Vježbe 1
Ponavljanje

Ponavljanje

(i) Funkcije i osnovne definicije (periodička, parna, neparna)

(ii) Derivacije

(iii) Integrali - parcijalna integracija!

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$
$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

(iv) Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija
Za svaki $l > 0$ vrijedi:

$$\int_{-l}^{l} \sin(\frac{n\pi x}{l})\sin(\frac{m\pi x}{l})dx = \begin{cases} l, \ m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, \ m = n = 0, \\ 0, \ m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos(\frac{n\pi x}{l}) \cos(\frac{m\pi x}{l}) dx = \begin{cases} l, \ m = n \neq 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{N}_0, \\ 2l, \ m = n = 0, \\ 0, \ m \neq n \text{ i } m, n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos(\frac{n\pi x}{l}) \sin(\frac{m\pi x}{l}) dx = 0, \ \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Pokažimo treću od navedenih formula. Računamo:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \\
&= \begin{pmatrix} \text{koristimo identitet:} \\ \cos\alpha \sin\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \int_{-l}^{l} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)}{2} \right) dx = \begin{pmatrix} \text{linearnost} \\ \text{integrala} \end{pmatrix} = \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) dx}_{I_1} \underbrace{- \frac{1}{2} \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) dx}_{I_2}
\end{aligned}
$$

Zasebno računamo svaki od dva označena integrala.

$$I_1 = \begin{pmatrix} \text{supstitucija:} \\ t = \dfrac{(n+m)\pi x}{l} \\ dt = \dfrac{(n+m)\pi x}{l} dx \\ l \mapsto (n+m)\pi \\ -l \mapsto -(n+m)\pi \\ \text{samo u slučaju } n, m \neq 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_{(n+m)\pi}^{-(n+m)\pi} \sin t \frac{l}{(n+m)\pi} \, dt =$$

$$= \frac{l}{2(n+m)\pi}(-\cos t)\Big|_{-(n+m)\pi}^{(n+m)\pi} =$$

$$= \frac{l}{2(n+m)\pi}\left(-\cos(-(n+m)\pi) + \cos((n+m)\pi)\right).$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} \text{supstitucija:} \\ t = \dfrac{(n-m)\pi x}{l} \\ dt = \dfrac{(n-m)\pi x}{l} dx \\ l \mapsto (n-m)\pi \\ -l \mapsto -(n-m)\pi \\ \text{samo u slučaju } n \neq m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_{(n+m)\pi}^{-(n+m)\pi} \sin t \frac{l}{(n+m)\pi}\, dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_{-(n-m)\pi}^{(n-m)\pi} \sin t \frac{I}{(n-m)\pi}\, dt = \\
&= -\frac{I}{2(n-m)\pi}(-\cos t)\Big|_{-(n-m)\pi}^{(n-m)\pi} = \\
&= -\frac{I}{2(n-m)\pi}\left(-\cos((n-m)\pi) + \cos(-(n-m)\pi)\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, sve skupa:

$$
\begin{aligned}
I = I_1 + I_2 = \frac{I}{2(n+m)\pi}\left(-\cos(-(n+m)\pi) + \cos((n+m)\pi)\right) - \\
- \frac{I}{2(n-m)\pi}\left(-\cos((n-m)\pi) + \cos(-(n-m)\pi)\right) =
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{l}{2(n+m)\pi}\cos(-(n+m)\pi) + \frac{l}{2(n+m)\pi}\cos((n+m)\pi) +$$
$$+ \frac{l}{2(n-m)\pi}\cos((n-m)\pi) - \frac{l}{2(n-m)\pi}\cos(-(n-m)\pi) = 0$$

zbog parnosti funkcije kosinus.
U slučaju kada je $n = m = 0$, u prvom integralu integriramo nul-funkciju pa je i tada rezultat nula; kao i u drugom integralu u slučaju $n = m$.

Ponavljanje - obične diferencijalne jednadžbe

- Jednadžba sa separiranim varijablama
- Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda
- **Linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima**
  Jednadžba oblika $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x),\ p, q \in \mathbb{R}$.
  Rješenje je oblika $y = y_H + y_P$, gdje su
  - y_H rješenje pripadne homogene jednažbe $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$,
  - y_P partikularno rješenje (neko rješenje polazne).

- **Homogeno rješenje**
  Najprije pogledamo karakterističnu jednadžbu $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ i odredimo njena rješenja (korijene) λ_1 i λ_2.

  (1) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je
  $y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

  (2) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $\lambda_1 = \lambda_2$, onda je
  $y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

  (3) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a + \mathrm{i}b$, onda je
  $y_H = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

- **Partikularno rješenje**

  Ovisi o funkciji smetnje f; mi ćemo promatrati
  $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x),\ a, b, \omega \in \mathbb{R}$.
  Tada partikularno rješenje tražimo u obliku:

  (1) Ako $\pm i\omega$ nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
  $y_P = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$,

  (2) Ako je $\pm i\omega$ rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
  $y_P = x(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$.

  Odabrani oblik partikularnog rješenja uvrstimo u $y_P'' + py_P' + qy_P = f$, izjednačimo koeficijente uz $\sin(\omega x)$ i $\cos(\omega x)$ te dobijemo sustav pomoću kojeg odredimo A i B.

Napomena

Uključen je i slučaj da je f konstantna funkcija. Tada je $\omega = 0$. Ako 0 nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je $y_P = B$, inače je $y_P = Bx$.

Primjer Riješite jednadžbe:

a) $y'' + 3y' + 2y = 7$,

b) $y'' + 3y' + 2y = 2\cos(3x) + 4\sin(3x)$.

Rj.

a)

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 &\implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \\ &\implies y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Funkcija smetnje je $f(x) = 7 = 7\cos 0 + 0\sin 0$. Dakle, $a = 7, b = 0, \omega = 0$. Stoga je partikularno rješenje $y_P = A$ (jer 0 nije rješenje karakteristične jednadžbe). Kako je $y_P'' = y_P' = 0$, uvrštavanjem dobivamo $2A = 7$, to jest, $A = \frac{7}{2}$. Sve skupa,

$$y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{7}{2},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Homogeno rješenje je kao u a) jer je karakteristična jednadžba jednaka. Funkcije smetnje se razlikuju pa tražimo partikularno rješenje. Iz $2\cos(3x) + 4\sin(3x)$ vidimo da je $a = 2, b = 4, \omega = 3$. Stoga je

$$y_P = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} y_P' &= -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x), \\ y_P'' &= -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$\cos(3x)(-9A+9B+2A)+\sin(3x)(-9B-9A+2B) = 2\cos(3x)+4\sin(3x),$$

odakle je

$$\begin{aligned} -9A+9B+2A &= 2, \\ -9B-9A+2B &= 4 \end{aligned}$$

$\implies A = -\frac{5}{13}, B = -\frac{1}{13}$.
Sve skupa,

$$y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos(3x) - \frac{1}{13}\sin(3x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$