Matematika 1 - pismeni ispit

06.02.2023.

Ime i prezime: ____________________

1.	2.	3.	4.	5.

1. dio	2. dio	$\sum$

Ocjena pismenog ispita: ____________________

Zadatci

1. (20 bodova) Tetraedar je razapet vektorima $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 5\lambda\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{c} = -3\vec{j} - \vec{k}$. Odredite parametar λ za koji je volumen pripadnog tetraedra minimalan.

2. (20 bodova)

   a) Odredite opći član niza čija su prva četiri člana jednaka

   $$\frac{1}{1+2}, \frac{1}{2+4}, \frac{1}{3+8}, \frac{1}{4+16}.$$

   b) Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. (20 bodova) Odredite prirodno područje definicije, nultočke, intervale rasta i pada, ekstreme, asimptote te skicirajte graf funkcije

   $$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$$

---

4. (15 bodova) Izračunajte nepravi integral

   $$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

5. a) (12 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$. Skicirajte.

   b) (13 bodova) Koristeći integralni račun, odredite duljinu dijela krivulje $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ koji se nalazi u 1. kvadrantu.

Matematika 1 - pismeni ispit

06.02.2023.

Ime i prezime: ____

1.	2.	3.	4.	5.

1. dio	2. dio	$\sum$

Ocjena pismenog ispita: ____

Zadatci

1. (20 bodova) $V = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 5 & -5 \\ 1 & -5\lambda & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \right| = |5\lambda^2 + 3\lambda + 20| = 5\lambda^2 + 3\lambda + 20$. Preostaje pronaći λ takav da je vrijednost $5\lambda^2 + 3\lambda + 20$ najmanja moguća. Neka je $f(\lambda) = 5\lambda^2 + 3\lambda + 20$. Tada je $f'(\lambda) = 10\lambda + 3$, pa je $\lambda = -\frac{3}{10}$.

2. (20 bodova) Opći član niza je dan s $a_n = \frac{1}{n+2^n}$. Koristmo D'Alambertov kriterij:
$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n+2^n}{n+1+2^{n+1}}.$$
Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa 2^{n+1} i puštanjem $n \to \infty$ dobivamo $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, pa red konvergira.

3. (20 bodova) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. $f'(x) = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$, pa funkcija pada na $\langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \rangle$, a raste na $\mathbb{R} \setminus \langle -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \rangle$. Ekstremi se postižu u točkama u kojima derivacija mijenja predznak, pa se lokalni maksimum postiže za $x = -2\sqrt{3}$, a lokalni minimum za $x = 2\sqrt{3}$. Vertikalne asimptote su pravci $x = -2$ i $x = 2$. Kosa asimptota je $y = 2x$.

4. (15 bodova) Nakon supstitucije $t = \ln(x)$ integral postaje
$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3} = (-\frac{1}{2t^2})\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

5. a) (12 bodova) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$. Skicirajte. Krivulje se sijeku u točkama $T(-1, 3)$ i $S(2, 0)$. Tražena površina je jednaka:
$$P = \int_{-1}^{2} ((4 - x^2) - (x^2 - 2x))dx = 9.$$
   b) (13 bodova) Zadatak 9.29. iz skripte.