razmjerno je mali broj komponenata matrica, struktura kojih ocrtava povezanost čvorova u mrežama kabelâ, konačnih razlika ili konačnih elemenata, različit od nule, pa se u memoriju računala pohranjuju samo te, od nule različite komponente. Takve se matrice nazivaju rijetko popunjenima.

Nekoliko je shema pohranjivanja rijetko popunjenih matrica [11]. Najjednostavniji je koordinatni zapis (engl. *coordinate format*) u kojemu se pohranjuju trojke brojeva — vrijednost od nule različite komponente te indeksi retka i stupca u kojima se ona nalazi. Struktura podataka najčešće sadrži tri niza: niz vrijednosti od nule različitih komponenata (u bilo kojemu poretku), niz indeksâ redaka (u poretku koji odgovara poretku vrijednosti) i niz indeksâ stupaca (također u odgovarajućemu poretku). Primjerice, mogući je koordinatni zapis matrice

$$\begin{bmatrix} 10. & 0. & -2. & -3. & 0. \\ 0. & 40. & 0. & -5. & 0. \\ 2. & 0. & 60. & 0. & 0. \\ 3. & 0. & 0. & 80. & 0. \\ 0. & 0. & 7. & 0. & 90. \end{bmatrix}$$

prikazan na slici 1. Niz sadrži vrijednosti komponenata, niz pripadajuće indekse redaka, a niz pripadajuće indekse stupaca (u skladu s jezikom C++ indeksiranja počinju nulom). Duljine sva tri niza jednake su broju od nule različitih komponenata matrice.

A	10.	40.	2.	60.	-5.	3.	80.	7.	-3.	90.	-2.
I	0	1	2	2	1	3	3	4	0	4	0
J	0	1	0	2	3	0	3	2	3	4	2

Slika 1. Koordinatni zapis rijetko popunjene matrice

U mnogim algoritmima treba pristupiti svim od nule različitim komponentama određenoga retka ili stupca. Komponente nizova u koordinatnom zapisu svrstavaju se stoga po redcima ili po stupcima (slika 2: svrstavanje po stupcima). Time se smanjuje broj pretraživanja — treba naći prvu komponentu retka ili stupca; ostale uzastopno slijede. Komponente mogu biti poredane i u svakom retku ili stupcu (slika 3).

A	10.	3.	2.	40.	60.	-2.	7.	80.	-5.	-3.	90.
I	0	3	2	1	2	0	4	3	1	0	4
J	0	0	0	1	2	2	2	3	3	3	4

Slika 2. Koordinatni zapis sa svrstavanjem po stupcima

A	10.	2.	3.	40.	-2.	60.	7.	-3.	-5.	80.	90.
I	0	2	3	1	0	2	4	0	1	3	4
J	0	0	0	1	2	2	2	3	3	3	4

Slika 3. Koordinatni zapis sa svrstavanjem po stupcima i s poretkom u svakom stupcu

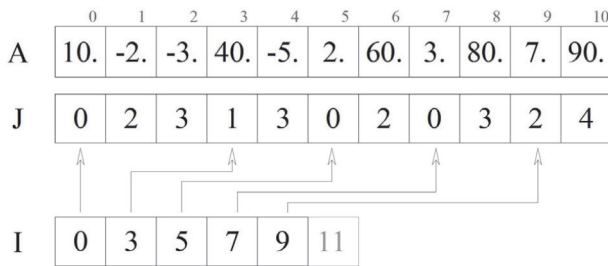
Još se učinkovitiji pristup svim od nule različitim komponentama retka ili stupca ostvaruje s pomoću sažetih zapisa. U sažetom zapisu po stupcima (engl. *compressed sparse column format*, kratica CSC) nizovi A i I sadrže, kao i u koordinatnom zapisu, vrijednosti komponenta matrice i indekse njihovih redaka, svrstane po stupcima, pa su njihove duljine jednake broju od nule različitih komponenta. Niz J pak sadrži indekse početnih komponenta pojedinih stupaca u nizovima A i I (slika 4).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	10.	2.	3.	40.	-2.	60.	7.	-3.	-5.	80.	90.
I	0	2	3	1	0	2	4	0	1	3	4
J	0	3	4	7	10	11					

Slika 4. Sažeti zapis po stupcima

Dok u koordinatnom zapisu sa svrstavanjem po stupcima treba pretražiti niz kako bi se pronašla početna komponenta stupca j , u sažetomu zapisu po stupcima njezin je položaj $J[j]$. Broj od nule različitih komponenata stupca j izračunava se prema izrazu $J[j+1] - J[j]$. Kako bi se mogao izračunati broj komponenata u zadnjemu stupcu, nizu J dodaje se indeks zamišljenih komponenata neposredno iza zadnjih komponenata nizova A i I (sivo na slici 4.); pri indeksiranju koje počinje nulom taj je broj ujedno i broj od nule različitih komponenata matrice. Duljina je niza za jedan veća od broja stupaca matrice.

Sažeti zapis po redcima (engl. *compressed sparse row format, CSR*) prikazan je slici 5. Komponente pojedinih redaka ili stupaca u sažetim zapisima mogu (kao na slika 4. i 5.), ali i ne moraju biti poredane.



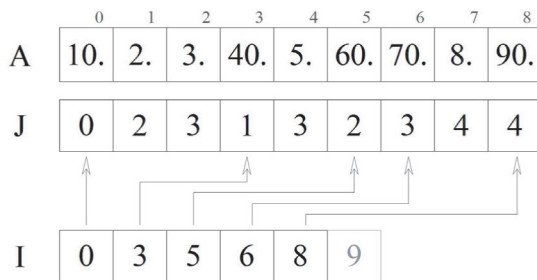
Slika 5. Sažeti zapis po redcima

Ako je matrica simetrična, dovoljno je pohraniti od nule različite komponente na dijagonali i ispod nje, u strogo donjemu trokutastom dijelu. Primjerice, pohraniti treba samo deblje otisnute (engl. *bold*) komponente matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{10.} & 0. & 2. & 3. & 0. \\ 0. & \mathbf{40.} & 0. & 5. & 0. \\ \mathbf{2.} & 0. & \mathbf{60.} & 0. & 0. \\ \mathbf{3.} & \mathbf{5.} & 0. & \mathbf{70.} & 8. \\ 0. & 0. & 0. & \mathbf{8.} & \mathbf{90.} \end{bmatrix}$$

sažeti je zapis po stupcima prikazan na slici 6.

Pohraniti se, naravno, mogu i samo komponente gornjega trokutastog dijela — na dijagonali i iznad nje. Pohranjivanjem dijela simetrične matrice štedi se memorijski prostor, a može se, ovisno o načinu i redosljedu izračunavanja vrijednosti komponenta, skratiti i vrijeme izvođenja programa.



Slika 6. Sažeti zapis po stupcima donjega trokutastog dijela simetrične matrice

4. Množenje matrice i vektora

Po broju operacija (množenja i zbrajanja brojeva), a time i vremenski, u algoritmi- ma IRM–CG i IRM najzahtjevniji su postupci množenje matrice i vektora i množenje matrica. Za smanjenje vremena rješavanja velikih sustava jednadžbi treba svakako pokušati skratiti trajanje izračunavanja umnoška triju matrica u retku 16. i izračuna- vanja umnoška matrice i vektora u retku 14. kôda za IRM te matrice i vektora u retku 17. kôda za IRM–CG, jer se ta izračunavanja ponavljaju u petljama `while`. želimo li pak algoritme IRM i IRM–CG upotrijebiti u iteracijskoj primjeni metode gustoća sila ili u nekom iteracijskom postupku rješavanja sustava nelinearnih jednadžbi, važni- ma postaju i množenja matrice i vektora izvan te petlje (redci 9. i 10. u IRM te redci 9., 10. i 13. u IRM–CG), jer se sustavi linearnih jednadžbi rješavaju u svakomu koraku vanjske petlje [6], [14].

U većini udžbenika linearne algebre (primjerice [9]) umnožak matrice \mathbf{A} i vektora \mathbf{r} definiran je izrazom

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} r_j = \mathbf{a}_{i,\cdot} \cdot \mathbf{r} \quad \text{za } i \in [0, m-1]; \quad (2)$$

i -ta komponenta rezultata α skalarni je umnožak i -toga retka matrice \mathbf{a}_i i vektora \mathbf{r} , pa se matricom “prolazi po redcima”.

Vektori \mathbf{r} i α pohranjeni su kao gusto popunjeni. Ako je matrica \mathbf{A} pohranjena kao gusto popunjena (kraće: kao puna) matrica, s vrijednostima svih komponenta u jednom nizu, njezinim se komponentama u tom nizu pristupa neposredno, indeksiranjem, pa su položaji komponenta i -toga retka pri pohranjivanju po redcima $i \cdot n + j$, a $i + j \cdot m$ pri pohranjivanju po stupcima (indeksiranja počinju nulom). I ako je matrica \mathbf{A} rijetko popunjena i pohranjena sažetim zapisom po redcima, pristup je komponentama traženoga retka neposredan: položaj je vrijednosti (u nizu \mathbf{A}) i in- deksta stupca (u nizu \mathbf{r}) prve od nule različite komponente u i -tomu retku $I[i]$. Položa- ji vrijednosti i i indeksa stupaca ostalih od nule različitih komponenta toga retka u

nizovima A i l slijede uzastopno, do položaja $l[i+1]-1$. “Doslovni” je “prijevod” množenja u programski kôd:

```
for (int i = 0; i < m; ++i) {
    alpha[i] = 0;
    for (int j = I[i]; j < I[i + 1]; ++j)
        alpha[j] += A[j] * r[J[j]];
}
```

Primjenom biblioteke `Eigen` to se može napisati kao

```
for (int i = 0; i < A.outerSize(); ++i) {
    alpha[i] = 0;
    for (typename sparse_matrix_t::InnerIterator j (A, i); j; ++j)
        alpha[i] += j.value() * r[j.index()];
}
```

Ako je `sparse_matrix_t` rijetko popunjena matrica pohranjena sažetim zapisom po redcima, to jest, uz

```
typedef SparseMatrix<scalar_t, RowMajor> sparse_matrix_t;
```

Funkcija `.outerSize()` daje broj njezinih redaka, a ako je matrica pohranjena po stupcima,

```
typedef SparseMatrix<scalar_t, ColMajor> sparse_matrix_t;
```

funkcija `.outerSize()` daje broj stupaca. `InnerIterator` je tip podataka jedinka kojega (j) ima ulogu kazaljke koja u matrici pohranjenoj po redcima prolazi redom svim od nule različitim komponentama određenoga retka, pa funkcija `.value()` daje vrijednost komponente, a funkcija `.index()` indeks stupca u kojemu se komponenta nalazi. Ako je matrica pohranjena po stupcima, kazaljka prolazi svim od nule različitim komponentama određenoga stupca, pa funkcija `.index()` daje indeks retka u kojemu je komponenta. Naravno, ako je matrica pohranjena po stupcima, navedeni kôd nema smisla, barem ne kao množenje matrice i vektora. Osim ako... Vratit ćemo se na to.

Ako je matrica pohranjena sažetim zapisom po stupcima, pristup je komponentama nekoga retka znatno sporiji, jer komponente toga retka treba tražiti u pojedinim stupcima (štoviše, stupac će se pretražiti i ako se u njemu ne nalazi ni jedna komponenta retka). Stoga će i množenje matrice i vektora biti znatno sporije nego uz matricu pohranjenu po redcima. No, umnožak matrice A i vektora r može se definirati i izrazom

$$\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} r_j \mathbf{a}_{\cdot,j}; \quad (3)$$

vektor α , rezultat, linearna je kombinacija stupaca $\mathbf{a}_{\cdot j}$ matrice \mathbf{A} , pri čemu su koeficijenti te linearne kombinacije komponente vektora \mathbf{r} [1]. Za jednostavnu i učinkovitu programsku realizaciju tako definirana množenja pogodno je prethodno definirati programsku funkciju koja izračunava

$$\alpha = c \mathbf{a}$$

gdje je c broj, α puni, a \mathbf{a} rijetko popunjeni vektor (rijetko popunjeni vektor pohranjuje se u koordinatnom zapisu s pomoću dva niza — niza vrijednosti od nule različitih komponenta i niza njihovih indeksa).

Ako je matrica \mathbf{A} simetrična, onda je $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, pa za matricu pohranjenu po stupcima možemo pisati

```
alpha = A.transpose() * r;
```

što ima isti učinak kao prije navedeni programski kôd koji smo za po stupcima pohranjene matrice proglasili besmislenim. Funkcija `.transpose()` ne oblikuje novu matricu; njezin je rezultat samo drugi pogled na postojeću matricu u kojemu su uloge redaka i stupaca zamijenjene.

Ako je pohranjen samo trokutasti dio simetrične matrice, nisu sve komponente pojedinih redaka (u zapisu po redcima) ili stupaca (u zapisu po stupcima) smještene uzastopno. Primjerice, ako je simetrična matrica pohranjena u zapisu po redcima kao gornja trokutasta matrica, uzastopno su smještene dijagonalna komponenta i komponente retka desno od nje. Komponente retka lijevo od nje nalaze se u prethodnim redcima kao komponente stupca s istim indeksom. Nalaženje tih komponenta usporit će množenje matrice i vektora. Pretraživanje se može izbjeći primjenom svojstva distributivnosti i kombinacijom množenja prema izrazima (2) i (3):

```
1  alpha.setZero();
2  for (int i = 0; i < m.outerSize(); ++i) {
3      typename sparse_matrix_t::InnerIterator j (A, i);
4      alpha[i] += j.value() * r[j.index()];
5      ++j;
6      for (; j; ++j) {
7          alpha[i] += j.value() * r[j.index()];
8          alpha[j.index()] += j.value() * r[i];
9      }
10 }
```

Svojstvo distributivnosti daje

$$\mathbf{Ar} = (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{r} = \mathbf{Lr} + \mathbf{Dr} + \mathbf{Ur}$$

gdje su **D**, **L** i **U** dijagonalna, strogo donja trokutasta i strogo gornja trokutasta matrica. Budući da je matrica **A** simetrična, $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$, pa je

$$\mathbf{Ar} = \mathbf{U}^T \mathbf{r} + \mathbf{Dr} + \mathbf{Ur} \quad (4)$$

Komponente umnoška **Dr** izračunavaju se u retku 4. (Pretpostavljeno je da su sve dijagonalne komponente matrice različite od nule,¹ tako da je prva pohranjena komponenta svakoga retka dijagonalna komponenta). Komponente umnoška **Ur** izračunavaju se prema izrazu (2) u retku 7. u unutarnjoj petlji for (s kazaljkom *j*), dok se pribrojnici izraza (3) za umnožak $\mathbf{U}^T \mathbf{r}$ izračunavaju u retku 8. u istoj petlji, pri čemu pohranjeni redci matrice **U** imaju ulogu stupaca matrice \mathbf{U}^T . Kako se oba izračunavanja izvršavaju u istoj petlji, vrijednosti komponente matrice $\mathbf{A}(j.value())$ i indeksu njezina stupca ($j.index()$) pristupa se samo jednom.

Lako je vidjeti da programski kôd ne treba mijenjati za simetričnu matricu koja je pohranjena kao donja trokutasta matrica u zapisu po stupcima, ali je njegova interpretacija drugačija:

$$\mathbf{Ar} = \mathbf{Lr} + \mathbf{Dr} + \mathbf{L}^T \mathbf{r} \quad (5)$$

Komponente umnoška **Dr** ponovno se izračunavaju u retku 4. Pribrojnici izraza (3) za umnožak **Lr** izračunavaju u retku 8., dok se komponente umnoška $\mathbf{L}^T \mathbf{r}$ prema izrazu (2) izračunavaju u retku 7., pri čemu pohranjeni stupci matrice **L** imaju ulogu redaka matrice \mathbf{L}^T .

(Pisanje kôda za pohranjivanje simetrične matrice kao donje trokutaste matrice u zapisu po redcima ili kao gornje trokutaste matrice u zapisu po stupcima prepuštamo radoznalim čitateljima. Napomenut ćemo ipak da je zadaća nešto teža, jer su dijagonalne komponente sada posljednje pohranjene komponente redaka ili stupaca.)

U biblioteci `Eigen` trokutasta matrica može preuzeti ulogu simetrične (u stvari, hermitske) matrice primjenom predložka funkcije `.selfadjointView<>()`. Ako smo, primjerice, simetričnu matricu pohranili kao donju trokutastu matricu, njezin je umnožak s vektorom

```
alpha = A.selfadjointView<Lower>() * r;
```

¹ U matricama sustava jednadžbi ravnoteže u metodi gustoća sila i u inačicama i izvedenicama metode pomaka dijagonalne su komponente zbrojevi gustoća sila ili krutosti elemenata priključenih u čvorove uvjete ravnoteže kojih pojedine jednadžbe izražavaju.

5. Množenje triju matrica

Redak 16. kôda za IRM izračunavanje je umnoška triju matrica, $F^T A F$. Matrica A je rijetko popunjena, dok je matrica F puna.

Množenje matrica nije komutativna, ali jest asocijativna operacija, pa se umnožak može izračunati kao $(F^T A) F$ ili kao $F^T (A F)$, pri čemu su $F^T A$ i $A F$ pune matrice. Učinkovitiji je drugi način.

Naime, u izračunavanju umnoška dviju matrica, $F^T A$ ili $A F$, unutarnjom petljom, u kojoj se izračunava vrijednost neke njegove komponente, upravlja prva, lijeva matrica — prolazi se redom po svim pohranjenim komponentama njezina retka. Ako je lijeva matrica puna, a desna rijetko popunjena, za mnoge komponente retka lijeve matrice ne postoje odgovarajuće komponente u stupcu desne matrice, ali se to može otkriti samo tako da ih se potraži. Ako je pak lijeva matrica rijetko popunjena, u petlji se prolazi samo po od nule različitim komponentama retka rijetko popunjene matrice i po odgovarajućim komponentama stupca desne, pune matrice. Stoga ćemo, ako je matrica A pohranjena po redcima, redak 16. kôda za IRM zamijeniti redcima

```
dense_matrix_t AF = A * F;
dense_matrix_t FTAF = F.transpose() * AF;
```

a ako pohranjena po stupcima, redcima

```
dense_matrix_t AF = A.transpose() * F;
dense_matrix_t FTAF = F.transpose() * AF;
```

6. Uvjet prekida iteracije

U oba se postupka petlja `while` prekida kada broj koraka dosegne zadani dopušteni broj koraka (što je osiguranje za slučaj divergencije) ili kada euklidska norma reziduala postane manja od odabranoga praga. Za prag se obično uzima umnožak zadane točnosti i norme vektora desnih strana sustava jednadžbi, pa je uvjet prekida

$$\| \mathbf{r} \| < \tau \| \mathbf{b} \|,$$

odnosno, petlja se ponavlja dok je

$$\| \mathbf{r} \| \geq \tau \| \mathbf{b} \|.$$

Izračunavanje euklidske norme vektora uključuje izračunavanje drugoga korijena:

$$\| \mathbf{r} \| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}.$$


Korjenovanje se može izbjeći uzme li se za uvjet prekida

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} < \tau^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

7. Umjesto zaključka

U radu smo, bez želje za izvornošću i većim znanstvenim doprinosima, opisali primjere optimizacije programskoga kôda razvijenog u jeziku C++, domišljene u pokušajima ublažavanja “uskih grla” u algoritmima IRM–CG-a i IRM-a — množenja matrice i vektora i množenja triju matrica (množenje dviju matrica može se interpretirati kao uzastopno množenje matrice i vektorâ, stupaca desne matrice). Inačice nekih od prikazanih zamisli za množenje matrice i vektora ugrađene su u biblioteku Eigen. Iako primjena takve pouzdane (dobro testirane) i optimizirane biblioteke velike izražajnosti² olakšava razvoj učinkovitih programa, moguće je daljnje fino ugađanje kôda. Primjerice, iako je množenje matrica asocijativno, u umnošku triju matrica trajanje proračuna može bitno ovisiti o redosljedu množenja.

Zahvala

Rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost  projektom IP–2014–09–2899.

Literatura

- [1] S. Duff, A. M. Erisman, J. K. Reid: *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, 1986
- [2] J. Dvornik, D. Lazarević: Iterirani Ritzov postupak za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi, *Građevinar*, 69 (2017) 7, str. 521–535, doi:<https://doi.org/10.14256/JCE.2036.2017>
- [3] J. Dvornik, D. Lazarević, M. Uroš, M. šavor Novak: The Iterated Ritz Method: Basis, implementation and further development, *Coupled Systems Mechanics*, 7 (2018) 6, pp. 755–774, doi: <https://doi.org/10.12989/csm.2018.7.6.755>
- [4] J. Dvornik, D. Lazarević, A. Jaguljnjak Lazarević, M. Demšić: Nonrecursive equivalent of the conjugate gradient method without the need to restart, *Advances in Civil Engineering*, Volume 2019, Article ID 7527590, 5 pages, doi: <https://doi.org/10.1155/2019/7527590>
- [5] J. Dvornik, D. Lazarević, A. Jaguljnjak Lazarević: Iterirani Ritzov postupak: počela, trenutačno stanje i budući razvoj, *Zbornik mini–simpozija “Novi, učinkoviti iteracijski postupak proračuna konstrukcija — poopćenje suvremenih postupaka”* (ovaj zbornik), Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2019., str. 11–37

2 Različiti postupci za različite vrste matrica skriveni su iza gotovo jedinstvenoga sučelja koje često oponaša matematički simbolizam.

- [6] K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: Poopćene minimalne mreže u oblikovanju konstrukcija od užadi, *Građevinar*, 65 (2013) 8, str. 707–720
- [7] P. Gidak, K. Fresl: Programming the force density method, *Proceedings of the IASS–APCS Symposium 2012, From spatial structures to space structures*, K. Seung Deog (ed.), Seoul, Republic of Korea, 2012, p. 197 (abstract; article on CD)
- [8] G. Guennebaud, B. Jacob et al.: *Eigen v3*, <http://eigen.tuxfamily.org>, 2010, pristupljeno 27. veljače 2019.
- [9] S. Kurepa: *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
- [10] B. Maurin, R. Motro: The surface stress density method as a form–finding tool for tensile membranes, *Engineering Structures*, 20 (1998) 8, pp. 712–719
- [11] Y. Saad: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Second Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003
- [12] H.–J. Schek: The force density method for form finding and computation of computation of general networks, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1974) 1, pp. 115–134
- [13] B. Stroustrup: *The C++ Programming Language*, Fourth Edition, Addison–Wesley, Upper Saddle River, NJ, 2013
- [14] E. Šamec, K. Fresl, M. Baniček: Povećanje učinkovitosti iteracijske primjene metode gustoće sila, *Građevinar*, 69 (2017) 12, str. 1075–1084, doi: <https://doi.org/10.14256/JCE.2132.2017>
- [15] D. Vandevoorde, N. M. Josuttis, D. Gregor: *C++ Templates. The Complete Guide*, Second Edition, Addison–Wesley, Boston, 2018

2. MATERIJALI I KONSTRUKCIJE

Modelling corrosion of steel reinforcement in concrete (pozvano predavanje)

Joško Ožbolt¹, Gojko Balabanić², Filip Oršanić¹

¹Institute of Construction Materials, University of Stuttgart, Germany

²Faculty of Civil Engineering Rijeka, University of Rijeka, Croatia

Abstract

In the first part of the presentation an overview of different models for modelling chloride induced corrosion of reinforcement in concrete developed in the past will be shortly presented. Subsequently, coupled 3D chemo-hygro-thermo-mechanical model for concrete will be presented. The model is aimed to simulate complex non-mechanical and mechanical processes before and after depassivation of steel reinforcement. It was implemented into a 3D FE code and its application and performance will be illustrated through several numerical examples for natural and accelerated corrosion.

Key words: concrete, durability mechanics, corrosion of reinforcement, numerical simulations

Modeliranje korozije armature u betonu: prošlost, sadašnjost i budućnost

Sažetak

U prvom je dijelu izlaganja ukratko dan pregled različitih modela za modeliranje korozije armature u betonskim konstrukcijama uzrokovane agresivnim djelovanjem klorida. Nakon toga je prikazan spregnuti tzv. 3D kemo-higro-termo-mehanički model za beton. Cilj je modela simulirati složene mehaničke i nemehaničke (transportne) procese prije depasivacije čelične armature i nakon nje. Model je implementiran u 3D FE program za nelinearnu analizu betonskih konstrukcija, a njegova primjena i performanse prikazani su na nekoliko numeričkih primjera za slučajeve prirodne i ubrzane korozije.

Ključne riječi: beton, mehanika trajnosti, korozija armature, numerička simulacija

1. Introduction

Durability of reinforced concrete structures is mainly influenced by the corrosion of steel reinforcement. Especially vulnerable are structures exposed to harsh sea climate conditions or highways and garages treated with de-icing salts during winter seasons [1]. Reinforcement corrosion can be initiated by: (i) the carbonation of the concrete and (ii) the penetration of chlorides from de-icing or sea salts. Both processes can destroy the inherent, thin, corrosion-protective oxide layer of the steel embedded in the concrete. After destruction of this oxide layer (depassivation), the so-called active corrosion phase, in which the steel is gradually converted into corrosion products (rust), initiates. The resulting consequences are: (i) reduction of the steel cross section by conversion of iron into iron oxides, (ii) cracking and possibly spalling of concrete cover due to the increasing the volume of the corrosion products in relation to the steel and (iii) reducing the bond strength between reinforcement bar and concrete. Consequences, durability, failure capacity and ductility of concrete structure can be significantly reduced.

In addition to the macro-cell corrosion of the steel reinforcement, in the case of chloride-induced corrosion the local (pitting) corrosion also occurs [2]. This type of corrosion is particularly dangerous as it causes local damage resulting in a large decrease in ductility and reduction of the cross-section of the reinforcing steel bar. The chemical processes leading to the pitting corrosion of steel reinforcement in concrete are known. However, only a few numerical studies exist at present. The main reason for this is high complexity of the processes, for which the relevant parameters are very difficult to determinate. This type of corrosion is decisive for the decrease of ductility and reduction of the cross-section of reinforcement bars. It has significant influence on the safety of reinforced and pre-stressed concrete structures. Therefore, the existing macro-model needs to be further extended, so that the pitting corrosion can also be simulated. Using such model in combination with experimental tests the conditions that are responsible for the initiation and progression of pitting corrosion can be more effectively studied.

According to current research status, there is only one coupled 3D CHTM model capable of simulating all relevant non-mechanical and mechanical processes and their interaction. This model was developed at the Institute of Construction Materials, University of Stuttgart, and implemented into the 3D FE code [3][4][5]. Over the past years, the model has been calibrated, verified and further improved based on the extensive experimental tests [6]. In the following its theoretical background and application is presented.

2. Chemo-hydro-thermo-mechanical model for concrete

The above mentioned 3D chemo-hydro-thermo-mechanical model couples the physical and electrochemical processes with the mechanical behavior of concrete (damage). In the model the transport of capillary water is described in terms of volume fraction of pore water in concrete by Richard's equation [7], based on the assumption that transport processes take place in aged concrete, i.e., the hydration of cement paste is completed:

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} = \nabla \cdot [D_w(\theta_w) \nabla \theta_w] \quad (1)$$

where θ_w is volume fraction of pore water (m^3 of water/ m^3 of concrete) and $D_w(\theta_w)$ is capillary water diffusion coefficient (m^2/s) described as a strongly non-linear function of moisture content. Transport of chloride ions through a non-saturated concrete occurs as a result of convection, diffusion and physically and chemically binding by cement hydration product [4]:

$$\theta_w \frac{\partial C_c}{\partial t} = \nabla \cdot [\theta_w D_c(\theta_w, T) \nabla C_c] + D_w(\theta_w) \nabla \theta_w \nabla C_c - \frac{\partial C_{cb}}{\partial t} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial C_{cb}}{\partial t} = k_r (\alpha C_c - C_{cb}) \quad (2b)$$

where C_c is concentration of free chloride dissolved in pore water (kgCl/m^3 pore solution), $D_c(\theta_w, T)$ is the effective chloride diffusion coefficient (m^2/s) expressed as a function of water content and concrete temperature T , C_{cb} is concentration of bound chloride (kgCl/m^3 of concrete), k_r is binding rate coefficient, $\alpha = 0.7$ is constant [3].

Assuming that oxygen does not participate in any chemical reaction before depassivation of steel, transport of oxygen through concrete is considered as a convective diffusion problem:

$$\theta_w \frac{\partial C_o}{\partial t} = \nabla \cdot [\theta_w D_o(\theta_w) \nabla C_o] + D_w(\theta_w) \nabla \theta_w \nabla C_o \quad (3)$$

where C_o is oxygen concentration in pore solution (kg of oxygen/ m^3 of pore solution) and $D_o(\theta_w)$ is the effective oxygen diffusion coefficient [3], dependent on concrete porosity p_{con} and water saturation of concrete S_w .

Based on the constitutive law for heat flow and conservation of energy, the equation which describes temperature distribution in continuum reads:

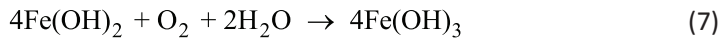
$$\lambda \Delta T + W(T) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

where λ is thermal conductivity (W/(m K)), c is heat capacity per unit mass of concrete (J/(K kg)), ρ is mass density of concrete (kg/m³) and W is internal source of heating (W/m³). More detail related to the strong and weak formulations of the processes up to the depassivation of reinforcement can be found in Ožbolt et al. [3]. The corrosion of steel is activated with the depassivation of the steel reinforcement in concrete. The non-mechanical processes important for the propagation stage of steel corrosion in concrete are: (1) Mass sinks of oxygen at steel surface due to cathodic and anodic reaction, (2) The flow of electric current through pore solution and (3) The cathodic and anodic potential.

The oxygen consumption at the cathodic and anodic surfaces is a result of the following reactions of dissolved oxygen in the pore water with the electrons on the cathode:



The transport of hydroxyl ions to the anode, where corrosion products forms:



It can be calculated as:

$$D_o(S_w, p_{con}) \frac{\partial C_o}{\partial n} \Big|_{\text{cathode}} = -k_c i_c \quad k_c = 8.29 \times 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{C}} \quad (8a)$$

$$D_o(S_w, p_{con}) \frac{\partial C_o}{\partial n} \Big|_{\text{anode}} = -k_a i_a \quad k_a = 4.14 \times 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{C}} \quad (8b)$$

where n is outward normal to the steel bar surface and i_c and i_a are cathodic and anodic current density (A/m²), respectively. The constants k_c and k_a are calculated using the stoichiometry of chemical reactions (Eqs. 5-7) and Faraday's law.

According to Butler – Volmer kinetics, in the present model kinetics of reaction at the cathodic and anodic surface can be estimated from:

$$i_c = i_{0c} \frac{C_o}{C_{ob}} e^{2.3(\Phi_{0c} - \Phi)/\beta_c} \quad i_a = i_{0a} e^{2.3(\Phi - \Phi_{0a})/\beta_a} \quad (9)$$

where C_{ob} is oxygen concentration at surface of concrete element exposed to sea water (kg/m^3), Φ is electric potential in pore solution near reinforcement surface (V), i_{0c} and i_{0a} are the exchange current density of the cathodic and anodic reaction (A/m^2), Φ_{0c} and Φ_{0a} are the cathodic and anodic equilibrium potential (V), β_c and β_a are the Tafel slope for cathodic and anodic reaction (V/dec), respectively.

The electric current through the electrolyte is a result of motion of charged particles and, if the electrical neutrality of the system and the uniform ions concentration are assumed, can be written as:

$$\mathbf{i} = -\sigma(S_w, p_{con})\nabla\Phi \quad (10)$$

where σ is electrical conductivity of concrete. The equation of electrical charge conservation, if the electrical neutrality is accounted for and the electrical conductivity of concrete is assumed as uniformly distributed, reads:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (11)$$

Rate of rust production J_r ($\text{kg}/\text{m}^2\text{s}$) and mass of hydrated red rust per related surface (A_r) of rebar m_r (kg), respectively, are calculated as:

$$\begin{aligned} J_r &= 5.536 \times 10^{-7} i_a \\ m_r &= J_r \Delta t A_r \end{aligned} \quad (12)$$

where Δt is time interval in which the corrosion is taking place. The coefficient of proportionality between the anodic current density i_r and rate of rust production J_r is calculated using the stoichiometry of chemical reactions and Faraday's law [4]. The distribution of corrosion product (red rust) R (kg/m^3 of pore solution) into the pores and through the cracks in concrete has been mathematically formulated as a convective diffusion problem:

$$\theta_w \frac{\partial R}{\partial t} = \nabla \cdot [\theta_w D_r \nabla R] + D_w (\theta_w) \nabla \theta_w \nabla R \quad (13)$$

in which D_r is the diffusion coefficient (m^2/s) of corrosion product. It is important to note that the Eq. (13) does not directly describe the transport of the red rust, but rather the distribution of the rust formed in the concrete pores and cracks as a consequence of soluble species, which can dissolve in concrete pore solution and subsequently migrate in pores and cracks, reacting with oxygen in the pore water

[8]. Detailed experimental and numerical investigations have been carried out recently in order to calibrate the present model with this respect [6].

The microplane model for concrete with relaxed kinematic constraints [5] is applied in the mechanical part of the model. One-dimensional corrosion contact elements are employed in the model to account for the inelastic strains due to the expansion of corrosion products. They are placed radially around the bar surface and their main function is to simulate the contact between reinforcement and the surrounding concrete. These contact elements can take up only shear forces in direction parallel to reinforcement axis and compressive forces perpendicular to the adjacent surface of the reinforcement. The inelastic radial expansion due to corrosion Δl_r is calculated as:

$$\Delta l_r = \frac{m_r}{A_r} \left(\frac{1}{\rho_r} - \frac{0.523}{\rho_s} \right) \quad (14)$$

where $\rho_r = 1.96 \times 10^3$ (kg/m³) and $\rho_s = 7.89 \times 10^3$ (kg/m³) are densities of rust and steel, respectively, 0.523 is the ratio between the mass of steel (m_s) and the corresponding mass of rust (m_r) over the related surface of reinforcement A_r that corresponds to the contact element. For more detail see [3] [4].

3. Numerical case study

The application of the presented 3D CHTM model is here demonstrated through numerical study of the pull-out of the reinforcement bar from a beam-end specimen. The specimen is first exposed to aggressive environmental conditions, which caused corrosion of embedded reinforcement bar. Subsequently the bar is pulled out from the specimen and for the different levels of corrosion the numerical results are compared with the test results obtained by Fischer et al. [9]. The experiments were carried out under accelerated corrosion, which approximately corresponds to the severe splash natural conditions.

Only two specimen types with four bars arranged in corners are studied. In the first specimen type, the diameter of the reinforcement bar is 12 mm with a concrete cover of 20 mm ($\phi 12/20$ mm) and in the second, the bar diameter of 16 mm with a cover of 35 mm ($\phi 16/35$ mm) is used. The total embedment length of the reinforcement in both cases is 180 mm, whereas the rest of the length is isolated with a plastic sleeve (Figure 1). For more detail see [5] [9].

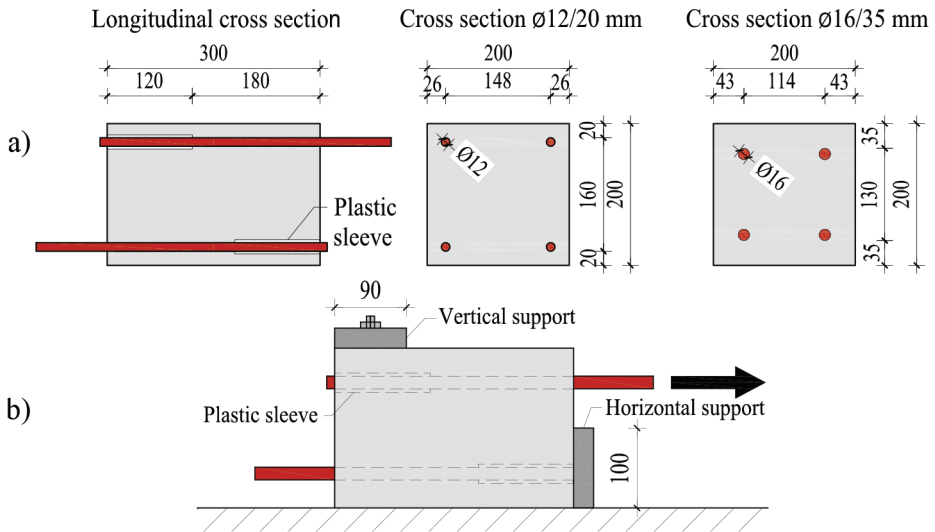


Figure 1. a) Geometry of the beam-end specimen, b) and pull-out loading condition (Fischer et al. [9])

In the analysis is assumed that certain length sections of the bar are activated as anode (depassivated) at the start of the analysis, i.e. the processes before depassivation of reinforcement are not computed. This predefined position of anode and cathode (Figure 2a), assuming initially un-cracked concrete, is kept unchanged during the computation. In this way after depassivation only the electric potential, current density, distribution of oxygen and cracking of concrete are calculated. More detail related to the position and size of anodic and cathodic areas can be found in [10].

One of the aims of the study was to investigate the influence of the position of anode along the cross-section of the bar reinforcement. Therefore for each specimen (reinforcement diameter) three configurations of the anodic surface over the circumference are assumed (see Figure 2b).

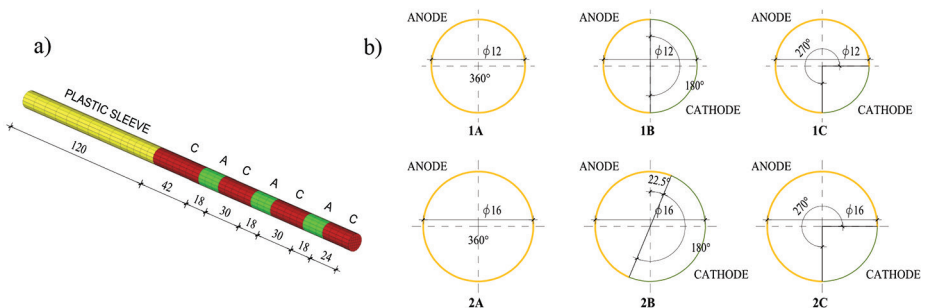


Figure 2. Assumed anodic and cathodic regions: a) along the length, b) along the cross-section of the reinforcement bar

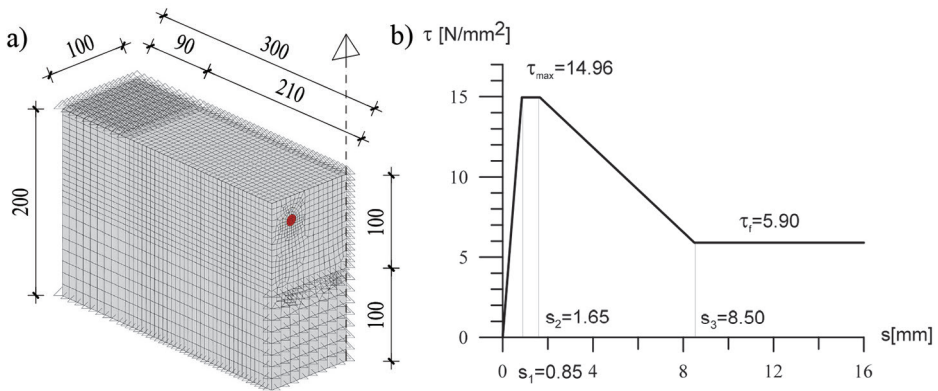


Figure 3. Model geometry (all in mm) in the case of: a) the first and b) the second specimen

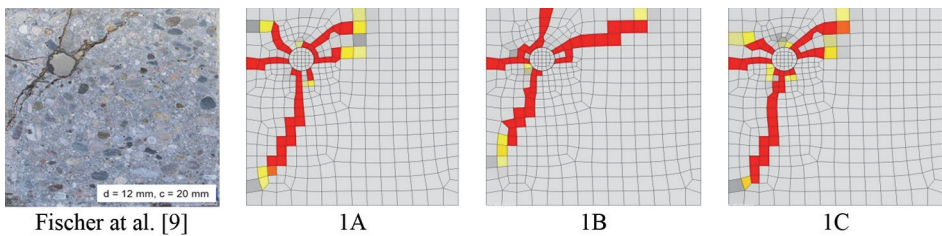


Figure 4. Comparison of the crack patterns in the cross section at the beam's mid-span for the cases 1A-C with the experimental results

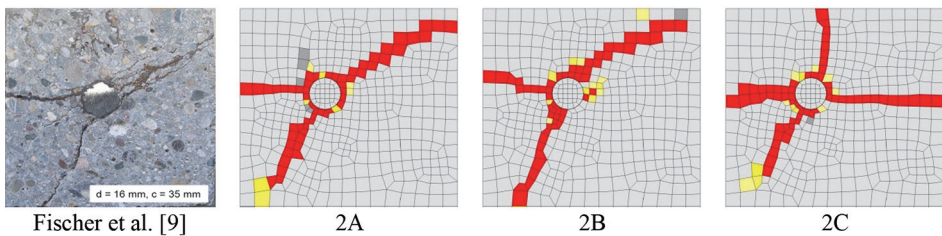


Figure 5. Comparison of the crack patterns in the cross section at the beam's mid-span for the cases 2A-C with the experimental results

Because of the complexity of the model and in order to reduce the computational time only half of the specimen is modeled (Figure 3a). Eight-node solid 3D finite elements are used to model the concrete and the reinforcement bar. To simulate the expansion due to the formation of corrosion products, 1D radially oriented corrosion contact finite elements are used with a length of 0.1 mm. These elements can take up radial forces (only compressive) and shear forces in direction of reinforcement axis (see Figure 3b). Experimentally observed and

numerically predicted crack patterns in the mid cross section of the specimen, 7 years after depassivation of reinforcement, are shown in Figure 4 and Figure 5. For the first specimen ($\phi 12 / 20$ mm) the position of anode 1A and 1C leads to a similar crack formation around the reinforcement bar, whereas type 1B gives better agreement with the experimental crack pattern. For the type 2, the case 2B leads to the best agreement with the test data. The above presented results show that the position of cathode and anode in the case 1B for the first specimen ($\phi 12 / 20$ mm) gives the best agreement with the experimental results. Therefore this case is chosen to demonstrate the effect of distribution of corrosion products over the cracks. Two cases are considered: (a) transport of rust is neglected and (b) transport is accounted for. The same as before, for each case the beams are exposed to the corrosion processes over the period of 7 years. The damage (cracking) due to the expansion of corrosion products after 1 and 7 years, respectively, for the type 1B is shown in Figure 6. The numerical results indicate a significant influence of the rust distribution on the corrosion induced damage for the here studied type of chloride induced corrosion, with relatively high saturation.

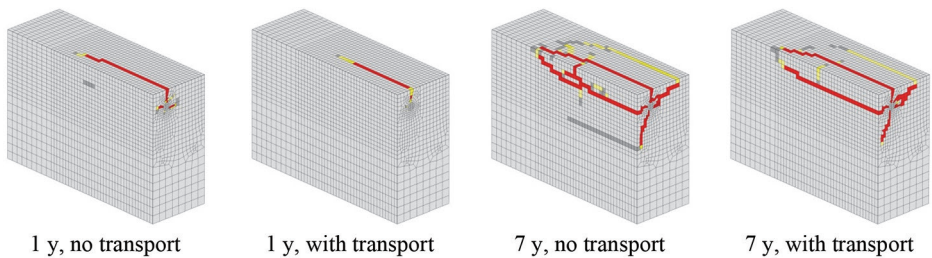


Figure 6. Predicted crack patterns due to corrosion induced damage after 1 and 7 years for specimen type 1B

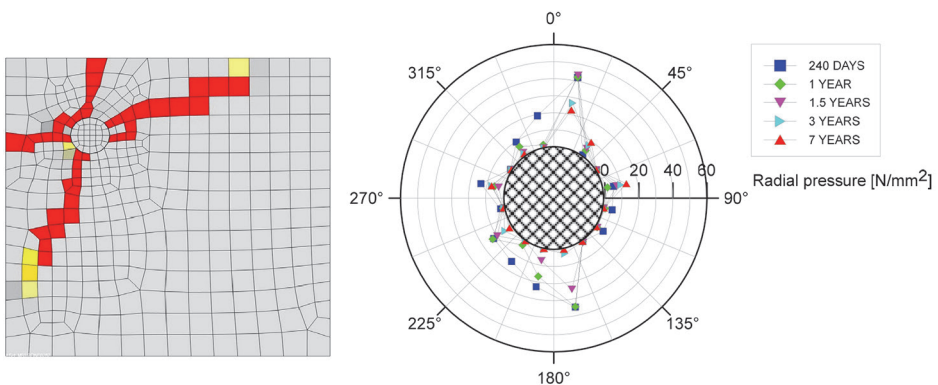


Figure 7. Distribution of radial pressure and corresponding crack patterns

In Figure 7 the distribution of radial pressure as a consequence of expansion of corrosion products is plotted for the case 1B. The pressure is shown in the anode-cathode transition zone. As expected, the pressure is not axial symmetrically distributed over the surface of reinforcement. The maximum radial pressure of approximately 40 MPa is observed and it is obtained approximately 1.5 years after the start of the corrosion phase.

After depassivation of reinforcement (corrosion phase), among other parameters, the corrosion rate is strongly influenced by distribution of water and oxygen. For instance, if the supply of oxygen is not sufficient the corrosion process will stop. In the present numerical investigations the water saturation is assumed to be constant during the corrosion phase ($S_w = 50\%$). However, the distribution of oxygen depends on the corrosion rate, which is in turn dependent on the mechanical properties of concrete (cracking). More cracking causes better oxygen supply and consequently leads to higher corrosion rate.

The distribution of electric potential (V), current density (A/m^2) and oxygen (kg/m^3 of pore solution) along 162 mm length of the reinforcement bar, starting from the pull-out surface, are shown in Figure 8. Plotted are average values over the corresponding cathodic and anodic cross-section of the bar. The distributions of the current density and electric potential along the length of the bar show that the highest electric potential and current density is predicted in the cathode-anode transition zone.

The distribution of oxygen concentration along the reinforcement bar is shown in Figure 9. It demonstrates significant effect of the corrosion induced damage and the importance of coupling of transport processes with mechanical properties of concrete. The consumption of oxygen reaches its maximum soon after the start of the analysis (depassivation) and remains approximately constant until the first surface crack appears. With the opening of the surface crack(s) the flow of oxygen rises and consequently the concentration of oxygen at the reinforcement surface 7 years after depassivation is almost identical as at the beginning of the corrosion process.

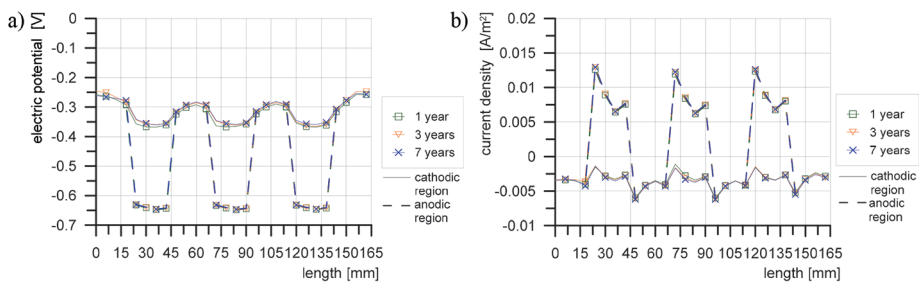


Figure 8. Average distribution of: a) electric potential, b) current density over the reinforcement length for the specimen type 1B

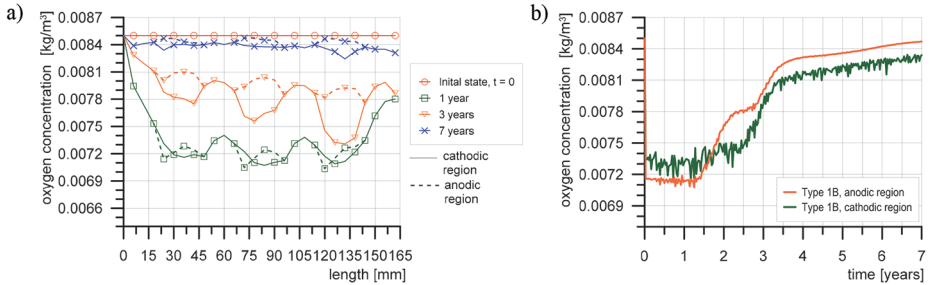


Figure 9. The distribution of average oxygen concentration for the specimen type 1B: a) over the bar length, b) in the the time (length position = 24 mm)

From Figure 9a can be seen that the anodic and cathodic regions of the same bar cross sections exhibit a different rate of oxygen concentration change. This is clearly shown in Figure 9b where the average cathode and anode oxygen concentration is plotted as a function of time for 1B case, in the cross-section of the anode-cathode transition zone at 24 mm distance from the pull-out surface of the specimen. The anodic region shows a higher consumption of oxygen at the beginning of the corrosion process. Due to the accumulation of the corrosion products in this area which caused damage, the effect of cracking on oxygen distribution is faster compared to the cathodic regions. These areas (cathode) are further away from the cracked concrete elements and therefore the increased ingress of oxygen through the cracks is being manifested more slowly.

To demonstrate the influence of corrosion products transport through cracks on bond resistance, the reinforcement bar is pulled out from the concrete specimens (type 1B) at $t=0$ (reference), 1, 2, 3, 4, 5 and 7 years, respectively. The predicted and experimentally measured (average) pull-out capacities and average crack widths are shown in Figure 10 as a function average corrosion penetration. In spite of high complexity of the problem, it can be seen that for both specimen types the numerical prediction, for the case where the transport of corrosion products is accounted for, exhibits nice agreement with the experimental data.

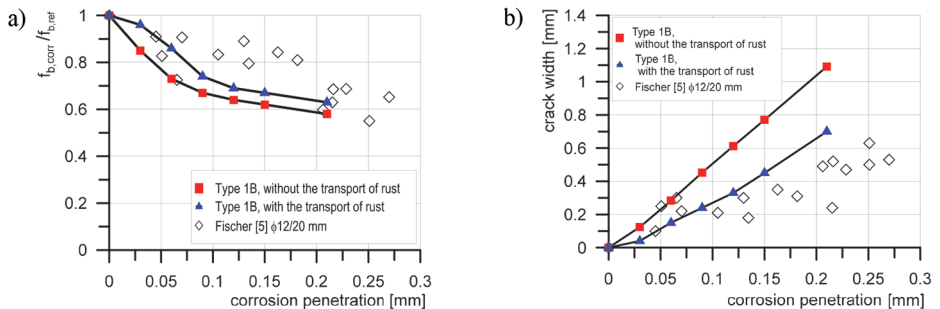


Figure 10. Predicted and measured results for specimen 1B: a) The relative pull-out capacity as a function of the average corrosion penetration, b) average crack width as a function of the average corrosion penetration

4. Conclusions

The coupled 3D CHTM model for analysis of non-mechanical and mechanical processes related to the corrosion of steel reinforcement in concrete is briefly discussed. The application of the model is demonstrated through the example of corroded steel reinforcement that is pulled out from the concrete beam-end specimen. For the assumed environmental conditions and material properties it is shown that the predicted corrosion induced crack pattern depends on the geometry (bar diameter and concrete cover), position of anode and cathode and on the transport of corrosion products through cracks. As the results of numerical analysis show, corrosion induced damage significantly reduces the pull-out capacity. The predicted and experimentally measured pull-out capacity show very good agreement. Moreover, it is shown that during the active corrosion phase the corrosion rate depends on corrosion induced damage and transport of corrosion products through cracks.

References

- [1] Tutti K 1993 Corrosion of steel in concrete Technical report Stockholm.
- [2] Oldham KB, Myland JC and Bond M 2012 Electrochemical Science and Technology -Fundamentals and Applications John Wiley & Sons Ltd.
- [3] Ožbolt J, Balabanić G, Periškić G and Kušter M 2010 Modelling the effect of damage on transport processes in concrete *Constr. Build. Mater.* 24 (9) 1638–1648.
- [4] Ožbolt J, Balabanić G and Kušter M 2011 3D Numerical modelling of steel corrosion in concrete structures, *Corrosion Science* 53 4166-4177.
- [5] Ožbolt J, Oršanić F and Balabanić G 2014 Modeling pull-out resistance of corroded reinforcement in concrete: Coupled three-dimensional finite element model *Cement and Concrete Composites* 46 41–55.
- [6] Sola E, Ožbolt J, Balabanić G and Mir ZM 2019 Experimental and numerical study of accelerated corrosion of steel reinforcement in concrete: Transport of corrosion products *Cement and Concrete Research* 120 119-131.
- [7] Bear J and Bachmat Y 1991 Introduction to modeling of transport phenomena in porous media Boston: Kluwer Academic Publishers.
- [8] Wong HS, Zhao YX, Karimi AR, Buenfeld NR and Jin WL 2010 On the penetration of corrosion products from reinforcing steel into concrete due to chloride-induced corrosion *Corros. Sci.* 2(7) 2469–2480.

- [9] Fischer C, Ožbolt J and Gehlen C 2012 Verbundfestigkeit von korrodierter Bewehrung, in: Dauerhaftigkeitsbemessung von Stahlbetonbauteilen auf Bewehrungskorrosion Teil 2: Dauerhaftigkeitsbemessung Berlin: Beuth (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton 602) 47-88.
- [10] Ožbolt J, Balabanić G and Sola E 2017 Determination of critical anodic and cathodic areas in corrosion processes of steel reinforcement in concrete Materials and Corrosion 68(6).

Procjena parametara i opterećenja iz mjerenja na konstrukcijama i modelima (pozvano predavanje)

Ivica Kožar

Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet

Sažetak

Veza između opterećenja i pomaka tradicionalno predstavlja model ponašanja građevinskih konstrukcija i koristi se u fazi dimenzioniranja. Analiza sigurnosti (izvedenog stanja) pretpostavlja naknadna mjerenja na izvedenom objektu, no direktna mjerenja mnogih parametara nisu moguća pa se koriste tkz., "inverzni modeli". Rad prikazuje neke inverzne modele za određivanje parametara, tj., opterećenja, uz tretiranje greške mjerenja da bi se dobili rezultati prihvatljive pouzdanosti.

Ključne riječi: inverzni model, mjerenja, parametri, opterećenje, greške

Estimation of parameters and loads from measurements on structures and models

Abstract

Relation between load and displacement is traditionally used to model behaviour of structures and is mostly used in the design phase of a structure. Analysis of safety, on the other hand, requires measuring on the finished structure. However, direct measurement of many relevant parameters is not possible and the "inverse model" has to be applied. This work presents some inverse models for estimation of parameters and loads and explains how to deal with errors in measurement to obtain reliable results.

Key words: inverse model, measurements, parameters, loading, error

Uvod

Veza između opterećenja i pomaka tradicionalno predstavlja model ponašanja građevinskih konstrukcija. "Dimenzioniranje" konstrukcije podrazumijeva uporabu modela koji iz poznatoga opterećenja računa pomake i potom unutarnja naprezanja, na temelju čega se procjenjuje zadovoljavaju li dimenzije konstrukcije tražene parametre sigurnosti (koji god da oni jesu). To je takozvani "model prema naprijed" (forward model).

Kada je konstrukcija izvedena zanima nas njezina sigurnost, odnosno koliko ponašanje konstrukcije odstupa od predviđanja iz proračuna. U stvarnosti, geometrija i materijal konstrukcije više ili manje odstupaju od računskih vrijednosti, a upravo je to odstupanje bitno za procjenu sigurnosti konstrukcije. Isto tako, kao opterećenja na konstrukciju u fazi proračuna uzimaju se neka pretpostavljena opterećenja, za koja, zbog linearnosti konstrukcije, možemo reći da osiguravaju željeno ponašanje konstrukcije. U stvarnosti, kod mnogih konstrukcija nikada ne doznamo stvarno opterećenje, primjerice kod konstrukcija opterećenih vjetrom. Ako nas zanima analiza zamora konstrukcije, treba znati opterećenje na nju. No, takvo opterećenje ne možemo mjeriti, pa se moramo poslužiti indirektnim postupkom iz podataka koje možemo mjeriti. Navedene probleme rješavamo određivanjem traženih parametara iz mjerenja, putem takozvanoga "inverznog modela" (inverse model). Pri tome, parametri mogu označavati opterećenje na konstrukciju (jednostavniji problem) ili unutrašnja svojstva konstrukcije, primjerice moment tromosti, uvjete oslanjanja, geometriju (teži problem). Osnovni problem pri formulaciji inverznoga modela njegova je osjetljivost na greške, odnosno, takvi modeli često višestruko pojačavaju greške ulaznih veličina i daju neupotrebljive rezultate.

U radu su predstavljeni primjeri određivanja nepoznatoga opterećenja iz mjerenja parametara konstrukcije (pomaka). Određivanje unutrašnjih parametara konstrukcije (primjerice, krutosti, temperature i sl.) zahtijeva složenije inverzne modele koji se ovdje neće opisati. Primjer inverznoga modela za određivanje statističkih parametara materijala prikazan je u Kožar, Torić Malić, Rukavina (2018). Primjer inverznoga modela za određivanje kompleksnoga toplinskog koeficijenta difuzije iz mjerenja temperature prikazan je u Lozzi-Kožar, Kožar (2017). Općeniti prikaz određivanja parametara kod modela difuzije temeljenih na diskretizaciji konačnim elementima dan je u Kožar, Lozzi-Kožar (2017).

Prethodni se primjeri temelje na mjerenjima na konstrukcijama; mjerenja na modelima podrazumijevaju uspostavljanje relacije između parametara modela i parametara stvarne konstrukcije. Detaljniji opis veze pomaka i opterećenja između modela i konstrukcije kod statičkog i dinamičkog opterećenja može se naći u Kožar (2016) i Kožar, Rukavina, Torić Malić (2017).

Značaj mjerenja na konstrukcijama postajat će sve veći s porastom uporabe jeftinih mjernih senzora povezanih u mrežu koja neprestano dostavlja velike količine podataka mjerenja.

Svi primjeri načinjeni su pomoću programa Wolfram Mathematica (2017).

Rekonstrukcija statičkoga opterećenja

Određivanje podataka prema rezultatima mjerenja podrazumijeva vezu između podataka koji se mjere i rezultata mjerenja, Gibbs (2011). Tu vezu možemo zapisati u matricnoj notaciji

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$$

gdje je \mathbf{H} matrica mjerenja, \mathbf{y} vektor mjerenih podataka i \mathbf{x} vektor (vanjskih) parametara koje želimo odrediti. Navedena jednadžba opisuje linearni problem mjerenja, a matrica \mathbf{H} nije kvadratna nego pravokutna (matrica \mathbf{H} ima dimenziju $m \cdot n$ pri čemu broj parametara “ n ” i broj mjerenja “ m ” obično nisu jednaki). U pravilu, povoljno je imati (značajno) više mjerenja nego parametara koje treba odrediti, to jest $m \gg n$. Linearni problem mjerenja obično se može eksplicitno zapisati; tako formulirani problemi opisuju primjerice problem određivanja nepoznatoga opterećenja iz mjerenja pomaka i slično. Nelinearni problemi zapisuju se implicitnom formulacijom

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{p})$$

i opisuju problem određivanja vektora unutarnjih parametara \mathbf{p} iz nekoga indirektnog mjerenja, primjerice određivanje modula elastičnosti iz mjerenja pomaka (uz poznate sile opterećenja).

Složeni problemi mogu se opisivati i kombinacijom implicitne i eksplicitne formulacije

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{p})$$

U prikazanim jednadžbama dodali smo oznaku \mathbf{p} za vektor unutarnjih parametara. Navedene jednadžbe možemo rješavati nekom od metoda optimizacije, primjerice metodom najmanjih kvadrata (engl. *Least Squares*, *LS*), odnosno određivanjem poopćene inverzne matrice \mathbf{H}^{-g} (Moore–Penroseov inverz). Za nelinearni problem možemo primijeniti neku varijantu metode najmanjih kvadrata, poput Levenberg–Marquardtove metodu. Jasno je da su svojstva matrice \mathbf{H} važna za stabilnost i toč-

nost postupka računanja vektora parametara. Postupak mjerenja ima veliki utjecaj na oblikovanje matrice \mathbf{H} , a samim time i na uspješnost postupka, pa su izbor mjerenih veličina (primjerice, pomaci ili deformacije, pomaci, brzine ili ubrzanja itd.) i način mjerenja važna stavka postupka određivanja parametara.

Kod analize opterećenja konstrukcije iz mjerenja pomaka, matrica \mathbf{H} sastoji se od komponenata matrice fleksibilnosti konstrukcije. Kod mjerenja deformacija, matrica \mathbf{H} uključuje konstante materijala i geometrijska svojstva konstrukcije (momente tromosti poprečnih presjeka).

Navedene jednadžbe predstavljaju idealizirani problem, jer se u stvarnosti pojavljuje i utjecaj pogreške mjerenja (zbog različitih razloga: nepreciznosti mjernoga uređaja, smetnji (šuma) prilikom mjerenja i sl.). Matematički opis obično ima aditivni oblik

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

gdje je \mathbf{w} vektor pogreške mjerenja. Pogreška mjerenja nepoznata je veličina, ali se mogu prihvatiti neke pretpostavke koje olakšavaju određivanje nepoznatih parametara: \mathbf{w} je stohastička varijabla, najčešće normalne (Gaussove) distribucije gustoće vjerojatnosti.

Napomena: Ako se u jednadžbama eksplicitno ne pojavljuje pogreška mjerenja \mathbf{w} , to ne znači da pogreške nema; ona je sadržana u vektoru \mathbf{y} i utječe na rezultate. U takvom slučaju pretpostavljamo da ne znamo ništa u pogreški mjerenja i nemamo znanje kojim tu pogrešku možemo smanjiti.

Poznavanje statističke raspodjele (funkcije raspodjele vjerojatnosti) pogreške mjerenja \mathbf{w} omogućava nam primjenu metode Monte Carlo u simulaciji postupaka mjerenja. Također, omogućava nam primjenu nekog od postupaka za smanjivanje utjecaja šuma mjerenja na rezultate. Često se primjenjuju težinska metoda najmanjih kvadrata (engl. *Weighted Least Squares*, *WLS*), metoda najveće vjerojatnosti ishoda (engl. *Maximum Likelihood*, *ML*) i Bayesova metoda.

Metoda najmanjih kvadrata (LS)

Problem je opisan eksplicitno jednadžbom

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$$

Ako je $m > n$ postupak metode najmanjih kvadrata ekvivalentan je rješavanju sistema s pomoću poopćene inverzne matrice (Moore–Penroseov inverz)

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^g \cdot \mathbf{y}$$

gdje je

$$\mathbf{H}^g = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$$

Ako je $m > n$, $\mathbf{H}^g = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ ima puni rang, pa se može invertirati.

Procjenu greške dobivenih rezultata možemo načiniti ako pretpostavimo da su međusobna mjerenja na modelu neovisna; tada je kovarijanca $\text{Cov}(\mathbf{y})$ jedinična matrica, a kovarijanca parametara postaje

$$\text{Cov}(\mathbf{x}) = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

Na taj način možemo definirati područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara kao

$$\mathbf{x}_{95} = \mathbf{x} \pm 1,96 \cdot \text{diag} \left(\sqrt{(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}} \right)$$

Konstanta 1,96 rezultat je pretpostavke normalne distribucije za grešku mjerenja kod koje onda vrijedi $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-1,96\sigma}^{1,96\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi \approx 0,95$.

Težinska metoda najmanjih kvadrata (WLS)

U našim primjerima linearnih problema određivanja opterećenja i pretpostavke normalne distribucije pogreške mjerenja, metoda najveće vjerojatnosti ishoda (*Maximum Likelihood, ML*) postaje težinska metoda najmanjih kvadrata (*Weighted Least Squares, WLS*). Formulacija težinske metode najmanjih kvadrata dobiva se iz razmatranja utjecaja između pojedinih mjerenja.

Neka je funkcija gustoće vjerojatnosti za svako mjerenje. Složena funkcija gustoće vjerojatnosti za sva mjerenje tada je umnožak vrijednosti za pojedinačna mjerenja:

$$f(\mathbf{y}\mathbf{x}) = f_1(y_1\mathbf{x}) \cdot f_2(y_2\mathbf{x}) \cdots f_m(y_m\mathbf{x})$$

Funkciju $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ možemo odrediti samo kao vrijednost koja je proporcionalna vjerojatnosti da je vrijednost parametara unutar višedimenzionalnoga prostora dimenzije m unutar kojega se nalazi točna vrijednost parametara \mathbf{x} . Tako kažemo da je funkcija najveće vjerojatnosti (engl. *likelihood function*) $L(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Uz pretpostavku normalne distribucije pojedinačnih mjerenja, znamo da vrijedi

$$f_i(y_i, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - (\mathbf{H}\mathbf{x})_i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tada je

$$L(\mathbf{xy}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{i=1}^m \sigma_i}} \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{(y_i - (\mathbf{Hx})_i)^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Vidljivo je da vektor \mathbf{x} dobivamo minimizacijom $\min \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - (\mathbf{Hx})_i)^2}{\sigma_i^2}$.

To je ekvivalentno metodi najmanjih kvadrata za modificiranu matricu $\mathbf{HW} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{W}$. Matrica je težinskih koeficijenata

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix}$$

Varijance mjerenja možemo odrediti na razne načine; najjednostavnije je (iako ne i najispravnije) odrediti ih iz mjerenih podataka

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i, \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \mu)^2$$

pri čemu je srednja vrijednost, a σ je varijanca. Matrica težinskih koeficijenata \mathbf{W} modificira problem i rješenje se dobiva kao i za metodu najmanjih kvadrata samo se umjesto matrice \mathbf{H} upotrijebi matrica \mathbf{HW} .

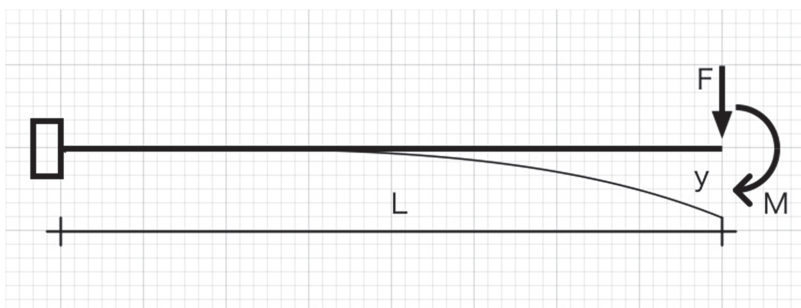
Napomena: Ako se težinska matrica malo drugačije definira, $\mathbf{W} = \text{diag}[1/\sigma^2]$ i $\mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1}$, tada se štedi na operacijama množenja.

Primjeri

Određujemo nepoznatu silu F i moment M na konzoli preko mjerenja pomaka na kraju konzole, slika 1.

Vektori mjerenja (pomaci) i parametara (sile opterećenja) su

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}.$$



Slika 1. Konzola s opterećenjem i pomakom

Da bismo jasnije prikazali metodu, načinit ćemo simulaciju s poznatim opterećenjem F i M . Mjerene progibe zamijenit ćemo izračunatim progibima na koje ćemo nadodati “pogrešku” generiranjem slučajnih vrijednosti prema normalnoj distribuciji. Na taj ćemo način imati jasan uvid u grešku pojedine metode.

Pretpostavljamo opterećenje (neka su sve mjerne jedinice kompatibilne, pa ih možemo izostaviti pri pisanju)

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} F = 10,0 \\ M = 5,0 \end{Bmatrix}$$

Pretpostavljamo parametre konzole $L = 10,0$, $E = 10000$. Pretpostavljamo mjerenje u 3 točke na konzoli $x_m = \{0,0; 1,0; 2,0\}$. Izračun pomaka od sile i momenta na kraju konzole daje pomake $\delta_{izr} = \{0,358333; 0,303750; 0,250667\}$. Za mjerene vrijednosti usvojiti ćemo 3, odnosno 4 znamenke (pretpostavljamo da je to točnost našeg idealnoga mjernog instrumenta). Tako imamo $\delta_{m3} = \{0,358; 0,304; 0,251\}$ i $\delta_{m4} = \{0,3583; 0,3037; 0,2507\}$.

Matrica mjerenja jest

$$\mathbf{H} = \left[\frac{L^3}{3EI} f(x)_i, \frac{L^2}{2EI} m(x)_i \right], i = 1, \dots, m.$$

Indeks “ i ” ide po svim točkama mjerenja a funkcije su

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{2L} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2, \quad m(x) = 1 - \frac{2x}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^2.$$

Napomena: Matrica mjerenja \mathbf{H} ovisi o položaju mjernih točaka na konstrukciji.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,0333333 & 0,005 \\ 0,02835 & 0,00405 \\ 0,0234667 & 0,0032 \end{bmatrix}.$$

Rekonstrukcija metodom najmanjih kvadrata

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 3 točne znamenke

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 10,276 \\ 3,1041 \end{Bmatrix}.$$

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 4 točne znamenke

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 10,019 \\ 4,862 \end{Bmatrix}$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 538,6 \\ 3722 \end{Bmatrix}.$$

Napomena: Varijanca nije ovisna o točnost mjerenja nego samo o matrici mjerenja **H**.

Rekonstrukcija težinskom metodom najmanjih kvadrata

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 3 točne znamenke

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 10,231 \\ 3,4364 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2500,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 40000,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 10000,0 \end{bmatrix}.$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 7,43 \\ 52,1 \end{Bmatrix}.$$

Rekonstruirano je opterećenje iz podataka mjerenja s 4 točne znamenke

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} 10,031 \\ 4,778 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2500,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 10000,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 10000,0 \end{bmatrix}.$$

Područje 95% pouzdanosti dobivenih parametara jest

$$\pm 1,96 \begin{Bmatrix} 7,50 \\ 52,8 \end{Bmatrix}.$$

Vidljivo je da metoda težinskih koeficijenata donosi marginalno povećane točnosti, ali iznimno povećanje pouzdanosti rezultata. Isto tako, povećanje točnosti lagano smanjuje interval pouzdanosti.

Napomena: Matrica \mathbf{H} nije ovisna o točnosti mjerenja, ali matrica mjerenja \mathbf{HW} jest, jer se težinska matrica mijenja ovisno o podacima mjerenja.

Zaključak

Prikazan je postupak određivanja statičkoga opterećenja na konstrukcije iz mjerenja pomaka ako je matrica mjerenja linearna. Najjednostavniji postupak temelji se na metodi najmanjih kvadrata, a rezultira značajnom varijancom određenih parametara (opterećenja). Uvođenje matrice težinskih koeficijenata utemeljene na rezultatima mjerenja poboljšava varijancu (interval pouzdanosti) određenih parametara. Moguće su i druge intervencije u postupak određivanja parametara. Utemeljene na metodi težinskih koeficijenata, razvijene su Bayesova metoda i Kalmanov postupak (filter). Bayesova metoda omogućava uzimanje u obzir deklarirane točnosti instrumenta, pa težinsku matricu ne određujemo iz rezultata mjerenja nego iz poznate (tvornički deklarirane) točnosti instrumenta. Kalmanov postupak iteracijski poboljšava točnost i pouzdanost mjerenih podataka uzimajući u obzir informaciju o točnosti koja se poboljšava sa svakim novim mjerenjem.

Dodatni uvid u kvalitetu modela i mjerenih parametara može se dobiti uvođenjem “rezolucijske matrice podataka” koja pokazuje može li se iz parametara modela rekonstruirati sve podatke mjerenja i “rezolucijske matrice modela” koja pokazuje može li se uz zadanu matricu mjerenja u potpunosti odrediti sve parametre modela.

Literatura

Aster, R.C., Borchers, B., Thurber, C.H.: Parameter Estimation and Inverse Problems, Academic Press, 2013.

Gibbs, B.P.: Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling, John Wiley & Sons, 2011.

Kožar, I.: Relating Structure and Model, in: Computational Methods for Solids and Fluids, Multiscale Analysis, Probability Aspects and Model Reduction (Ed.: A. Ibrahimbegovic), p.161–184, Springer 2016.

Kožar, I., Lozzi-Kožar, D.: Flux determination using finite elements: global vs. local calculation, Tehnički vjesnik 24, (1), 247–252, 2017.

Kožar, I., Rukavina, T., Torić Malić, N.: Similarity of structures based on matrix similarity, Tehnički vjesnik 24, (1), 239–246, 2017.

Kožar, I., Torić Malić, N., Rukavina, T.: Inverse model for pullout determination of steel fibers, *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 7, (2), 197–209, 2018.

Lozzi–Kožar, D., Kožar, I.: Estimation of the eddy thermal conductivity for lake Botonega, *Engineering Review*, Vol. 37, (3), 322–334, 2017.

Wolfram Mathematica, Wolfram research, Inc., Champaign, Illinois (2017).

Eksperimentalna i numerička analiza zidova od pune opeke

Senad Medić, Mustafa Hrasnica

Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet

Sažetak

Na Građevinskom fakultetu u Sarajevu izvršeno je eksperimentalno ispitivanje običnoga i ojačanog zida u stvarnoj veličini (2,3/2,4/0,25 m) pri djelovanju cikličnoga horizontalnog opterećenja u ravnini uz konstantni pritisak. Kod običnih je zidova došlo do otkazivanja nosivosti s pojavom karakterističnih ukriženih pukotina, dok se kod zidova ojačanih armiranobetonskom oblogom javlja prevrtanje krutoga tijela. Numerička analiza provedena je primjenom programa Diana 10.1 na makromodelima pri čemu je zide modelirano kao ortotropan i nelinearan heterogeni materijal koji može otkazati na smicanje, zatezanje ili pritisak.

Ključne riječi: zidovi od pune opeke, ab obloga, eksperimentalno ispitivanje, makro-modeli

Experimental and numerical analysis of solid brick masonry walls

Abstract

An experimental investigation of strengthened and unstrengthened solid brick masonry walls in full scale (2.3/2.4/0.25m) exposed to cyclic horizontal in – plane loading and constant vertical pressure was conducted at the Faculty of Civil Engineering in Sarajevo. The failure mechanism of an unstrengthened wall is typical with diagonal crack pattern, while the walls strengthened with RC jacketing exhibit rocking. Numerical analysis was performed using Diana 10.1 on macro-models where masonry is modeled as orthotropic and nonlinear heterogeneous material which can fail in shear, tension or compression.

Key words: solid brick masonry walls, RC jacketing, experimental testing, macro-models

1. Uvod

U seizmički aktivnim područjima od ključne je važnosti otpornost građevina na djelovanje potresa. S obzirom na stupanj izgrađenosti urbanih sredina, realna je opasnost od oštećenja i rušenja u slučaju jakih potresa koji predstavljaju prirodnu katastrofu. Pri tome su posebno ugrožene postojeće građevine, od kojih je većina građena bez primjene seizmičkih propisa. Bosna i Hercegovina se nalazi u seizmički aktivnom području jugoistočne Evrope, što je i potvrđeno s nekoliko jakih potresa koji su pogodili regiju u drugoj polovini prošloga stoljeća. Mjerodavno vršno ubrzanje tla (engl. *peak ground acceleration*, *PGA*) iznosi 0,10 – 0,20 g u najvećemu dijelu BiH kao i susjednih zemalja, ali se čak i PGA od 0,30 – 0,35 g mora uzeti u obzir na pojedinim mikro-područjima (slika 1.).

Zidane konstrukcije predstavljaju tradicionalni način gradnje u regiji zapadnoga Balkana, kao i u većem dijelu Evrope. Najveći dio postojećih zgrada imaju zidanu nosivu konstrukciju, a također su i mnoge kulturnopovijesne građevine, kojima je ova regija izuzetno bogata, upravo sagrađene kao zidane konstrukcije. Osim stoljetne tradicije zidanih nosivih konstrukcija, treba istaknuti da je veliki broj višekatnih zidanih zgrada izgrađen 50-ih i 60-ih godina prošloga stoljeća, prilikom masovne obnove Evrope nakon II. svjetskog rata. U pravilu je riječ o takozvanim običnim zidanim konstrukcijama (nearmiranim, neojačanim), koje su se pokazale ranjivima u slučaju djelovanja jakih potresa.

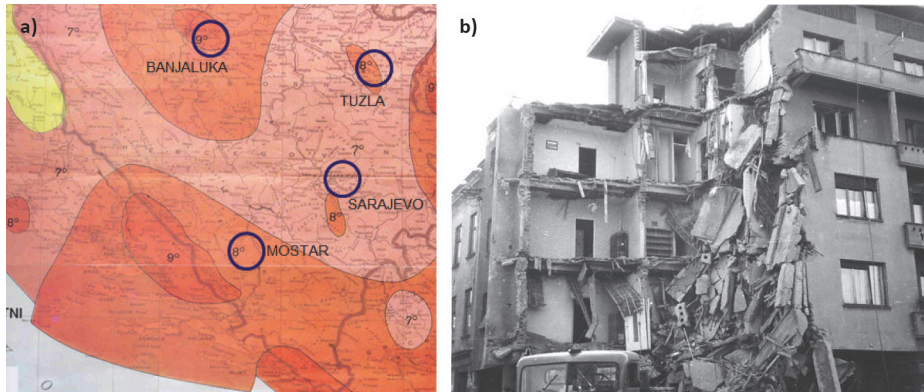
Tradicionalne zidane zgrade imaju relativno masivnu, ali i krutu nosivu konstrukciju kod koje se oštećenja mogu pojaviti već pri umjerenim kretanjima tla. Tipična oštećenja javljaju se u obliku ukriženih dijagonalnih pukotina. Za povoljniji seizmički odgovor neophodno je poboljšanje duktilnosti nosive konstrukcije, što rezultira većom disipacijom energije unesene potresom. Osim niskoga kapaciteta nelinearnoga ponašanja, mnoge se višekatne stambene zgrade odlikuju neadekvatnim rasporedom nosivih zidova u dva međusobno okomita smjera, promatrano u tlocrtu.

Radi poboljšanja svojstava duktilnosti i nosivosti mogu se primijeniti pojačanja zidova od opeke duktilnijim materijalima. Tradicionalno pojačanje zidova vrši se armiranobetonskim omotačem (engl. *jacketing*), ali se mogu primijeniti i noviji materijali, kao karbonske vrpce ili plastične mreže. Međutim, evidentan je nedostatak istraživanja koja će to potvrditi, posebno za odabrani tip zidova karakterističan za veliki broj zgrada u našoj regiji.

Poseban problem predstavlja modeliranje postojećih zgrada zbog nedostatka tehničke dokumentacije i nepoznavanja mehaničkih svojstava ugrađenih materijala. Stoga, seizmička analiza i procjena sigurnosti zidanih objekata predstavlja kompliciran i izazovan zadatak za građevinske inženjere (Hrasnica, 2005).

Na Institutu za materijale i konstrukcije Građevinskoga fakulteta u Sarajevu izvršeno je eksperimentalno ispitivanje običnih zidova u punom mjerilu (2,3/2,4/0,25 m),

tipičnih za nosive sisteme višekatnih zidanih zgrada iza II. svjetskog rata, pri djelovanju cikličnoga horizontalnog opterećenja u ravnini. Radi poboljšanja nosivosti i duktilnosti zidovi su konvencionalno ojačani jednostrano ili dvostrano oblogom od armiranoga betona ili morta. Ispitivanje zidanih konstrukcija predstavlja primarni aspekt verifikacije njihove seizmičke otpornosti, jer se karakteristike ziđa ne mogu jednostavno dobiti homogeniziranjem svojstava morta i opeke (Tomažević, 1999).



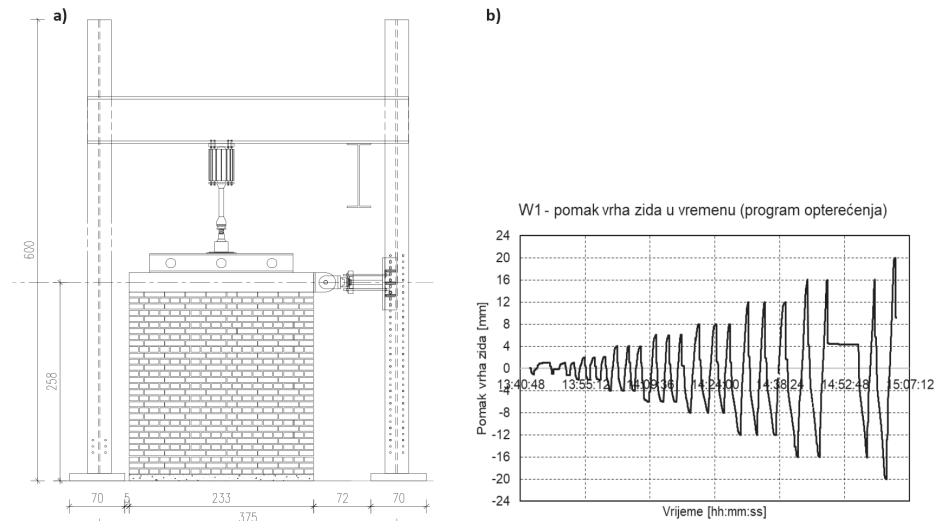
Slika 1. a) Mapa seizmičkoga intenziteta BiH prema MSK-64, b) urušavanje dijela zgrade nakon potresa u Banjoj Luci 1969. godine

2. Eksperimentalna ispitivanja zidova

2.1 Obični zid

Program eksperimentalnih istraživanja ponašanja zidova odnosi se na ispitivanja pod konstantnom vertikalnom silom koja se unosi na slobodnomu gornjem rubu i cikličnom horizontalnom statičkom silom u ravnini zida. Intenzitet vertikalnoga naprezanja približno je u granicama realnoga naprezanja u stanju eksploatacije. Ukupno su ispitana četiri zida, dva neojačana (označena s W1 i W2) i dva ojačana armiranobetonskom oblogom (W3 i W4). Geometrija zida prilagođena je opremi za ispitivanje i odabrana tako da odgovara karakterističnom zidu u izgrađenom objektu tipičnom za period iza II. svjetskog rata. Dimenzije neojačanih zidova (W1 i W2) su $l/h/t = 233/241/25$ cm, a konfiguracija testa za ciklično ispitivanje prikazana je na slici 2.a. Za razliku od neojačanoga, ojačani zid dodatno ima obostranu betonsku oblogu debljine 4–5 cm, armiranu s Q196 i spregnutu sa zidom odgovarajućim sidrima. Odnos visine i duljine zidova približno je 1:1, tako da na osnovi geometrijskih odnosa uzorci ne spadaju ni u vitke niti u duge zidove. Mehanička svojstva komponenta zidane konstrukcije te modul elastičnosti i čvrstoća na pritisak ziđa ispitani su prema odgovarajućim evropskim normama, a dani su u (Medić, 2018).

Zidovi u zgradama obično su izloženi relativno manjim naprezanjima na pritisak. Na osnovi analize tipične zgrade, normalno naprezanje karakteristično za zid iznosi oko $0,4 \text{ N/mm}^2$ (sila jednaka 230 kN), što je oko $1/10$ izmjerene tlačne čvrstoće. Stoga je ova veličina vertikalnoga naprezanja nametnuta u testovima. Ojačani zidovi ispitani su i pod naprezanjem od $0,8 \text{ N/mm}^2$ (sila jednaka 460 kN), jer pri nižemu nije došlo do sloma. Intenzitet vertikalne sile (napona) ograničen je kapacitetom preše Amsler, koji je jednak 500 kN . Tipični program opterećenja prikazan je na slici 2. b. i odnosi se na zid W1.

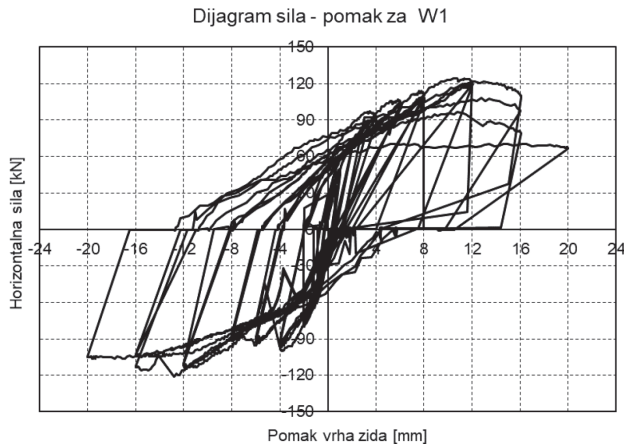


Slika 2. a) Konfiguracija testa za ciklično ispitivanje zidova, b) tipični program opterećenja



Slika 3. a) Zid W1 nakon ispitivanja, b) raspored i širina pukotina

Kao što je i očekivano, obični (neojačani) zid otkazuje na posmik s pojavom karakterističnih ukriženih dijagonalnih pukotina. Na slici 3. prikazan je zid W1 nakon ispitivanja, kao i detaljan raspored i širina pukotina. Pukotine se prvo počinju javljati na sredini zida, a u konačnoj fazi evidentirane su pukotine širine preko 40 mm. Konačna je širina pukotina dvostruko veća od nametnutoga pomaka (max 20 mm, slika 2.b.), što je uzrokovano akumulacijom plastične deformacije (klizanja) uzduž glavne kose pukotine iz ciklusa u ciklus. Histerezna krivulja (dijagram sila–pomak vrha zida) prikazana je na slici 4.



Slika 4. Histereza zabilježena na neojačanom zidu W1: $V = 230 \text{ kN}$ ($\sigma = 0.4 \text{ N/mm}^2$)

Tijekom ispitivanja primijećene su raznovrsne specifičnosti ponašanja zida. Pri malim vertikalnim tlačnim naprezanjima dolazi do otkazivanja klizanjem u spojnicama, pri čemu opeke u pravilu ostaju neoštećene. Pukotina se formira u jednoj horizontalnoj spojnici ili stepeničasto kroz horizontalne i vertikalne spojnice. Povećanjem tlačnoga naprezanja, nakon početnoga klizanja u spojnicama, dolazi do rotacije opeka, pri čemu se u opeci javljaju velika vlačna naprezanja koje dovode do sloma. Iznad određene vrijednosti vertikalnoga opterećenja slom nastaje isključivo zbog prekoračenja vlačne čvrstoće opeke. Za razliku od klizanja pri kojemu je energija dissipirana na trenje, histereza puna i globalno ponašanje duktilno (plastično), vlačni je slom opeke krhak i dolazi do degradacije krutosti karakteristične za modele mehanike oštećenja (engl. *damage*). Na slici 3.b. može se uočiti da su pukotine posljedica klizanja u spojnicama, ali i vlačnoga otkazivanja opeke, tako da je model ponašanja kombinirani plastičnost-oštećenje.

Parametri nosivosti i deformabilnosti, dobiveni kao rezultat ispitivanja, prikazani su u tablici 1. (tabela 1.), a odnose se na karakteristična granična stanja (pojava pukotina, maksimalna nosivost, granična nosivost). Za svako granično stanje izdvojeni su karakterističan pomak, horizontalna sila, sekantna krutost (odnos sile i pomaka) i relativni pomak (rotacija). Također, navedena je početna elastična krutost.

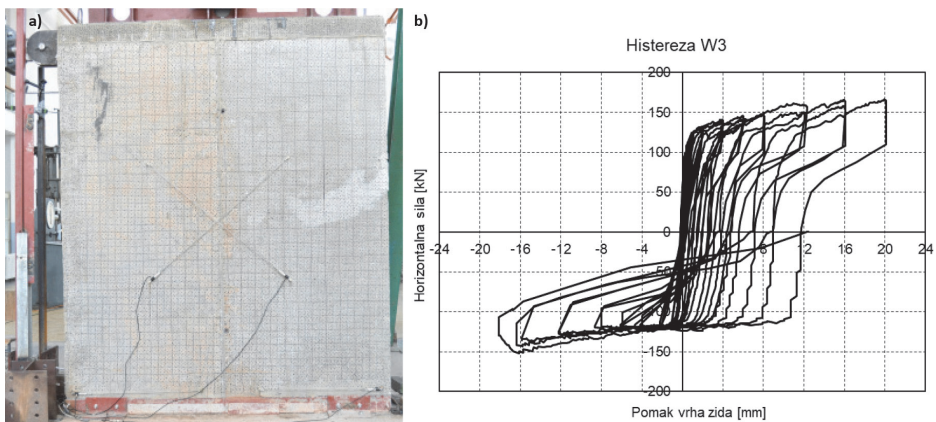
Tablica 1. Parametri nosivosti i deformabilnosti zida W1

Oznaka zida	Pojava pukotina				Maksimalna nosivost			Granična nosivost		
	$K_{e,i}$	H_{cr}	d_{cr}	K_{cr}	H_{max}	d_{Hmax}	K_{Hmax}	H_{dmax}	d_{max}	K_{dmax}
	[kN/mm]	[kN]	[mm]	[kN/mm]	[kN]	[mm]	[kN/mm]	[kN]	[mm]	[kN/mm]
W1	116.3	56	0.9	62.2	120	12	10	105	20	5.25
Pomaci d_{cr} , d_{Hmax} i d_{dmax} odgovaraju relativnim pomacima $\theta_{cr} = 0.4\%$, $\theta_{Hmax} = 4.8\%$ i $\theta_{dmax} = 8.0\%$										

2.2. Ojačani zid

Radi usporedbe rezultata ojačani zidovi W3 i W4 ispitani su pod istim vertikalnim opterećenjem kao i neojačani zidovi ($\sigma = 0,4 \text{ N/mm}^2$ odnosno $V = 230 \text{ kN}$). Budući da do sloma nije došlo, zidovi su dodatno ispitani pod dvostruko većim opterećenjem ($\sigma = 0,8 \text{ N/mm}^2$ odnosno $V = 460 \text{ kN}$). Vertikalnu silu većega intenziteta nije bilo moguće nanijeti zbog ograničenja kapaciteta hidraulične preše.

Ojačavanjem zida tip sloma promijenjen je u odnosu na prethodne zidove. Uzorak W3 se ponaša kao kruto tijelo koje rotira oko ruba zida (engl. *rocking*), odnosno diže se iznad temeljne grede (slika 5.a.). Ta se vrsta otkazivanja naziva lomom na savijanje i nastupa kada su prekoračena vlačna naprezanja na spoju s temeljnom gredom. U petama zida nisu primijećene pukotine izazvane tlačnim naprezanjima, a nije uočen ni gubitak spoja između obloge i zida (delaminacija).


Slika 5. a) Ojačani zid W3: a) odizanje zida, b) histerezna petlja za $V = 230 \text{ kN}$ ($\sigma = 0,4 \text{ N/mm}^2$)

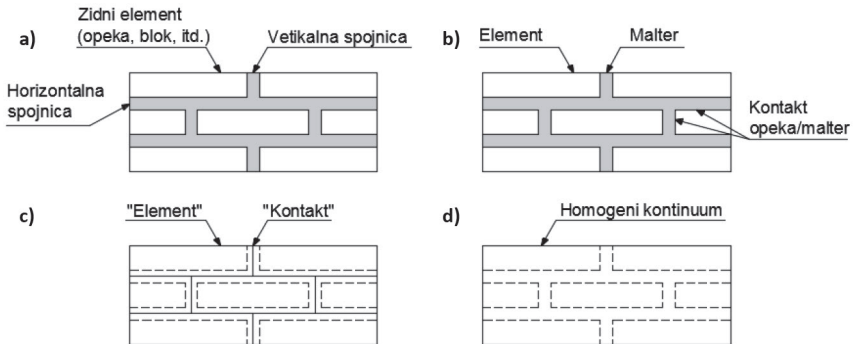
Na slici 5.b. prikazan je dijagram sila–pomak zida W3. Nakon početnoga prirasta sile nastupa smanjenje krutosti i gotovo horizontalan plato „tečenja“ gdje se horizontalna sila blago povećava. Međutim, nelinearni odgovor nije posljedica degradacije materijala s pojavom pukotina, već smanjenja pritisnute zone na spoju zida i temelja (tzv. dekompresija). Histereza ima oblik S, karakterističan za otkazivanje uzroko-

vano savijanjem. Zid ima veliku duktilnost, ali je površina obuhvaćena histerezom odnosno disipacija unešene energije mala. Na slici 5.b. može se uočiti nesimetrija histereze uzrokovana deformacijom pristroja, kao i proklizavanjem na spoju zida i temelja. Rotacija zida kao krutoga tijela može se spriječiti sidrenjem armature u podložnu konstrukciju, što se preporučuje prilikom ojačanja građevina.

3. Numerički modeli

3.1. Metoda konačnih elemenata i razredi modela za zidane konstrukcije

Ovisno o željenoj točnosti ili jednostavnosti, za proračun zidanih konstrukcija metodom konačnih elemenata upotrebljavaju se tri vrste modela: detaljni mikromodel, mezomodel (tzv. pojednostavnjeni mikromodel) i makromodel (slika 6.).



Slika 6. Strategije modeliranja zidanih konstrukcija (Lourenço, 1996): a) uzorak zida, b) detaljni mikromodel, c) mezomodel (pojednostavnjeni mikromodel), d) homogeni makromodel

U mikromodelu opeka i mort prikazani su elementima kontinuuma s odgovarajućim elastičnim svojstvima i kriterijima sloma. Kontakt opeka–mort predstavlja ravninu potencijalne pukotine/klizanja i modeliran je kontaktnim (engl. interface) elementima kojima se može simulirati diskontinuitet u polju pomaka. Diskretizacija modela konačnim elementima uvjetovana je geometrijom pojedinih komponenata, tako da je geometrija zida u cjelini uzeta u obzir, a numerički model sadrži sve načine otkazivanja zidane konstrukcije. Budući da su spojnice vrlo male u odnosu na dimenzije zidnoga elementa, modelu se nameće vrlo rafinirana mreža koja ima izuzetne numeričke zahtjeve u smislu računalskoga vremena i memorije. Mikromodeliranje je česta tehnika proračuna kod manjih konstrukcija ili se pak primjenjuje u izučavanju doprinosa pojedinih komponenata kompozita globalnom ponašanju.

Mezomodel tretira opeku kao i detaljni model, međutim, spojnica mortom i komponenta kontakta homogenizirani su u jedan zajednički kontaktni element nulte deblji-

ne koji povezuje susjedne opeke. Radi zadržavanja izvorne geometrije zida opeke su uvećane za debljinu spojnice. Zid je, dakle, modeliran kao skup blokova povezanih ravninama potencijalnih pukotina na mjestima spojnica. Raspored opeka utječe na diskretizaciju modela, ali element koji predstavlja mort i kontakt nije u stanju opisati Poissonov efekt morta na stanje naprezanja u opeci. Naime, u stvarnosti se fleksibilan mort pod pritiskom istiskuje između opeka i izaziva vlak u dva smjera okomito na djelovanje tlačne sile. Element kontakta uobičajeno je formuliran tako da su posmični i normalni pomak neovisni (engl. *uncoupled*), pa normalni pomak ne izaziva posmičnu trakciju. Stvarno troosno stanje naprezanja u opeci koja je, primjerice, dio zidane prizme izložene čistom tlaku u numeričkomu modelu postaje jednoosno tlačno naprezanje. Zbog toga primjenom pojednostavnjenoga modela nije moguće obuhvatiti sve oblike sloma.

Tehnika makromodeliranja tretira stvarni heterogeni zidni panel kao homogeni (najčešće anizotropni) kontinuum koji može biti diskretiziran grubljom mrežom neovisnom o rasporedu opeka. Takvo je modeliranje prikladno za slučajeve u kojima želimo predvidjeti globalan odgovor realne višekatne zidane konstrukcije ili analizirati utjecaj „globalnih“ parametara zida (čvrstoća na pritisak, geometrija konstrukcije) na odgovor konstrukcije kao cjeline.

Općenito, za korektnu realizaciju mikromodela treba poznavati veliki broj ulaznih podataka koji se najčešće određuju laboratorijskim ispitivanjima ili se pak preuzimaju iz dostupne literature. Nažalost, izbor podataka često je vrlo težak zadatak, zbog velikoga rasipanja eksperimentalnih rezultata te upitne pouzdanosti izvedenih testova. U praksi, pa i u znanstvenom istraživanju, makromodeliranje je najčešći pristup proračunu zidanih konstrukcija, zbog povoljnoga omjera između trajanja proračuna i razine točnosti. Međutim, nedostatak većine makromodela leži u tome da nisu u mogućnosti prikazati diskontinuitete koji se javljaju između blokova ili dijelova zidane konstrukcije.

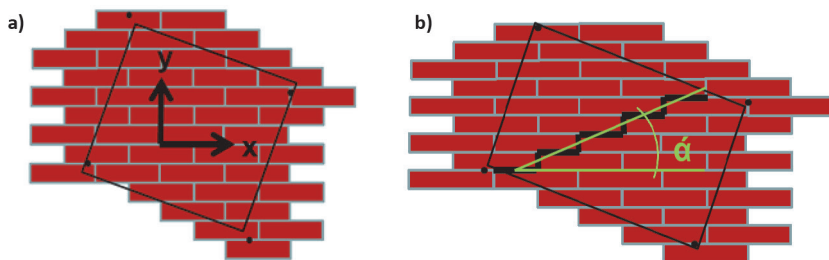
Neovisno o vrsti modela, za metodu konačnih elemenata upotrebljavaju se implicitni solveri koji formiraju globalnu matricu krutosti u svakom koraku uz zadovoljne konstitucijskih jednadžbi, ravnoteže i kinematike. Proračunski problemi vezani za konvergenciju i lošu uvjetovanost matrice krutosti mogu nastupiti ako se pojavi omekšanje materijala. Ako je materijal nestabilan, to jest, ako se u konstitucijskom zakonu javlja omekšanje (engl. *softening*), rezultati proračuna ovise o odabranoj mreži konačnih elemenata, odnosno nisu objektivni. Da bi se ovaj problem eliminirao, u formulaciji MKE uvedena su takozvana ograničenja lokalizacije (engl. *localization limiters*), gdje se pod terminom lokalizacija smatra pojava pukotine odnosno diskontinuitet u polju pomaka. Ograničenja se mogu svrstati u tri skupine (Ibrahimbegović, 2009), a jedna od najčešće primjenjivanih je metoda koju su razvili Hillerborg i Bićanić, u kojoj se objektivnost mreže s obzirom na neelastičnu disipaciju osigurava primjenom modula omekšanja (engl. *softening modulus*) koji ovisi o dimenziji konačnog elementa (engl. *mesh-dependent*).

Općenito, kontaktni modeli u kojima je nelinearnost koncentrirana na odabranim mjestima (primjerice spojnica) numerički su stabilniji od kontinuum modela (Lorenço, 1996).

3.2. Inženjerski model ziđa

Nakon niza potresa izazvanih eksploatacijom zemnoga plina u zoni oko Groningena i oštećenja na zidanim zgradama, DIANA FEA BV i TU Delft zajednički su razvili inženjerski model ziđa (engl. *engineering masonry model*, EM) posvećen isključivo makromodeliranju zidanih konstrukcija (Schreppers, Garofano, Messali, Rots, 2016). Filozofija i parametri modela utemeljeni su na eksperimentima provedenima na Tehničkom sveučilištu u Delftu (TU Delft, 2015). Konstitutivni model EM utemeljen je na *Total Strain Crack* kontinuum modelu (DIANA, 2016) s razmazanim slomom (engl. *smearred failure*) i može se rabiti s elementima membrane (za ravninsko stanje naprezanja) ili elementima ljuske (za prostorne modele). Uporaba modela posebno je preporučena za statičku nelinearnu analizu pri cikličnom opterećenju ili nestacionarnu dinamičku analizu dijelova konstrukcije ili objekata u cjelini. Model EM ima sljedeće karakteristike:

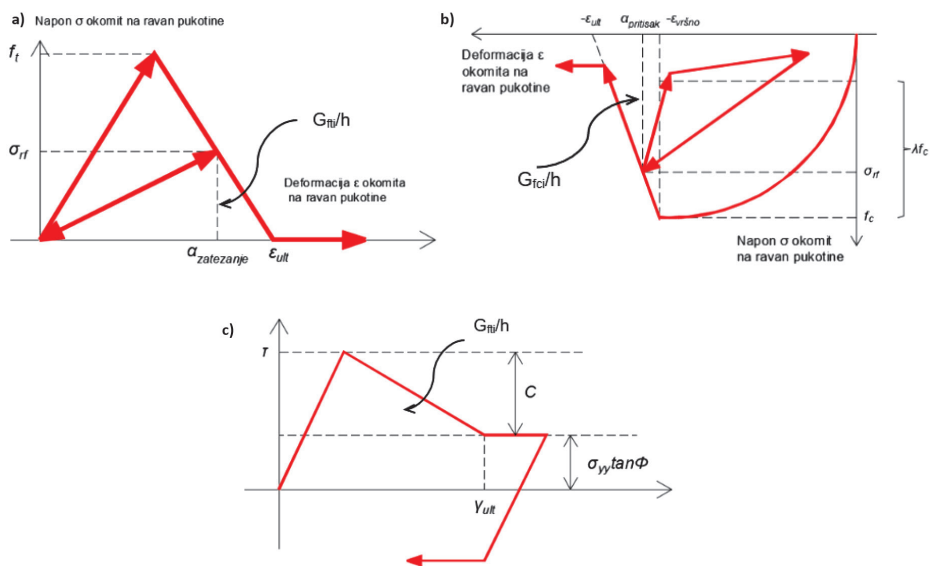
- Anizotropija koja proizilazi iz različite krutosti u pravcu horizontalne i vertikalne spojnice uzeta je u obzir.
- Sadrži odgovarajuće sekantne, elastične i mješovite histerezne krivulje za različite oblike sloma.
- Postoje četiri moguća smjera širenja pukotina (slika 7.): horizontalni, vertikalni i dva dijagonalna najčešće prema geometriji opeke.
- Kada dijagonalne pukotine nisu aktivne ili su isključene, model pretpostavlja da krutost normalnih komponenti u x i y smjeru nije povezana s posmičnom krutošću u ravnini. Dakle, model EM se ponaša kao ortotropni materijal s Poissonovim koeficijentom jednakim nuli.
- Model obuhvata sljedeće mehanizme sloma:
 1. valčni slom u horizontalnoj spojnici,
 2. drobljenje okomito na horizontalnu spojnici,
 3. vlačni slom u vertikalnoj spojnici,
 4. drobljenje okomito na vertikalnu spojnici,
 5. vlačni slom okomito na dijagonalnu stepeničastu pukotinu,
 6. posmični slom – klizanje.



Slika 7. Pravci u kojim je moguća pojava pukotine: a) horizontalno i vertikalno, b) dijagonalno pod odabranim kutem (Schreppers, Garofano, Messali, Rots, 2016)

- Kad se dijagonalna pukotina aktivna i otvara, smanjuju se vlačno naprezanje u ravnini okomitoj na pukotinu i posmično naprezanje u dijagonalnoj ravnini. Kad se pukotina zatvara, pretpostavlja se linearna krutost jednaka početnoj krutosti. Dijagonalne pukotine u dugim zidovima mogu se dobro modelirati primjenom ovoga kriterija, dok u slučaju vitkih zidova to ne mora biti slučaj. Stoga se ovaj kriterij otkazivanja može, ali i ne mora upotrijebiti.
- Posmična naprezanja ograničena su standardnim Coulombovim modelom trenja u kojemu figuriraju kohezija i naprezanja okomita na horizontalnu spojnicu.

Zakon ponašanja materijala u nelinearnom području prikazan je na slici 8.



Slika 8. Inženjerski model ziđa: a) vlak, b) tlak, c) posmik

U slučaju vlaka (a slično za tlak i posmik), konačna deformacija ε_{ult} je ona pri kojoj je pukotina otvorena i nije moguć prijenos naprezanja, te je definirana izrazom

$$\varepsilon_{ult} = \frac{2 G_{ft}}{h f_t}$$

gdje je h karakteristična dimenzija vrpce u kojoj se materijal oštećuje, a vezana je za dimenziju konačnoga elementa. Oštećenje se prema ovom modelu lokalizira u određenoj zoni h , a ne liniji kao u diskretnim modelima. Radi dobivanja objektivnih rezultata koji ne ovise o veličini konačnoga elementa (diskretizaciji), odnosno pod uvjetom da potrošnja energije pri otvaranju pukotine uvijek bude ista, za konstantne h i G_{ft} dobiva se različita konačna deformacija ε_{ult} ($G_{ft} = \int(\sigma \cdot d\varepsilon) \cdot h \rightarrow \varepsilon_{ult}$) pri čemu se za h uzima $h = \sqrt{2A}$ za 2D elemente s linearnom interpolacijom odnosno \sqrt{A} za 2D elemente višega reda (A je površina elementa) (Rots, 1997). Takva se formulacija uklapa u standardnu mehaniku kontinuuma i lako se implementira u standardnu metodu konačnih elemenata (Ožbolt, 2006).

Parametri koji su potrebni za definiranje EM modela navedeni su u tablici 2.

Tablica 2. Parametri EM modela

Elastični parametri		E_x [N/mm ²]	Youngov modul u smjeru x
		E_y [N/mm ²]	Youngov modul u smjeru y
		G_{xy} [N/mm ²]	posmični modul
		ρ [kg/m ³]	gustoća
Engineering Masonry Model	Pukotine	f_{tx} [N/mm ²]	vlačna čvrstoća u smjeru x
		f_{ty} [N/mm ²]	vlačna čvrstoća u smjeru y
		G_{ft} [N/mm]	energija sloma pri vlaku
		HEADTP	vrsta sloma u vertikalnoj spojnici
		h [mm]	karakteristična dimenzija konačnoga elementa
	Smicanje	c [N/mm ²]	kohezija
		φ [°]	kut unutarnjeg trenja
		G_{fs} [N/mm]	energija sloma pri smicanju
	Drobljenje	f_c [N/mm ²]	tlačna čvrstoća
		n [/]	faktor koji definira graničnu deformaciju
		G_c [N/mm]	energija sloma pri tlaku
		λ [/]	faktor koji definira karakter rasterećenja

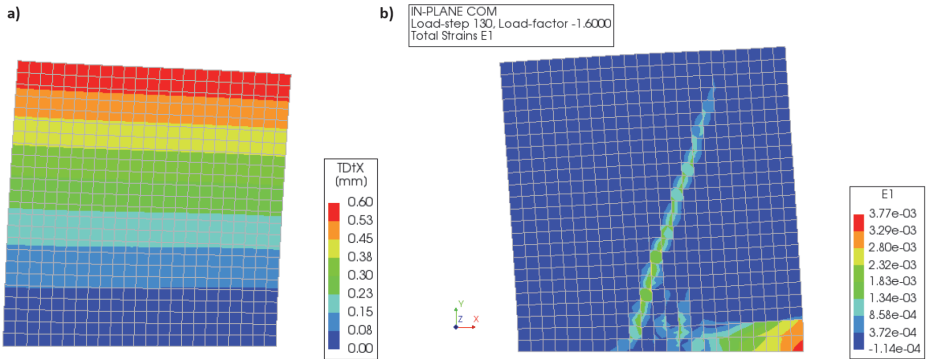
3.3. Makro – model ispitanog zida

Opterećenje i rubni uvjeti za obični (neojačani) zid odabrani su tako da što bolje reproduciraju eksperimentalne uvjete. Prvo se preko armiranobetonskoga serklaža na vrhu zida nanosi vertikalno opterećenje od 230 kN (0,40 N/mm²). Vertikalno opterećenje održava se konstantnim, a horizontalna se sila nanosi pod kontrolom pomaka u gornjemu lijevom kutu. Pomaci su nanoseni ciklično, najčešće s tri ponavljanja, a amplitude pomaka povećavaju se iz serije u seriju. Svi čvorovi na gornjemu rubu kruto su povezani, tako da imaju iste horizontalne pomake i dopuštenu rotaciju. U kontinuum modelima, zidovi su modelirani dvodimenzionalnim elementima (ravninsko stanje napprezanja) s 8 čvorova prosječne dimenzije 0,1 m. Provedena je kvazistatička implicitna nelinearna analiza s Newton–Raphson iteracijskom shemom u koju je uključena kako materijalna tako i geometrijska nelinearnost. Parametri modela prikazani su u tablici 3., a na slici 9. prikazano je polje pomaka i polje glavnih deformacija.

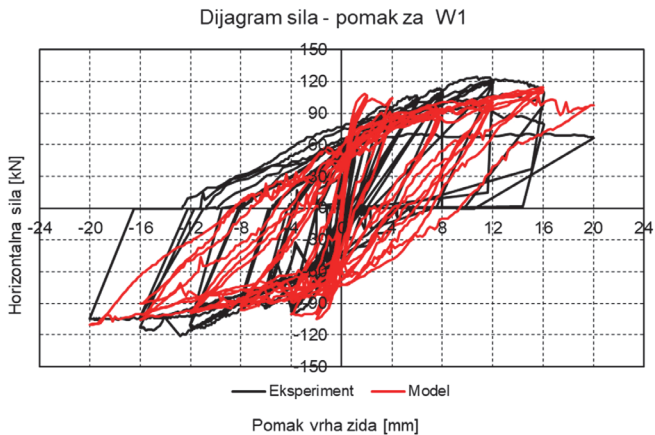
Tablica 3. Odabrani parametri za makromodel običnoga zida

Parametar	Vrijednost
E_x	4e+09 N/m ²
E_y	4e+09 N/m ²
G_{xy}	1,6e+09 N/m ²
ρ	2000 kg/m ³
f_{ty}	90000 N/m ²
G_{ft}	10 N/m
HEADTP	No
h	Rots
c	90000 N/m ²
φ	0,78 rad
G_{fs}	20 N/m
f_c	6,48e+06 N/m ²
n	4
G_c	40000 N/m
λ	1

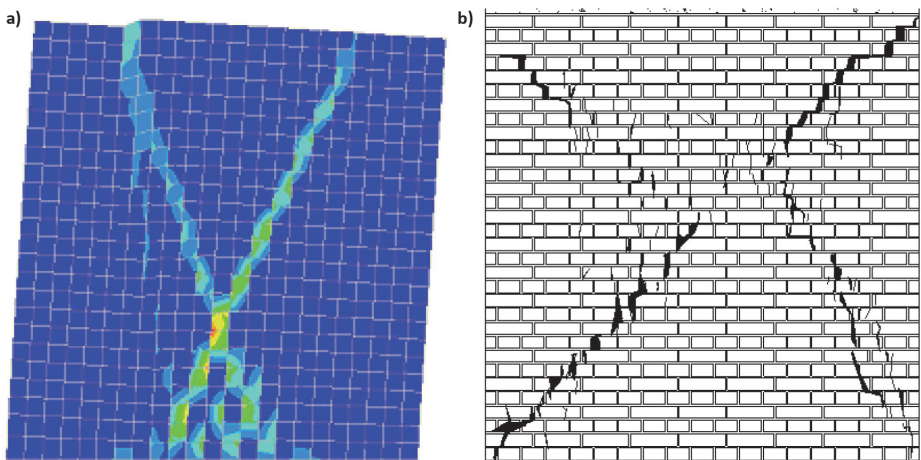
S modelom EM moguće je kao opterećenje nanijeti stvarne protokole opterećenja bez problema s divergencijom pri velikim pomacima, što rezultira točnijim oblikom sloma. Veza sila–pomak na vrhu zida konzistentna je s rezultatima testova, odnosno dobiva se relevantna disipacija energije (slika 10.). Međutim, raspored pukotina je



Slika 9. a) Horizontalni pomaci (korak 150), b) glavna deformacija E1 (korak 130)



Slika 10. Usporedba rezultata numeričkoga makromodela i eksperimenta za W1



Slika 11. Usporedba rezultata numeričkoga modela i eksperimenta: a) akumulirana posmična deformacija, b) oblik sloma zida W1

„razmazan“ na određenu širinu (što ovisi o diskretizaciji) ili je difuzan i geometrijski nije točan u usporedbi s eksperimentom (slika 11.). Eksperimentalno se pukotina lokalizira dijagonalno, dok je numerički dobivena kosa pukotina koja ne spaja kuteve zida (slika 11.).

Na ojačanim zidovima nije došlo do otkazivanja nosivosti, nego se zid zaokreće kao kruto tijelo (engl. *rocking*). Problem je lako numerički modelirati primjenom linear-elastičnoga modela za žiđe i Mohr–Coulombovoga kontakta na spoju zida i obloge (engl. *interface opening mode – gapping*).

4. Zaključak

Poteškoće u modeliranju zidanih konstrukcija uzrokovane su kompozitnom prirodom žiđa koje se sastoji od elemenata (opeka) te horizontalnih i vertikalnih spojnica ispunjenih mortom. Mehanička svojstva žiđa ovise o karakteristikama komponenta, ali i o načinu izgradnje. U stvari, tehnika zidanja (paralelnost stranica, zapunjenost spojnica mortom itd.) može imati presudan učinak na svojstva žiđa, što dodatno utječe na nepouzdanost i varijabilnost parametara žiđa. Samo se u nelinearnoj analizi može pratiti ponašanje zidane konstrukcije koja prolazi kroz više stadija: elastičnu fazu, pojavu pukotina i drobljenje te globalni slom. Jednostavniji konstitucijski modeli lakši su za primjenu, ali daju slabiji uvid u ponašanje konstrukcije. S druge strane, uporaba složenijih modela pretpostavlja detaljno poznavanje ponašanja materijala, značajan utrošak vremena, a u slučaju primjene u projektantskoj praksi zahtijeva i iznadprosječno obrazovanoga inženjera koji poznaje nelinearne konstitucijske modele i napredne tehnike proračuna. To implicira opsežne programe istraživanja, kako na razinu pojedinih komponenta, tako i na razini konstrukcije, kako bi se dobili ulazni podaci i utvrdila valjanost numeričkih rezultata prema eksperimentalnima.

Tip je sloma za ciklično horizontalno opterećenje na neojačanim zidovima posmičan, s dijagonalno ukriženim pukotinama. Dijagonalne pukotine često prati lokalno drobljenje i prevrtanje. Krivulje histereze su pune, odnosno značajna je disipacija unesene energije.

Na ojačanim je zidovima otkazivanje uvjetovano savijanjem odnosno prevrtanjem zida kao krutoga tijela. U eksperimentima nije registrirano odvajanje obloge od tijela zida. Povećanjem vertikalnoga naprežanja na ojačanim zidovima raste nosivost na horizontalne sile, tako da je uporaba ojačanja opravdana uz vođenje računa o kakvoći spoja obloge i zida.

Nearmirani su zidovi pokazali značajnu duktilnost, znatno veću od predviđene u normama. Kod ojačanih zidova može se očekivati i veća duktilnost za opterećenja do sloma. Prema ovim rezultatima, faktor ponašanja koji se uzima u seizmičkom proračunu može biti značajno veći nego što je dan u Eurokodu 8.

Upotrijebljeni numerički model ziđa dobro reproducira eksperimentalni ciklični odgovor zida u smislu čvrstoće i opisa histereznih ciklusa. Također, model je u stanju predvidjeti post–vršno ponašanje bez problema stabilnosti proračuna pri omekšavanju materijala. Homogenizirani makromodeli imaju sljedeće prednosti u odnosu na druge klase modela: jednostavna mreža i geometrija; kraće vrijeme proračuna i manji zahtjevi za memorijom; točnost pri proračunu većih elemenata konstrukcije ili objekata u cjelini. Kada se upotrebljavaju makromodeli, pretpostavljeno je da su konstrukcija, opterećenje i rubni uvjeti takvi da se mort i opeka ne moraju zasebno diskretizirati, što je ujedno i nedostatak makromodela.

Literatura

Hrasnica M (2005). Seizmička analiza zgrada. Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, BiH

Tomažević M (1999). Earthquake-resistant design of masonry buildings. Imperial College Press, London.

Medić S (2018). Eksperimentalna i numerička analiza zidova od pune opeke izloženih potresu. *Doktorska disertacija*, Građevinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, BiH.

Lourenço PB (1996). Computational Strategies for Masonry Structures. *Ph.D. Thesis*, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, TU Delft, The Netherlands.

Ibrahimbegović A (2009). Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods. Springer Science & Business Media.

Schreppers, Garofano, Messali, Rots (2006). DIANA Validation report for masonry modelling. DIANA FEA BV and TU Delft, The Netherlands.

TU Delft (2015). Preliminary test reports for in-plane tests on masonry walls at TU-Delft. TU Delft, The Netherlands.

DIANA (2016). Diana User's Manual. TNO DIANA BV, Delft, The Netherlands.

Rots JG (1997). Structural Masonry - An Experimental/Numerical Basis for Practical Design Rules. Rotterdam, Balkema.

Ožbolt J (2006). Modeling of Concrete & Fracture Mechanics. Predavanja na doktorskom studiju, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska.

Damage detection in steel fiber reinforced concrete using resonant method

Neira Torić Malić, Natalija Bede, Ivica Kožar

University of Rijeka, Faculty of Civil Engineering

Abstract

Main aim of this work was to experimentally investigate steel fiber distribution in concrete, i.e. fiber segregation and nonuniform distribution, as well as possible internal cracks, with resonant frequency method (RFM). The RFM is based on determination of resonant frequencies of vibration on specimens excited by impact hammer, which is basis for determination of dynamic modulus of elasticity of FRC. Based on the reduction of dynamic modulus of elasticity and change of frequency response curve some conclusions about presence of local damage or defect are made. These conclusions are verified with x-ray scans of FRC prisms.

Ključne riječi: steel fiber reinforced concrete, resonant frequency, impulse excitation method, dynamic modulus of elasticity

Detekcija oštećenja u mikroarmiranom betonu primjenom rezonantne metode

Sažetak

Cilj je rada primjenom metode rezonantne frekvencije (MRF) eksperimentalno proučiti raspored čeličnih vlakana u betonu, odnosno defekte nastale ugradnjom, kao što su segregacija i nehomogena raspodjela vlakana. Istražena je i mogućnost detekcije unutarnjih pukotina. MRF se zasniva na određivanju rezonantnih frekvencija uzoraka pobuđenih na vibracije udarnim čekićem, iz kojih se dalje određuje dinamički modul elastičnosti. Na osnovi redukcije dinamičkog modula elastičnosti i promjene oblika frekvencijske krivulje odgovora doneseni su zaključci o prisutnosti lokalnih oštećenja. Zaključci su potkrijepljeni rendgenskim slikama uzoraka.

Key words: beton armiran čeličnim vlaknima, mikroarmirani beton, rezonantna frekvencija, metoda impulsne pobude, dinamički modul elastičnosti

1. Introduction

Fiber reinforced concrete (FRC) as a high strength concrete is used in structures where superior mechanical properties to that of plain concrete are needed. It shows improved performance in cracking and shrinkage, as well as high ductility and tensile strength. However, there are also some drawbacks related to FRC. One of the major drawback is determination of fiber volume fraction as well as achievement of uniform distribution of fibers in the FRC mixtures. For example, as shown on Fig.1, non-uniform distribution can cause segregation in one side, which has as a consequence weak zone on the other side, with just a few fibers or even none. On the other hand, if fiber content is very high or fibers are too large, during concrete casting they can easily group into fiber balls and form areas only with fibers and air.



Figure 1. Steel fiber segregation in tensile zone of damaged beam

2. Resonant frequency method

In concrete testing non-destructive methods have very important role. The reason is that they are repetitive on the same specimen (structure) and enable application of other testing methods afterwards, because specimen remains undamaged. Over the past years many non-destructive methods developed such as surface hardness method, penetration resistance method, pull-out, brake-off test, pulse-echo, impact-echo method, ultrasonic pulse velocity method, resonant frequency method [1].

Unlike other above mentioned methods, resonant frequency method (RFM), it is not influenced by many factors, i.e. it is not dependent on moisture content, texture and surface smoothness, loading rate etc. [1],[2]. It depends only on specimen size and shape, and boundary conditions. Therefore, RFM is very fast and reliable. Also this method is very convenient for concrete structures, while for other materials different methods are used [3]. Hence, resonant frequency method [1] is used to obtain dynamic modulus of elasticity of FRC .

2.1. Specimens geometry and dimensions

All test specimens are prismatic beams with dimensions 100x100x400 mm as shown in Fig.2. Firstly, before testing each specimen, on the specimen surface grid with 15 nodes is drawn, to exactly determine position of accelerometers and impact points. Nodes along longer edge of the beam determine positions for accelerometers (Fig. 2, nodes 1 to 5, and 11 to 15), and nodes placed on the midline are nodes of impact application (Fig. 2, nodes 6 to 10).

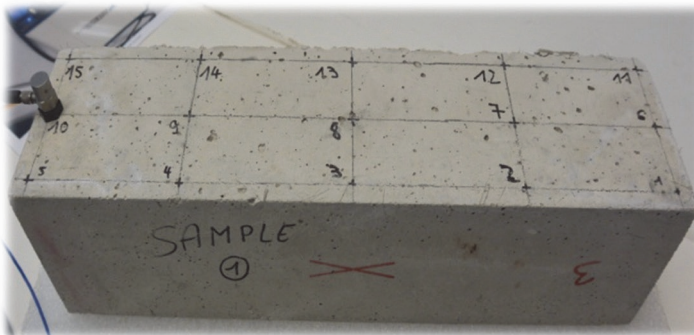


Figure 2. FRC prism specimen

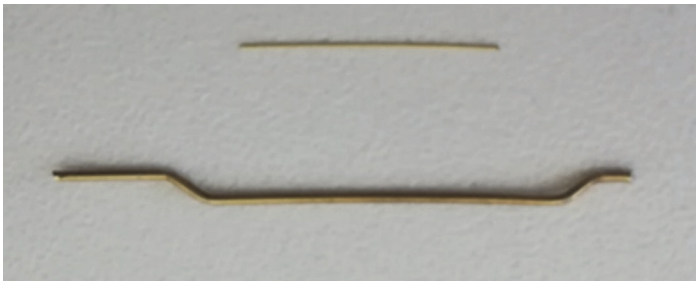


Figure 3. Steel fiber types used in specimens, up: 13 mm straight fibers; down: 30 mm hooked fibers

Specimens are made according to mixtures presented in Table 1. Two types of mixtures are used, marked as CM1 and CM2. Concrete mixtures CM1 and CM2 have the same constituents with the same portions except for the steel fibers. In CM1 are

embedded short steel fibers of length 13 mm and diameter 0.2 mm, while in CM2 long hooked steel fibers of length 30 mm and diameter 0.6 mm, Fig.3. Further, in CM1 fiber content is higher (200 kg/m^3) than in CM2 (only 78 kg/m^3). More details can be found in [4],[3].

Table 1. Concrete mixture for FRC specimens

	CM1	CM2
Material	Content [kg/m^3]	Content [kg/m^3]
Cement	435.2	435.2
Silica fume	108.8	108.8
Water	272	272
Steel fiber	200	78
Quartz sand	1312	1312
Superplasticizer	48	48

Although many specimens were tested, to give clear comparison only result of three tested specimens are shown: 1. specimen with smaller fibers, homogenous and solid, 2. specimen with smaller fibers, homogenous with crack and 3. specimen with larger fibers, homogenous and solid. They are named as given in Table 2. and shown in Fig.6 and Fig.7.

Table 2. Specimens label

Mixture label	CM1	CM2
Specimen label	3A	SK-2
	3C	

2.2. Test procedure

On the impact hammer different tip can be mounted, i.e. with different mass and stiffness. After preliminary testing it is decided that hard rubber impact tip should be used [4][3]. The test setup consists of impact hammer (noted as 1 in Fig.4), specimen with attached accelerometers (noted as 2 in Fig.4), data acquisition device (noted as 3 in Fig.4) and computer with commercial or own software for data analysis. The specimen is placed on the soft foam of density 39.64 kg/m^3 in such a way to permit free vibration.

The test is performed in the way of impacting the concrete surface with hammer giving impulse (force) loading to the specimen. The head of impact hammer is equipped with a force sensor in order to measure and register impulse loading, Fig.5. Accelerometers are attached to the top surface of the specimen in fixed points in order to measure the output response. Impacts by the hammer are given at exactly determined points, noted with numbers 6 to 10 in Fig.2.

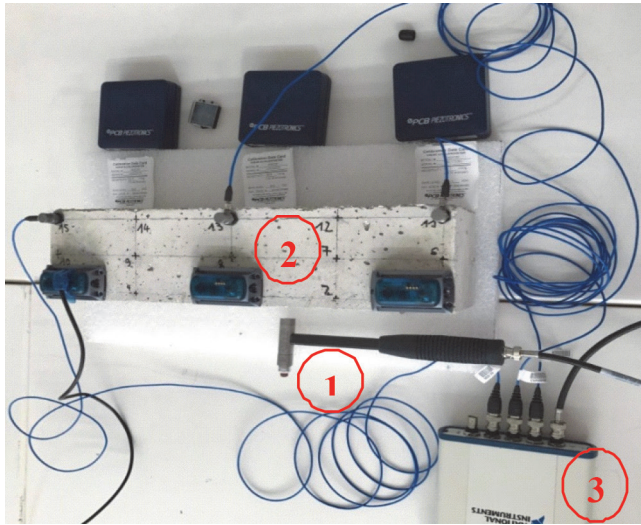


Figure 4. Setup of test for RFM

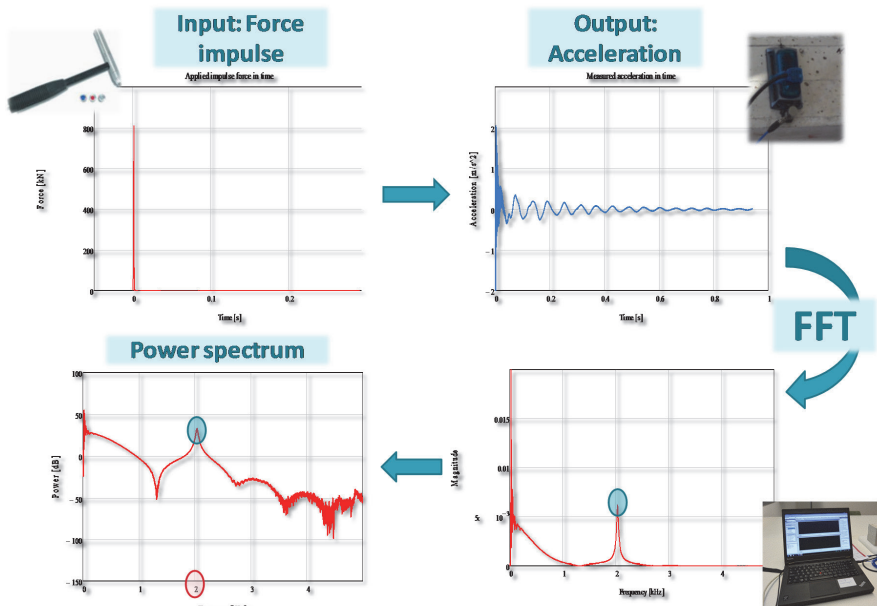


Figure 5. RFM test procedure scheme

Dynamic response in time in the form of acceleration is measured. From time domain, response is transformed into frequency domain with use of fast Fourier transform. Resonant frequency is manifested as a resonant peak in frequency response curve, Fig.5. Based on the theoretical relations between them, modulus of elasticity

is obtained from fundamental frequency [1]. Dynamic modulus of elasticity is calculated from resonant frequency of specimen before and after damage occurs. Based on the variation of dynamic modulus of elasticity and frequency response curve shape presence of local damage or defect can be determined [5].

3. Test results

In Fig. 6-8 frequency response curves together with X-ray scans and photos of specimens are given. X-ray scans are used to verify obtained results and given conclusions, since they give real insight into fiber distribution in each specimen. More about X-ray scans of specimens can be found in [6],[7].

3.1. Dynamic modulus of elasticity

Once the fundamental resonant frequency is determined from frequency response curves, Fig.6 and Fig.7, and knowing specimen dimensions and density, dynamic modulus of elasticity can be easily calculated by using the equations prescribed in standards [8] and [9][8]. Values of calculated dynamic modulus are summarised in Table 3.

Table 3.Dynamic modulus of elasticity

Specimen	fr [kHz]	Ed [GPa] ASTM C215	Ed [GPa] EN 14146
3A	1.14	27.07	28.96
3C	1.6	27.66	29.04
SK-2	1.6	19.42	20.25

3.2. Result discussion

First, in Fig. 6 specimens 3A and 3C are shown. Note that main difference is that 3C is solid and 3A is cracked. Further, 3C is tested with hard impact hammer tip and 3A with soft one. It can be noted that in damaged specimen 3A resonant frequency is lower than in solid specimen 3C, and consequently dynamic modulus is lower, Table 3. Further, softer tip causes more small peaks in frequency response curve which indicates presence of smaller voids filled with air.

Secondly, in Fig. 7 frequency response curves for specimens 3C (smaller fibers, larger content) and SK-2 (larger fibers, lower content) are given. Note that here both specimens are homogenous and solid. As expected, they have the same resonant frequency, Fig. 7, but because of different density, dynamic modulus of elasticity differs. Namely, specimen with smaller fibers has higher density than specimen with large ones, because smaller fibers are better distributed in concrete, which does

not contains any air voids, and consequently is less porous. Thus, specimen with smaller fiber has higher elasticity modulus (29.4 GPa) than specimen with larger fibers (20.25 GPa), although as mentioned before resonant frequency is the same for both, Table 3.

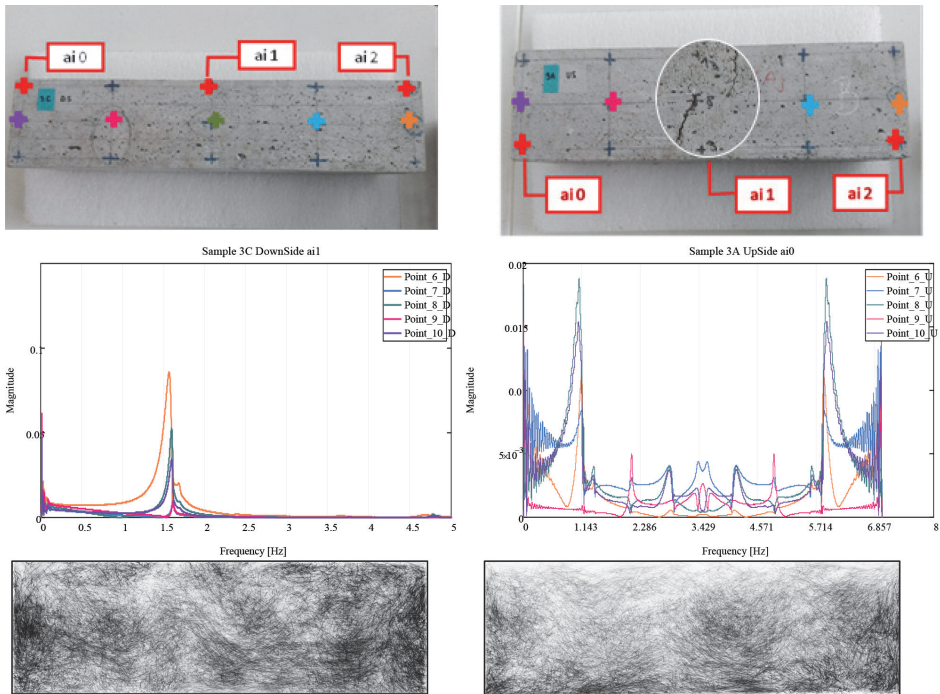


Figure 6. Frequency response and X-ray scan: comparison of specimens 3C (left) and 3A (right)

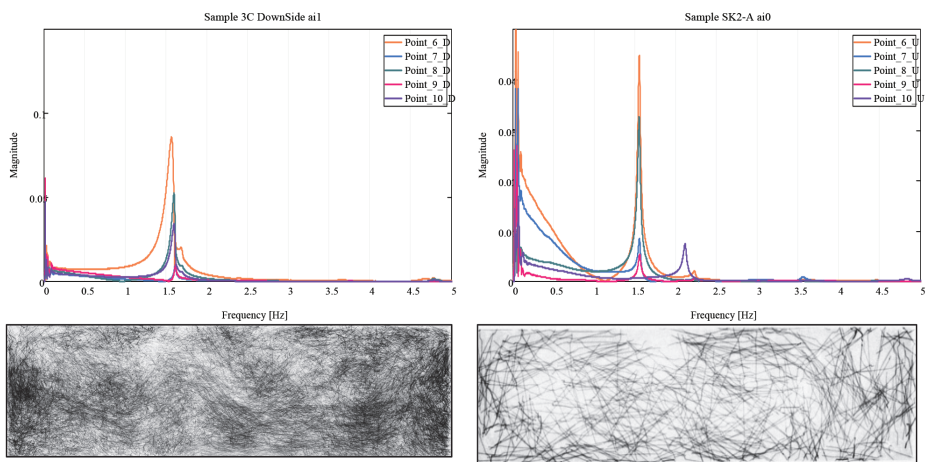


Figure 7. Frequency response and X-ray scan comparison of specimens 3C (left) and SK-2 (right)

4. Conclusion

In this work resonant frequency method is used for detection of damage and casting defects in FRC specimens. Dynamic response is measured as acceleration-time curve. Resonant frequency is obtained as resonant peak in frequency response curve. Dynamic modulus of elasticity is calculated from resonant frequency of specimen before and after damage occurred. Based on the reduction of dynamic modulus of elasticity and change of frequency response curve some conclusions about damage or defect presence are given. With resonant frequency method defects can be detected in such a way that smaller defects (air voids, inhomogeneity) are indicated with change in frequency response curve shape, while larger defects (such as cracks) are indicated with reduction in resonant frequency, and consequently dynamic modulus. Further, it can be concluded that with softer impact hammer tip smaller defects and voids can be detected, while stiffer tip is more convenient for detection of local failures. It is confirmed that resonant frequency method gives accurate values of dynamic modulus. These conclusions are verified by result comparison with x-ray scans of FRC specimens, which give real insight into fiber distribution in each specimen.

Application of the procedure presented in this work is versatile. RFM is used here to assess mechanical properties of FRC concrete and their reduction due to local failure and casting defects. Moreover, RFM can be used to study creep and relaxation of concrete as well as variation in dynamic modulus due to fatigue or cyclic loading. It is applicable for laboratory testing of different concrete mixtures and specimen dimensions as well as in situ measurements for known boundary conditions.

References

- [1] V.M. Malhotra, N.J. Carino, Handbook on nondestructive testing of concrete, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [2] C. Xudong, H. Wanshan, Z. Jikai, Effect of moisture content on compressive and split tensile strength of concrete, *IJEMS* 19(6) (2012) 427-435.
- [3] S. Zulkurnain, H. Meor Othman, Y. Ahmad Shukri, J. Ali, Evaluation of the dynamic modulus of asphalt mixture incorporating reclaimed asphalt pavement, *Collections: IJEMS* 20(5) (2013) 376-384.
- [4] S. Kalinčević, M. Lettich, N. Bede, I. Kožar, Experimental determination of dynamic modulus of elasticity of fiber reinforced concrete, *Collection of papers of Faculty of civil engineering in Rijeka*, 18 (2015) 45-46.
- [5] Y. Lin, M. Sansalone, Detecting flaws in concrete beams and columns using the impact-echo method, *ACI MJ*, 89(4) (1992) 394.

- [6] N. TorićMalić, N. Bede, I. Kožar, Proc. International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESEN 2017), 04-08 October, 2017 Antalya-Turkey
- [7] S. Kalinčević, Master Thesis, Determination of homogeneity of steel fibres in concrete specimens using computational tomography, Faculty of Civil Engineering in Rijeka, Croatia, 2016.
- [8] ASTM C125 Standard Test Method forFundamental Transverse, Longitudinal, andTorsional Resonant Frequencies of ConcreteSpecimens, 2002.
- [9] EN 14146. Natural stone test methods- Determination of the dynamic modulus ofelasticity (by measuring the fundamentalresonance frequency), 2004.

Effect of dynamic loading on concrete properties

Natalija Bede, Joško Ožbolt

Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka

Abstract

Concrete is very strain rate sensitive material, especially in tension. In this work the effect of dynamic loading on concrete properties in terms of rate dependent failure mode, resistance, tensile strength and fracture energy will be presented. Through own experiments and numerical modeling of L-specimen it is shown that inertia effects are responsible for progressive increase of resistance and rate dependent failure mode. Numerical results and their comparison with experiments show that the true fracture energy and tensile strength increases approximately linear in semi-log scale with strain rate and that approximately follow rate dependent constitutive law used in the computation.

Key words: concrete, dynamic loading, L-specimen, experiments, numerical modeling, tensile strength, fracture energy, failure patterns

Utjecaj dinamičkog opterećenja na svojstva betona

Sažetak

Beton je materijal iznimno osjetljiv na brzinu deformacije, posebice kada je izložen vlaku. U ovom radu će se prikazati utjecaj dinamičkog opterećenja na svojstva betona ovisnih o brzini kao što su oblik sloma, nosivost, vlačna čvrstoća i energija loma. Primjenom vlastitih eksperimenata i numeričkog modeliranja betonskog uzorka L-oblika pokazano je da su za progresivni rast nosivosti i način sloma uzorka odgovorni inercijalni efekti. Numerički rezultati i njihova usporedba s eksperimentima pokazuju da prava energija loma i prava vlačna čvrstoća s porastom brzine deformacije rastu približno linearno u polu-logaritamskom mjerilu te da slijede konstitutivni zakon ovisan o brzini deformiranja koji je korišten u numeričkoj analizi.

Ključne riječi: beton, dinamičko opterećenje, uzorak L-oblika, eksperimenti, numeričko modeliranje, vlačna čvrstoća, energija loma, oblik sloma

1. Introduction

Concrete is the most widely used construction material in the world due to its numerous advantages such as strength, stiffness, durability, dimensional stability and economic efficiency. Hence, it is important to realize that concrete structures are more often exposed to various types of dynamic loads rather than static loads. The behaviour of concrete structures under dynamic loads is complex due to significant sensitivity of concrete to strain (loading) rate. The rate dependent response of concrete can be explained by three different effects [1]: (1) through the viscous behaviour of the bulk material between the cracks (creep of concrete or viscosity due to the water content), (2) through the rate dependency or rate sensitivity of the growing micro-cracks (influence of inertia at the micro-crack level) and (3) through the influence of inertia effects, which can significantly change the state of stresses and strains of the material. The first effect is important for relatively low loading rates and the last two effects dominate for medium and high loading rates (e.g. dynamic loading). Thus, under high loading rate two different mechanisms influence the structural behavior. First is the strain rate influence on strength, stiffness and ductility, and second, the inertia effects activated, which influence the resistance and failure mode of concrete structure. In numerical modeling, the first two effects can be accounted for by the constitutive law. The third effect should be automatically accounted for through dynamic analysis, where the constitutive law interacts with structural inertia [1-5].

The experimental evidence shows that concrete exhibits the strongest influence of loading rate under tensile load [6]. Since concrete is inherently weak in tension, the response of concrete under tensile loading is key to understanding and using concrete in structural elements. To experimentally study uniaxial tensile behavior of concrete is difficult, therefore, various testing techniques and specimen types, for instance drop hammer test [7], splitting test etc. [8], as well as different measurement methods have been used. These studies usually investigate the differences between tensile strength and fracture energy under static and dynamic loading and suggest some simple relations to predict behaviour of concrete under high loading rates. Principally, experiments show that apparent strength and fracture energy increase with increase of strain (loading) rate and that for strain rates larger than approximately 10/s both increase progressively with increase of strain (loading) rate (Figure 1, DIF is defined as the ratio between dynamic and corresponding quasi-static value). To this end, there is no clear consensus on the reason for this progressive increase of dynamic strength and fracture energy under high loading rates, hence, it is generally argued on the fundamental cause of progressive increase. Due to the complexity arising from the composite nature of the concrete material, behaviour of concrete structures under dynamic loading is very difficult to understand only

from experiments. Hence, in order to overcome the limitations of experimental tests, numerical methods can be helpful.

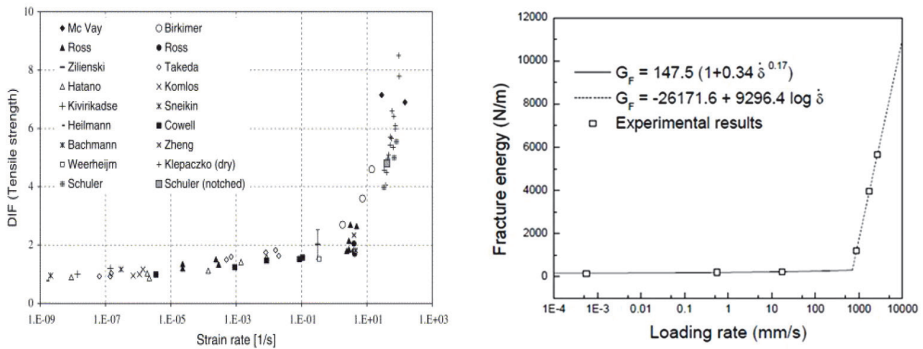


Figure 1. a) Dynamic increase factor (DIF) for tensile strength as a function of strain rate - test data ([9]) and b) rate dependent fracture energy ([7])

On the other hand, numerically the problem can be solved relatively easily if the numerical model is able to capture the dynamic fracture behavior realistically. The main advantage of numerical modeling is that the influence of individual parameters can be studied separately and in more detail. This provides better understanding of the concrete properties, e.g. tensile strength and fracture energy, and influence of inertia on the same. Therefore, numerical analysis has become increasingly important in understanding concrete behaviour under dynamic loading. Many researchers have proposed various numerical models to predict response of concrete under dynamic loading. However, only very limited studies aimed at understanding the complete fracture of concrete and influence of dynamic loading on the failure mode, see for example [3]. Hence, numerical modeling of concrete fracture under dynamic loading is still a challenging topic. Considering results from a large amount of experimental data under different loading (strain) rates, the dynamic increase factor (DIF) of concrete strength and fracture energy is analytically determined and explicitly accounted for as a part of the various different constitutive laws used in standard computational codes. In such way, structural response depends on the used constitutive model. In addition, such material models are capable of giving correct prediction on structural resistance and load carrying capacity, namely apparent strength, while realistic information on change in failure mode and crack pattern of a structure and/or its structural elements cannot be captured. Principally, high loading tends to change failure mode from mode-I to a mix-mode failure (Figure 2) [10]. The main reason are structural inertia forces at the crack tip which prevents mode-I propagation and force crack to split (branch) into two new cracks. Hence, for a model to be realistic, it should be able to correctly account for the

interaction between inertia effect and constitutive law, and it should realistically capture phenomena such as crack branching or change of failure mode due to the increase of loading rate ([3]). Only such FE model is able to predict concrete behaviour under a wide range of loading rates for a variety of different loading rates. Since experimental and numerical fracture studies exist mainly for mode-I fracture, complete study of fracture behavior of concrete will be presented through analysis of L-shaped specimen. L-shaped specimen poses a very interesting problem from the point of view of dynamic fracture of concrete [2,5]. Both static and dynamic experimental and numerical 3D FE analysis will be shown to identify the influence of loading rate on the rate dependent failure mode and material properties, namely tensile strength and fracture energy. While the idea of influence of loading rate on tensile strength and fracture energy of concrete is not a new one, it requires new understanding. Therefore, in order to enhance understanding of the dynamic fracture of concrete, the question that naturally arises is should the observed dynamic increase factor of tensile strength and fracture energy of concrete be attributed as inherent material property (i.e. it can be attributed to only the strain rate effect) or rather to structural effect due to inertia? Based on the results evaluated from experiment and numerical analysis the main conclusions will be presented.

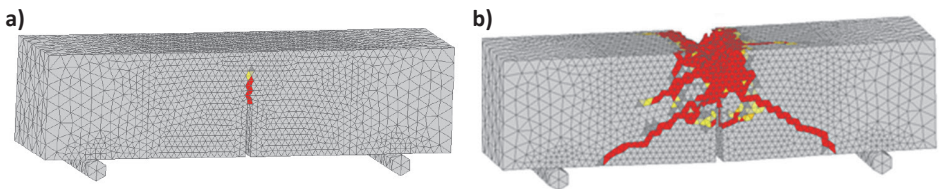


Figure 2. Failure mode a) mode-I (at impact velocity of 2.64 m/s), b) mix-mode (at impact velocity of 50 m/s) [10]

2. L-shaped concrete specimen

The L-shaped specimen is often used as benchmark test for the validation of numerical models for cracking of concrete under static loading [11]. Ožbolt et al. [2] numerically studied the influence of displacement rate on the crack propagation of L-specimen. It is reported that structural inertia forces are responsible for the change in crack propagation, i.e. the crack propagation is changing from horizontal direction (under static loading) to a vertical (under dynamic loading). Recently, comprehensive experimental and numerical study of dynamic fracture of L-shaped concrete specimen was presented and discussed [12]. Hence, in the present paper summary of results is given.

2.1. Experimental study

The dimensions of the tested specimen and test-set up are shown in Figure 3. The specimen was fixed with steel plates rigidly bolted to the supporting plate. The average material properties of tested concrete mixtures are summarized in Table 1. Loading on the specimen was provided by means of machine actuator (loading piston) in upward direction (see Figure 3). The displacement rate measured on the tested specimens ranged from 0.25 mm/s (quasi-static loading) up to 2400 mm/s. A more detailed description of material properties, specimen geometry, test setup and measuring instrumentation are presented in [12].

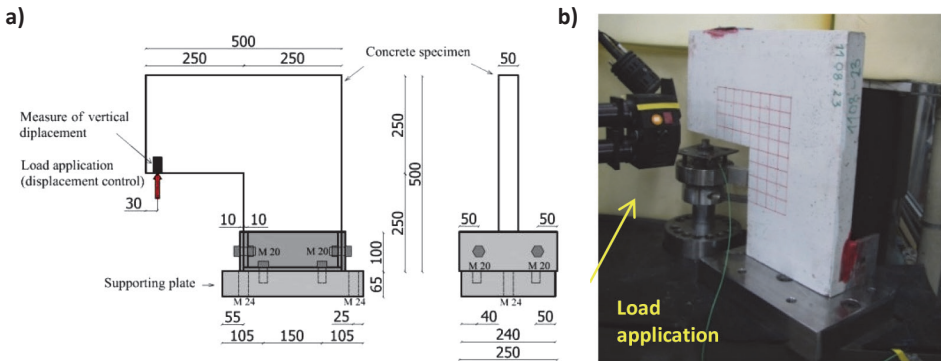


Figure 3. Geometry and test setup of L-specimen

Table 1. Average mechanical properties of experimental concrete mixtures

Batch	Density ρ_c [kg/m ³]	Tensile splitting strength $f_{t,sp}$ [MPa]	Compressive strength f_c [MPa]
1	2205	3.5	51.4
2	2214	3.5	56.4

A total of 12 experimental results obtained from performed tests are analyzed. Figure 4 shows the plot of measured peak load as a function of the displacement rate in semi-logarithmic scale. From experimental results it is clear that peak load is rate dependent. The peak load varies from approximately 4 kN for quasi-static loading to 130 kN for displacement rate of 2400 mm/s. Hence, for relatively low displacement rates the peak load increases proportionally with increase of displacement rate and for higher displacement rates, higher than 100 mm/s, the peak load increases progressively.

In Figure 5 are shown typical crack patterns observed for different displacement rates. It can be noted there is a significant difference in the failure patterns and crack propagation between the low and higher displacement rates. In general, there is

a tendency that with the increase of loading rates the failure mode changes from horizontal to vertical, i.e. for relatively low loading rates there is only one crack that is approximately perpendicular to the loading direction, however, with increase of displacement rate the crack becomes more inclined with respect to the loading direction. Furthermore, in most cases with higher displacement rates crack branching with numerous small cracks were observed. Such a phenomenon was also reported in [3] with the compact tension specimen exposed to high loading rates

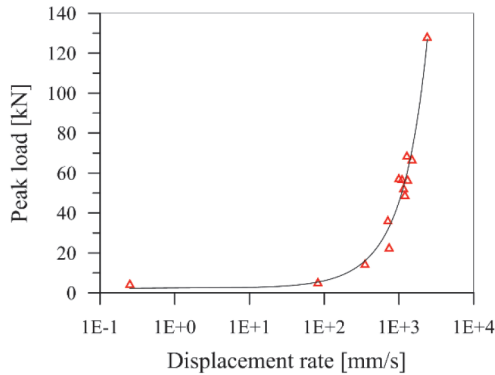


Figure 4. Peak load measured for different displacement rates

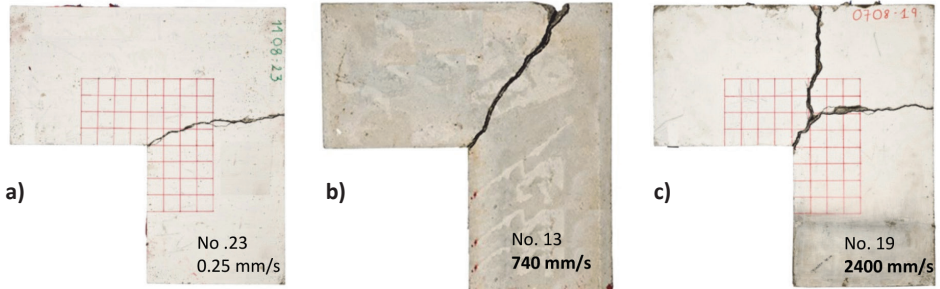


Figure 5. Typical crack patterns for different displacement rates

2.2. Numerical study

In order to overcome limitations of experiments and to gain a better understanding on the structural response above mentioned tests are also simulated numerically. The comparison of numerical results against experiment is performed in terms of rate dependent peak load, tensile strength, fracture energy and the failure mode. The geometry, boundary conditions and loading are same as in the experiments. The overview of concrete properties used in the finite element study are summarized in Table 2. In the present numerical model rate dependency is accounted for

through the rate dependent microplane model for concrete [13], while explicit dynamic analysis is performed to account for the influence of inertia (more details see [14]). In static and dynamic analysis standard four node solid elements are used (see Figure 6). To obtain results objective with respect to the element size, crack band approach is employed as a regularization method (smeared crack approach) [15].

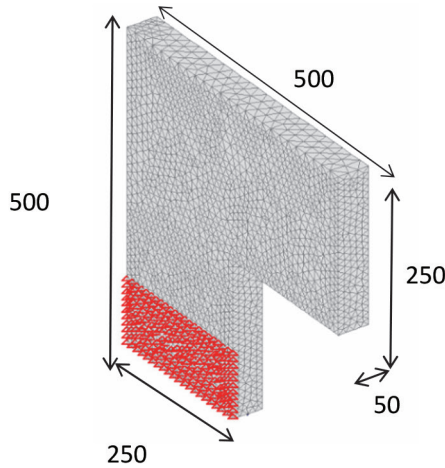


Figure 6. 3D FE model and boundary conditions

Table 2. Overview of the material properties used in numerical analysis

Young's modulus, E_c [GPa]	32.2
Poisson's ratio (assumed value), ν_c	0.18
Mass density, ρ_c [kg/m ³]	2210
Tensile strength, f_t [MPa]	3.12
Compressive strength, f_c [MPa]	46.25
Fracture energy, G_f [J/m ²]	58.56

Figure 7 shows comparison between crack patterns obtained from the FE analysis and experiments for different displacement rates. Note that the crack (dark zone) is indicated in terms of maximum principal strains that are larger than critical strain $\epsilon_{cr} = w_{cr}/h$ that corresponds to critical crack opening. The critical crack opening w_{cr} is assumed to be 0.1 mm and h is the average element size (smeared crack approach). Obviously, results of numerical simulations are consistent with the results obtained from the experiment. For quasi-static and relative low loading rates there is only one crack which is nearly horizontal, perpendicular to the loading direction, howe-

ver, with increase of loading rate the crack becomes more inclined, parallel to the loading direction. As the loading rate increases, the direction of the critical principal tensile stresses change due to the presence of inertia, see [3]. As can be seen from Figure 7, in case with highest loading rate there is also crack branching observed.

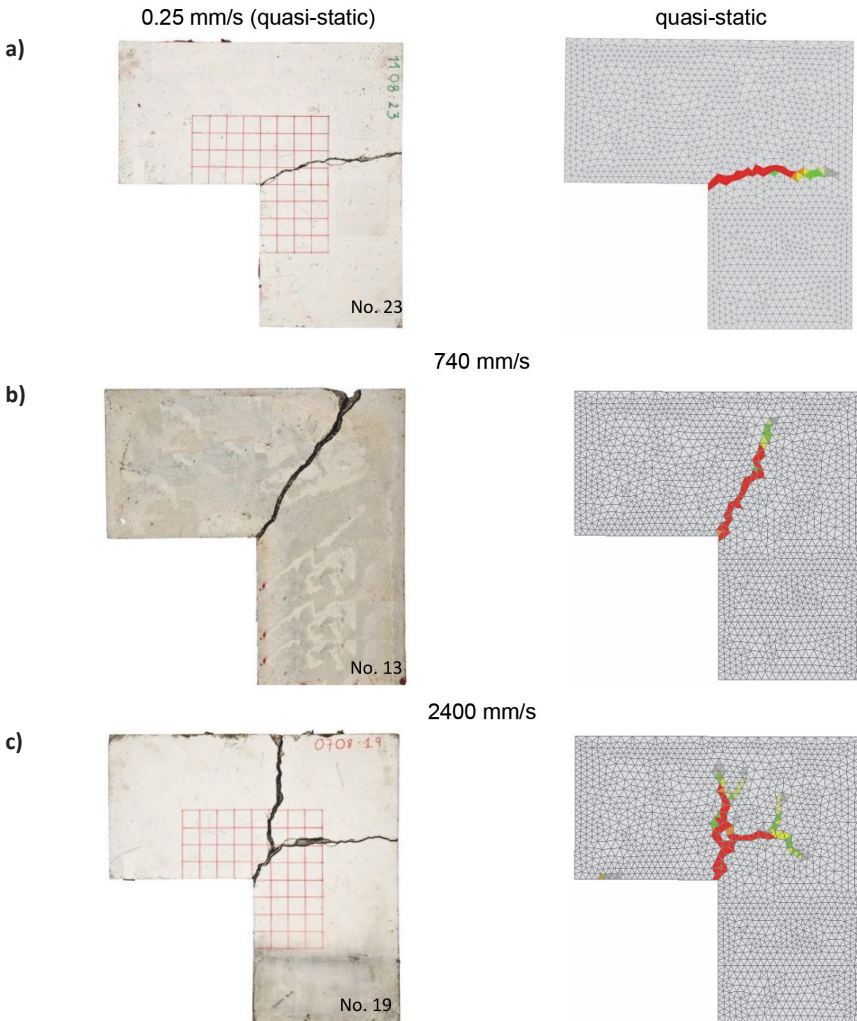


Figure 7. Experimentally (left) and numerically (right) observed crack patterns for different loading rates

Comparison of measured values of peak load with computed one as a function of applied loading (displacement) rate is shown graphically in Figure 8a), in semi-logarithmic plot. The trend in both cases shows that the peak load increases with the increase of displacement rate, as expected. This increase becomes more pronounced when the displacement rate is greater than 100 mm/s while for displacement rates higher of approximately 1000 mm/s this increase is progressive. It is important to note that increase coincides with moment when crack propagation is changing direction from horizontal and tends to become vertical. Finally, progressive increase of peak load is observed when the crack propagates almost vertical.

In order to provide more insight on the structural inertia effects the evaluation of tensile strength is performed by considering the stress-strain response of a single finite element at the onset of cracking. Hence, Figure 8b) shows DIF for peak loads (DIF is defined as the ratio between dynamic and corresponding quasi-static value) measured in the analysis and experiment as a function of strain rate and DIF for tensile strength of concrete. Up to the strain rate of approximately 10/s there is linear increase in DIF for peak load which nicely follow the rate dependent constitutive law for tensile strength. On the contrary, for strain rates of approximately 10/s and higher there is significant increase of peak load. Since the rate dependent constitutive law is approximately linear in semi-logarithmic scale, these suggest that the progressive increase of load is related to inertial effects activated due to cracking of concrete.

Numerically obtained DIF for true tensile strength and fracture energy evaluated from a single finite element as a function of strain rate are shown in Figure 9 (plotted in semi-log scale). As can be seen, there is no progressive increase of the true strength and true fracture energy with increase of strain rate [13]. This was expected since this response is coming out from constitutive law without the contribution of inertia [13].

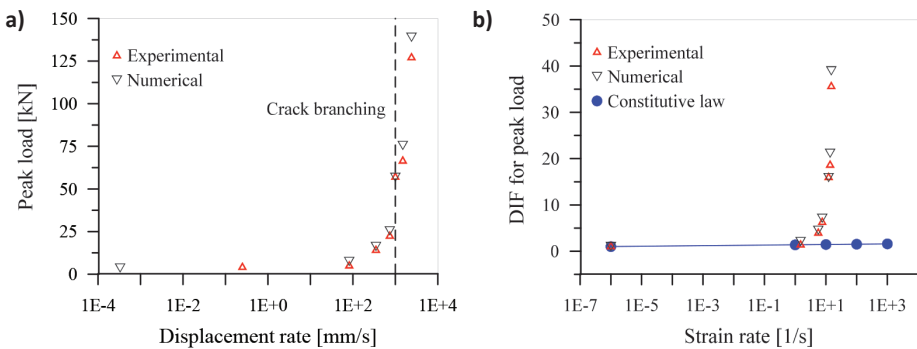


Figure 8. Comparison between numerical and experimental results for a) peak load at different loading rates b) DIF for peak load as a function of strain rate and DIF for tensile strength

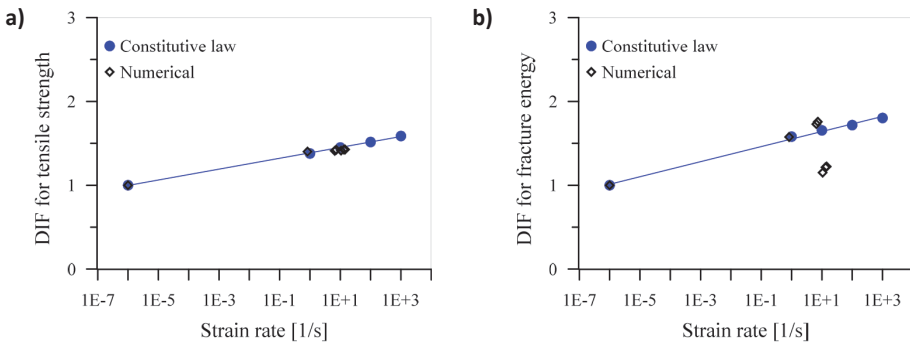


Figure 9. Numerically obtained DIF a) on tensile strength and (b) fracture energy as a function of strain rate

3. Conclusion and recommendations

In the present paper the influence of dynamic loading on the concrete properties through numerical and experimental study of the L-specimen is presented. Both, experiments and numerical analysis show that loading rate significantly influences the failure mode of the L-specimen. Numerically obtained crack patterns correspond very well with the experimentally observed. Hence, it is shown that relatively simple modeling approach based on continuum mechanics, rate dependent microplane model and standard finite elements is capable to realistically replicate complex phenomena related to dynamic fracture of L-specimen. As expected, experiments and numerical analysis show that peak load increases with increase of loading (strain) rate. Moreover, for loading rates higher of approximately 10/s there is progressive increase of load that is controlled mainly by structural inertia. The evolution of numerical results shows that tensile strength and fracture energy exhibit no progressive increase for high loading rates but follows approximately the rate dependent constitutive law used in the computation. Overall, it can be concluded that for higher strain rates, larger than approximately 10/s, inertial effects dominate and cause progressive increase of load, change of failure mode and crack branching. Hence, for correct estimation of the true rate dependent material properties, such as tensile strength and fracture energy, inertia have to be filtered out; otherwise, for higher strain rates the material properties are significantly overestimated.

References

1. Ožbolt J, Sharma A, Reinhardt HW. Dynamic fracture of concrete – compact tension specimen. *Int J Solids Struct* 2011;48(10):1534–43.

2. Ožbolt J, Sharma A. Numerical simulation of dynamic fracture of concrete through uniaxial tension and L-specimen, *Engineering Fracture Mechanics* 2012;85: 88-102
3. Ožbolt J, Bošnjak J, Sola E. Dynamic fracture of concrete compact tension specimen: Experimental and numerical study. *Int J Solids Struct* 2013;50:4270-8.
4. Ožbolt J, Sharma A, Irhan B, Sola E. Tensile behavior of concrete under high loading rates. *Int J Impact Eng* 2014;69:55-68.
5. Ožbolt J, Bede N., Sharma A, Mayer U. Dynamic fracture of concrete L-specimen: Experimental and numerical study. *Engt Frac Mech* 2015;14:27-41.
6. Malvar LJ, Ross CA. Review of strain rate effects for concrete in tension. *ACI Mater J* 1998;95(6):735-9.
7. Zhang XX, Ruiz G, Yu RC, Tarifa M. Fracture behavior of high-strength concrete at a wide range of loading rates. *Int J Impact Engng* 2009;36:1204-9.
8. Weerheijm J, Van Doormaal JCAM. Tensile failure of concrete at high loading rates: new test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests. *Int J Impact Engng* 2007;34(3):609–26.
9. Schuler H, Mayrhofer C, Thoma K. Spall experiments for the measurement of the tensile strength and fracture energy of concrete at high strain rates. *Int J Impact Eng* 2006;32(10):1635–1650.
10. Bede N, Ožbolt J, Sharma A, Irhan B. Dynamic fracture of notched plain concrete beams: 3D finite element study. *Int J Impact Engng* 2015;77:176–88.
11. Winkler B, Hofstetter G, Niederwanger G. Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking. *Proc Inst Mech Engng, Part L. J Mater Des Appl* 2001;215(2):75–86.
12. Bede N. Numerical and experimental study of concrete fracture under dynamic loading. PhD thesis. Croatia: Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka; 2015.
13. Ožbolt J, Li Y, Kožar I. Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint. *International Journal of Solids and Structures* 2001;38:2683–711.
14. Irhan B. High velocity impact and fragmentation of concrete: Numerical simulation. PhD Thesis, University of Stuttgart, 2014.
15. Bažant ZP, Oh BH. Crack band theory for fracture of concrete. *Mater Struct RILEM* 1983;16(3):155–77.

3. GEOTEHNIKA

Numerička analiza mehanizma sloma tla ispod temelja (pozvano predavanje)

Emina Hadžalić, Adnan Ibrahimbegović, Samir Dolarević

Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet

Sažetak

Analiza ponašanja tla u raznim geomehničkim problemima obično se vrši pomoću „multi-surface“ cap konstitucijskih modela kontinuuma koji su sastavljeni od tri plohe, a kojim se definiraju ponašanja tla za razna stanja naprezanja. Takvi „multi-surface“ modeli pokazuju numeričke probleme kada se stanje naprezanja nalazi blizu spoja tih ploha. U radu je ukratko prikazan način prevladavanja tih problema. Potom je prikazana analiza ponašanja tla pomoću diskretnoga rešetkastog modela, kojim se tlo modelira rešetkom koja je sastavljena od Timošenkovih greda. Na numeričkom primjeru izvršena je usporedba rezultata dobivenih opisanim metodama.

Ključne riječi: riječi: kontinuum, cap model, rešetkasti model, Timošenkova greda, mehanizam loma

Numerical analysis of soil fracture mechanism underneath foundations

Abstract

Usually, the analysis of soil behavior in various geomechanical problems is done using the “multi-surface” cap models of the continuum consisting of three surfaces defining the soil behavior for various stress states. Such “multi-surface” models have numerical problems when the stress state is near of the joint of these surfaces. The paper summarizes the way of avoiding such problems. Further, an analysis of the behavior of soil using a discrete beam lattice model is presented, by which the soil is meshed with one-dimensional Timoshenko beam finite elements. The numerical example compared the results obtained with the described methods.

Key words: continuum, cap model, lattice model, Timoshenko beam, fracture mechanism

1. Uvod

Ponašanje tla pod opterećenjem vrlo je kompleksno i ovisi o velikom broju čimbenika koje je teško kvantificirati. Da bi se obuhvatila sva moguća ponašanja tla trebalo bi se koristiti konstitucijskim modelima tla s vrlo velikim brojem parametara za čije bi utvrđivanje trebalo izvoditi posebne testove. Za analizu standardnih geomehaničkih problema pogodni su cap modeli homogenoga kontinuuma kojima se mogu opisati elastoplastična ponašanja tla pri različitim stanjima naprezanja. Stoga je za definiranje uvjeta tečenja potrebno zadati najmanje tri plohe: vlačna otpornost obično se definira takozvanom cut-off ravninom, smicanje Drucker-Pragerovim stošcem ili Mohr-Coulombovom prizmom, te se radi ograničavanja tlačnih naprezanja upotrebljava cap ploha, koja može biti ravnina ili elipsoid, ovisno od vrsti tla. Linije spoja ovih ploha linije su diskontinuiteta prvih derivacija, što dovodi do poteškoća pri proračunu prirasta deformacija i naprezanja kada dođe do tečenja u tom dijelu. Taj se problem može prevladati jednostavnim zaglađivanjem ploha u zoni presjeka, što uzrokuje malu korekciju funkcija tečenja.

Nedostatak je tih modela to što oni ne mogu simulirati ponašanje tla nakon sloma. Prednost diskretnih modela u odnosu na modele kontinuuma u tome je što se odgovor konstrukcije izložene djelovanju opterećenja dobiva na numeričkom modelu u kojemu je domena diskretizirana jednodimenzionalnim konačnim elementima. Adekvatnim izborom tipa konačnoga elementa, diskretnim je modelima moguće dobiti odgovor konstrukcije prije i nakon dostizanja graničnoga opterećenja, kao i predvidjeti odgovarajuće mehanizme sloma. Konačnim elementima s ugrađenim diskontinuitetima moguće je opisati fenomen omekšanja, kao i fenomen lokaliziranoga loma, odnosno formiranja jedne makropukotine koja dovodi do potpunog sloma konstrukcije. Kao što je rečeno, osnovna je prednost diskretnih modela to što je domena diskretizirana jednodimenzionalnim konačnim elementima, pa je konvergenciju rezultata i brzinu proračuna znatno lakše kontrolirati i unaprijediti, nego u slučaju primjene dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih konačnih elemenata. Slom u kohezivnoj vezi znači formiranje pukotine u konstrukciji. Imajući to u vidu, moguće je formirati numerički model konstrukcije kod koje će domena biti diskretizirana mrežom jednodimenzionalnih konačnih elemenata koji simuliraju ponašanje kohezivnih veza. Kako jednodimenzionalni konačni element modelira ponašanje kohezivne veze, izbor tipa konačnoga elementa direktno utječe na kvalitetu makro-odgovora diskretnoga modela.

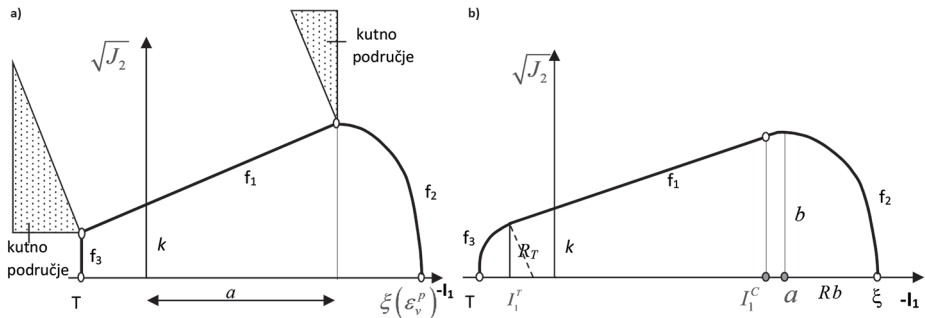
Benkemoun et. al (2010, 2012) za modeliranje kohezivne veze upotrebljavaju konačni element štapa rešetke s ugrađenim diskontinuitetom u uzdužnom smjeru. Taj konačni element može opisati formiranje i širenje pukotine u modu I (aksijalnom modu) koji predstavlja otvaranje pukotine. Taj tip konačnoga elementa upotrijebljen je kao osnova za oblikovanje dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih diskretnih šta-

pnih modela za opis ponašanja i sloma u betonu. Na tim diskretnim modelima autori nisu mogli dobiti odnos 7-10 između jednoosne čvrstoće na tlak i vlak. Da bi se točnije modeliralo ponašanje i slom u konstrukcijama od heterogenih materijala, konačni element osim moda I mora biti u mogućnosti opisati nastajanje i širenje pukotine i u modu II. Mod II (transverzalni mod) predstavlja mod širenja pukotine zbog klizanja.

Nikolić et. al (2015) za modeliranje kohezivne veze upotrebljavaju konačni element Timošenkove grede s ugrađenim diskontinuitetom u uzdužnom i poprečnom smjeru, koji može opisati širenje pukotine u oba moda. Dvodimenzionalni diskretni model utemeljen na tom tipu konačnoga elementa uspješno je primijenjen za opisivanje ponašanja i sloma u stijenama, pri čemu je dobiven odgovarajući odnos između jednoosne tlačne i vlačne čvrstoće.

2. Modificirani cap model

Na slici 1(a) prikazana je funkcija tečenja za tipičan “multi-surface” cap model u ravnini $I_1 - \sqrt{J_2}$, koji je sastavljen od cut-off ravnina, kojom je definirana vlačna otpornost tla, Drucker-Pragerov pravac, kojim je definirana posmična otpornost, i elipsoid kojim se definira otpornost tla kada je dominantno tlačno naprezanje.



Slika 1. a) “Multi-surface” cap model; b) modificirani cap model

Tjeme elipsoida ovisi o ukupnoj zapreminskoj plastičnoj deformaciji, što omogućava širenje elastičnoga područja zbog nabijanja tla. Taj model dosta dobro opisuje ponašanje tla pri analizi standardnih geomehaničkih problema, a parametri modela mogu se utvrditi iz standardnih geomehaničkih pokusa (Dolarević, Ibrahimbegović, 2007). Sasvim je jasno da se, ako se prihvati asocijativni zakon tečenja, javljaju problemi kada se pri proračunu probna naprezanja javu u kutnim područjima. Lako se može pokazati da je u koracima u kojima se stanje naprezanja poklapa s presječnim točkama pojedinih linija matrica krutosti singularna. Postoje mnogi postupci kojima se ovaj problem prevladava, ali nijedan od njih ne osigurava konzistentnost algori-

tma za proračun prirasta naprezanja i algoritma za oblikovanje konstitucijske matrice, što dovodi do spore konvergencije pri rješavanju globalnih jednadžbi ravnoteže Newton-Raphsonovim iteracijskim postupkom.

Taj se problem može prevladati jednostavnom modifikacijom funkcije tečenja. Naime, umjesto da presječna točka Drucker-Pragerova pravca i elipse bude u tjemenu elipse, pomičemo je u točku u kojoj se tangenta na elipsu poklapa s Drucker-Pragerovim pravcem. Sličan se manevar izvodi i na vlačnoj strani, pri čemu se okomiti pravac zamjenjuje kružnicom. To znači da je funkcija tečenja sada potpuno glatka i definirana na sljedeći način:

$$f_1(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad I_1^T \leq I_1 \leq I_1^C \quad (1)$$

$$f_2(I_1, J_2, \xi(\varepsilon_v^p)) = \frac{(I_1 - a)^2}{R^2} + J_2 - b^2 = 0 \quad I_1 \geq I_1^C \quad (2)$$

$$f_3(I_1, J_2) = (I_1 - T + R_T)^2 + J_2 = R_T^2 \quad I_1 \leq I_1^T \quad (3)$$

gdje su:

$$b(\xi) = \frac{k - \alpha\xi}{\alpha R + \sqrt{1 + \alpha^2 R^2}}; \quad a(\xi) = Rb + \xi \quad I_1^C(\xi) = \frac{k}{\alpha} - \frac{b(\xi)}{\alpha\sqrt{1 + \alpha^2 R^2}} \quad J_2^C(\xi) = \frac{b^2(\xi)}{1 + \alpha^2 R^2}$$

$$R_T = \frac{k - \alpha T}{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}} \quad I_1^T = \frac{k}{\alpha} - \frac{R_T}{\alpha\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Primijenjene modifikacije minimalno mijenjaju funkcije tečenja, te je sasvim logično da su rezultati dobiveni modificiranim modelom praktično jednaki onima koji se dobivaju "multi-surface" modelom, pri čemu su izbjegnuti numerički problemi s kutnim područjima, koja su jednostavno uklonjena.

3. Diskretni gredni rešetkasti model

Diskretni gredni rešetkasti model nekog područja dobiva se Delaunayevom triangulacijom područja (Edelsbrunner 2001), koja za rezultat daje područje podijeljeno na trokute. Diskretni se model dobiva tako da se na svakoj stranici svakoga trokuta postavi Timošenkova greda. Vrh svakoga trokuta je osnova za podjelu područja na Voronoijeve ćelije. Po definiciji su Voronoijeve ćelije dijelovi nekog područja koji su

bliži nekoj odabranoj točki nego bilo kojoj drugoj odabranoj točki. U fizičkom smislu struktura materijala prikazana je kao skup Voronoijevih ćelija. Voronoijeve su ćelije zapravo konačni dijelovi materijala koji su međusobno povezani kohezivnim vezama – u ovom slučaju Timošenkovim gredama. U skladu s time, karakteristike svake od Timošenkovih greda koja je okomita na liniju koja spaja dvije ćelije određuju se na temelju karakteristika veze koja se ostvaruje preko te zajedničke linije. To znači da poprečni presjek jedne Timošenkove grede ovisi o duljini linije koja spaja dvije ćelije. Već je pokazano da takav način određivanja geometrijskih karakteristika daje dobre rezultate (Ibrahimbegovic and Delaplace 2003). Bitno je naglasiti da Timošenkova greda predstavlja vezu između dvije ćelije koje pak predstavljaju dijelove tijela koji se analizira. Pukotine u modu I ili modu II javljaju se kada dođe do otkazivanja veze između pojedinih dijelova tijela, što na diskretnom modelu znači do otkazivanja Timošenkovih greda. U nastavku su dane osnovne jednadžbe za neelastičnu Timošenkovu gredu (Hadžalić et al. 2018).

3.1. Kinematske jednadžbe

Standardna Timošenkova greda u ravnini, duljine L^e i poprečnoga presjeka A^e , ima ukupno šest stupnjeva slobode gibanja – rotaciju i dvije translacije u krajnjim čvorovima. Aproximacija pomaka na razini elementa zadana je tako da je uvedena mogućnost diskontinuiteta pomaka u uzdužnom i poprečnom pravcu. U matricnom obliku to izgleda ovako:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} + M\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \{N_1, N_2\} = \left\{1 - \frac{x}{L^e}, \frac{x}{L^e}\right\}, \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_u \\ \alpha_v \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$M(x) = H_{\bar{x}} - N_2(x), \quad H_{\bar{x}} = \begin{cases} 0, & x \leq \bar{x} \\ 1, & x > \bar{x} \end{cases} \quad (6)$$

U skladu s tim deformacije se mogu napisati kao

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} + G\boldsymbol{\alpha} \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -N_1 & 0 & B_2 & -N_2 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \{B_1, B_2\} = \left\{ -\frac{1}{L^e}, \frac{1}{L^e} \right\} \quad (8)$$

$$G(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{cases} -\frac{1}{L^e}, & x \in [0, \bar{x}) \cup (\bar{x}, L^e] \\ -\frac{1}{L^e} + \delta_{\bar{x}}, & x = \bar{x} \end{cases} \quad \delta_{\bar{x}} = \begin{cases} 0, & x \in [0, \bar{x}) \cup (\bar{x}, L^e] \\ \infty, & x = \bar{x} \end{cases} \quad (9)$$

3.2. Jednadžbe ravnoteže

Jednadžbe ravnoteže standardno se izvode iz integralne jednadžbe ravnoteže utemeljene na Lagrangeovu načelu virtualnoga rada. Međutim, s obzirom na prisutnost diskontinuiteta treba u jednadžbu ravnoteže uključiti i virtualni rad sila na diskontinuitetu:

$$\sum_{e=1}^n \left[\mathbf{f}^{int,e} - \mathbf{f}^{ext,e} \right] = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\forall e: \mathbf{h}^e = \mathbf{0} \quad (11)$$

Jednadžbna (10) je standardna jednadžba ravnoteže u metodi konačnih elemenata i odnosi se na dio grede u kojemu nema diskontinuiteta. Jednadžba (11) predstavlja ravnotežu na diskontinuitetu, gdje su

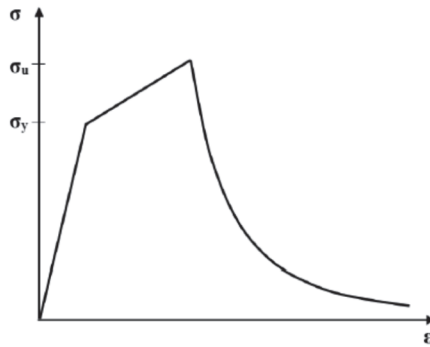
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

σ – vektor unutarnjih sila uzduž grede, \mathbf{t} – vektor unutarnjih sila na diskontinuitetu.

3.3. Konstitucijske jednadžbe

Odnos između uzdužnih deformacija i normalnih sila, odnosno posmičnih deformacija i poprečnih sila dan je na slici 2. Prvi dio predstavlja linearnoelastično ponašanje definirano Hookeovim zakonom. Nakon dostizanja granice tečenja element se plastificira s izotropnim ojačanjem. Nakon dostizanja granice loma dolazi do omekša-

vanja koje je definirano eksponencijalnom funkcijom. Što se tiče savijanja, element se uvijek ponaša linearno elastično.



Slika. 2. Konstitucijski model za Timošenkovu gredu za uzdužni i poprečni smjer

Jednadžbe plastičnosti s linearno izotropnim očvršćivanjem:

- Ukupna deformacija: $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$
- Funkcija energije deformacija u ovisnosti o deformaciji ε i unutarnjim varijablama, plastičnoj deformaciji ε^p i varijabli očvršćivanja ξ :

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, \xi) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p)C(\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2}\xi K \xi$$

gdje su C elastoplastični tangentni modul i K modul očvršćavanja

- Funkcija tečenja:

$$\phi(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_y - q) \leq 0$$

gdje su σ_y granica tečenja i $q = K\xi$ naponska varijabla.

Jednadžbe omekšavanja:

- Funkcija tečenja:

$$\bar{\phi}(t, \bar{q}) = |\sigma| - (\sigma_u - \bar{q}) \leq 0$$

gdje je t unutarnja sila na diskontinuitetu.

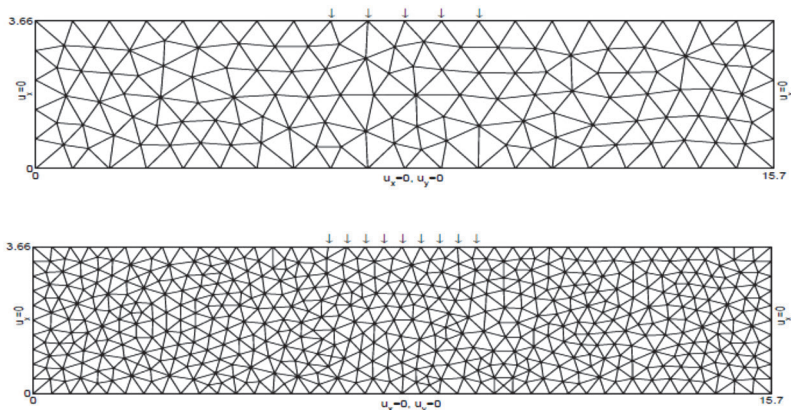
- Naponska varijabla omekšavanja \bar{q} :

$$\bar{q} = \sigma_u \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{\xi}}{G_f} \frac{\sigma_u}{G_f}\right) \right)$$

gdje su σ_u vršno naprezanje i G_f energija loma.

4. Numerički primjer

Analizirano je ponašanje tla ispod fleksibilnoga temelja. Na slici 3. prikazane su mreže Timošenkovih greda različite gustoće. Isti je primjer analiziran i pomoću opisano-ga cap modela. Ulazni podaci za cap model su dani u tablici 1. Odgovarajući parametri za Timošenkove grede, koji su odabrani tako da se elastični odgovor poklapa sa cap modelom, dani su u tablici 2.



Slika 3. Mreža konačnih elemenata za rešetkasti diskretni model (Hadžalić & al. 2018.)

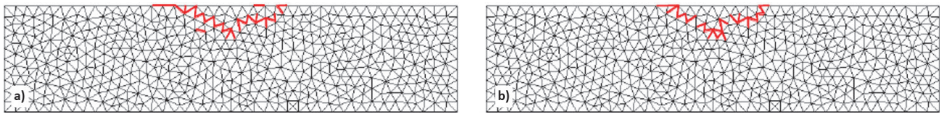
Tablica 1. Ulazni podaci za cap model

Elastic parameters	$K=172$ MPa, $G=80$ MPa
Plastic parameters	$c=69$ kPa, $\varphi=20^\circ$ $k=63.6$ kPa, $\alpha=0.112$
Hardening parameters	$W=0.003$ $D=1.26$ mm ² /N $R=4$
Initial location of the cap	$\xi_0 = 300$ kN/m ²

Tablica 2. Ulazni podaci za Timošenkove grede

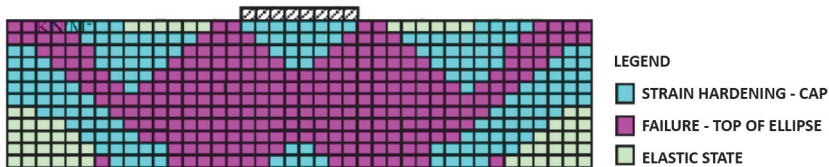
Young's modulus [MPa]	Poisson's ratio	Yield limit [MPa]	Hardening modulus [MPa]	Fracture limit [MPa]	Fracture energy [N/mm]
$E = 205$	$\nu = 0.3$	$\sigma_{y,t} = 0.04$	$K_t = 60$	$\mu_t = 0.113$ $\sigma_t = 0.005$	$G_{f,t} = 0.0006$
		$\sigma_{y,c} = 0.40$	$K_c = 60$	$\mu_c = 1.130$ $\sigma_c = 0.05$	$G_{f,c} = 0.05$
		$\sigma_{y,s} = 0.07$	$K_s = 60$	$\mu_s = 0.133$ $\sigma_s = 0.005$	$G_{f,s} = 0.02$

Dobivena ovisnost između pomaka i zadanoga opterećenja prikazana je na slici 4. Rešetkasti diskretni model daje gotovo iste rezultate za obje gustoće mreže. Do dostizanja vršnoga opterećenja odgovor je oba modela gotovo isti. Nakon toga, na rešetkastom modelu dolazi do pojave pukotina koje smanjuju nosivost tla. Naravno, cap model zadržava približno istu razinu naprezanja, jer ne postoji mogućnost omekšavanja.



Slika 4. Usporedba dobivenih rezultata dobivenih rešetkastim i cap modelom

Na slikama 5. i 6. prikazani su mehanizmi sloma dobiveni cap modelom i rešetkastim modelom. Vidljivo je da je oblik loma približno isti, s tim da se plastificirani elementi kod cap modela prostiru na većoj površini.



Slika 5. Mehanizam sloma dobiven rešetkastim modelom: a) Mod I; b) Mod II

Zaključak

Prikazani rezultati pokazuju da rešetkasti model sastavljen od Timošenkovih greda može ispravno simulirati slom koherentnoga tla. Prednost je rešetkastoga modela to što može prikazati i ponašanje nakon dostizanja vršnoga opterećenja i nastajanja pukotina. Nedostatak je tog modela to što nije moguće odrediti njegove parametre standardnim laboratorijskim ispitivanjima. Stoga treba upotrijebiti mnogo složenije metode identifikacije parametara u kojima se, međutim, mogu obuhvatiti i materijalne heterogenosti.

Literatura

Benkemoun, N., Hautefeuille M., Colliat J.B., Ibrahimbegovic A. (2010), "Failure of heterogeneous materials: 3D meso-scale FE models with embedded discontinuities", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2010**(82), 1671–1688.

Benkemoun, N., Ibrahimbegovic A., Colliat J.B. (2010), "Anisotropic constitutive model of plasticity capable of accounting for details of meso-structure of two-phase composite material", *Computers & Structures*, **2012**(90), 153–162.

Do, X.N., Ibrahimbegovic, A., Brancherie, D. (2015), "Combined hardening and localized failure with softening plasticity in dynamics", *Coupled Systems Mechanics*, **2015**(4), 115–136.

Dolarevic, S., Ibrahimbegovic, A. (2007), "A modified three-surface elasto-plastic cap model and its numerical implementation", *Computers & Structures*, **2007**(85), 419–430.

Hadžalić, E., Ibrahimbegović, A., Dolarević, S. (2015), "Failure mechanisms in coupled soil-foundation systems", *Coupled Systems Mechanics*, **2018**.

Hofstetter, G., Simo, J.C., Taylor, R.L. (1993), "A modified cap model: closest point solution algorithms", *Computers & Structures*, **1993**(48), 203–214.

Ibrahimbegovic, A., Delaplace, A. (2003), "Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material", *Computers & Structures*, **2003**(81), 1255–1265.

Nikolic, M., Ibrahimbegovic A., Miscevic P. (2015), "Brittle and ductile failure of rocks: Embedded discontinuity approach for representing mode I and mode II failure mechanisms", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2015**(102), 1507–1526.

Saksala, T., Ibrahimbegovic, A. (2014), "Anisotropic viscodamage-viscoplastic consistency constitutive model with a parabolic cap for rocks with brittle and ductile behavior", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **2014**(70), 460–473.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2005), *The Finite Element Method, vols. I, II, III*, Elsevier.

Primjena numeričkih postupaka pri provjeri stanja naprezanja i deformacija podzemnih prostorija rudnika

Petar Hrženjak¹, Antonia Jaguljnjak Lazarević¹, Mario Uroš²

¹Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet

²Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

Sažetak

U radu se prikazuje primjena numeričkih postupaka modeliranja, odnosno problematika primjene numeričkih postupaka s obzirom na geometriju podzemnih prostorija, značajke geoloških naslaga materijala te uvjete u kojima se podzemne prostorije rudnika nalaze. Posebni osvrt dan je na različitost ponašanja stijenske mase u odnosu na različitost geometrije podzemnih prostorija, strukturnih značajki geoloških naslaga te različitost uvjeta naprezanja u kojima se podzemne prostorije nalaze. Kao primjer provedenih numeričkih proračuna prikazana su dobivena rješenja za stanje naprezanja i deformacija podzemnih prostorija kame-noloma arhitektonsko-građevnog kamena na eksploatacijskom polju "Kanfanar-jug".

Ključne riječi: podzemne prostorije rudnika, stanje naprezanja i deformacija, numerički postupci

Application of numerical methods for stress and strain analysis of underground mining spaces

Abstract

The paper deals with the application of numerical modeling, ie the problem of application of numerical methods with respect to the geometry of underground spaces, characteristics of the geological deposits and the conditions in which the underground mining spaces are located. Special attention is given to the diversity of rock mass behavior in relation to the different geometry of underground spaces, structural features of the geological deposits and the different stress conditions in which the underground spaces are located. As an example of carried out numerical calculations, the solutions for the state of stress and strain of underground spaces of the quarry of dimension stone on the exploitation field "Kanfanar-jug" are presented.

Key words: underground mining spaces, stress and strain state, numerical methods

Uvod

Posebnost podzemnih prostorija rudnika u odnosu na neke druge inženjerske objekte očituje se prije svega u specifičnoj geometriji koja je uglavnom uvjetovana značajkama ležišta mineralnih sirovina i tehnologijom eksploatacije. Pri projektiranju rudnika osnovni je zadatak utvrđivanje dimenzija podzemnih prostorija, koje bi s jedne strane trebale omogućiti učinkovitu i ekonomičnu eksploataciju mineralnih sirovina, a s druge sigurnost te prihvatljivo ponašanje stijenske mase oko podzemnih prostorija. S obzirom na trenutačni stupanj razvijenosti numeričkih postupaka modeliranja, može se reći da danas sve više predstavljaju glavnu okosnicu pri projektiranju podzemnih prostorija rudnika te glavnu poveznicu između empirijskoga i promatračkoga pristupa projektiranju podzemnih prostorija. Glavna je svrha primjene numeričkih postupaka modeliranja utvrđivanje stanja naprezanja i deformacija te prognoza ponašanja stijenske mase oko podzemnih prostorija rudnika.

Ponašanje stijenske mase oko podzemnih prostorija uglavnom ovisi o stupnju razlomljenosti, geometrijskim značajkama diskontinuiteta u odnosu na geometriju podzemnih prostorija te o stanju naprezanja (Barla & Barla, 2000). Ako se stijenska masa ponaša kao diskontinuirana geotehnička sredina, njezin se slom oko podzemnih prostorija uglavnom odvija po plohama diskontinuiteta, a oblik sloma ovisi o međusobnim odnosima orijentacija slobodnih ploha objekata te ploha diskontinuiteta. Takva situacija najčešće vrijedi u slučaju podzemnih prostorija čije su dimenzije nekoliko puta veće od prosječnih razmaka diskontinuiteta u stijenskim masama te u uvjetima relativno manjih naprezanja, odnosno plićih objekata. U tom slučaju mjerodavni su parametri čvrstoće parametri posmične čvrstoće sustava diskontinuiteta, pri čemu se numeričko modeliranje provodi prema koncepciji diskontinuumu uz najčešće korištenje metode diskretnih elemenata (MDE). Ako se stijenska masa ponaša kao kvazikontinuirana geotehnička sredina, njezin se slom odvija po zakrivljenim kliznim plohama kroz stijensku masu, odnosno većim dijelom po mnogostrukim plohama diskontinuiteta, a manjim dijelom kroz intaktni materijal. Takva situacija uglavnom vrijedi za podzemne prostorija čije su dimenzije višestruko puta veće od prosječnih razmaka diskontinuiteta u stijenskim masama te u uvjetima većih naprezanja, odnosno objekata na većim dubinama. U takvim su slučajevima mjerodavni parametri čvrstoće parametri posmične čvrstoće stijenske mase, koji preko kriterija čvrstoće za stijensku masu za pravo uključuju i čvrstoću intaktnoga materijala i čvrstoću te gustoću diskontinuiteta u stijenskoj masi. Numeričko se modeliranje provodi prema koncepciji kvazikontinuumu uz najčešće korištenje metoda konačnih elemenata (MKE) ili metoda konačnih razlika (MKR). Spomenuta dva slučaja najčešće se susreću u rješavanju redovitih, odnosno uobičajenih inženjerskih zahvata u diskontinuiranim stijenskim masama s dobro razvijenim strukturnim elementima osnovnoga strukturnog sklopa. Međutim, u slučaju masivnih stijena, kod kojih su prosječni razmaci između diskontinuiteta jednaki ili veći

od dimenzija podzemnih prostorija, stijenska se masa ponaša kao pravi kontinuum s pojedinačnim prekidima, odnosno diskontinuitetima koji odvajaju velike blokove masivne stijene. Mjerodavne su parametri čvrstoće pri tome parametri čvrstoće stijenskih blokova te parametri čvrstoće diskontinuiteta. U tom se slučaju numeričko modeliranje provodi prema koncepciji kontinuuma s uključivanjem pojedinačnih kliznih elementa (engl. *interfaces*) uz također najčešće korištenje metoda konačnih elemenata ili metoda konačnih razlika. Pritom je upravo ključna čvrstoća svakoga pojedinog diskontinuiteta te čvrstoća intaktnoga materijala.

Osim spomenutih značajki koje imaju najveći utjecaja na ponašanje stijenske mase oko podzemnih prostorija rudničkih objekata, veliki utjecaj još imaju i anizotropija te nelinearna svojstva materijala bilo u pogledu čvrstoće bilo u pogledu odnosa naprezanja i deformacija. Uz to pojedine značajke, kako intaktnoga stijenskog materijala tako i strukture te stijenske mase, mogu jako varirati od mjesta do mjesta promatranja unutar iste vrste ili tipa stijene. Sve te značajke treba uzeti u obzir prilikom numeričkoga modeliranja, odnosno proračuna stanja naprezanja i deformacija stijenske mase oko podzemnih prostorija rudnika.

Provjera stanja naprezanja i deformacija podzemnih prostorija kamenoloma arhitektonsko-građevnog kamena “Kanfanar-jug”

Ležište kamenoloma arhitektonsko-građevnoga kamena “Kanfanar-jug” izgrađuju slojeviti vapnenci krednih i paleogenih naslaga koji u stratigrafski tektonskom pogledu pripadaju Istarskoj ploči, odnosno zapadno-istarskoj jursko-krednoj antiklinali (Cotman, 2006). Značajke samoga ležišta karakteriziraju slojeviti vapnenci različite debljina kvazihorizontalnoga zalijeganja, odnosno s kutom pada do 3° u smjeru istoka. Cijelo je ležište podijeljeno na nekoliko otkopnih polja na kojima se provodi eksploatacija površinskim ili podzemnim načinom otkopavanja. Prikaz istočnoga dijela otkopnoga polja “Kanfanar III” na kojemu se provodi podzemni način otkopavanja arhitektonsko-građevnog kamena dan je na slici 1.

Eksploatacijski slojevi stratigrafski pripadaju naslagama donjega apta, podijeljeni su u više slojeva čija se ukupna debljina kreće od 6,7 do 6,8 m. Iznad eksploatacijskih slojeva nalazi se neposredna krovina debljine do 9,5 m, prvih 4,5 m koje čine kompaktni i homogeni vapnenci sličnih fizikalno-mehaničkih značajki kao i eksploatacijski slojevi, koji također pripadaju naslagama donjeg apta, a preostali gornji dio čine svijetli, brašnasti i školjkasti vapnenci sa znatno lošijim fizikalno-mehaničkim značajkama materijala, koji pripadaju naslagama gornjega apta. Nakon neposredne krovine slijede mlađe naslage gornje krovine, koju čine tanko uslojeni vapnenci s proslojcima lapora i raslojeni laporoviti vapnenci, koji su pri površini okršeni i pomiješani sa zemljom crvenicom. Ukupna se debljina naslaga gornje krovine kreće od 5 do 10 m, ovisno o reljefu terena.



Slika 1. Prikaz istočnog dijela podzemnoga kamenoloma na otkopnom polju "Kanfanaar III"

U strukturnom smislu ležište karakteriziraju uglavnom dva pukotinska sustava, od kojih se prvi pruža približno u pravcu sjeverozapad-jugoistok, dok je drugi s približnim pravcem pružanja sjeveroistok-jugozapad. Pukotine su uglavnom subvertikalne do vertikalne, s manjim varijacijama kuta pada od 85° do 90° , ali sa znatno većim varijacijama kuta pružanja, čak do $\pm 30^\circ$. Pukotinski sustavi na taj način mogu međusobno zatvarati kutove od 60° do 120° . Postojanost ploha pukotina vrlo je velika, uglavnom veća od 30 m, tako da pukotine u kontinuitetu presijecaju i eksploatacijske naslage i naslage neposredne krovine i podine. Budući da su razmaci između pukotina vrlo veliki, ležište prema tome izgrađuju masivne stijene s vrlo velikim stijenskim blokovima koji su međusobno odvojeni prilično izraženim pukotinama, odnosno karakterističnim diskontinuitetima (Hrženjak et al., 2014). Osim toga, pukotine su vrlo nepravilne, odnosno promatrane u velikom mjerilu valovite i povijajuće, sa stjenkama koje i u malom mjerilu promatranja imaju veliku hrapavost površina. Radi utvrđivanja geomehaničkih značajki naslaga ležišta u periodu istraživanja od 2007. do 2014. godine provedena su detaljna laboratorijska ispitivanja fizikalno-mehaničkih značajki intaktnoga stijenskog materijala te terenska *in situ* ispitivanja stijenske mase. Od laboratorijskih ispitivanja provedeno je određivanje gustoće i poro-

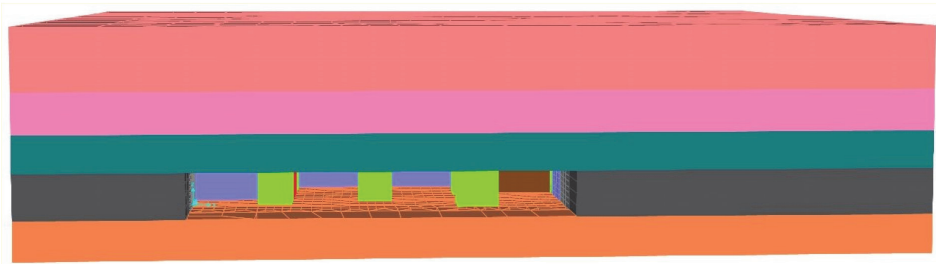
znosti materijala, ispitivanje jednoosne tlačne čvrstoće i deformabilnosti materijala, ispitivanje tlačne čvrstoće u troosnom stanju naprezanja, ispitivanje čvrstoće pri savijanju pod koncentriranim opterećenjem te utvrđivanje učinka pada tlačne čvrstoće za različite omjere visine i širine uzoraka. Od terenskih ispitivanja provedeno je *in situ* određivanje naprezanja i modula deformabilnosti stijenske mase primjenom tlačnoga jastuka te *in situ* ispitivanje čvrstoće pri savijanju velikih blokova. Osim navedenoga, u razdoblju istraživanja provedena su i mjerenja promjena naprezanja u stupovima, konvergencije komora te deformacija materijala i pomaka na pukotinama, na svim utvrđenim karakterističnim dijelovima podzemnoga kamenoloma. Na temelju rezultata svih provedenih ispitivanja, uz primjenu odgovarajućih korekcija laboratorijskih rezultata ispitivanja, dobivene su prosječne vrijednosti geomehaničkih značajki stijenske mase koje su prikazane u tablici 1.

Tablica 1. Prosječne vrijednosti geomehaničkih značajki stijenske mase

Stijenska masa	Gustoća [kg/m ³]	Hoek-Brownova konstanta m_b	Hoek-Brownova konstanta s	Jednoos. tlačna čvrstoća [MPa]	Vlačna čvrstoća [MPa]	Modul deformabilnosti [GPa]
Eksploatacijski slojevi	2670	3,14142	0,05930	27,055	2,097	8,505
Nosivi donji slojevi neposredne krovine	2650	3,14142	0,05930	27,055	2,097	12,429
Gornji slojevi neposredne krovine	2285	2,43521	0,05930	18,295	1,829	9,053
Slojevi gornje krovine	2575	0,78507	0,00073	1,565	0,060	3,175

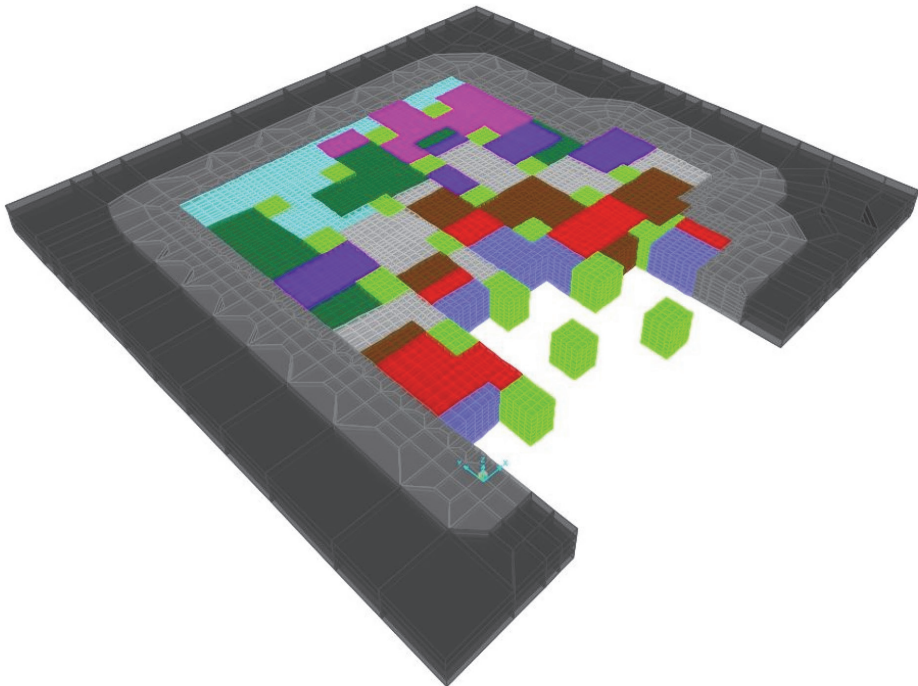
Primjena numeričkih postupaka modeliranja pri provjeri stanja naprezanja i deformacija provedena je za situaciju podzemnih prostorija na odabranom području istočnoga dijela otkopnoga polja "Kanfanar III". Na temelju rasporeda naslaga ležišta te utvrđenih prosječnih vrijednosti geomehaničkih značajki stijenske mase, u prvom je koraku analize na odabranomu području postavljen proračunski model kao model kontinuirane geotehničke sredine s obzirom na utvrđenu međusobnu uklinjenost stijenskih blokova na plohamu diskontinuitetima. Proračuni na postavljenomu modelu provedeni su pomoću računalnoga programa SAP2000 koji je namijenjen rješavanju stanja naprezanja i deformacija trodimenzionalnih modela metodom konačnih elemenata. Prostorni numerički model sastojao se od ukupno 90 002 osmeročvorna prostorna elementa s 96 849 čvornih točaka s tri stupnja slobode, što daje sustav od 290 799 jednadžbi ravnoteže. Prikaz postavljenoga prostornog numerič-

kog modela dan je na slici 2, a prikaz dijela toga modela u razini eksploatacijskih slojeva, odnosno u visini iskopa s prikazom faza otkopavanja, dan je na slici 3.



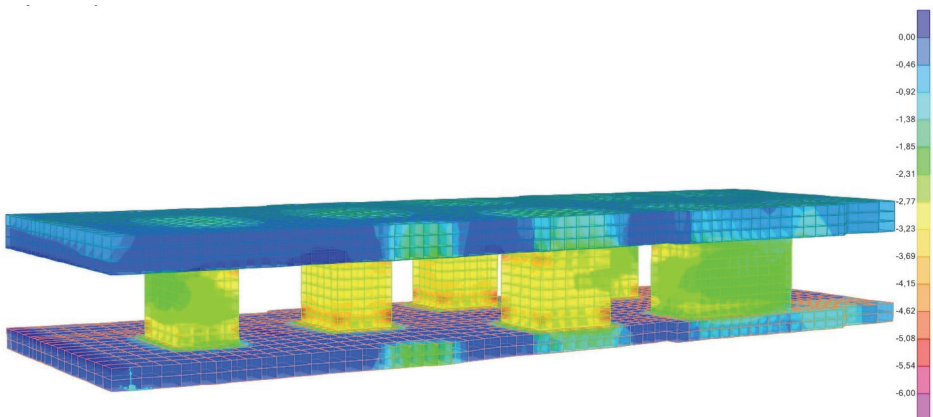
Slika 2. Prikaz prostornoga numeričkog modela

Proračunski model postavljen je s rasporedom i dimenzijama stupova te fazama otkopavanja prema stvarnom izvedenu stanju na tom području, uz manja geometrijska pojednostavljenja na granicama otkopnoga područja. Na slikama 2. i 3. slojevi su, kao i faze otkopavanja, prikazane različitim bojama, dok su stupovi prikazani zelenom bojom.



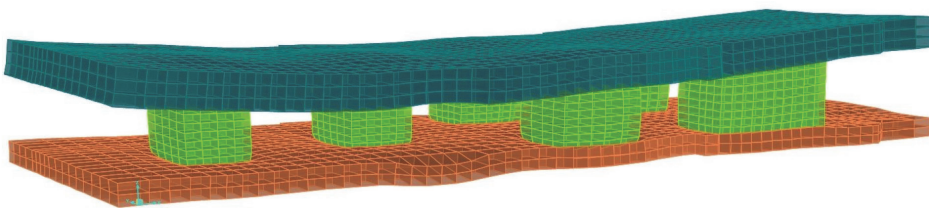
Slika 3. Prikaz dijela prostornoga numeričkog modela s fazama otkopavanja

Kao prvo, proračunom je dobivena vrijednost primarnoga vertikalnog naprezanja u središnjemu dijelu eksploatacijskih slojeva u iznosu od 0,5 MPa. Drugo, daljnji su proračuni provedeni po fazama otkopavanja kako su one u stvarnosti bile izvođene s ciljem promatranja promjena vrijednosti naprezanja i deformacija na karakterističnim mjestima, odnosno na mjestima na kojima su upravo bila provedena *in situ* ispitivanja i mjerenja, kako bi se dobivene vrijednosti mogle međusobno uspoređivati. Početne vrijednosti vertikalnih naprezanja na karakterističnim mjestima ili stupovima dobivene su na temelju rješenja numeričkoga modela nakon faze prvoga iskopa na tom mjestu, nakon koje se pristupilo ispitivanju ili mjerenju. Na taj su način proračunom dobivene početne vrijednosti vertikalnih naprezanja u rasponu od 0,85 do 1,15 MPa, dok su *in situ* ispitivanjima dobivene vrijednosti od 0,95 do 1,7 MPa. Nakon posljednje faze iskopa, odnosno nakon potpunoga otkopavanja materijala oko svih stupova na promatranu području, dobivene su prosječne vrijednosti vertikalnih naprezanja u stupovima u iznosu od 2,25 do 3,55 MPa. Mjerenjem promjena vertikalnoga naprezanja u određenim stupovima utvrđeno je povećanje naprezanja od 0,8 do 1,2 MPa. Najveće vrijednosti tlačnih naprezanja, odnosno koncentracije tlačnih naprezanja, dobivene su na bridovima stupova, u gornjim i donjim dijelovima s iznosom od 6,2 MPa. Raspodjela glavnih naprezanja na dijelu postavljenoga numeričkog modela prikazana je na slici 4., na kojoj su dobro vidljiva područja koncentracije naprezanja, pri čemu su tlačna naprezanja prikazana kao negativne vrijednosti. Najveće vrijednosti vlačnih naprezanja dobivene su u središnjim ili malo izmaknutim područjima komora, unutar donjih slojeva neposredne krovine, s iznosom od 0,6 MPa.



Slika 4. Prikaz vrijednosti glavnih naprezanja na dijelu postavljenoga numeričkog modela

Od dobivenih deformacija materijala i pomaka čvornih točaka mreže numeričkoga modela najinteresantnija su rješenja za slučaj podzemnih prostorija na kojima su provedena mjerenja konvergencija. Relativni vertikalni pomaci krovine u komorama, odnosno stropnih točaka na sredini komora, što odgovara situaciji kod mjerenja konvergencija, dobivaju se na temelju razlike izračunatih pomaka stropnih točaka i točaka na stupovima u visini mjernoga trokuta. Pri tome se razlike odnose na razlike između posljednje i početne faze iskopa. Numeričkim proračunima i mjerenjima konvergencija dobivene su vrijednosti vertikalnih pomaka u istomu rasponu od 1,10 do 1,15 mm. Izgled deformirane mreže konačnih elemenata na dijelu postavljenoga numeričkoga modela prikazan je na slici 5., na kojoj su vrijednosti pomaka uvećane 700 puta radi lakšeg uočavanja principa deformiranja modela podzemnih prostorija.



Slika 5. Prikaz deformirane mreže na dijelu postavljenoga numeričkoga modela

Za slučaj elemenata modela na području s najvećom koncentracijom tlačnih naprezanja od 6,2 MPa, primjenom Hoek-Brownovog kriterija čvrstoće (Hoek i Brown, 1997) i značajki stijenske mase čije su vrijednosti veličina prikazane u tablici 1., dobivena je vrijednost faktora stabilnosti u iznosu od 4,36. U slučaju elemenata modela s utvrđenim najvećim vrijednostima vlačnih naprezanja od 0,6 MPa, dobivena je vrijednost faktora stabilnosti u iznosu od 3,49. Na temelju ovih vrijednosti može se konstatirati da se svi elementi numeričkoga modela nalaze u elastičnom području, odnosno da plastifikacija materijala nije utvrđena ni na jednom dijelu postavljenoga modela, a s obzirom na dobivene vrijednosti faktora stabilnosti da je riječ o zadovoljavajućemu stanju stabilnosti podzemnih prostorija.

Zaključak

Izuzetno dobro podudaranje rezultata *in situ* ispitivanja i mjerenja s rezultatima provedenih proračuna primjenom numeričkih postupaka prije svega dokazuje, kao prvo, veliku primjenjivost numeričkih postupaka pri provjeri stanja naprezanja i deformacija podzemnih prostorija rudnika u određenim uvjetima, a kao drugo, na temelju ostalih mogućnosti numeričkih postupaka, dobivanje daleko boljega uvida u ponašanje stijenske mase oko podzemnih prostorija rudnika. Na taj su način zapra-

vo potvrđene pretpostavke o preraspodjeli napreznja prema "tributary" teoriji u slučaju komorno-stupne metode otkopavanja s nepravilnim rasporedom stupova u prikazanim ležišnim uvjetima. Osim navedenoga, može se također konstatirati da su prema tome i geomehaničke značajke stijenske mase eksploatacijskih slojeva, kao i nosivih slojeva neposredne krovine, utvrđene s vrijednostima koje očito odgovaraju stvarnim *in situ* vrijednostima značajki stijenskih masa u ležištu.

Literatura

Barla, G., Barla, M. (2000): Continuum and discontinuum modelling in tunnel engineering. Rudarsko-geološko-naftni zbornik. Vol. 12, pp. 45-57.

Cotman, I. (2006): Glavni rudarski projekt podzemne eksploatacije arhitektonsko-građevnog kamena na eksploatacijskom polju "Kanfanar-jug". Pazin: Kamen d.d.

Hoek, E., Brown, E. T. (1997): Practical estimates of rock mass strength. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. Vol. 34, pp. 1165-1186.

Hrženjak, P., Jaguljnjak Lazarević, A., Briševac, Z. (2014): Istraživanje stabilnosti podzemnih prostorija kamenoloma arhitektonsko-građevnog kamena na eksploatacijskom polju "Kanfanar-jug". Zagreb: Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

SAP2000 (Version 15.2.1) Computer software. Berkeley, CA: Computers and Structures, Inc.

4. SEIZMIČKO INŽENJERSTVO

Krivulje vjerojatnosti oštećenja za armiranobetonski okvir neproračunan na djelovanje potresa

Marijana Hadzima-Nyarko, Gordana Pavić, Dijana Nikić

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek

Sažetak

Iako su novije zgrade projektirane u skladu s propisanim zahtjevima norme HRN EN 1998-1:2011 za proračun potresno otpornih zgrada, još uvijek postoji značajan broj starijih zgrada koje su izgrađene ne slijedeći ikakve norme. Studija provedena u radu zasniva se na procjeni potresne oštećljivosti zgrade osnovne škole u Osijeku projektirane 70-tih godina prošlog stoljeća, čiji je nosivi sustav armiranobetonski okvir. Za procjenu potresne oštećljivosti primijenjen je dinamički proračun korak po korak na numeričkom modelu zgrade – ravninskom armiranobetonskom okviru niske duktilnosti.

Ključne riječi: procjena potresne oštećljivosti, ravninski model armiranobetonske okvirne konstrukcije, krivulje vjerojatnosti oštećenja, dinamički proračun korak po korak

Fragility curves of reinforced concrete frame without earthquake resistance design

Abstract

Although newer buildings are designed in accordance with the requirements of HRN EN 1998-1:2011 for the design of earthquake resistant buildings, there are still a significant number of older buildings built without following any standards. The study carried out in this paper is based on the assessment of earthquake vulnerability of an elementary school building in Osijek designed in the 1970's, with a bearing system which is reinforced concrete frame. For the assessment of the earthquake vulnerability, "step by step" dynamic analysis was performed on the numerical model of the building - a reinforced concrete frame with low ductility.

Key words: earthquake vulnerability assessment, model of reinforced concrete frame, fragility curves, Step by step time history analysis

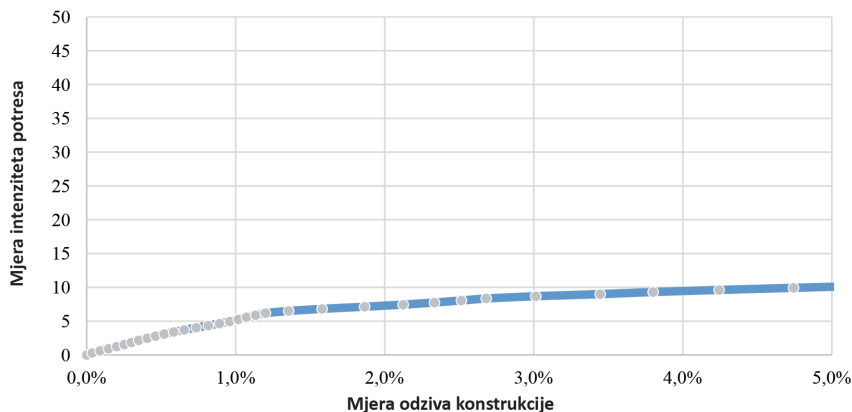
1. Uvod

Primarni je cilj potresnoga inženjerstva istraživanje karaktera potresa i ponašanja konstrukcija izloženih potresnim djelovanjima. Upravo je ponašanje armiranobetonskih konstrukcija pod potresnim djelovanjem često predmet razmatranja i istraživanja, posebice u potresno aktivnim zonama (Abdelnaby i Elnashai, 2015; Rabczuk i dr., 2005; Petrone i dr., 2016; Rodrigues i dr., 2018). Opravdanost interesa zasniva se na složenosti njihovoga ponašanja te činjenici da su armiranobetonske konstrukcije vrlo rasprostranjene (Koutromanos i dr. 2011). Na ponašanje armiranobetonskih konstrukcija pod potresnim djelovanjem utječe veliki broj parametara, a među njima je i slučajnost pojave potresa. Zbog toga se zahtijeva probabilistički pristup u rješavanju problema potresne oštetljivosti. Razvijene su brojne metode koje svojim pristupom pokušavaju što točnije procijeniti potresni rizik, no unatoč velikom broju istraživanja provedenih na tu temu još uvijek postoje brojne nepoznanice i nesigurnosti koje treba istražiti. U primjeru ovoga rada odabran je ravninski model armiranobetonske okvirne konstrukcije osnovne škole u Osijeku projektirane 70-tih godina prošloga stoljeća. Studija provedena u radu zasniva se na procjeni potresne oštetljivosti ravninskih armiranobetonskih okvirnih konstrukcija niske duktilnosti (Nikić, 2016.). Oštetljivost određene konstrukcije ili cijele kategorije konstrukcija definirana je u obliku potresnoga intenziteta i odnosa oštećenja. Tim se odnosom dobiva vjerojatnost distribucije nastanka oštećenja za određeni potresni intenzitet i najčešće je prikazan u obliku matrica vjerojatnosti oštećenja ili krivulja vjerojatnosti oštećenja. Glavni je cilj kroz probabilističku analizu definirati potresnu oštetljivost modela armiranobetonske okvirne konstrukcije, pri čemu će se kao rezultat konstruirati krivulje vjerojatnosti oštećenja koje pokazuju vjerojatnost otkazivanja konstrukcije ili dosezanja razine oštećenja za svako definirano granično stanje oštetljivosti.

2. Dinamički proračun korak po korak

Dinamički proračun korak po korak ili inkrementalna dinamička analiza (engl. *Incremental Dynamic Analysis, IDA*) prvi je put spomenut u Berter i dr. (1977.), a prve računalne algoritme za provedbu proračuna IDA predstavili su Vamvatsikos i Cornell (Spears i dr., 2004.). IDA predstavlja skup nelinearnih proračuna konstrukcijskoga modela koji daju iscrpne podatke o ponašanju modela pri zadanim potresnim opterećenjima. Osnova je metode IDA na skaliranju, odnosno inkrementalnom uvećanju zapisa potresa kako bi se omogućila tvorba seta potresa različitih intenziteta i individualno analiziranje numeričkoga konstrukcijskog modela za svaku razinu potresne pobude. U konačnici, IDA krivulja predstavlja maksimalni odziv konstrukcije u odnosu na mjeru intenziteta pobude. Primjer jednostruke IDA krivulje prikazan je na slici 1., na kojoj je, uz pretpostavku da je zapis potresnoga opterećenja realno skaliran,

vidljivo da krivulja za niže faktore skaliranja ima oblik ravne linije. To upućuje na činjenicu da se konstrukcija u tom području ponaša elastično. Za više faktore skaliranja krivulja poprima krivudav oblik, što znači da je potresno opterećenje dovoljno jako da može izazvati nelinearno otkazivanje konstrukcije.

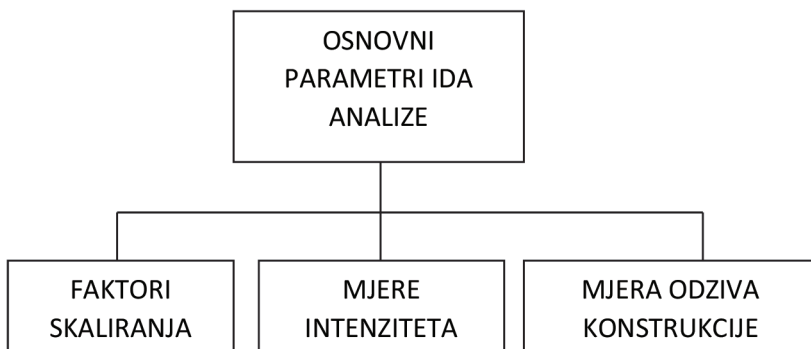


Slika 1. Primjer jednostruke IDA krivulje

Jednostrukom IDA krivuljom prikazano je kako će konstrukcija reagirati na različite intenzitete istoga potresa. Međutim, prednost metode je mogućnost višestruke analize IDA, čime se na jednom grafu prikazuje više krivulja, a svaka predstavlja odziv konstrukcije za različite razine potresnih pobuda. IDA je probabilistička i parametarska metoda analize konstrukcija koja podrazumijeva izlaganje konstrukcijskih modela nizu potresnih zapisa tako da svaki od njih bude uvećan do određene razine intenziteta, proizvodeći tako više krivulja koje mogu zbog preglednosti i boljega razumijevanja problematike biti prikazane na istomu grafu. Shematski prikaz osnovnih parametara analize IDA prikazan je na slici 2.

Faktor skaliranja predstavlja pozitivnu skalarnu vrijednost na osnovi koje se uvećava izvorni potresni zapis u vremenu radi dobivanja skalarnoga prikaza. Mjera intenziteta potresa označava relativnu jačinu potresnoga opterećenja. Intenzitet se najčešće prikazuje empirijskim subjektivnim mjerama potresnoga gibanja temeljnoga tla (npr. Richterovali Mercallijeva ljestvica). Međutim, taj tip mjere nije u mogućnosti precizirati vrijednost koja se može skalirati. Pri odabiru mjere potresa treba odabrati onu koja varira linearno s faktorom skaliranja. Zbog toga se magnituda uzima kao jedna od najprihvatljivijih mjera intenziteta potresa za proračun IDA. Međutim, u praksi je uobičajeno da se kao mjera intenziteta potresa upotrebljava spektralno ubrzanje za prvi vlastiti period s 5% prigušenja, $S_a(T_1, 5\%)$,

a često je u primjeni i vršno ubrzanje temeljnoga tla (engl. *Peak Ground Acceleration, PGA*). Dosadašnja istraživanja pokazala su da primjena spektralnih vrijednosti ipak daje konzistentnije rezultate. Pri odabiru referentne mjere intenziteta potresa mjerodavna je ona mjera koja rezultira najmanjom disperzijom rezultata (Dhakai, 2006.). Mjera odziva konstrukcije neposredno je povezana s područjem ponašanja konstrukcije i predstavlja odziv konstrukcije na djelovanje potresne pobude. Ako se promatra konstrukcija na globalnoj razini, područje ponašanja najčešće je povezano s maksimalnom vrijednosti međukatnoga pomaka konstrukcije, koja će se primijeniti i u ovom radu.

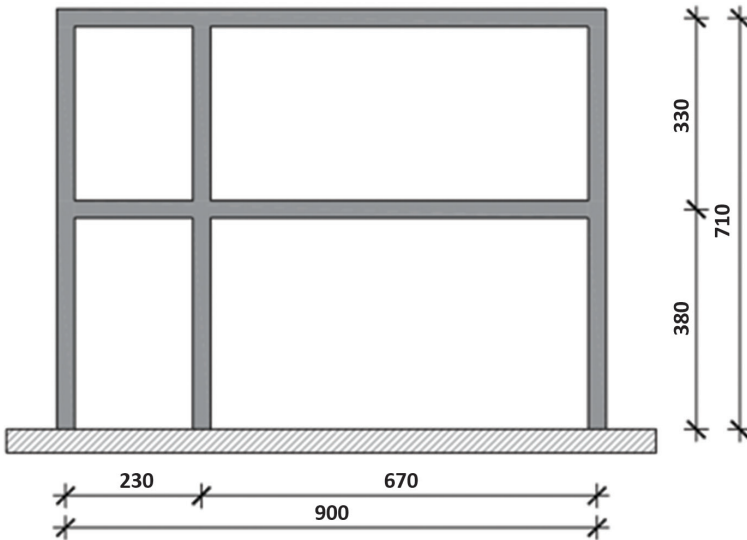


Slika 2. Shematski prikaz osnovnih parametara analize IDA

3. Model konstrukcije

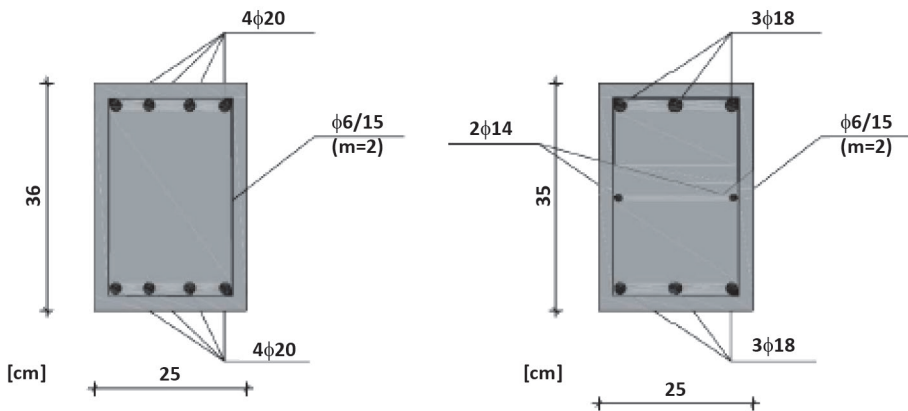
Na osnovi projektne dokumentacije osnovne škole u gradu Osijeku proveden je proračun osnovnoga konstrukcijskog sustava. Osnovni su konstrukcijski sustavi dilatacije I (prostor škole) i dilatacije III (športska dvorana) armiranobetonski okviri, koji su međusobno ukruženi serklažima (Državni Arhiv u Osijeku, HR-DAOS-72, fasc. 583, 1967.).

Prikladan numerički model za proračun potresne oštetljivosti armiranobetonskih okvirnih konstrukcija mora zadovoljiti odgovarajuće zahtjeve: točnost unutar inženjerskih tolerancija, jednostavnost i pouzdanost. Modeli elemenata također moraju biti dovoljno točni, fizikalno podobni, učinkoviti i jednostavni. Numerički modeli simuliraju odziv konstrukcije u pogledu kapaciteta pomaka, raspršivanja energije i perioda vibriranja za potrebnu procjenu potresne oštetljivosti građevine. Potresni odziv armiranobetonskih okvirnih konstrukcija može se procijeniti promatrajući globalni prostorni mehanizam odziva sustava ili promatrajući odziv ravninskoga modela. Pravilnost konstrukcija u smislu masa i krutosti, također po visini i u tlocrtu, omogućuje ravninsko modeliranje i ravninsku analizu za procjenu potresnoga odziva (Rossetto i Elnashai, 2003.). Na slici 3. prikazan je ravninski armiranobetonski okvir modela.



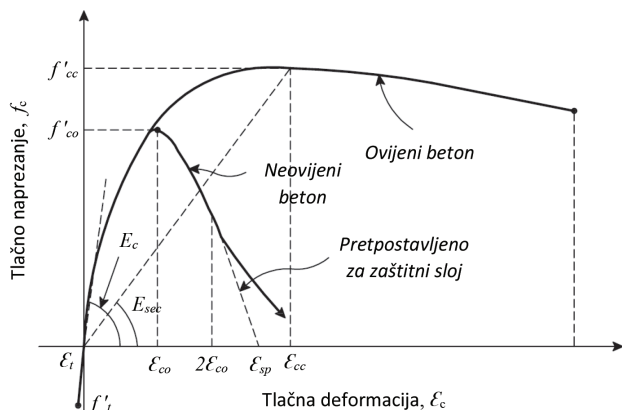
Slika 3. Prikaz ravninskog modela armiranobetonskog okvira

Za nelinearni dinamički proračun ukupne su mase koncentrirane po etažama okvira. Ukupna težina masa dobivena je na osnovi podataka iz projektne dokumentacije škole, kao i proračunana armatura u svim karakterističnim presjecima (Državni Arhiv u Osijeku, HR-DAOS-72, fasc. 583, 1967.). Na slici 4. prikazani su poprečni presjeci nosivih elemenata okvira s pripadajućom armaturom: na lijevomu dijelu slike prikazan je poprečni presjek greda, a na desnomu dijelu poprečni presjek stupova.

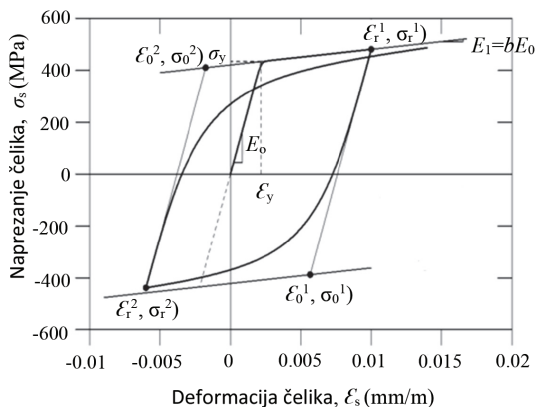


Slika 4. Prikaz poprečnih presjeka nosivih elemenata AB okvira

Proračun IDA nelinearnoga numeričkog modela proveden je primjenom programskog paketa SeismoStruct, ver. 7.0.6 (Seismosoft, 2002.). Elementi okvira definirani su konačnim elementima unutar poprečnoga presjeka elementa i uzduž elementa, te se njima pripisuju značajke geometrijske i materijalne nelinearnosti. Za simuliranje nelinearnoga ponašanja betona primijenjen je Manderov model (1988.) s konstantnom ovijenošću. Koeficijent ovijenosti (K) definiran je kao omjer između ovijenoga i neovijenog naprezanja u betonu i upotrebljava se za skaliranje odnosa naprezanje–deformacija po cijeloj duljini raspona deformacija. Model materijala primijenjen je i za ovijeni dio (jezgra) i za neovijeni (zaštitni sloj) elementa, pri čemu je koeficijent ovijenosti za prvi uzet kao 1,2, a za drugi kao jedinična vrijednost. Vrijednost deformacije pri vršnom naprezanju neovijenoga betona uzeta je kao 0,002. Na slici 5. prikazan je σ – ϵ dijagram za model betona prema ovijenosti (Mander i dr., 1988). Na slici 6. prikazan je model Menegotto–Pinto (1973.), koji je upotrijebljen za armaturni čelik.



Slika 5. σ – ϵ dijagram za Manderov model betona (Mander i dr., 1988)

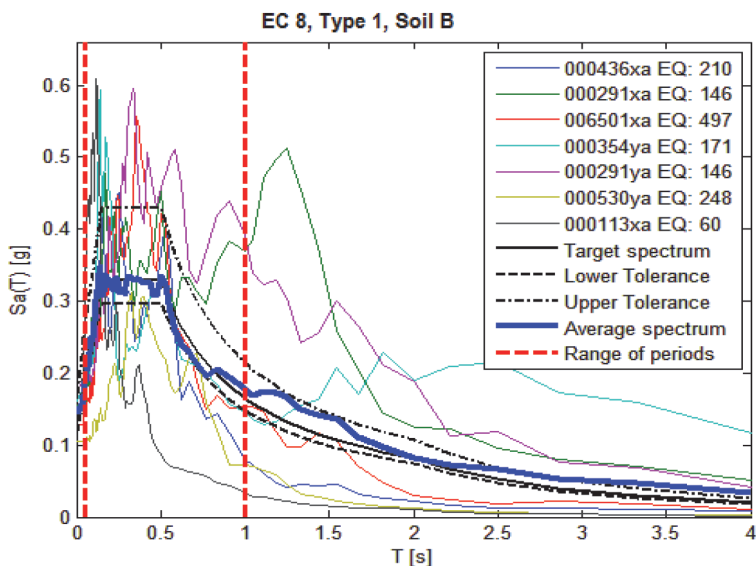


Slika 6. Prikaz nelinearnog cikličkog ponašanja armaturnog čelika, model Menegotto–Pinto armaturnog čelika (Menegotto i Pinto, 1973)

4. Odabir seta potresnih zapisa

Kod dinamičkoga proračuna ulazni podatak potresnoga opterećenja treba predstavljati akcelerogram očekivanih oscilacija tla na promatranoj lokaciji. Primijenjeni su stvarni akcelerogrami, odnosno zapisi potresnoga gibanja temeljnoga tla, koji su odabrani iz europske baze podataka (engl. *European Strong-motion Database*) u programskom paketu Rexel v 3.5 (Iervolino i dr., 2009). Svi su zapisi normalizirani tako da srednja vrijednost svih zapisa oscilira oko projektnog spektra EC8, te su zasebno primjenjivani na ravninski model armiranobetonske okvirne konstrukcije u programskom paketu SeismoStruct ver 7.0.6 (Seismosoft, 2002.).

Odabran je projektni spektar EC8, Tip 1, te je definirano vršno ubrzanje temeljnoga tla i kategorija tla (B). Na osnovi karte potresnih područja Republike Hrvatske (za povratno razdoblje 475 godina) očitano je vršno ubrzanje temeljnog tla za područje grada Osijeka s vrijednošću od 0,11g. Rexel v 3.5 nudi mogućnost pronalaska jednoga, sedam ili trideset akcelerograma odjednom; odabran je set od sedam potresnih zapisa, prema preporuci Čaušević (2010.). Na slici 7. prikazan je nelinearni 5% pri-gušeni spektar odziva baze od sedam potresnih zapisa, primijenjenih u radu, koji su usklađeni s projektnim spektrom EC8, Tip 1, vršno ubrzanje temeljnog tla od 0,11g te kategorije tla B.

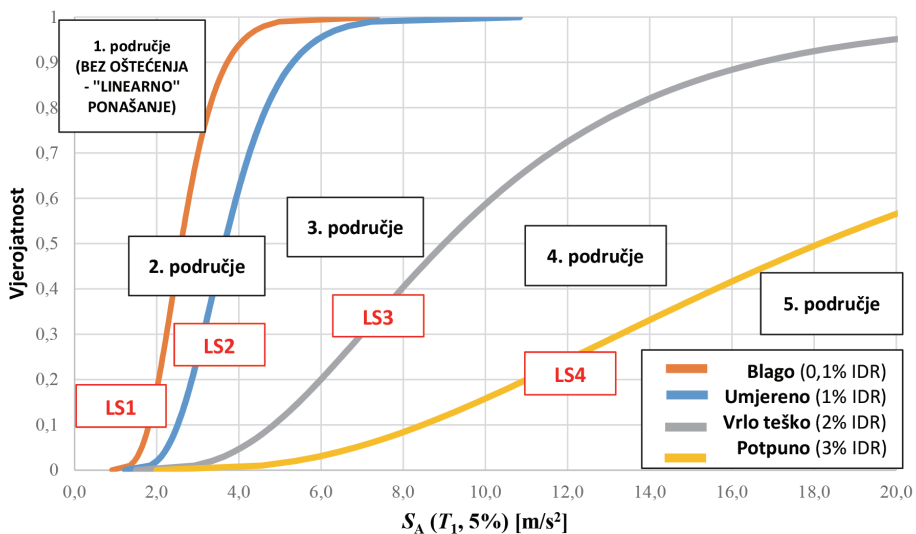


Slika 7. Prikaz sedam potresnih zapisa iz programa Rexel v 3.5, potrebnih za provedbu proračuna IDA (Iervolino i dr., 2009)

5. Rezultati

Nakon proračuna maksimalnih međukatnih pomaka za svih sedam potresnih zapisa sljedeći je korak konstruiranje IDA krivulja na osnovi podataka koji su definirani u prethodnom koraku (IDR_{max} i $S_a(T_1, 5\%)$). Na slici 8. prikazana je konstruirana krivulja vjerojatnosti oštećenja na kojoj su na osi apscisa vrijednosti najvećega međukatnog pomaka IDR_{max} , koje označavaju mjeru odziva konstrukcije, dok su na osi ordinata vrijednosti spektralnoga ubrzanja za prvi vlastiti period s 5% prigušenja $S_a(T_1, 5\%)$, koje označavaju mjeru intenziteta potresa.

Sljedeći se korak odnosi na obradu statističkih podataka. Prije svega, potrebno je definirati granična stanja (engl. *Limit States*) oštećenja konstrukcije. U primjeru ovoga rada primijenjena su granična stanja oštećenja prema HAZUS–MH (FEMA, 2003.), gdje su krivulje vjerojatnosti oštećenja opisane srednjom vrijednošću međukatnoga pomaka IDR_{max} kroz četiri stanja oštećenja: blago (engl. *Slight*), umjereno (engl. *Moderate*), vrlo teško (opsežno) (engl. *Extensive*) i potpuno (engl. *Complete*). Kad se provede proračun za sva četiri granična stanja oštećenja dobiva se kao rezultat graf sa četiri IDA krivulje vjerojatnosti oštećenja prikazane kao lognormalne funkcije, koje označavaju četiri razine oštećenja za svih sedam potresnih zapisa, kako je prikazano na slici 8.



Slika 8. Krivulje vjerojatnosti oštećenja za četiri razine oštećenja

6. Zaključak

Radi procjene potresne oštetljivosti ravninski model armiranobetonskoga okvira zgrade osnovne škole u Osijeku modeliran je u programskom paketu SeismoStruct, ver. 7.0.6 te je podvrgnut setu od sedam potresnih zapisa. Primijenjen je analitički pristup procjeni potresne oštetljivosti, to jest nelinearni dinamički proračun inkrementalnoga tipa (IDA). Kao rezultat proračuna konstruirane su IDA krivulje vjerojatnosti oštećenja, koje predviđaju vjerojatnost dosezanja ili prekoračenja određenoga graničnog stanja kao funkciju intenziteta gibanja temeljnoga tla izraženu spektralnim ubrzanjem. Za potrebe proračuna krivulja vjerojatnosti oštećenja definirana su granična stanja oštećenja za armiranobetonski okvir. Rezultati proračuna IDA pokazali su veliku disperziju rezultata u dinamičkom odzivu konstrukcije. Da bi se dobila što realnija i vjerodostojnija srednja vrijednost svih dinamičkih odziva konstrukcije treba uzeti u obzir veći broj potresnih zapisa (primjerice 30 potresnih zapisa). Ponašanje armiranobetonske konstrukcije bilo je razmjerno povoljno, gotovo linearno, za pojedine potresne zapise (Kyllini, Racha, Friuli), dok je u slučaju ostalih bilo izrazito nepovoljno, to jest zahtjev bočnih deformacija (međukatni pomaci, IDR_{max}) već se pri manjim razinama graničnih stanja oštećenja konstrukcije (0,40% IDR_{max} i 0,60% IDR_{max}) povećavao u većemu koraku u odnosu na intenzitet pobude, to jest nije bio proporcionalan. Globalno, rezultati proračuna pokazuju da IDA krivulje vjerojatnosti oštećenja postaju ravnije, odnosno manjeg nagiba, kako se granična stanja kreću od blagoga do potpunog oštećenja, zbog prirode statističke raspodjele podataka potresnog odziva. U konačnici, može se zaključiti kako je varijabilnost međukatnih pomaka mnogo više izražena pri velikim intenzitetima potresnoga gibanja temeljnoga tla nego pri malim intenzitetima.

Literatura

1. Abdelnaby, A.E.; Elnashai, A.S. 2015. Numerical modeling and analysis of RC frames subjected to multiple earthquakes. *Earthquakes and Structures* 9/5, 957–981.
2. Bertero, V.V.; Clough, R.W.; Oliva, M. 1977. Use of Earthquake Simulators and Large- Scale Loading Facilities in ERCBC, *Workshop on Earthquake-Resistant Reinforced Concrete Building Construction (ERCBC)*, University of California, Berkeley, pp. 1652-1681.
3. Čaušević, M. 2010. *Dinamika konstrukcija*. Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb.
4. Dhakal, R.P.; Mander, J.B.; Mashiko, N. 2006. Identification of critical ground motions for seismic performance assessment of structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 35/8, 989–1008.
5. Državni arhiv u Osijeku, (DAOS). "HR – DAOS – 72 Skupština općine Osijek", fasc. 583. Osnovna škola «Industrijska četvrt» Osijek. Glavni projekt: statički proračun (1968.)

6. FEMA. 2003. *HAZUS-MH Technical Manual*. Federal Emergency Management Agency, Washington, DC, U.S.A.
7. Iervolino, I.; Galasso, C.; Cosenza, E. 2009. REXEL: Computer Aided Record Selection for Code-Based Seismic Structural Analysis. *Bulletin of Earthquake Engineering* 8, 339–362.
8. Koutromanos, I.; Stavridis, A.; Shing, P.B.; Willam, K. 2011. Numerical modeling of masonry-infilled RC frames subjected to seismic loads. *Computers & Structures* 89/11–12, 1026–1037.
9. Mander, J.; Priestley, M.; Park, R. 1988. Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. *Journal of Structural Engineering* 114, 1804–1826.
10. Menegotto, M.; Pinto, P. 1973. Method of analysis for cyclically loaded RC plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. Technical report, Proceedings of the Symp. Resistance and Ultimate Deformability of Struct. Acted on by Well-Defined Repeated Loads, IABSE Reports, Vol. 13.
11. Nikić, D. 2016. Konstruiranje krivulja vjerojatnosti oštećenja za odabrani ravninski model ab okvira. Diplomski rad. Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek. Osijek.
12. Petrone, F.; Shan, L.; Kunnath, S.K. 2016. Modeling of RC Frame Buildings for Progressive Collapse Analysis. *International Journal of Concrete Structures and Materials* 10/1, 1–13.
13. Rabczuk, T.; Akkermann, J.; Eibl, J. 2005. A numerical model for reinforced concrete structures. *International Journal of Solids and Structures* 42/5–6, 1327–1354.
14. Rodrigues, H.; Furtado, A.; Vila-Pouca, N.; Varum, H.; Barbosa, A.R. 2018. Seismic Assessment of a School Building in Nepal and Analysis of Retrofitting Solutions. *International Journal of Civil Engineering* 16/11, 1573–589.
15. Rossetto, T.; Elnashai, A. 2003. Derivation Of Vulnerability Functions For European-type RC Structures Based On Observational Data. *Engineering Structures* 25, 1241–1263.
16. SeismoSoft (2002). *SeismoStruct: A Computer Program for Static and Dynamic Nonlinear Analysis of Framed Structures*. Technical report, Seismosoft Ltd, Pavia, Italy, (<http://www.seismosoft.com>).
17. Spears, D.B.; Owens, B.E.; Bailey, C.M. 2004. The Goochland – *Chopawamsic terrane boundary, central Virginia Piedmont*, in: Southworth C.S., and Burton W., *Geology of the National Capital Region – Field Trip Guidebook: U.S. Geological Survey Circular 1264*, 223–245.
18. Vamvatsikos, D.; Cornell, C. A. 2002. Incremental Dynamic Analysis. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 31, 491–514.

Proračunski mikromodel za procjenu potresne otpornosti armiranobetonskih okvira s ispunskim zidom u kojem se nalaze omeđeni otvori

Davorin Penava, Filip Anić, Sarah Šćurla

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek

Sažetak

Pri projektiranju potresne otpornosti armiranobetonskih okvirnih konstrukcija s ispunskim zidom u kojem se nalaze otvori, omeđujući elementi ključni su pri razradi detalja konstrukcijskog sustava. Omeđujući elementi nisu podložni proračunu kao okvirne konstrukcije i njihova razrada detalja temeljena je na jednostavnim preporukama. Primjenom proračunskih mikromodela utvrđena je razdioba posmične otpornosti između elemenata okvira s ispunskim zidom, pri čemu je iskazan i udio doprinosa omeđujućih elemenata.

Ključne riječi: armiranobetonski okvir, ispunsko zide, prozorski i vratni otvor, omeđujući elementi, udio po-tresne otpornosti

Computational micromodel for earthquake resistance evaluation of reinforced concrete frames with masonry infill walls containing confined openings

Abstract

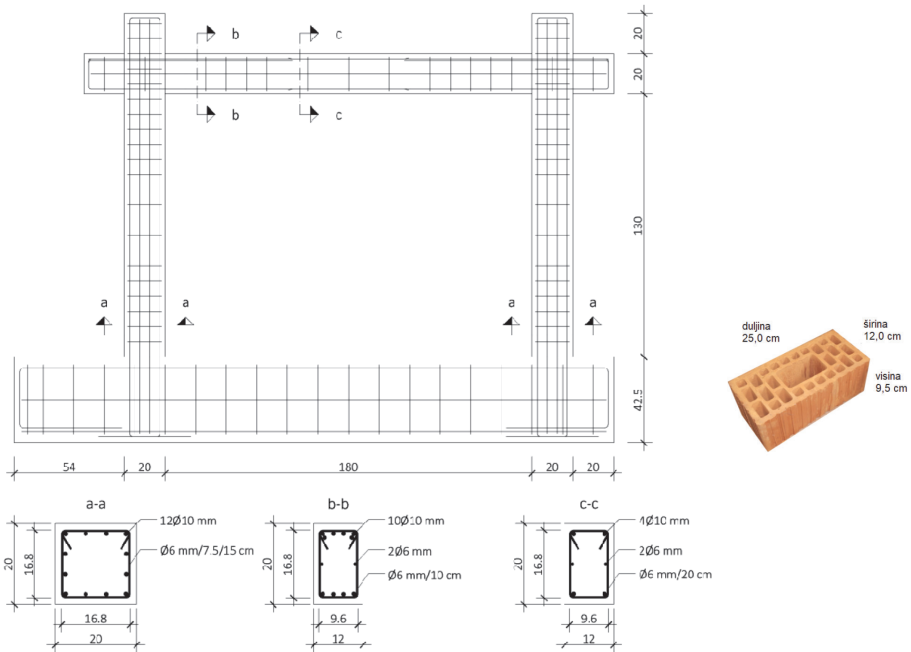
In earthquake resistant design of reinforced concrete frames with masonry infill walls containing openings, confining elements are crucial in detailing of structural system. Confining elements are not subdued to design as frame structures and their detailing is based on simple recommendations. By use of computational micromodels a partial shear resistance of members of infilled frames was determined, and in particular the resistance contribution of confining elements.

Key words: Reinforced concrete frame, masonry infill wall, window and door opening, confining elements, partial earthquake resistance

Uvod

Pri projektiranju potresne otpornosti armiranobetonskih okvirnih konstrukcija s ispunskim zidom (konstrukcijski sustav okvir-zid), u kojemu se nalaze izmješteni i neizmješteni prozorski i vratni otvori, omeđujući elementi (vertikalni serklaži) ključni su pri razradi detalja konstrukcijskoga sustava (CEN, 2004a, 2004b, 2005). Izvedba vertikalnih armiranobetonskih omeđujućih elemenata uz rub otvora omogućava znatna poboljšanja u ponašanju konstrukcijskoga sustava okvir-zid (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014). Međutim, ako omeđujući elementi oko otvora nisu izvedeni pri gradnji, ponašanje ispunskoga zida postaje nepouzdanije, a time i potresni odziv ovih konstrukcijskih sustava podložniji nesigurnosti, iz razloga poput: mnogovrstan slom zida, nepričvršćenost okomito na ravninu zida, neodgovarajuće raspucavanje koje vodi k preuranjenom rušenju (Al-Chaar, Lamb and Issa, 2003; Decanini, Liberatore and Mollaioli, 2006; Kakaletsis and Karayannis, 2007, 2008, 2009; Tasnimi and Mohebkah, 2011; Sigmund and Penava, 2014; Penava *et al.*, 2018). Omeđujući elementi nisu podložni proračunu kao okvirne konstrukcije i njihova razrada detalja temeljena je na jednostavnim preporukama.

Osnova su ovoga rada ispitane u mjerilu 1:2,5 izvedene modelske konstrukcije armiranobetonskih okvira s ispunskim zidom (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014) u kojemu se nalaze izmješteni ili neizmješteni prozorski i vratni otvori (omjer ploština otvora i zida $A_o / A_s \leq 15\%$ (Sigmund and Penava, 2013)), i zid bez otvora (slike 1. i 3. i tablica 1.), projektirane i s razradom detalja kao okvirne konstrukcije prema razredu umjerene duktilnosti u skladu s odredbama norma EN 1992-1-1, EN 1996-1-1 i EN 1998-1 (CEN, 2004a, 2004b, 2005). Ispunsko zid izvedeno je opečnim blokovima svrstanim u Skupinu 2 zidnih elemenata i mortom opće namjene razred čvrstoće M5, u skladu sa zahtjevima konstrukcijskoga zida pri projektiranju potresne otpornosti. Modelske konstrukcije bile su razvrstane u tri grupe prema tablici 1. Modeli Skupine II bili su jednaki onima Skupine I, ali s dodavanjem omeđujućih elemenata pored otvora, dok su modeli Skupine III bili poredbeni modeli. Ispitivanja, pri ponavljajućemu posmičnom djelovanju u ravnini zida, dovela su do spoznaje o dostizanju znatnoga oštećenja zida (4. razred oštećenja u skladu s ljestvicom EMS-98 (Grünthal *et al.*, 1998; Schwarz *et al.*, 2015)) pri katnom pomaku od 1,25%, u usporedbi s 0,5% bez prisutnosti omeđujućih elemenata pored otvora. Međutim, posmična otpornost omeđujućih elemenata otkazivala je u blizini vrhova otvora već pri 3. razredu oštećenja pri katnim pomacima između 0,75% i 1% (slike 2. i 3.).



Slika 1. Nacrt s razradom detalja armiranobetonske okvirne konstrukcije u mjerilu 1:2,5 ispitane u laboratoriju (lijevo) i šuplji opećni zidni elementi (desno) (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014)

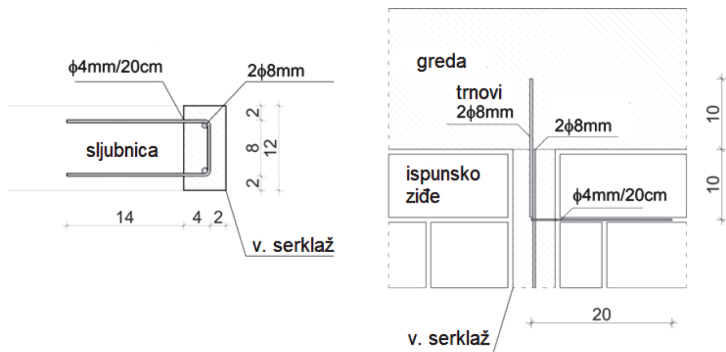


Slika 2. Ispitane u mjerilu 1:2,5 izvedene modelske armiranobetonske okvirne konstrukcije s ispunskim zidom u kojemu se nalaze omeđeni otvori, i zidne bez otvora (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014)

Tablica 1. Razredba i opis modelskih konstrukcija ispitanih u laboratoriju (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014)

Modelska konstrukcija		Prikaz modelske konstrukcije	Otvor		Opis
Skupina	Oznaka		Vrsta, mjere i omjer ploština	Razmještaj	
II	1		Vratni otvor	Neizmješten	Modelske konstrukcije s omeđenim otvorima u zidu
			$l_o/h_o=0,35/0,90$ m	$e_o = l_o/2 = 0,90$ m	
			$A_o/A_i=0,14; A_o=0,32$ m ²		
	2		Prozorski otvor	Neizmješten	
			$l_o/h_o=0,50/0,60$ m	$e_o = l_o/2 = 0,90$ m	
			$A_o/A_i=0,13; A_o=0,30$ m ²	$P=0,40$ m	
	3		Vratni otvor	Izmješten	
			$l_o/h_o=0,35/0,90$ m	$e_o = h_i/5 + l_o/2 = 0,44$ m	
$A_o/A_i=0,14; A_o=0,32$ m ²					
4		Prozorski otvor	Izmješten		
		$l_o/h_o=0,50/0,60$ m	$e_o = h_i/5 + l_o/2 = 0,44$ m		
		$A_o/A_i=0,13; A_o=0,30$ m ²	$P=0,40$ m		
III	1		-	-	Poredbene modelske konstrukcije
	2		-	-	

Tumač oznaka: A_o je ploština otvora koja je jednaka umnošku visine (h_o) i duljine otvora (l_o); A_i je ploština ispunskog zida koja je jednaka umnošku visine (h_i) i duljine zida (l_i); $h_i = 1.3$ m; $l_i = 1.8$ m; e_o je odmaknutost otvora; $t_i = 0.12$ m je debljina zida; P je visina parapetnog zida.


Slika 3. Nacrt i razrada detalja vertikalnoga armiranobetonskog omeđujućeg elementa (serklaža) u poprečnom presjeku (lijevo) i po visini (desno) (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014)

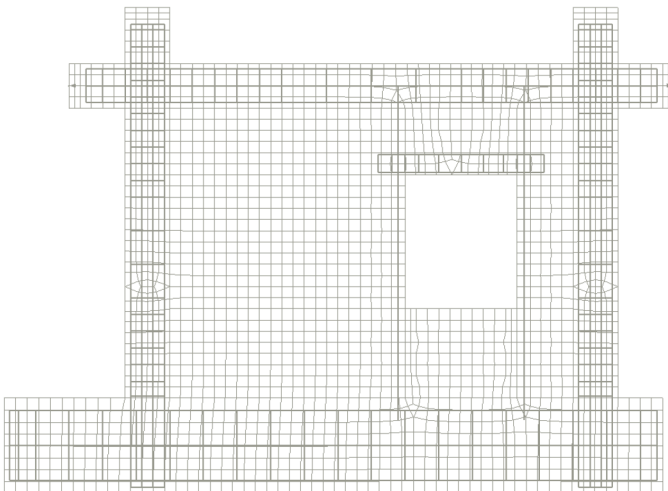
U ovom je radu primjenom proračunskih mikromodela utvrđena razdioba poprečne (potresne) otpornosti između elemenata konstrukcijskoga sustava okvir-ziđe pri razredima oštećenja u skladu s europskom makroseizmičkom ljestvicom EMS-98 (Grünthal *et al.*, 1998; Schwarz *et al.*, 2015) te je iskazan udio doprinosa svakoga elementa zasebno, a osobito omeđujućih elemenata.

Proračunski mikromodel

Proračunski je pojednostavljeni mikromodel (slika 4.) razvijen u računalnom programu ATENA 2D Eng (Cervenka, Jendele and Cervenka, 2012; Pryl and Cervenka, 2013; Cervenka Consulting s.r.o., 2015) i vrednovan prema rezultatima dobivenima ispitivanjima u mjerilu 1:2,5 izvedenih modelskih konstrukcija (Penava, 2012; Sigmund and Penava, 2014), a što je pobliže opisano u publikaciji (Penava, Sigmund and Kožar, 2016).

Prihvaćeni pristup razvoja proračunskoga modela, u usporedbi s drugim dostupnim rješenjima poput onih danih u (Crisafulli, Carr and Park, 2000; Cavaleri and Di Trapani, 2015; Furtado, Rodrigues and Arêde, 2015; Laughery and Pujol, 2015; Asteris *et al.*, 2016, 2017; Di Trapani *et al.*, 2018), posjedovao je mogućnost izravnoga uzimanja različitih vrsta, veličina i razmještaja otvora i omeđujućih elemenata u obzir, predočavanja mnogovrsnoga sloma i oštećenja ziđa i razmatranja razdiobe posmične (potresne) otpornosti prema elementima konstrukcijskoga sustava (Al-Chaar, 2008; Mohebkah, Tasnimi and Moghadam, 2008; Koutromanos, 2011; Campbell, 2012; Asteris *et al.*, 2013; Sarhosis, Tsavdaridis and Giannopoulos, 2014; Penava, Sigmund and Kožar, 2016).

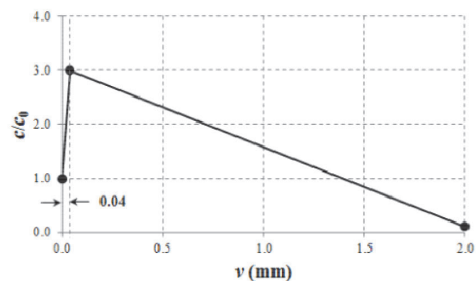
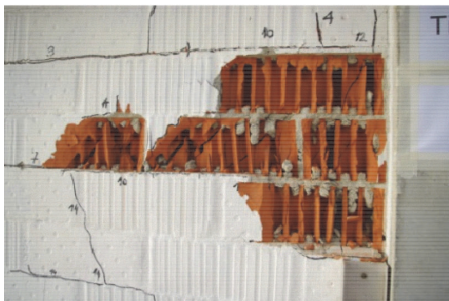
Proračunski je model bio ograničen na ravninu, kako je bilo i tijekom ispitivanja.



Slika 4. Proračunski model armiranobetonske okvirne konstrukcije s ispunskim zidom razvijen u računalnom programu ATENA 2D Eng (Cervenka Consulting s.r.o., 2015)

Geometrijska svojstva proračunskoga modela uzeta su jednaka onima u mjerilu 1:2,5 izvedenih i ispitanih modelskih konstrukcija (slike 1. do 4.). Područje u modelu koje obuhvaćaju beton i zidni elementi izvedeno je ravninskim izoparametarskim devetčvornim četverostranim i šestčvornim konačnim elementima trokutnoga oblika, dok su šipke armature izvedene tročvornim štapnim elementima, a sljubnice spojnim elementima s mogućnošću isključenja vlačne čvrstoće. Veličina konačnih elemenata, na osnovi međusobne usporedbe približavanja slijednih rezultata proračuna, utvrđena je kao jedna četvrtina veličine zidnoga elementa (slika 4.). Zidni elementi i spoj zidnih elemenata i sljubnica morta (spojni elementi nulte debljine) izvođeni su zasebno, jednako kao i na stvarnoj konstrukciji. Normalna i tangencijalna krutost spojnih elemenata procijenjena je na osnovi izraza $K_{nn}=E/t$ odnosno $K_{tt}=G/t$, gdje je E modul elastičnosti, a G modul posmika zidnoga elementa, dok je t debljina sljubnice morta (Cervenka, Jendele and Cervenka, 2012; Pryl and Cervenka, 2013).

Prihvaćeni konstitucijski zakoni ponašanja gradiva s pripadnim svojstvima, utvrđeni normiranim ispitivanjima ili putem teorijskih izraza dani su u (Penava, Sigmund and Kožar, 2016). Dodatno, poseban učinak povezivanja šupljega opečnog zidnog elementa i sljubnice morta (Penava *et al.*, 2016) uzet je u obzir kod spojnoga elementa horizontalnih sljubnica dodavanjem funkcije očvršćivanja početne posmične čvrstoće (slika 5.). Beton i zidni elementi predstavljeni su modelom dostupnim u programu NonLinCementitious2 odnosno SBETA (Cervenka, Jendele and Cervenka, 2012; Pryl and Cervenka, 2013).

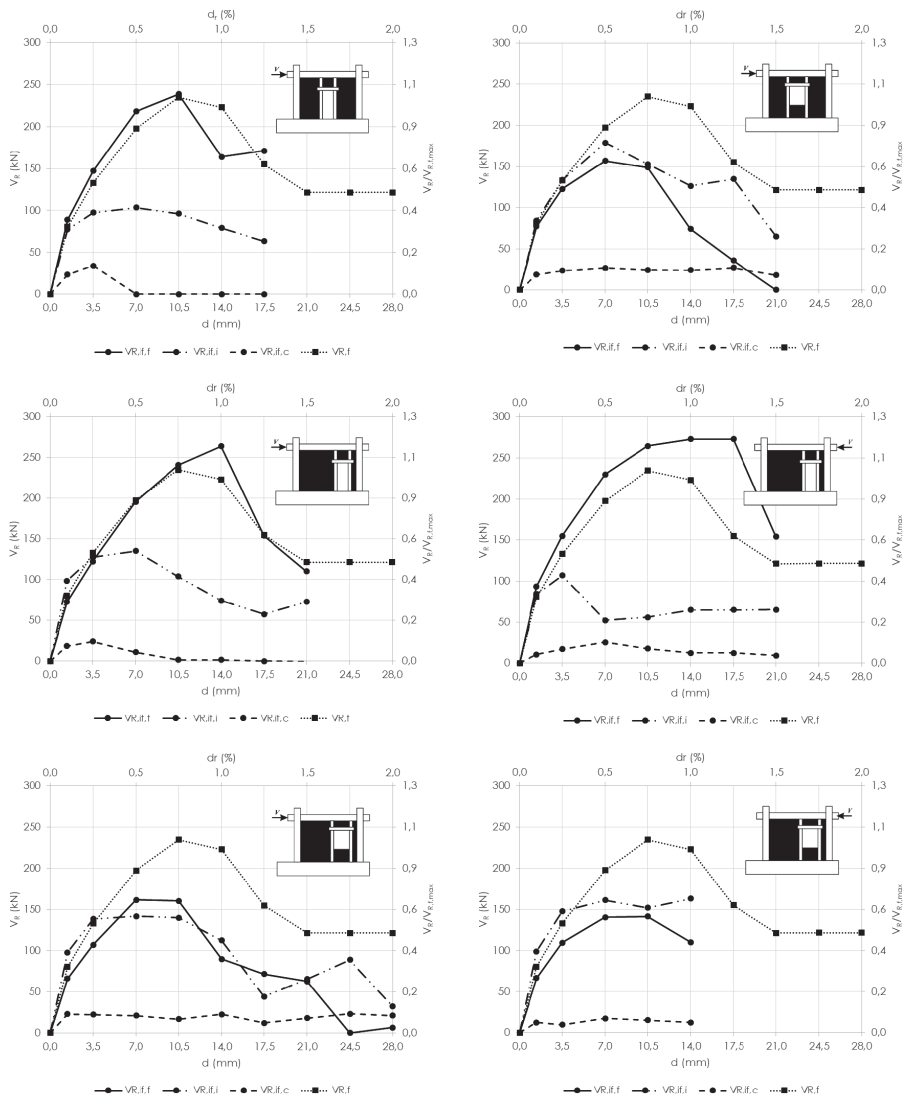


Slika 5. Povezivanje u spoju šupljega opečnog zidnog elementa i horizontalne sljubnice morta (lijevo) i funkcija očvršćivanja početne posmične čvrstoće (desno)

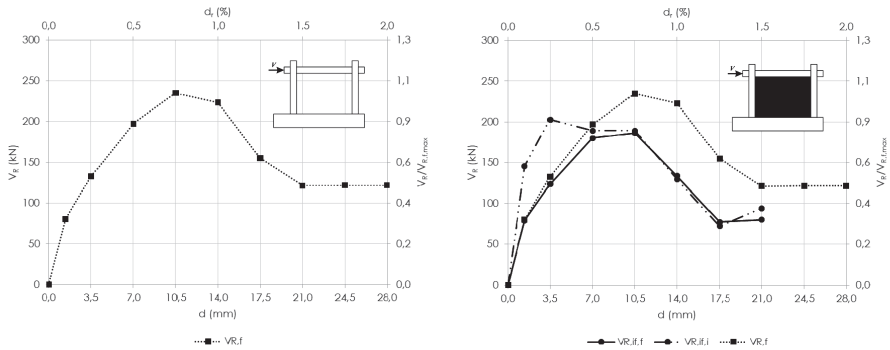
Proračuni i rezultati

Vrijednosti posmične (potresne) otpornosti elemenata konstrukcijskoga sustava, to jest armiranobetonskoga okvira $V_{R,if,f}$ (kN), ispunskoga ziđa $V_{R,if,i}$ (kN) i armiranobetonskoga omeđujućeg elementa $V_{R,if,c}$ (kN), određene su nelinearnim statičkim proračunom postupnim guranjem grede okvira s prirastom pomaka $d=0,1$ mm do

ciljanoga pomaka $d=28$ mm to jest $d_r=2\%$. (rušenje okvira). Vrijednosti su opažane u ravni stopa stupova okvira (slike 6. i 7.). Udio poprečne otpornosti iskazan je putem $V_R / V_{R,f,max} \times 100$ (%), gdje je $V_{R,f,max}$ vršna posmična otpornost okvira bez ispunškoga žida.



Slika 6. Razdioba posmične otpornosti na elemente konstrukcijskoga sustava okvir-žid (Skupina II)



Slika 7. Razdioba posmične otpornosti na elemente konstrukcijskoga sustava okvir-ziđe (Skupina III)

Razljudak

Vrednovani proračunski mikromodel u mjerilu 1:2,5 izvedenih i ispitanih modelskih konstrukcija armiranobetonskih okvira s ispunskim zidom, u kojemu se nalaze omeđeni otvori, i zide bez otvora, upotrijebljen je radi određivanja razdiobe posmične otpornosti na pojedinačne (ne)konstrukcijske elemente sustava, što nije moguće postići mjernim uređajima tijekom ispitivanja. Odabrani modelski pristup omogućio je ispunjavanje svih geometrijskih zahtjeva na modele, neovisno o vrsti, veličini i razmještaju otvora, s izravnim modeliranjem gradiva kakva su u stvarnosti. Općenito je razdioba posmične otpornosti između elemenata sustava bila različita od slučaja do slučaja, te je bila pod utjecajem vrste, veličine i razmještaja otvora te prisutnosti omeđujućih elemenata. U slučaju vratnoga otvora projektne su zahtjevi veći od očekivanih. Izvedba omeđujućih elemenata preporučljiva je zbog umanjivanja nepouzdanosti procjene odziva ovih konstrukcijskih sustava.

Literatura

- Al-Chaar, G. K. (2008) *Constitutive models for nonlinear finite element analysis of masonry prisms and infill walls*. Washington, DC.
- Al-Chaar, G. K., Lamb, G. E. and Issa, M. A. (2003) "Effect of openings on structural performance of unreinforced masonry infilled frames", *ACI Special Publication*, 211, pp. 247–262.
- Asteris, P. G. et al. (2013) "Mathematical micromodeling of infilled frames: state of the art", *Engineering Structures*. Elsevier Ltd, 56, pp. 1905–1921. doi: 10.1016/j.engstruct.2013.08.010.
- Asteris, P. G. et al. (2016) "A macro-modelling approach for the analysis of infilled frame structures considering the effects of openings and vertical loads", *Structure and Infrastructure Engineering*, 12(5), pp. 551–566. doi: 10.1080/15732479.2015.1030761.

- Asteris, P. G. *et al.* (2017) "Numerical modelling of out-of-plane response of infilled frames: State of the art and future challenges for the equivalent strut macromodels", *Engineering Structures*. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.10.012.
- Campbell, J. (2012) *Numerical Model for Nonlinear Analysis of Masonry Walls*. PhD Thesis. Rheinisch –Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- Cavaleri, L. and Di Trapani, F. (2015) "Prediction of the additional shear action on frame members due to infills", *Bulletin of Earthquake Engineering*, 13(5), pp. 1425–1454. doi: 10.1007/s10518-014-9668-z.
- CEN (2004a) *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings (EN 1992-1-1:2004)*. Brussels: European Committee for Standardization.
- CEN (2004b) *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings (EN 1998-1-1:2004)*. Brussels: European Committee for Standardization.
- CEN (2005) *Eurocode 6: Design of masonry structures - Part 1-1: General rules for reinforced and unreinforced masonry structures (EN 1996-1-1:2005)*. Brussels: European Committee for Standardization.
- Cervenka Consulting s.r.o. (2015) "ATENA for Non-Linear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures". Prague: Červenka Consulting s.r.o.
- Cervenka, V., Jendele, L. and Cervenka, J. (2012) *ATENA Program Documentation Part 1 Theory*. Prague: Cervenka Consulting Ltd.
- Crisafulli, F. J., Carr, A. J. and Park, R. (2000) "Analytical modelling of infilled frame structures - a general review", *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 33(1), pp. 30–47.
- Decanini, L. D., Liberatore, L. and Mollaioli, F. (2006) "The Influence of Openings on the Seismic Behaviour of Infilled Framed Structures", in *15th World Conference on Earthquake*. Lisbon, Portugal.
- Furtado, A., Rodrigues, H. and Arêde, A. (2015) "Modelling of masonry infill walls participation in the seismic behaviour of RC buildings using OpenSees", *International Journal of Advanced Structural Engineering*, 7(2). doi: 10.1007/s40091-015-0086-5.
- Grünthal, G. *et al.* (1998) *European macroseismic scale 1998*. Luxembourg.
- Kakaletsis, D. J. and Karayannis, C. G. (2007) "Experimental investigation of infilled R/C frames with eccentric openings", *Structural Engineering and Mechanics Journal*, 26(231–250).
- Kakaletsis, D. J. and Karayannis, C. G. (2008) "Influence of masonry strength and openings on infilled R/C frames under cycling loading", *Journal of Earthquake Engineering*, 12(2), pp. 197–221. doi: 10.1080/13632460701299138.

Kakaletsis, D. J. and Karayannis, C. G. (2009) "Experimental investigation of infilled reinforced concrete frames with openings", *ACI Structural Journal*, 106(2), pp. 132–141.

Koutromanos, I. (2011) *Numerical Analysis of Masonry-Infilled Reinforced Concrete Frames Subjected to Seismic Loads and Experimental Evaluation of Retrofit Techniques*. University of California, San Diego.

Laughery, L. and Pujol, S. (2015) "Compressive strength of unreinforced struts", *ACI Structural Journal*, 112(5). doi: 10.14359/51687711.

Mohebkhah, A., Tasnimi, A. A. and Moghadam, H. A. (2008) "Nonlinear analysis of masonry-infilled steel frames with openings using discrete element method", *Journal of Constructive Steel Research*, 64(12), pp. 1463–1472. doi: 10.1016/j.jcsr.2008.01.016.

Penava, D. (2012) *Influence of openings on seismic response of masonry infilled reinforced concrete frames*. PhD thesis. Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Osijek, Croatia.

Penava, D. et al. (2016) "Clay block masonry and mortar joint interlocking", *Journal of the Croatian Association of Civil Engineers*, 68(08), pp. 609–616. doi: 10.14256/JCE.1576.2016.

Penava, D. et al. (2018) "Contribution of RC columns and masonry wall to the shear resistance of masonry infilled RC frames containing different in size window and door openings", *Engineering Structures*, 172, pp. 105–130. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.06.007.

Penava, D., Sigmund, V. and Kožar, I. (2016) "Validation of a simplified micromodel for analysis of infilled RC frames exposed to cyclic lateral loads", *Bulletin of Earthquake Engineering*, 14(10), pp. 1–26. doi: 10.1007/s10518-016-9929-0.

Pryl, D. and Cervenka, J. (2013) *ATENA program documentation, part 1 of 1, troubleshooting manual*. Prague: Cervenka Consulting Ltd.

Sarhosis, V., Tsavdaridis, K. D. and Giannopoulos, I. (2014) "Discrete Element Modelling of Masonry Infilled Steel Frames with Multiple Window Openings Subjected to Lateral Load Variations", *The Open Construction and Building Technology Journal*, 8(1), pp. 93–103.

Schwarz, J. et al. (2015) "Vulnerability assessment and damage description for R.C. frame structures following the EMS-98 principles", *Bulletin of Earthquake Engineering*. Springer Netherlands, 13(4), pp. 1141–1159. doi: 10.1007/s10518-014-9694-x.

Sigmund, V. and Penava, D. (2013) "Assessment of masonry infilled reinforced concrete frames with openings", *Technical Gazette*. Strojariski fakultet u Slavonskom Brodu, Elektrotehnički fakultet u Osijeku, Građevinski fakultet u Osijeku, 20(3), pp. 459–466.

Sigmund, V. and Penava, D. (2014) "Influence of openings, with and without confinement, on cyclic response of infilled R-C frames - An experimental study", *Journal of Earthquake Engineering*, 18(1), pp. 113–146. doi: 10.1080/13632469.2013.817362.

Tasnimi, A. A. and Mohebkhah, A. (2011) "Investigation on the behaviour of brick-infilled steel frames with openings, experimental and analytical approaches", *Engineering Structures*, 33.

Di Trapani, F. *et al.* (2018) "Empirical Equations for the Direct Definition of Stress–Strain Laws for Fiber-Section-Based Macromodeling of Infilled Frames", *Journal of Engineering Mechanics*, 144(11), p. 04018101. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001532.

Nonlinear vibration analysis: analytic versus numerical methods – application to cable dynamics

Marija Demšić

Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet

Abstract

The analysis and prediction of the dynamic response of a nonlinear system can be very demanding because, apart from the primary resonance response, the sub- and super-harmonic responses can be induced, and if natural frequencies have integer ratio internal resonance is also possible. Mathematical analysis of such system usually requires the use of an asymptotic methods and numerical procedures. The paper presents the applications of analytical and numerical methods to nonlinear cable response, and discussion on both approaches is given.

Key words: nonlinear vibrations, asymptotic methods, numerical methods, cables

Analiza nelinearnih oscilacija: analitičke naspram numeričkih metoda – primjena u dinamici kabela

Sažetak

Analiza i predviđanje dinamičkoga odziva nelinearnoga sustava zahtjevan je zadatak, jer se osim primarne rezonancije mogu inducirati subharmonijski i superharmonijski odziv, a u slučaju cjelobrojnoga omjera prirodnih frekvencija moguća je pojava unutarnje rezonancije. Iznimno složena matematička analiza obično zahtijeva primjenu asimptotskih metoda te numeričkih postupaka proračuna. U radu je predstavljena primjena analitičkih i numeričkih metoda u analizi nelinearnoga odziva kabela, te su razmotrene prednosti i mane oba pristupa.

Ključne riječi: nelinearno titranje, asimptotske metode, numerički postupci, kabeli

1. Introduction

Today, scientists in the engineering sector have dedicated a lot of effort to reduce the number of approximations being introduced in mathematical model because linear analysis have become insufficient to describe the behaviour of the physical system adequately. One of the main reasons for modelling a physical system as a nonlinear one is that totally unexpected phenomena sometimes occur in nonlinear systems, phenomena that are not predicted or even hinted at by linear theory. Development of new methods and improvement of existing techniques have enabled research of these phenomena. One of the important aspects of nonlinearity are certainly nonlinear vibrations. Several methods are available for the solution of nonlinear vibration problems, like approximative analytical techniques, graphical procedures, and numerical methods. In civil engineering, nonlinear vibrations occur in many structures, especially those that are in their nature extremely flexible, low weight, and with low damping such as cable-stayed bridges or cable nets. Given the many analytical and numerical methods available today, this paper mentions several that are often used in the analysis of nonlinear cable vibrations. Analytic analysis of the nonlinear dynamic response is obtained by using a classical perturbation procedure such as the method of averaging and method of multiple scales (MMS). These methods can be directly applied to partial differential equations [1,2,3], though the mathematical process itself can be more involved depending on the possible resonances of system. A more commonly used approach is performing space discretization by first applying the Galerkin reduction to obtain a system of ordinary differential equations to which perturbation analysis is applied for determining time-dependent functions [4]. By using analytical methods, it is possible to determine solutions in stable or unstable domains. Complex nonlinear responses can also be determined numerically; however, such models can only include certain bifurcation points because the numerical integration of the solution can only be determined in a stable domain [5]. The first section of paper presents the comparison of basic philosophies of both approaches without explaining the mathematical procedure needed to obtain solutions. After which the examples of relevant research in cable dynamics obtained by analytical and numerical methods are displayed, and some of advantages and disadvantages of methods are discussed.

2. Basic philosophy

The solution obtained by perturbation methods is formed as an expansion in which known solution, ie. solution of linear problem is supplemented by terms that represent a small corrections [6-9]. The function expansion is formed using the small perturbation parameter ε . Corrections need to ensure that the first correction is small

compared to the basic unperturbed solution, then that second is small compared to the first correction and so on, all in the limit of small ϵ [6]. Ordering is the only rule that need to hold-up for the implementation of the perturbation procedure and the construction of the asymptotic solution. By formation of perturbation hierarchy a system of equations suitable for successive solving is formed. The usual procedure for implementing a perturbation process is the formation of a nonlinear algebraic or differential equation in a non-dimensional space, after which a small parameter ϵ is chosen based on which a perturbation solution is formed. However, there are also cases when a small parameter that would be suitable for ranking does not appear explicitly in the equation and it is necessary to model the physical system adequately. Physical understanding of the nature of problems in the modelling process is crucial for the proper formulation of a mathematical problem. Scaling of differential equation terms can have a decisive influence on the structure of the final asymptotic solution with clear connotations on accuracy and physical meaning [7]. In this case we can talk about the ‘artificial’ parameter of the popularly called ‘book-keeping parameter’ [8-10]. This parameter introduces an implicit assumption of the influence of nonlinear coefficients, damping and excitation on system response [7]. Table 1 gives the recommendations for scaling in the analysis of parabolic cable dynamics at primary, subharmonic and superharmonic resonance [1].

Table 1. Order of first occurrence of contribution in the perturbation equations

	excitation	damping	quadratic	cubic
ϵ	S2 S3			
ϵ^2		S2	P S2 S3	
ϵ^3	P	P S3		P S2 S3

(P: primary; S2: 1/2-sub, 2-super; S3: 1/3-sub, 3-super) [1]

Contrary to asymptotic methods, the application of numerical methods in community of engineers and scientist is common use. Generally, for the computation of dynamic response of nonlinear system requires discretisation in space and time domain, and solution is obtained in incremental form. Finite elements of finite differences are used to describe nonlinear model in space domain. For example, by using finite elements to model cables several types of elements can be employed: axial, parabolic or catenary finite element, all comprising geometric stiffness matrix taking into account nonlinear characteristics of physical system. Catenary elements have some advantages, such as requiring fewer numbers of elements, but it also has a disadvantage: it needs to employ iterative procedures to obtain stiffness matrix [11]. Time domain integration is usually carried out using predictor-corrector technique or Runge-Kutta method. Final form of incremental solution is highly depended on space discretisation and time step.

2.1. Damped linear vibrations

To present basic idea of asymptotic and numeric methods, we will use advantage of knowing exact solution of differential equation of free damped vibration:

$$\ddot{x}(t) + \mu \dot{x}(t) + x(t) = 0$$

The basic perturbation procedure, the straightforward expansion, consists of an idea that the final solution can be written in the form of an expansion with a small perturbation parameter ε :

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + O(\varepsilon^n)$$

In the case of low damping, the value of damping parameter can be used for perturbation scaling parameter ε .

The basic numerical integration is usually presented by Euler method, which gives incremental solution:

$$\begin{aligned} x(t_i + \Delta t) &\approx x(t_i) + \Delta t \cdot \dot{x}(t_i) \\ \dot{x}(t_i + \Delta t) &\approx \dot{x}(t_i) + \Delta t \cdot \ddot{x}(t_i) \end{aligned}$$

Comparison of these two methods with exact solution is shown in Figure 1. For asymptotic method, it can be seen that all the solutions match the exact response in the beginning of the response, but as time is increasing more correction terms are needed to take into account. The breakdown in the straightforward expansion is due to its failure to account for the nonlinear dependence of the frequency of the system on the nonlinearity. A number of techniques that yield uniformly valid expansions have been developed [8]. Some of those techniques are MMS and method of averaging also known as van der Pol method [9]. These techniques take into account that changes due to nonlinearities of the system do not happen at the same time rate. In order to consider this by MMS, it needs to represent the response as a function of multiple independent variables, or scales, instead of a single variable [8]:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots + O(\varepsilon^n)$$

In which the number of independent time scales depends on the order to which the expansion is carried out. Solution obtained by MMS for the expansion ε^2 is shown on Figure 2a.

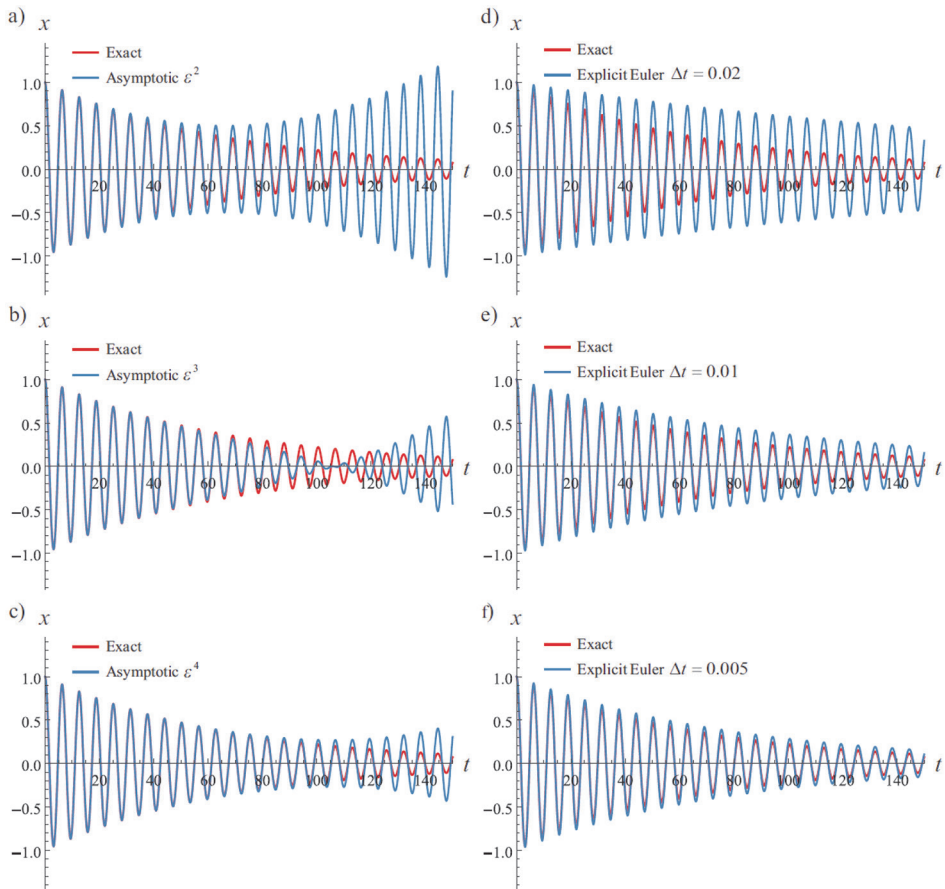


Figure 1. Response function. (a-c) Straightfoward expansion; (d-e) Euler method

Numerical solutions for different time steps are shown in Figure 1d, e and f. All responses show the growth of error that ultimately leads to a significant deviation from exact solution. Error can be further reduced by step reduction but that only increases calculation time, much more effective is to use some of the higher order methods. For example, the solution using the explicit Runge-Kutta method is shown in the Figure 2b. As can be seen, both procedures give satisfactory results in the case of linear system response.

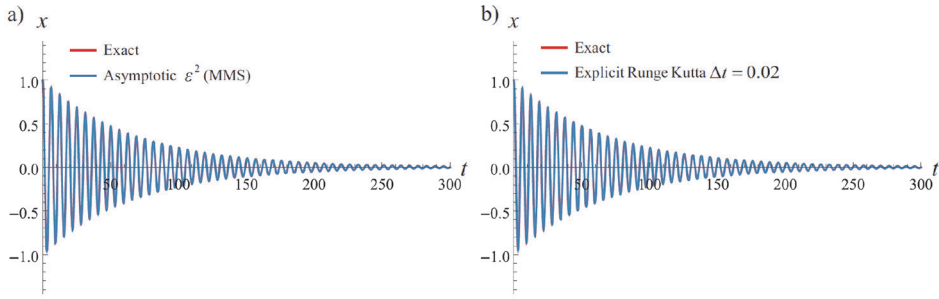


Figure 2. Response function. (a) MMS; (b) Runge-Kutta method

3. Cable dynamics

Nonlinear responses of a parabolic cable are of theoretical interest in applied mechanics and an archetypal model of various phenomena in dynamics [1]. Partial differential equations of cable motion are usually reduced by the Galerkin method to ordinary differential equations (ODE) that contain quadratic and cubic nonlinearities produced by the initial curvature and stretching. Frequency response curve that characterise cable response to primary resonance is displayed in Figure 3a. The figure shows asymptotic solution obtained by MMS method and two numerical solution. Solutions labelled as NI determined by direct numerical integration of reduced ODE in Wolfram *Mathematica*. Calculation starts with homogeneous initial conditions, and in the subsequent calculations after a steady-state amplitude is achieved, the excitation frequency/amplitude is changed. Other numerical model of cable is obtained by space discretisation of system using finite differences, and predictor-corrector algorithm is used for integration in time domain. The results of the finite difference model for homogeneous and nonhomogeneous initial conditions (FD-hic and FD-nic, respectively) are displayed. Nonhomogeneous conditions are set in the vicinity of the steady state determined by the MMS process. It can be seen that the results are in good agreement in the region where solution is unique but in the region where response depends on nonhomogeneous initial conditions, the numerical models have difficulty describing high-amplitude vibrations, and solution leads to curve of low amplitude vibrations. Characteristic stream plot of vector field of the initial amplitude and phase is displayed in Figure 3b. All initial conditions starting in the shaded area result in high-amplitude response. However, in the regions where stable and unstable curve are approaching each other the stable node (P1) and saddle point (P2) are approaching. Since numerical models are very sensitive to any perturbation in the system, the response by using these models usually led to low-amplitude vibration (P3).

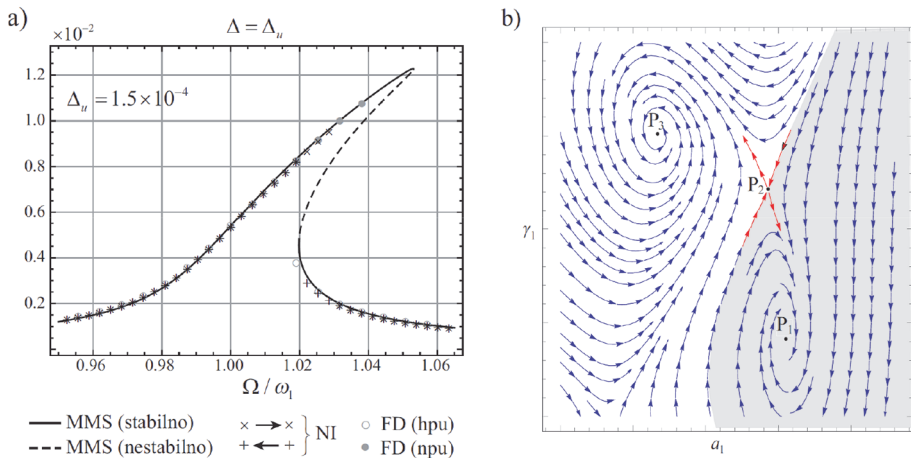


Figure 3. a) Frequency-amplitude curve at primary resonance for constant excitation amplitude [12], b) initial conditions vector field [12]

Frequency-amplitude curve due to primary resonance is well known and analysis of the solutions with analytical or numerical model gives good prediction of the final values of amplitude. Analysis that is more complicated is in the case when nonlinear interaction happens in the system response. Figure 4 display a frequency-amplitude curve for the case of interaction due to primary and parametric resonance. Frequency-amplitude curve are constructed for amplitudes a_1 and a_2 of generalized coordinates and w_s and w_c that denote the maximum value of nodal displacement in the middle and at a quarter of the cable span, respectively. For the construction of these curves several numerical methods were used.

Only MMS solutions that displayed by continuous line is fully analytical solution. In the case of interaction (MMS – INT) system of equations that is obtained in analytical form is solved by numerical methods using Wolfram *Mathematica*. Besides already mentioned NI and FD model, finite element (FE) results obtained using SAP2000 are shown also. All of these numerical models are used to verify analytical expressions obtained by MMS technique. In these frequency-amplitude curve it is important the emphasize solution between two Hopf bifurcation labelled by H_1 and H_2 . It is worth noting that in this region for specific initial conditions, numerical models NI and FD have a dynamic response [4]. Thanks to numerical models, it was concluded that in that region a regular system response can exist with frequencies that match the primary and parametric resonance. A slight variation in the amplitude causes this branch to be classified as unstable, thus this response is unstable only due to nonexistence of a steady state [8].

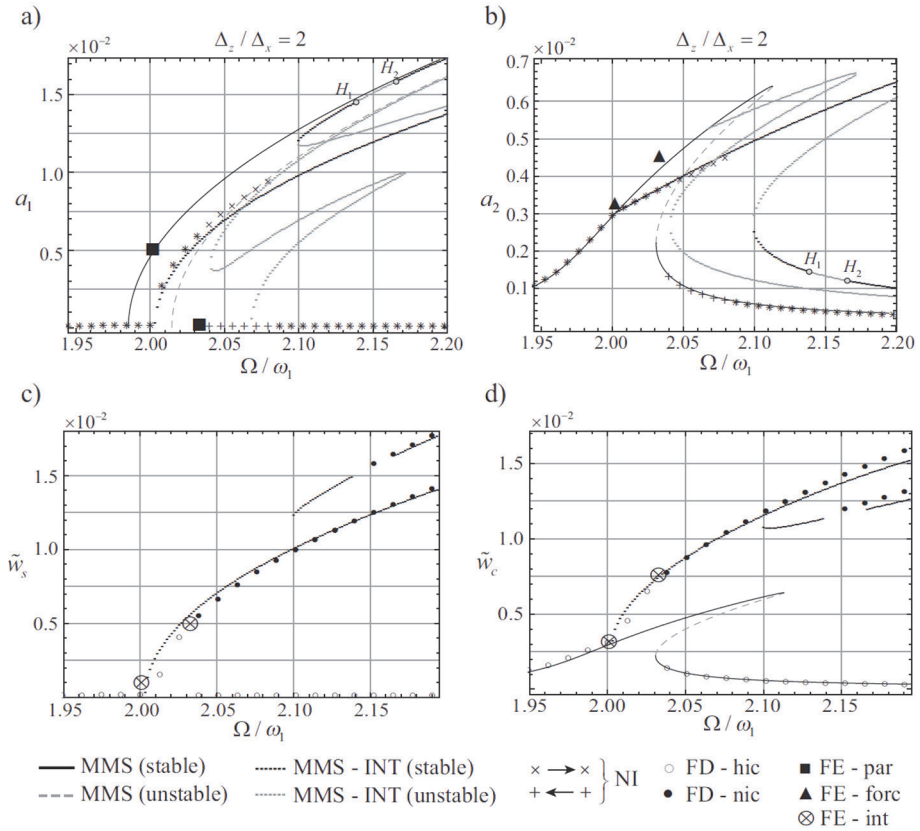


Figure 4. Frequency-amplitude curves [4]. a) parametric resonance amplitude; b) primary resonance amplitude; c) maximum displacement in middle of cable span; d) maximum displacement in quarter of cable span

By using analytical analysis, the regions of nonlinear resonance in excitation parameter space can be easily explored (Figure 5). Boundary curves that are obtained by analytical expressions allow definition of hysteresis, and high- or low-amplitude regions while results of numerical models require in depth analysis of time-history function response (steady-state amplitude, Fourier spectrum).

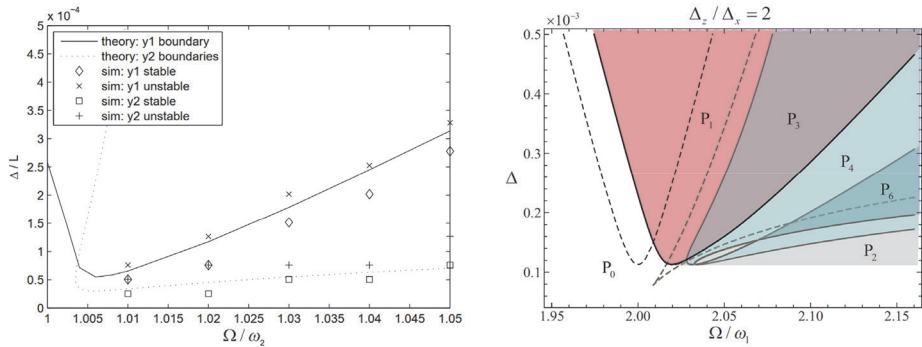


Figure 5. Resonance region due to interaction of primary and parametric resonance. a) boundaries obtained using method of averaging and numerical simulations [13]; (b) MMS [4]

4. Conclusion

It is important to note that analytic asymptotic methods are valid in specific frequency domain and for specific ordering in formation of perturbation hierarchy. Demanding task in the analytical approach is description of the model by continuous functions. This implies that only simple models can be analysed. However, since use of analytic modelling is not to describe a real structure even in linear theory, but for in-depth understanding of a certain nonlinear phenomena, we can argue that their use is justified or even necessary. Complex behaviour require using some kind of theoretical method, though combined with selected numerical tools, rather than generic computer simulations on large discrete models [1]. The most reliable results on theoretical analysis of nonlinear oscillations are achieved by simultaneously using analytical and numerical methods. Therefore, the analytical model offers a framework for describing the results obtained by numerical methods.

References

- [1] G. Rega, Nonlinear vibrations of suspended cables – part I: modeling and analysis, *Applied Mechanics Reviews* 57 (6) (2004) 443–478, <https://doi.org/10.1115/1.1777224>
- [2] G. Rega, W. Lacarbonara, A.H. Nayfeh, C.M. Chin, Multiple resonances in suspended cables: direct versus reduced-order models, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 34 (1999) 901–924. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00065-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00065-1).
- [3] A.H. Nayfeh, H.N. Arafat, C.M. Chin, W. Lacarbonara, Multimode interactions in suspended cables, *Journal of Vibration and Control* 8 (2002) 337–387, <https://doi.org/10.1177/107754602023687>.

- [4] M. Demšić, M. Uroš, A. Jaguljnjak Lazarević, D. Lazarević, Resonance regions due to interaction of forced and parametric vibration of a parabolic cable, *Journal of Sound and Vibration* 447 (2019) 78-104, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.036>
- [5] V. Gattulli, L.Martinelli, F. Perotti, F. Vestroni, Nonlinear oscillations of cables under harmonic loading using analytical and finite element models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004) 69–85, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.09.008>.
- [6] Jakobsen, P.: Introduction to the method of multiple scales. Cornell University Library, 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1312.3651v2> (03.07.2014.)
- [7] Marinca, V., Nicolae, H.: *Nonlinear Dynamical Systems in Engineering*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] Nayfeh, A.H., Mook, D.T.: *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons Inc., USA, 1995.
- [9] Nayfeh, A.H.: *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons Inc., USA, 1993.
- [10] Abe, A.: On non-linear vibration analysis of continuous systems with quadratic and cubic non-linearities, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 41, No. 8, 2006., pp. 873-879.
- [11] M. Nikolić, V. Raduka, Numerical Investigation of Cable Parametric Vibrations, *Proceedings of 11th International Conference on Vibration Problems* (2013)
- [12] M. Demšić, Nelinearna analiza oscilacija kabela i njihove interakcije s konstrukcijom, PhD thesis, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Zagreb, 2015.
- [13] A. Gonzalez-Buelga, S.A. Neild, D.J. Wagg, J.H.G. Macdonald, Modal stability of inclined cables subjected to vertical support excitation, *Journal of Sound and Vibration* 318 (2008) 565–579. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.031>.

Procjena ponašanja postojećih zgrada pri djelovanju potresa

Mario Uroš¹, Marta Šavor Novak¹, Josip Atalić¹, Snježan Prevolnik²

¹Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku

²Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Geofizički odsjek

Sažetak

U radu se opisuje analiza ponašanja postojeće građevine pri djelovanju potresa na primjeru AB zgrade izgrađene pedesetih godina prošloga stoljeća u Zagrebu. Proračun je proveden statičkom i dinamičkom metodom. Primijenjena je materijalna nelinearnost konstrukcijskih elemenata tako da se ona koncentrira u diskretne presjeke elemenata. Provedena je usporedba rezultata i u konačnici su prikazani mogući mehanizmi sloma građevine pri djelovanju potresa te su identificirani njezini kritični konstrukcijski elementi koji se mogu preventivno ojačati.

Ključne riječi: seizmički odziv, postojeća ab zgrada, ambijentalne vibracije, materijalna nelinearnost, nelinearna dinamička analiza, krivulja kapaciteta nosivosti

Seismic performance assessment of existing buildings

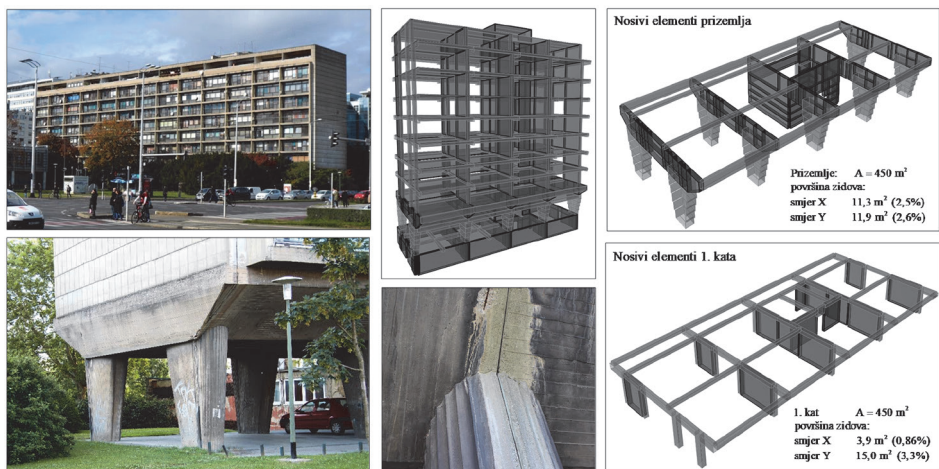
Abstract

This paper presents seismic performance analysis of existing RC building, constructed in the 1950s in Zagreb. Analyses are performed by static pushover analysis and dynamic analysis. Material non-linearities are implemented as concentrated hinges at the structural elements. Relevant engineering demand parameters, obtained using different complexity levels analyses, are compared in relation to design criteria. Finally, building collapse mechanisms are described and critical structural elements are identified, in order to propose an efficient seismic retrofit method.

Key words: seismic response, reinforced concrete building, ambient vibrations, material non-linearity, nonlinear dynamic analysis, backbone curve

1. Uvod

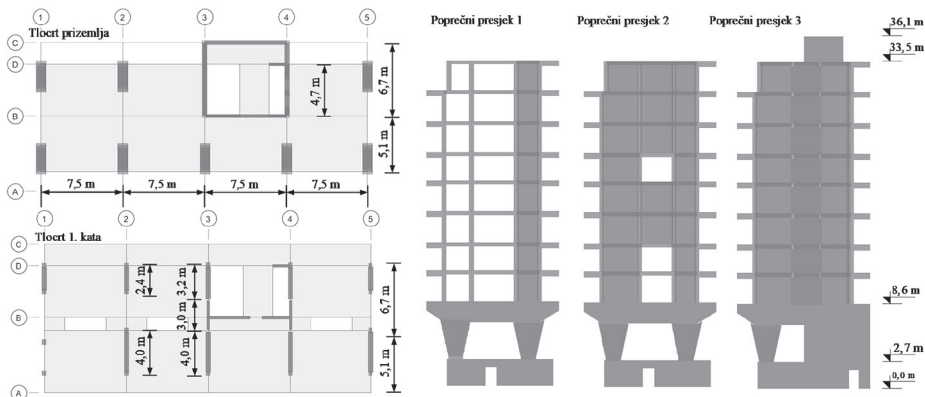
Promatrana je građevina izgrađena u Zagrebu pedesetih godina dvadesetoga stoljeća (slika 1.), a sastoji se od 10 etaža (Po+P+8). Cjelokupna je građevina podijeljena na tri dilatacije od kojih se u ovom radu promatra samo rubna, tlocrtnih dimenzija 30,00/14,60 m. Nadzemni je dio zgrade postavljen na armiranobetonske stupove, te čini okvirni sustav u etaži prizemlja. Kroz ostale etaže glavni su nosivi elementi betonski zidovi (debljine uglavnom 40 cm) unutar armiranobetonskih serklaža, te oni zadržavaju kontinuitet. Visina nadzemnog dijela iznosi 33,5 m, dok je visina podzemne etaže podruma 2,72 m. Nosivi sustav u poprečnom je smjeru na osnovnom razmaku od 7,50 m. Zgrada je izvedena klasičnim načinom gradnje (monolitno), osim predgotovljenih fasadnih elemenata. Zidovi podruma temeljeni su na trakastim temeljima, a međukatne su konstrukcije na katovima izrađene kao sitnobreičasti strop s gredicama na razmacima od 50 cm, te je na njima tlačna betonska ploča debljine 5 cm. Ploča je dodatno ojačana u uzdužnom smjeru gredama, pa se može smatrati da za djelovanje potresa djeluje kao kruta dijafragma. Armiranobetonski elementi konstrukcije izrađeni su iz betona klase C25/30 i C12/15 (MB300 i MB160) s ugrađenom armaturom GA240/360. Stropna ploča podruma je armiranobetonska, debljine 20 cm, te je ojačana gredama. Detaljnije informacije mogu se pronaći u [1, 2].



Slika 1. Fotografije stambene zgrade i detalja stupa na mjestu dilatacije, numerički model zgrade i nosivi elementi prizemlja i 1. kata s pripadnom površinom sudjelujućih zidova [1, 2]

Ukupna površina zidova u prizemlju (slika 1.) u odnosu na bruto površinu jedne etaže iznosi 2,6% u poprečnom i 2,5% u uzdužnom smjeru. Masivni stupovi prizemlja značajno doprinose nosivosti u oba smjera. Ukupna površina zidova na 1. katu

(slika 1.) u odnosu na bruto površinu jedne etaže iznosi 3,3% u poprečnom i 0,86% u uzdužnom smjeru. Tlocrti prizemlja i 1. kata sa svim nosivim elementima prikazani su na slici 2. Također su prikazani i nosivi elementi u tri poprečne osi. Nosivi su elementi konstrukcije na 1. katu AB stupovi i serklaži te betonski zidovi. Može se uočiti da je udio armiranobetonskih nosivih elemenata u uzdužnom smjeru 1. kata zanemarivo malen, što nije povoljno s gledišta potresne otpornosti. Međutim, poprečni zidovi malim dijelom ipak sudjeluju u uzdužnoj krutosti dilatacije, što joj osigurava stabilnost za stalne i prolazne kombinacije opterećenja. Također i fasadni sustav panela ima određenu krutost i svakako djeluje povoljno. Konstrukcija ne zadovoljava kriterij pravilnosti po visini prema EC8 [3], a kriterij pravilnosti konstrukcije u tlocrtu također nije zadovoljen. Dimenzije i presjeci građevnih elemenata te mehanička svojstva i detalji procijenjeni su prema izvornim građevnim nacrtima [1] uz načelne kontrole provedene prilikom terenskih istraživanja. Nisu poznati podaci o mogućim promjenama konstrukcije od vremena gradnje (naknadnim prilagodbama odnosno intervencijama, rekonstrukcijama ili nadogradnjama). Klasifikaciju tla nije moguće sa sigurnošću odrediti, jer nisu provedena ispitivanja tla, ali pretpostavljene su vrijednosti uobičajene za područje gradnje.



Slika 2. Tlocrt prizemlja i 1. kata te nosivi elementi u poprečnim osima konstrukcije

Stupovi prizemlja promjenljivoga su presjeka po visini. Na dnu stupa presjek je 80/155 cm, dok je na vrhu 80/280 cm. Stupovi prizemlja i poprečni zidovi 1. kata povezani su masivnim gredama presjeka dimenzija 80/210 cm. Iz terenskih ispitivanja i izvedbene dokumentacije [1, 2] te pravila struke u vrijeme gradnje određena je uzdužna i poprečna armatura u svim elementima konstrukcije. Zbog velike količine podataka o armiranju presjeka navest će se samo armatura koja je karakteristična za značajan dio elemenata. Tako se armatura greda uglavnom sastoji od uzdužnih šipki 2Φ12+1Φ14 u svakoj zoni i vilica Φ6/25 cm, dok je ponegdje ugrađena i kosa

armatura uz rubove za preuzimanje posmičnih naprezanja. Uzdužna armatura stupova uglavnom je između $4\Phi 14$ do $4\Phi 20$, dok je poprečna armatura $\Phi 6/25$ (30) cm. Armatura je serklaža koji omeđuju betonske zidove $4\Phi 12$. Armatura zidova nije poznata, ali se prema vizualnom pregledu i pravilima struke iz doba gradnje može pretpostaviti da se sastojala od mreža $\Phi 6/20$ uz dodatne šipke na uglovima, koje nisu ovijene posmičnom armaturom. Nosivost na savijanje stupova i zidova uglavnom je znatno veća od posmične nosivosti i neće biti interesantna u ovom proračunu, iako je i ona proračunana prema karakteristikama presjeka. Razmak između dilatacija iznosi oko 10 mm, što znači da nisu projektirane kao potresne razdjelnice, a djelomično su i zapunjene. Zbog nepoznavanja izvedbe i stanja razdjelnica između dilatacija, u proračunu je potresne otpornosti pretpostavljeno da dilatacija postoji i da zgrade imaju neovisan odgovor pri djelovanju potresa. U zgradi se nalazi dvokrako stubište, a pregradni su zidovi od opeke.

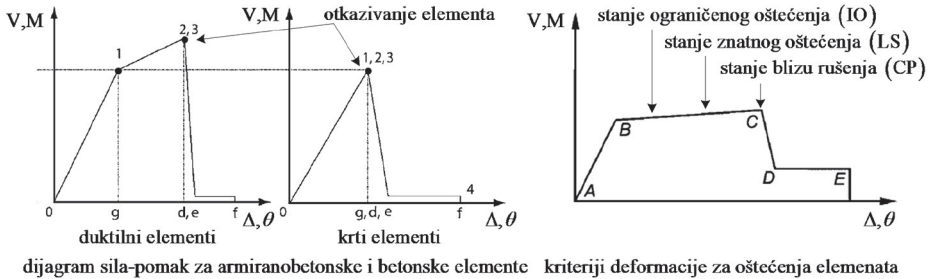
2. Proračun konstrukcije

2.1. Opis numeričkog modela

Na temelju dostupne tehničke dokumentacije i provedenim terenskim istraživanjima [1, 2] napravljen je numerički model konstrukcije [4] koji je ukratko opisan. Primijenjena je statička metoda postupnoga guranja i metoda vremenske diskretizacije uz primjenu zapisa ubrzanja tla. Prema vremenu gradnje može se zaključiti da nije proveden zadovoljavajući proračun na potres. Razrada je detalja samo djelomično poznata, jer dio dokumentacije nedostaje, pa je pretpostavljeno da svi detalji, sidrenja i preklopi armature te lokalna duktilnost odgovaraju poznatim detaljima. Opterećenja su pretpostavljena prema dostupnoj dokumentaciji i pravilima struke. Uz stalno i uporabno opterećenje, potresno je djelovanje uzeto preko zapisa ubrzanja temeljnoga tla u vremenu za tlo tipa B i vršnih vrijednosti ubrzanja na temeljnoj stijeni prema važećoj karti potresnih područja Republike Hrvatske [5]. Faktor je važnosti zgrade II ($\gamma=1$), a pretpostavljeno viskozno prigušenje jest 5%. Faktor povjerenja uzet je s iznosom 1,0, iako razorna ispitivanja svojstava materijala nisu provedena. Dodatni su podaci prikazani u nastavku, ovisno o metodi proračuna. Proračunom se kontroliraju pomaci konstrukcije, lokalna duktilnost kritičnih elemenata te granična stanja. Prikazani su mehanizmi sloma građevine pri djelovanju potresa te su identificirani kritični elementi, što može biti korisno kod prijedloga ojačanja konstrukcije. Za proračun su upotrijebljene kombinacije opterećenja u skladu s važećim propisima.

Raspucavanje poprečnih presjeka prilikom potresa uzeto je u obzir prema smjernicama iz [5, 6], tako da se krutost na savijanje greda smanjila na 40% početne krutosti, dok je za stupove i zidove ta krutost svedena na 50% početne. Posmična

krutost svih elemenata uzeta je s 40% početne krutosti. Treba naglasiti da raspucalost nosivih elemenata izvan područja lokaliziranih plastičnih zglobova nije konstantna po duljini, ali ni za različite intenzitete opterećenja, što je ovdje zanemareno jednostavnosti radi.

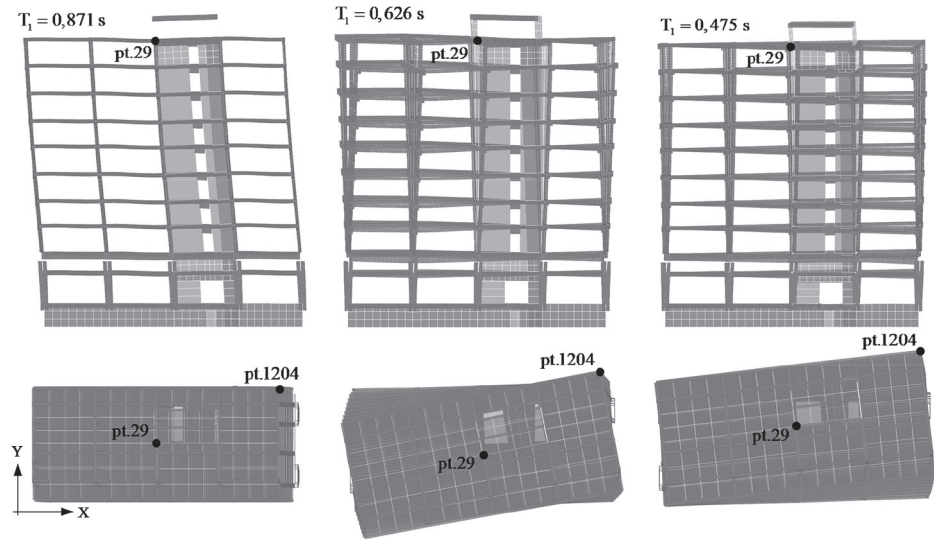


Slika 3. Dijagrami ponašanja plastičnih zglobova i definicije graničnih stanja [4, 5]

Nelinearno ponašanje elemenata uzeto je u obzir lokalnim otvaranjem plastičnih zglobova na kritičnim mjestima u konstrukciji. Mogući su kriteriji otkazivanja definirani krivuljama ponašanja plastičnih zglobova u obliku odnosa momenta savijanja i relativnoga kuta zaokreta te poprečne sile i relativnoga pomaka (slika 3.). Njihove karakteristike i ponašanje ovise o više parametara, a između ostaloga bitan je podatak za duktilnost plastičnog zgloba kod savijanja razina uzdužne i poprečne sile. Prema razini poprečne sile može se zaključiti da element neće moći ostvariti svoju fleksijsku duktilnost. Kriterij posmičnoga otkazivanja pokazao se znatno nepovoljnijim, te on određuje nosivost sustava, jer postoji značajan manjak poprečne armature u konstrukciji. Za definiranje krivulja ponašanja plastičnih zglobova uzete su u obzir smjernice za seizmičko ocjenjivanje i obnovu postojećih građevina [5, 6]. Također su za svaki element definirana granična stanja na krivulji ponašanja koja određuju kriterij prihvatljivosti određenoga potresnog intenziteta.

2.2. Dinamički parametri konstrukcije

Prikazane su dinamičke značajke i vlastiti periodi titranja zgrade (slika 4.). Za model u kojemu je uzeto u obzir raspucavanje nosivih elemenata i smanjenje krutosti periodi konstrukcije su $T_1=0,871$ s, $T_2=0,626$ s i $T_3=0,457$ s. Bitan je podatak i ukupna težina promatranoga dijela zgrade od 41000 kN na razini temelja. Na slici je također prikazana karakteristična točka 29, čiji pomaci u smjeru x i y predstavljaju karakteristične stupnjeve slobode za cijelu zgradu. Prikazana je i točka 1204, kako bi se prikazao najveći pomak zgrade na mjestu dilatacije, a ujedno odredio i torzijski učinak.



Slika 4. Osnovni vlastiti periodi i pripadni oblici titranja konstrukcije

2.3. Metoda postupnoga guranja

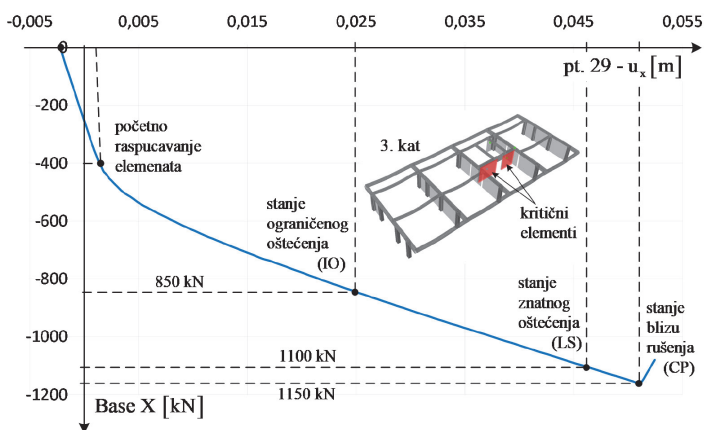
Proveden je nelinearni statički proračun guranjem konstrukcije po jednom od mjerodavnih oblika opterećenja [7]. Za potrebe proračuna analizirano je više oblika opterećenja (konstantno, linearno, oblik titranja, itd.), te se pokazalo da je mjerodavan slučaj u kojemu je opterećenje linearno raspodijeljeno po visini zgrade. Također je i oblik vlastitoga vektora pokazao dosta slično ponašanje, ali je kod njega problem smjer y za koji ne postoji dominantno translacijski oblik, već dolazi i do torzije zbog ekscentričnosti centra krutosti i centra mase, a tome je uzrok ekscentrično postavljena jezgra. Tečenje i otkazivanje nosivih elemenata lokalizirano je i pretpostavljeno plastičnim zglobovima za pojedini mehanizam sloma (slom savijanjem i uzdužnom silom te slom posmikom) [8,9].

Na slikama 5. i 6. prikazane su krivulje kapaciteta nosivosti, tj. ovisnosti ukupne poprečne sile o pomaku vrha zgrade (točka 29), te su na njoj označene karakteristične točke u kojima se konstrukcija nalazi. One odgovaraju stanjima konstrukcije za početno raspucavanje elemenata, stanje ograničenoga oštećenja (IO), stanje znatnoga oštećenja (LS) i stanje blizu rušenja (CP). Svako je od tih stanja određeno ponašanjem nosivih elemenata ovisno o deformacijskim kriterijima. Globalno se može zaključiti da se konstrukcija nalazi u određenu graničnom stanju ako je ključni ili primarni element konstrukcije došao u to stanje. Otkazivanjem takvoga elementa postoji opasnost od djelomičnog urušavanja stropne konstrukcije.

Ovdje nisu provedeni svi koraci metode postupnoga guranja i svođenja sustava na jedan stupanj slobode, te određivanja potresnoga zahtjeva za duktilnost konstruk-

cije. Ponaajprije se nastojalo pokazati i objasniti krivulju kapaciteta nosivosti kojom je definirano ponašanje konstrukcije. Proračun konstrukcije metodom bočnih sila i modalni proračun primjenom spektra odziva provedeni su kako bi se preliminarno ocijenilo ponašanje konstrukcije te kontrolirale složenije metode proračuna, ali ovdje se neće prikazivati rezultati.

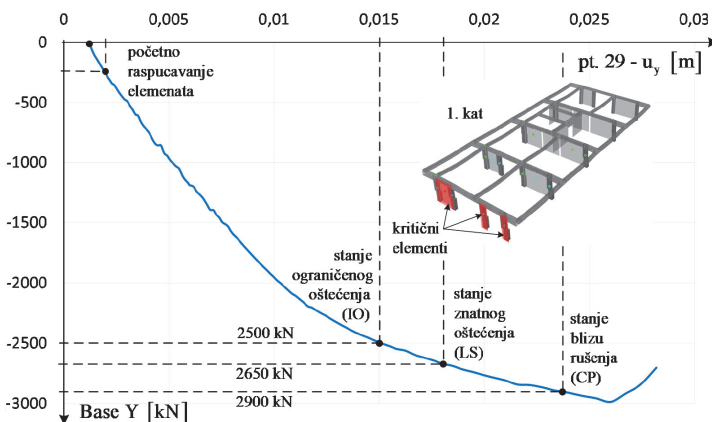
Za krivulju kapaciteta nosivosti za smjer x (slika 5.) konstrukcija se ponaša približno linearno do razine od oko 400 kN (1% vertikalnoga opterećenja). U tom trenutku dolazi do postupnoga i ravnomjernog raspucavanja svih nosivih elemenata, ali nosivost nije ugrožena. Stanje ograničenoga oštećenja određeno je razinom sile od 850 kN (2,1%), dok je stanje znatnoga oštećenja definirano silom od 1100 kN (2,7%). Iako ne dolazi do urušavanja dijela konstrukcije, njoj je ovdje već znatno narušena nosivost. Konačno dolazi do djelomičnoga urušavanja ploče 3. kata na razini sile od 1150 kN (2,8%). Na dijagramu su shematski prikazani kritični elementi, a to su uzdužni betonski zidovi 3. kata koji prvo stradavaju, ponajprije zbog svoje krutosti u odnosu na armiranobetonske stupove i serklaže. Treba naglasiti da je odgovor konstrukcije dominantno u smjeru x, te nema značajnih torzijskih učinaka, osim inicijalno zadanoga ekscentriciteta opterećenja.



Slika 5. Krivulja kapaciteta nosivosti konstrukcije za smjer x

Na slici 6. je prikazana krivulja kapaciteta nosivosti konstrukcije za smjer y. Ponašanje je približno linearno do razine od oko 1500 kN (3 %), ali inicijalno raspucavanje elemenata nastupa puno ranije. Budući da postoji značajan utjecaj torzije u odgovoru konstrukcije za smjer y, najkritičnija je rubna os 1, kod koje prvo dolazi do narušavanja nosivosti elemenata. Stanje ograničenoga oštećenja određeno je razinom sile od 2500 kN (6,1%), dok je stanje znatnoga oštećenja definirano silom od 2650 kN (6,5%). Do djelomičnoga urušavanja konstrukcije u području rubne osi 1 dolazi

na razini sile od 2900 kN (7,1%), pri čemu otkazuju rubni betonski zid i okolni armanobetonski serklaži i stupovi na 1. katu, što je prikazano shematski na dijagramu. Odgovor konstrukcije ima značajnu torzijsku komponentu, što se i moglo očekivati zbog ekscentrično postavljene jezgre.



Slika 6. Krivulja kapaciteta nosivosti konstrukcije za smjer y

Usporedbom nosivosti konstrukcije u oba smjera može se zaključiti da je uzdužni smjer x slabiji (i to 2,5 puta), te je samim time i kritičan. Iz tlocrta zgrade može uočiti se značajan nedostatak nosivih elemenata u smjeru x, te se praktično cijelo opterećenje prenosi zidovima jezgre (koji su na katovima betonski) i armanobetonskim stupovima i serklažima u kojima značajno nedostaje uzdužne i poprečne armature. Ovdje nije razmatran utjecaj razdjelnice i susjedne zgrade, ali sve i da postoji kontinuitet djelovanja na razdjelnici, on ne bi podigao razinu nosivosti niti poboljšao ponašanje promatrane zgrade. Razlog je tomu to što središnja dilatacija uopće nema zidova u uzdužnom smjeru, pa bi se samim time moglo očekivati i još nepovoljnije ponašanje.

2.4. Nelinearni dinamički proračun primjenom vremenskoga zapisa

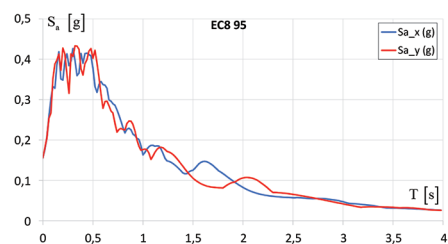
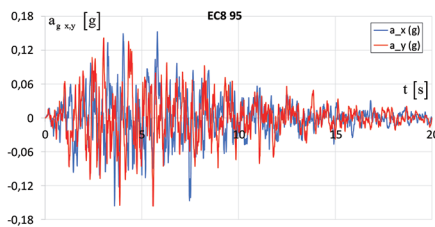
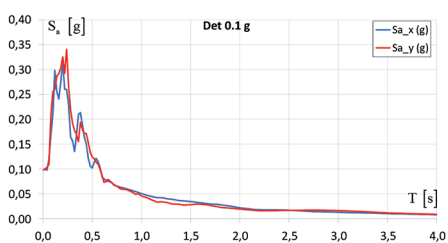
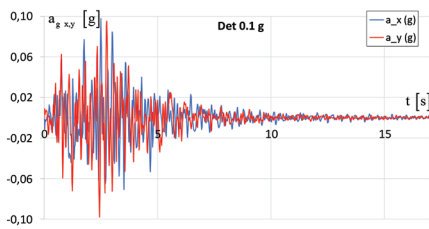
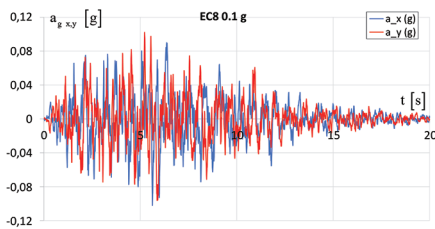
Proveden je nelinearni dinamički proračun primjenom vremenskoga zapisa ubrzanja tla. To je ujedno i najzahtjevniji proračun, te prema [5, 6] treba imati određenu razinu točnosti ulaznih podataka o geometriji, mehaničkim svojstvima materijala i konstrukcijskim detaljima kako bi se ta metoda mogla upotrijebiti. To je često problem kod procjene postojećih zgrada. Upotrijebit će se više zapisa ubrzanja tla različitoga intenziteta. Za povratna razdoblja od 95 godina razmotrena su po tri deterministička potresna scenarija (realni scenariji), pri čemu se nije zahtijevalo da spektar odziva akceleroograma odgovara spektru iz EC8, jedan akceleroogram čiji spektar odziva odgovara spektru iz EC8 (tip 1) te jedan akceleroogram prema EC8 (tip 2).

Generirane se horizontalne komponente potresnoga djelovanja. Vrijednost PGA na osnovnoj stijeni za povratno razdoblje od 95 godina iznosi $PGA(95) = 0,13$ g. Budući da je pretpostavljeno da tlo na lokaciji odgovara tipu tla B, za spektar tipa 1 iz EC8, vrijednost PGA pomnožena je s odgovarajućim faktorom za tip tla ($S=1,2$). Time su svi umjetno generirani akcelorogrami za tip 1 tla svedeni na $PGA(95) = 0,15$ g. Kod spektra tipa 2 iz EC8 vrijednost PGA pomnožena je s faktorom za tip tla ($S=1,35$), čime su umjetno generirani akcelorogrami za tip 2 tla svedeni na $PGA(95) = 0,17$ g. Deterministički su scenariji potresa za povratno razdoblje od 95 godina sljedeći:

- epicentralna udaljenost $D = 10$ km, dubina žarišta $h = 10$ km, magnituda $M = 5,7$,
- epicentralna udaljenost $D = 15$ km, dubina žarišta $h = 5$ km, magnituda $M = 6,0$,
- epicentralna udaljenost $D = 25$ km, dubina žarišta $h = 12$ km, magnituda $M = 6,6$.

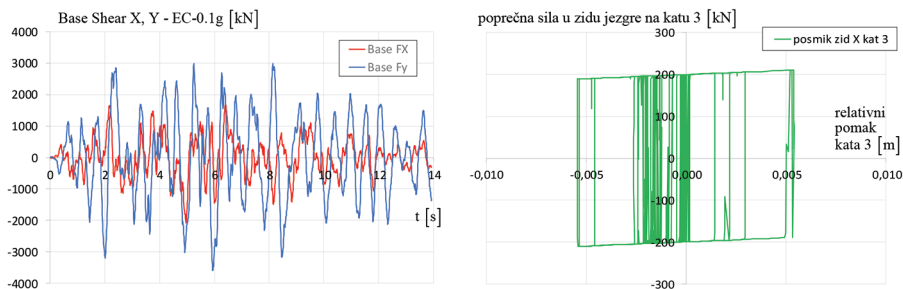
Kako je trebalo razmotriti i slabije potrese, odabrana je vrijednost $PGA = 0,1$ g. Za $PGA = 0,1$ g definirana su 3 deterministička scenarija potresa:

- epicentralna udaljenost $D = 5$ km, dubina žarišta $h = 5$ km, magnituda $M = 4,8$,
- epicentralna udaljenost $D = 10$ km, dubina žarišta $h = 10$ km, magnituda $M = 5,1$,
- epicentralna udaljenost $D = 25$ km, s dubina žarišta $h = 12$ km, magnituda $M = 6,0$.



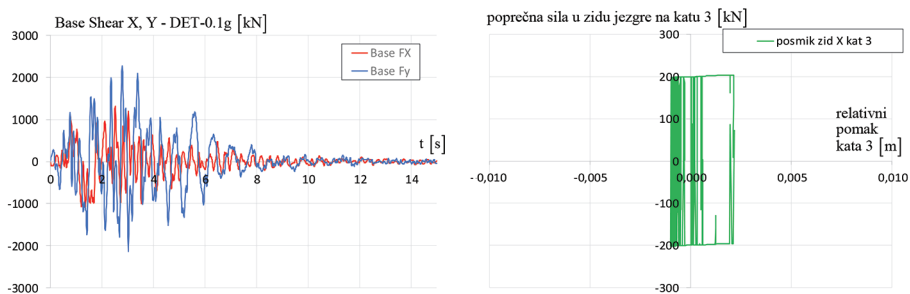
Slika 7. Dio zapisa ubrzanja tla u vremenu i pripadne spektralne krivulje

Za svaki od tih potresa generirani su sintetički akcelerogrami i pripadajući spektri odziva uz prigušenje od 5% kritičnoga, te je napravljen popravak osnovne linije. Zbog količine podataka u nastavku su prikazani samo neki potresni zapisi (slika 7.) i pripadni rezultati. Kod određivanja lokalnoga nelinearnog ponašanja u vremenu bitno je upotrijebiti krivulje ponašanja elemenata koje uzimaju u obzir i ciklično opterećenja uz degradaciju materijala. Pretpostavljeni su isti mehanizmi sloma na kritičnim presjecima elemenata kao i u slučaju statičkoga proračuna, te su upotrijebljene srednje vrijednosti čvrstoće materijala kako bi se dobilo realno ponašanje. U nastavku će se zbog količine podataka pokazati samo izdvojeni karakteristični rezultati proračuna i izvesti zaključci. Na slici 8. prikazani su rezultati proračuna za potres EC 0,1 g. To je poprečna sila zgrade te dijagram ovisnosti poprečne sile i relativnoga pomaka kritičnoga elementa koji prvi otkazuje u konstrukciji. Budući da je u svim slučajevima riječ o posmičnom slomu zida ili stupa, pomak predstavlja relativni pomak kata. Kritični je element betonski zid jezgre postavljen u smjeru x, jer se već pokazalo da je to kritičan smjer. Relativni je pomak 3. kata i kritičnoga uzdužnog zida za potres EC 0,1 g oko 5,5 mm. Može se primijetiti da kritični zid razmjerno brzo dosegne svoju nosivost, te se tada događa preraspodjela naprezanja na ostale elemente. Međutim, procijenjena mu je sposobnost deformacije 10 mm, te se može zaključiti da nije iscrpljena otpornost elementa, pa time ni konstrukcije. Zaključno se može reći da je dosegnuto stanje ograničenoga oštećenja (IO).



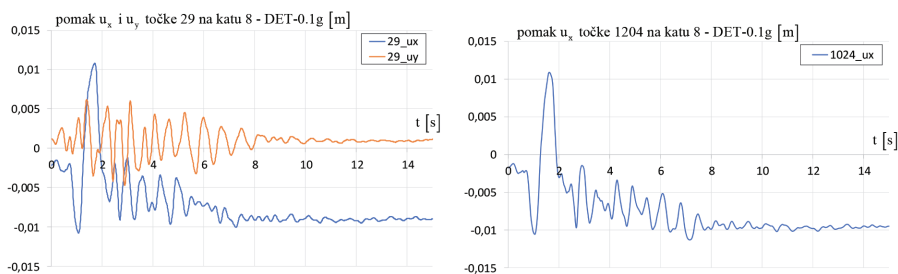
Slika 8. Poprečna sila zgrade i histerezna krivulja kritičnoga zida na 3. katu (EC 0,1 g)

Na slici 9. prikazani su rezultati proračuna za potres DET 0,1 g, te su izdvojeni samo karakteristični rezultati. Relativni je pomak 3. kata i kritičnoga uzdužnog zida za potres DET 0,1 g oko 2,2 mm. I u ovom slučaju kritični zid razmjerno brzo dosegne nosivost, ali procijenjena sposobnost deformacije od 10 mm osigurava mu da nije iscrpljena otpornost elementa. Za razliku od potresnoga zapisa EC u ovom slučaju nije dosegnuto stanje ograničenoga oštećenja (IO).



Slika 9. Poprečna sila zgrade i histerezna krivulja kritičnoga zida na 3. kat (DET 0,1 g)

Ovdje su na slici 10. dodatno prikazani pomaci karakteristične točke 29 za smjer x i y. Također je prikazan pomak rubne točke 1204 koja se nalazi na razdjelnici za smjer x. Može se primijetiti da se pomak u smjeru x nakon djelovanja potresa ne vrati u početnu vrijednost. To je rezultat sustavne plastifikacije i popuštanja elemenata, ali u granicama ograničenoga oštećenja. Zaostali je pomak 10 mm, što ne predstavlja značajnu vrijednost na visinu od oko 33 m. U skladu se time može se vidjeti da histereza kritičnoga elementa nije centrično postavljena. Drugi dijagram na slici 10. pokazuje pomak rubne točke na mjestu razdjelnice koji se mijenja u granicama 10 mm i dosta je sličan pomaku x karakteristične točke 29. To pokazuje da nema značajnoga utjecaja torzije, jer je smjer y ipak prilično krući i ima veću nosivost, što se može vidjeti i na periodima titranja konstrukcije. Amplituda pomaka od oko 10 mm ujedno je i pretpostavljeni iznos širine dilatacije, pa se može očekivati da će doći do sudaranja dilatacija, a s tim i ostalih složenih utjecaja jedne zgrade na drugu koje se u ovom radu nisu promatrale.



Slika 10. Pomaci karakterističnih točaka u vremenu (DET 0.1 g)

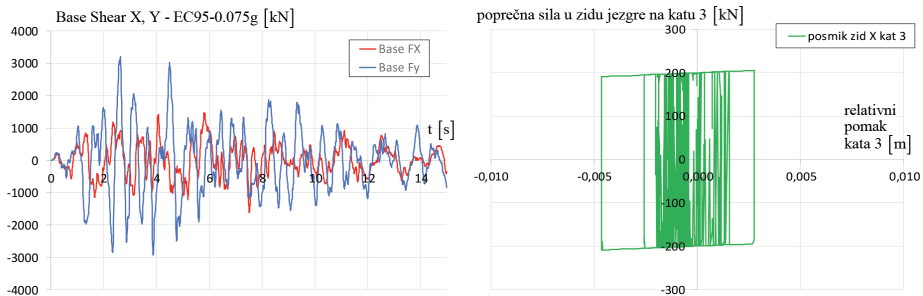
Na slici 11. prikazani su rezultati proračuna za potres EC95 te su izdvojeni samo karakteristični rezultati. Relativni je pomak 3. kata i kritičnog uzdužnog zida za promatrani potres oko 13,5 mm. U ovom slučaju kritični zid dosegne nosivost, ali i sposobnost deformacije od 10 mm. Rezultat toga je otkazivanje kritičnoga zida i mo-

guće lokalno urušavanje stropne konstrukcije iznad. Ovim je potresnim scenarijom dosegno granično stanje blizu rušenja (CP).



Slika 11. Poprečna sila zgrade i histerezna krivulja kritičnoga zida na 3. katu (EC95)

Na slici 12. prikazani su rezultati proračuna za potres EC95 koji je sveden na vrijednost vršnoga ubrzanja od 0,075 g. Relativni je pomak 3. kata i kritičnog uzdužnog zida za ovaj potresni scenarij oko 3,0, mm što znači nije dosegno stanje ograničeno oštećenja (IO).



Slika 12. Poprečna sila zgrade i histerezna krivulja kritičnog zida na 3. katu (EC95_scaled)

3. Rezultati

Općenito se može reći da mehanizmi otkazivanja i kritični elementi dobiveni dinamičkom analizom uz primjenu vremenskih zapisa odgovaraju onima od statičke nelinearne metode postupnim guranjem. Zanimljivo je promotriti vršnu vrijednost poprečne sile kod dinamičkih proračuna i preko dobivenih oštećenja usporediti je s vrijednostima kod statičke analize. Općenito je pravilo da je razina poprečne sile za smjer x značajno manja od one za smjer y. To se može objasniti većim periodima konstrukcije u smjeru x koji nisu značajno pobuđeni potresnim zapisima, što se može vidjeti i iz njihovih spektara odziva. Nadalje, za potresni zapis EC 0,1 g vršne

vrijednosti poprečne sile u smjeru x idu do 2000 kN, što je značajno veće od nosivosti konstrukcije dobivene statičkom metodom postupnoga guranja, a koja iznosi 1150 kN. To znači da lokalni ekstremi ne moraju nužno katastrofalno djelovati na konstrukciju, već to ovisi o nizu drugih parametara kao što su duktilnost elemenata, prigušenje, frekvencijski spektar pobude, periodi konstrukcije itd. Faktor ponašanja za ovakav je tip konstrukcije relativno malen zbog neadekvatno izvedenih detalja armiranja, a i puno betonskih zidova bez armature. Složenijim je metodama proračuna pokazano da zgrada ima određenu razinu duktilnosti, pa bi propisana vrijednost u iznosu od $q=1,5$ mogla biti opravdana.

4. Zaključak

Dobiveni su rezultati za statičku metodu postupnoga guranja i dinamički proračun primjenom vremenskoga zapisa. Promatrana konstrukcija predstavlja dobar primjer na kojemu se mogu transparentno prikazati razlike u metodama proračuna. Na temelju provedenih analiza izdvojeni su sljedeći zaključci za konstrukciju:

- Zgrada je nepravilna po visini i u tlocrtu. Prizemlje predstavlja kat na kojemu konstrukcija gubi kontinuitet u krutosti po visini, ali ne predstavlja kritičnu etažu. Kritična je etaža za smjer x 3. kat, dok je za smjer y to 1. kat.
- Terenska istraživanja i pregled izvedbene dokumentacije pokazuje da prema važećim propisima u stupovima, serklažima i zidovima znatno nedostaje armature te detalji armiranja nisu primjereni gradnji u seizmički aktivnomu području.
- Iako postoji određena razina duktilnosti kritičnih elemenata, može se reći da do lokalnoga otkazivanja nosivih elemenata dolazi bez prethodne najave i upozorenja.
- Kod analizirane dilatacije, ali i kod ostalih, može se uočiti kronični nedostatak zidova u uzdužnom smjeru. Rezultat toga je izrazito fleksibilna konstrukcija u tom smjeru.
- Utjecaj razdjelnice na odziv konstrukcije u potresu ne se može sa sigurnošću odrediti, jer svojstva razdjelnice nisu poznata. Amplituda pomaka od oko 10 mm u uzdužnomu smjeru doseže vrijednost pretpostavljene širine razdjelnice, pa se može pretpostaviti da će doći do njihovog sudaranja, ali utjecaj jedne zgrade na drugu ovdje nije analiziran.
- Mehanizmi otkazivanja i kritični elementi dobiveni dinamičkom i statičkom metodom međusobno odgovaraju, te se može reći da su oni identificirani.
- U pravilu je razina poprečne sile pri dinamičkim proračunima za smjer x značajno manja od one za smjer y. Razlog su bitno veći periodi konstrukcije u smjeru x koji nisu značajno pobuđeni potresnim zapisima.

- Vršne vrijednosti poprečnih sila pri dinamičkim proračunima nakon kojih konstrukcija ne doseže granično stanje blizu rušenja značajno su veće od nosivosti konstrukcije dobivene statičkom metodom. To ovisi o nizu parametara kao što su duktilnost elemenata, prigušenje, frekvencijski spektar pobude, perioda konstrukcije itd.

Mehanizam otkazivanja konstrukcije počinje otvaranjem posmičnoga plastičnog zgloba u betonskim zidovima jezgre i nema izraženu duktilnost. Također, rubna os zgrade koja je udaljenija od jezgre značajno je opterećena zbog torzijskih učinaka koji nastaju zbog nepravilnosti u tlocrtu. Učinkovita mjera ojačanja bila bi izvesti novi armiranobetonski zid na rubnoj osi zgrade iznad prizemlja u punoj visini. Takva intervencija ne bi trebala biti problematična jer rubna os nije ispunjena zidovima i ima prostora za rušenje pregradnih zidova te izvedbu novih. Uzdužne bi zidove jezgre trebalo ojačati primjerice AB torkretiranjem, s tim da se vodi računa o sidrenju i povezanosti armature kroz etaže i ploče. Moguća je izvedba i dodatnih AB stupova ili AB razupora u uzdužnomu smjeru koji ne bi ulazili u slobodni prostor. Preporučljivo je da novi elementi budu armiranobetonski i da se propisno sidre u postojeće elemente te da tvore jednu cjelinu.

Literatura

- [1] Izvedbena dokumentacija, Hrvatski muzej arhitekture, HAZU, Zagreb
- [2] Atalić, J., Krolo, J., Damjanović, D., Sigmund, Z., Šavor Novak, M., Uroš, M., Korlaet, L., Koščak, J., Duvnjak, I., Bartolac, M., Dokoza, I., Prekupec, F., Oreb, J., Mušterić, B.: Studija za saniranje posljedica potresa, 5. faza, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zavod za tehničku mehaniku, 2017.
- [3] HRN EN 1998-1:2011+/Ispr.2:2015+A1:2014+NA:2011, Eurokod 8: Projektiranje potresne otpornosti konstrukcija -- 1. dio: Opća pravila, potresna djelovanja i pravila za zgrade, HZN, Zagreb, Hrvatska
- [4] CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge, Computers and Structures, Berkeley, California, SAD, 2011.
- [5] Herak, M.: Croatian seismic hazard map, Proceedings of the 4th Croatian National Platform for Disaster Risk Reduction Conference, Zagreb, Croatia, 2012.
- [6] HRN EN 1998-3:2011 + NA:2011, Eurokod 8: Projektiranje potresne otpornosti konstrukcija -- 3. dio: Ocjenjivanje i obnova zgrada, HZN, Zagreb, Hrvatska
- [7] ASCE/SEI 41-13, Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings, American Society of Civil Engineers, SAD, 2014.

- [8] Fardis, M.N., Carvalho, E.C., Fajfar, P., Pecker, A.: Seismic Design of Concrete Buildings to Eurocode 8, CRC Press, Taylor & Francis, 2015.
- [9] Grammatikou, S., Fardis, M.N., Biskinis, D.: Models of the flexure-controlled strength, stiffness and cyclic deformation capacity of rectangular RC columns with smooth bars, including lap-splicing and FRP jackets, Bulletin of Earthquake Engineering, 16 (2018) 1, pp 341-375, doi: <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0202-y>
- [10] Moehle, J.: Seismic Design of Reinforced Concrete Buildings, McGraw Hill Professional, 2015.

ISBN 9789538168321



9000 >

9 789538 168321