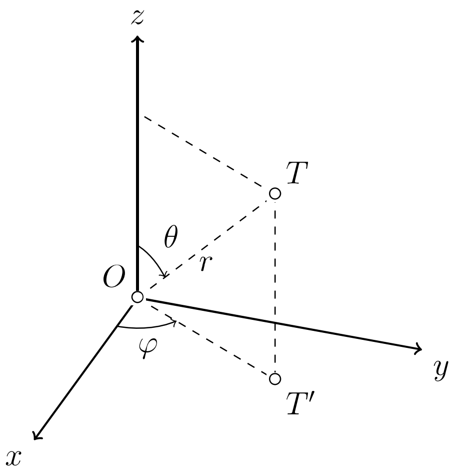
3.2.2 Sferni koordinatni sustav

Neka je $T = (x, y, z)$ točka u prostoru, te $T' = (x, y, 0)$ njena projekcija na xy-ravninu. Neka je $\varphi = \measuredangle(\vec{i}, \vec{OT'})$ usmjeren kut kao i prije, te uvedimo oznake:

- $r = |\vec{OT}|$ = udaljenost točke T do ishodišta,
- $\theta = \measuredangle(\vec{k}, \vec{OT})$ = otklon spojnice $\bar{OT}$ od z-osi.



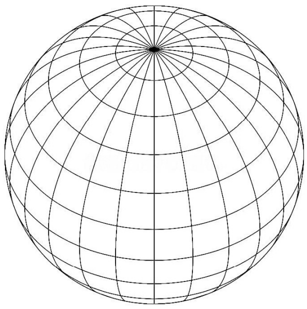
Uređenu trojku (r, θ, φ) zovemo *sfernim koordinatama* točke T. Iz pravokutnog trokuta $\triangle TT'O$ vidimo da je $z = r\cos\theta$ i $\rho = r\sin\theta$, a iz toga pak lako slijede formule pretvorbe iz sfernog u Kartezijev sustav i obratno:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\theta & \qquad r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
y &= r\sin\varphi\sin\theta & \qquad r^2\sin^2\theta &= x^2 + y^2 \\
z &= r\cos\theta, & \qquad \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}.
\end{aligned}
$$

Uočimo da je varijabla θ ograničena na interval $[0, \pi]$. Preciznije,

- $\theta = 0$ imaju točke na pozitivnom dijelu z-osi,
- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ imaju točke iznad xy-ravnine (tj. $z > 0$),
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ imaju točke na xy-ravnini (tj. $z = 0$),
- $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ imaju točke ispod xy-ravnine (tj. $z < 0$),
- $\theta = \pi$ imaju točke na negativnom dijelu z-osi.

Što su *koordinatne plohe* u sfernom sustavu? Plohe $r =$ konstanta su sfere sa središtem u ishodištu. Plohe $\varphi =$ konstanta su poluravnine s rubom u z-osi. Plohe $\theta =$ konstanta su plaštevi jednoplošnih stožaca s vrhom u ishodištu i središnjom osi z. Uočimo da ako fiksiramo sferu sa središtem u ishodištu, i presječemo je sa preostalim koordinatnim plohama, dobijemo sustav meridijana (φ) i paralela (θ):



Zadatak 3.34. Odredite *Jacobijan* prijelaza u sferne koordinate.

Rješenje: Zadaća. Rješenje je $J = r^2 \sin\theta$ (pogledajte u materijale iz predavanja.) □

Prema prethodnom zadatku, *teorem o zamjeni varijabli* u ovom slučaju glasi:

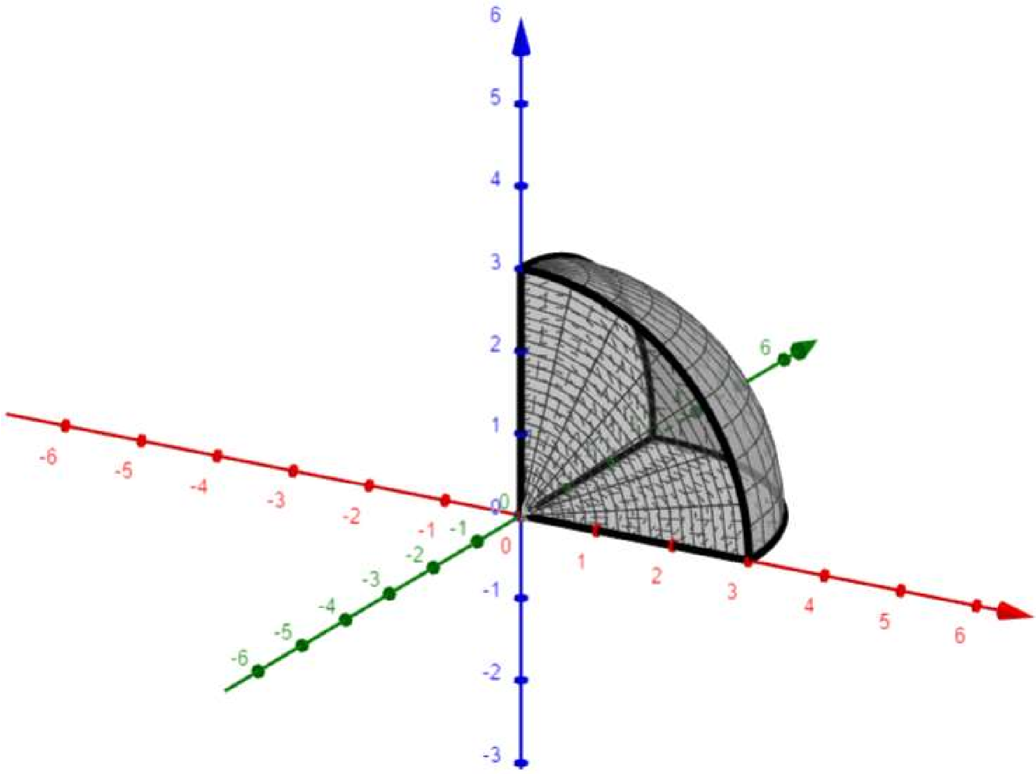
$$\iiint_{D(x,y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint_{D(r,\theta,\varphi)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin = \theta, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Zadatak 3.35. Skicirajte područje integracije, te prebacite u sferni sustav integral

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Riješite integral ako je podintegralna funkcija $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Rješenje: Budući da je $0 \leq y \leq \sqrt{9-y^2}$ vidimo da projekcija tijela na xy-ravninu zadovoljava nejednakost $x^2 + y^2 \leq 9$, tj. da se radi o točkama unutar kruga sa središtem u ishodištu radijusa $r = 3$. Takodjer zbog $0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ imamo da za točke tijela vrijedi $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, što znači da se



Slika 3.16: Tijelo Ω

radi u točkama unutar kugle radijusa $r = 3$ sa središtem u ishodištu. Budući da su sve koordinate pozitivne, tijelo predstavlja osminu kugle radijusa $r = 3$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.16).

Prema tome, u sfernim koordinatama gornji integral ima sljedeći zapis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^2 \sin\vartheta f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\mathrm{d}r.$$

Znamo da vrijedi $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ i stoga računamo vrijednost sljedećeg integrala:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^3 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \int_0^3 r^3 \mathrm{d}r$$

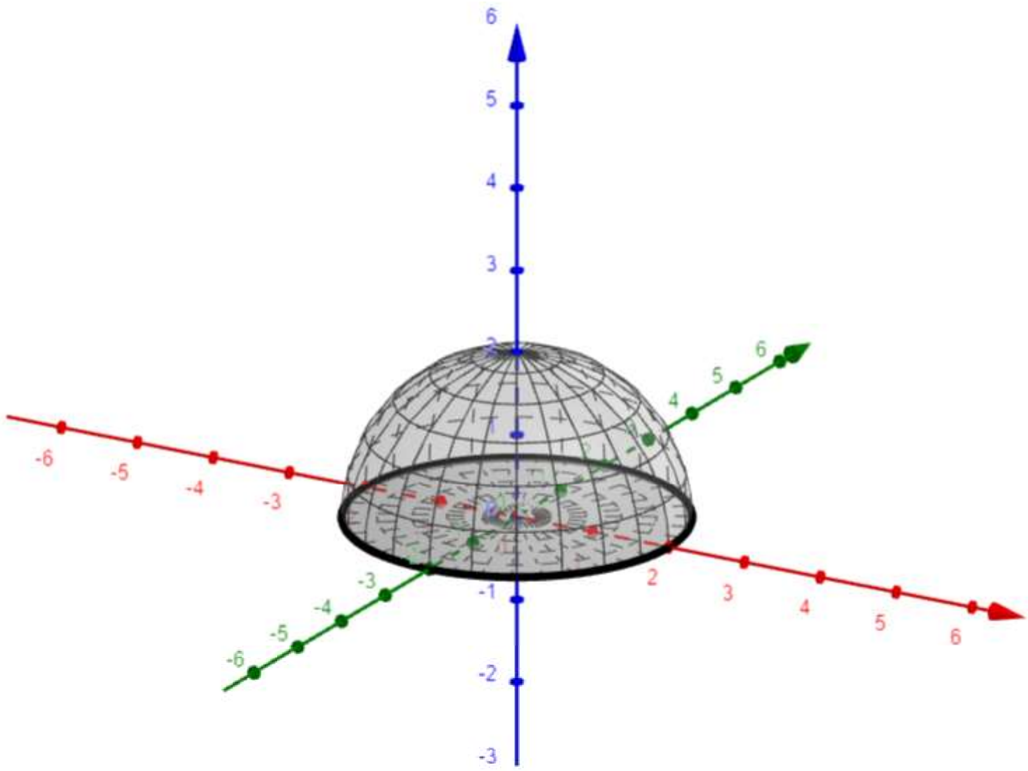
$$= \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}(-0-(-1))\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{8}.$$

□

Zadatak 3.36. Skicirajte područje integracije, prebacite u sferni sustav, te riješite integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi.$$

Rješenje: Očito da je integral zadan u cilindričnim koordinatama. Povežimo cilindrični i sferni koordinatni sustav pomoću kartezijevog sustava. Zbog $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ i $0 \leq \rho \leq 2$ za točke projekcije tijela na xy-ravninu vrijedi $x^2 + y^2 \leq 4$, tj. radi se o točkama unutar kruga radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu. Također zbog $0 \leq z \leq \sqrt{(}4 - x^2 - y^2)$ vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, tako da je tijelo gornja polukugla radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.17).



Slika 3.17: Tijelo Ω

Znamo da se funcija ρ^3 pod znakom integrala sastoji od Jacobijana ρ i podintegralne funkcije $\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$. Prema tome, zadani integral u sfernim koordinatama ima sljedeći oblik:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^2 \sin\vartheta\, r^2 \sin^2\vartheta\, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta}_{t=\cos\vartheta,\, dt=-\sin\vartheta\, d\vartheta} \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = 2\pi \int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t \,\frac{32}{5}$$

$$= \frac{64\pi}{5}\Big(t-\frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{64\pi}{5}\frac{2}{3} = \frac{128\pi}{15}.$$

□

Zadatak 3.37. Skicirajte područje integracije, prebacite u Kartezijev sustav, te riješite integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^5 \sin\varphi\cos\varphi\sin^3\theta\cos\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Rješenje: Budući da je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ zaključujemo da je $x, y \geq 0$, tj. da projekcija tijela na xy-ravninu pripada 1. kvadrantu. Također, zbog $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ zaključujemo da vrijedi $z \geq 0$, tj. da tijelo po kojem integriramo pripada gornjoj poluravnini. Konačno, iz $0 \leq r \leq 1$ vidimo da je $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, što znači da je tijelo po kojem integriramo zapravo osmina kugle u 1. oktantu radijusa $r=1$ (pogledajte sliku 3.18).

Funkcija pod znakom integrala se sastoji od Jacobijana u sfernim koordinatama $J = r^2\sin\vartheta$ i podintegralne funkcije:

$$r^3 \sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta = r\cos\varphi\sin\vartheta\, r\sin\varphi\sin\vartheta\, r\cos\vartheta = xyz.$$

Sada znamo kako napisati integral u kartezijevim koordinatama:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (xy - x^3y - xy^3)\mathrm{d}y$$

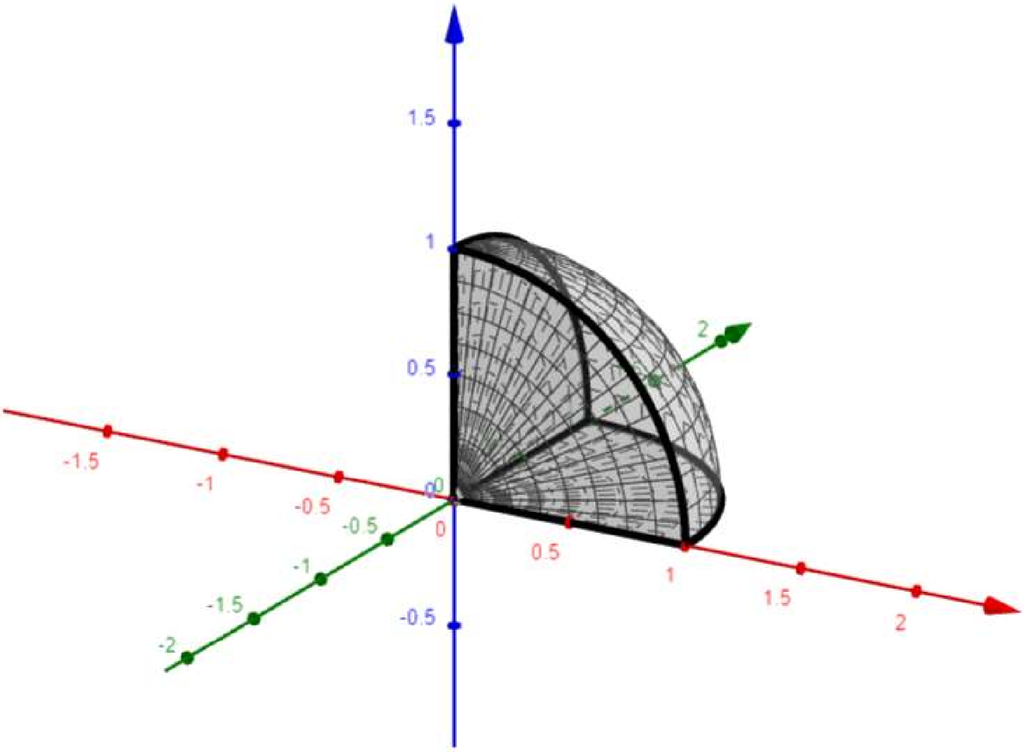
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big((x-x^3)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^4}{4}\Big)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}x(1-x^2)(1-x^2) - \frac{x}{4}(1-x^2)^2\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{4}x(1-x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-2x+x^4)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{48}.$$

□



Slika 3.18: Područje integracije

Zadatak 3.38. Izračunajte

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx,$$

te skicirajte područje integracije.

Rješenje: Budući da vrijedi $-2 \leq x \leq 2$, te

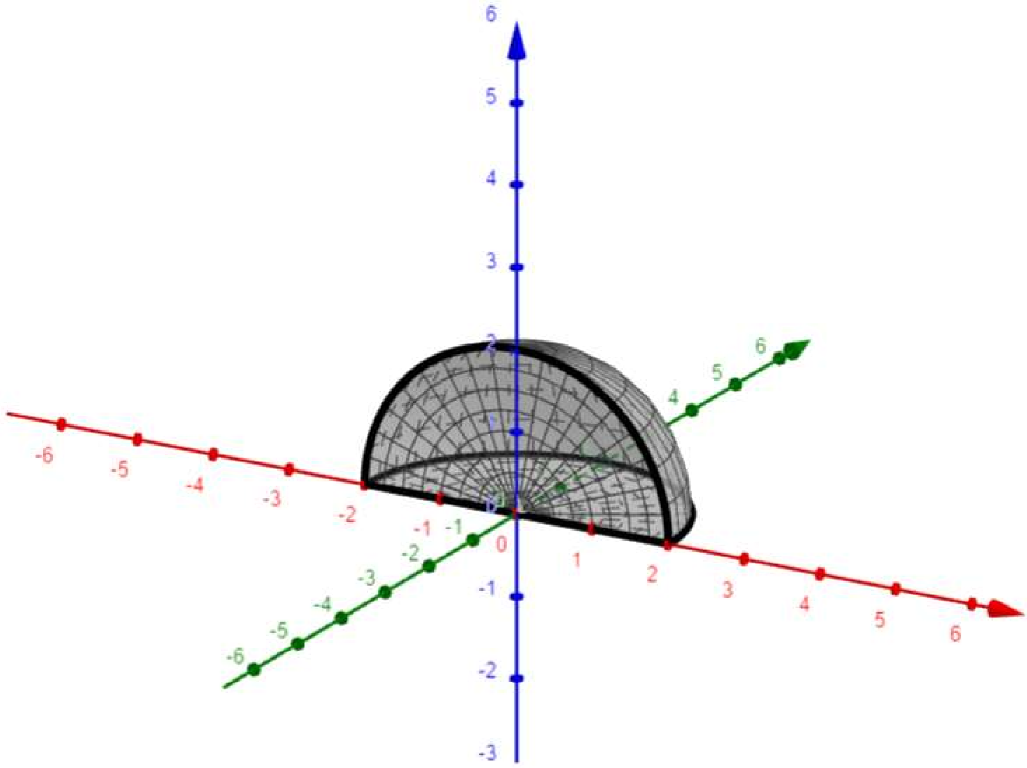
$$0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4 \text{ i}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 4$$

zaključujemo da je tijelo po kojem integriramo desna gornja četvrtina kugle radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu (pogledaje sliku 3.19).

Prema tome, zadani integral ima u sfernim koordinatama sljedeći oblik:

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2} r\,r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2} r^3\mathrm{d}r$$



Slika 3.19: Područje integracije

$$= \pi(-cos)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = 4\pi.$$

□

Zadatak 3.39. Izračunajte

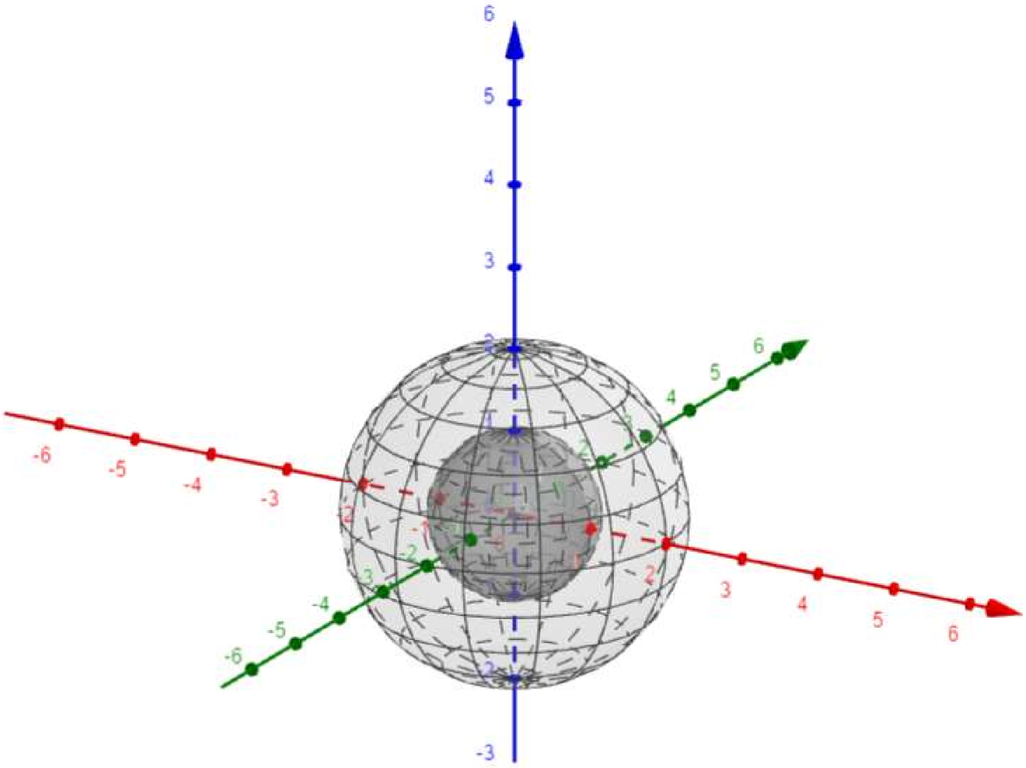
$$\iiint_\Omega r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

gdje je Ω tijelo omeđeno plohama $x^2+y^2+z^2 = 1$ i $x^2+y^2+z^2 = 4$. Skicirajte područje integracije.

Rješenje: Tijelo Ω je prostor između kugle radijusa $r = 1$ i kugle radijusa $r = 2$ sa središtem u ishodištu (Pogledajte sliku 3.20).

Prema tome, zadani integral pišemo u obliku:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_1^2 r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \int_1^2 r^2 \mathrm{d}r$$



Slika 3.20: Područje integracije

$$= 2\pi(-cos)\Big|_0^\pi \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28\pi}{3}.$$

$\square$

3.2.3 Neke primjene višestrukih integrala

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omeđen lik u ravnini, te neka mu je *plošna gustoća* zadana funkcijom $g\colon D \to [0, \infty\rangle$. Dakle, $g(x, y)$ je gustoća lika D u točki $(x, y) \in D$. *Masu* lika D računamo po formuli:

$$m = \iint_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

Statičke momente lika u odnosu na osi x i y, redom, računamo po formulama:

$$M_x = \iint_D y \cdot g(x, y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x \cdot g(x, y)\, dx\, dy.$$

Težište (centar mase) lika je točka (x_T, y_T) čije koordinate računamo po formulama:

$$x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x \cdot g(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D g(x,y)\,dx\,dy}, \qquad y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y \cdot g(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D g(x,y)\,dx\,dy}.$$

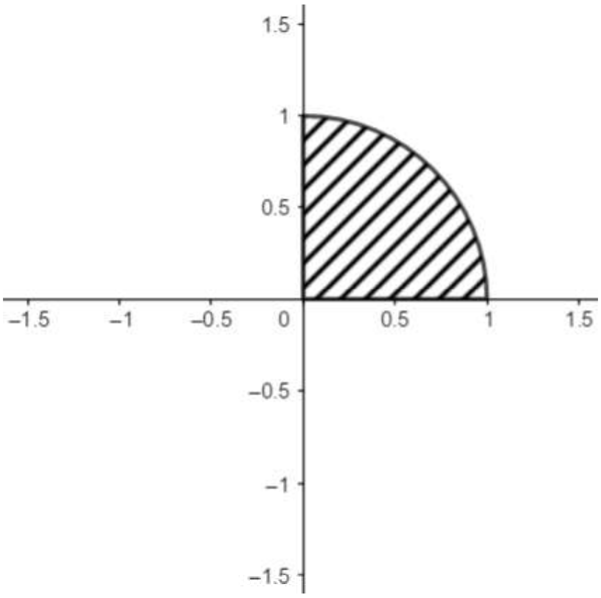
Momente inercije lika u odnosu na osi x, y i ishodište, redom, računamo po formulama:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \cdot g(x,y)\,dx\,dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \cdot g(x,y)\,dx\,dy, \\ I_0 &= \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot g(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

U slučaju homogenog lika možemo pretpostaviti da je $g(x,y) = 1$.

Zadatak 3.40. Odredite težište lika $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, s plošnom gustoćom $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte lik.

Rješenje: Iz definicije lika D vidimo da se radi o četvrtini kruga radijusa $r = 1$ sa središtem u ishodištu (pogledajte sliku 3.21).



Slika 3.21: Lik D

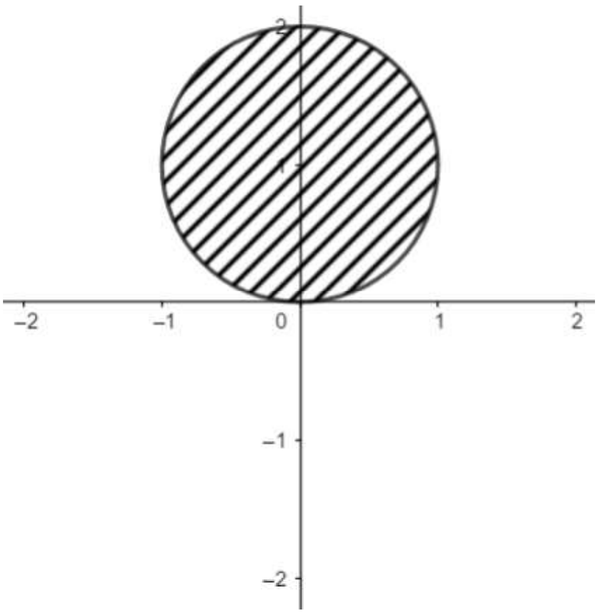
Masu lika ćemo računati pomoću polarnih koordinata u ravnini:

$$m = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\,r\,\mathrm{d}r$$
$$= \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

□

Zadatak 3.41. Odredite težište homogenog lika omeđenog krivuljom $x^2 + (y-1)^2 = 1$, te moment inercije s obzirom na y-os. Skicirajte lik.

Rješenje: Iz jednadžbe kružnice vidimo da je lik zapravo krug radijusa $r = 1$ sa središtem u točki $(0, 1)$ na osi y (pogledajte sliku 3.22).



Slika 3.22: Lik D

Zbog homogenosti lika za očekivati je da će težište lika biti u središtu kruga, što ćemo računski provjeriti. Kružnica koja omeđuje lik ima u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbu oblika $r = 2\sin\varphi$. Odredimo najprije masu lika:

$$m = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = P(D) = \pi.$$

Ovdje smo zbog homogenosti lika uzeli da je gustoća mase jednaka $g(x, y) = 1$. Odredimo sada statički moment obzirom na os y:

$$M_y = \iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\pi} \cos\varphi \, \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \underbrace{\frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}_{t=\sin\varphi,\, dt=\cos\varphi \mathrm{d}\varphi} = \frac{8}{3}\int_0^{0} t^3 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Dakle, x-koordinata težišta je $x_S = 0$. Nađimo vrijednost statičkog momenta obzirom na os x:

$$M_x = \iint_D y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi \, \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \Big(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\Big) \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\varphi - \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}\,\pi = \pi.$$

Prema tome, y-koordinata težišta je $y_S = \frac{\pi}{\pi} = 1$. To znači da je težište lika doista u središtu kruga, tj. u točki $S(0,1)$.

Odredimo sada moment inercije obzirom na os y:

$$I_y = \iint_D x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^3 \cos^2\varphi \, \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \, \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \underbrace{\cos^2\varphi}_{1-\sin^2\varphi} \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\int_0^{\pi} (\sin^4\varphi - \sin^6\varphi\Big) \mathrm{d}\varphi = 4\Big(\frac{3\pi}{8} - \frac{5\pi}{16}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Pogledajmo još kako smo došli do predzadnje jednakosti u gornjem računu. Vrijednost integrala

$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi}{8}$$

smo odredili kada smo računali statički moment M_x obzirom na os x. Odredimo konačno vrijednost sljedećeg integrala:

$$\int_0^{\pi} \sin^6\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \Big(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Big)^3 \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1 - 3\cos 2\varphi + 3\underbrace{\cos^2 2\varphi}_{\frac{1+\cos 4\varphi}{2}} - \underbrace{\cos^3 2\varphi}_{\cos 2\varphi(1-\underbrace{\sin^2 2\varphi}_{t^2})})\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{8}\Big(\frac{5}{2}\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi + \frac{3\sin 4\varphi}{8} - 0\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{8}\,\frac{5}{2}\,\pi = \frac{5\pi}{16}.$$

$\square$

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ omeđeno tijelo u prostoru, te neka mu je *gustoća* zadana funkcijom $g\colon \Omega \to [0, \infty\rangle$. Dakle, $g(x, y, z)$ je gustoća tijela Ω u točki $(x, y, z) \in \Omega$. *Masu* tijela Ω računamo po formuli:

$$m = \iiint_\Omega g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Statičke momente tijela u odnosu na ravnine xy, yz i xz, redom, računamo po formulama:

$$M_{xy} = \iiint_\Omega z \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
$$M_{yz} = \iiint_\Omega x \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
$$M_{xz} = \iiint_\Omega y \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Težište (centar mase) tijela je točka (x_T, y_T, z_T) čije koordinate računamo po formulama:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_T = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad z_T = \frac{M_{xy}}{m}.$$

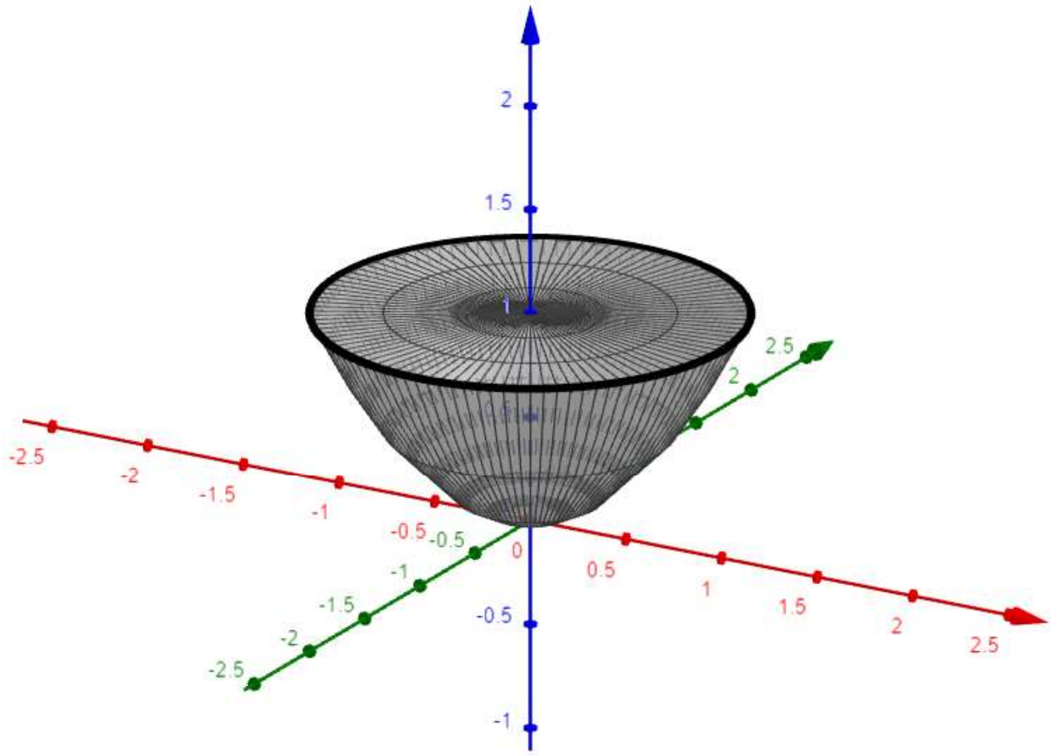
Momente inercije tijela u odnosu na osi x, y i z, redom, računamo po formulama:

$$I_x = \iiint_\Omega \left(y^2 + z^2\right) \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$
$$I_y = \iiint_\Omega \left(x^2 + z^2\right) \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$I_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

U slučaju homogenog tijela možemo pretpostaviti da je $g(x, y, z) = 1$.

Zadatak 3.42. Izračunajte masu tijela omeđenog plohama $z = x^2 + y^2$ i $z = 1$, ako mu je gustoća dana formulom $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je omeđeno odozdo kružnim paraboloidom $z = x^2 + y^2$, a odozgo ravninom $z = 1$ (pogledajte sliku 3.23).



Slika 3.23: Tijelo Ω

Stoga ćemo masu tijela računati pomoću cilindričnih koordinata:

$$m = \iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^1 \rho\,\rho\,\mathrm{d}z$$

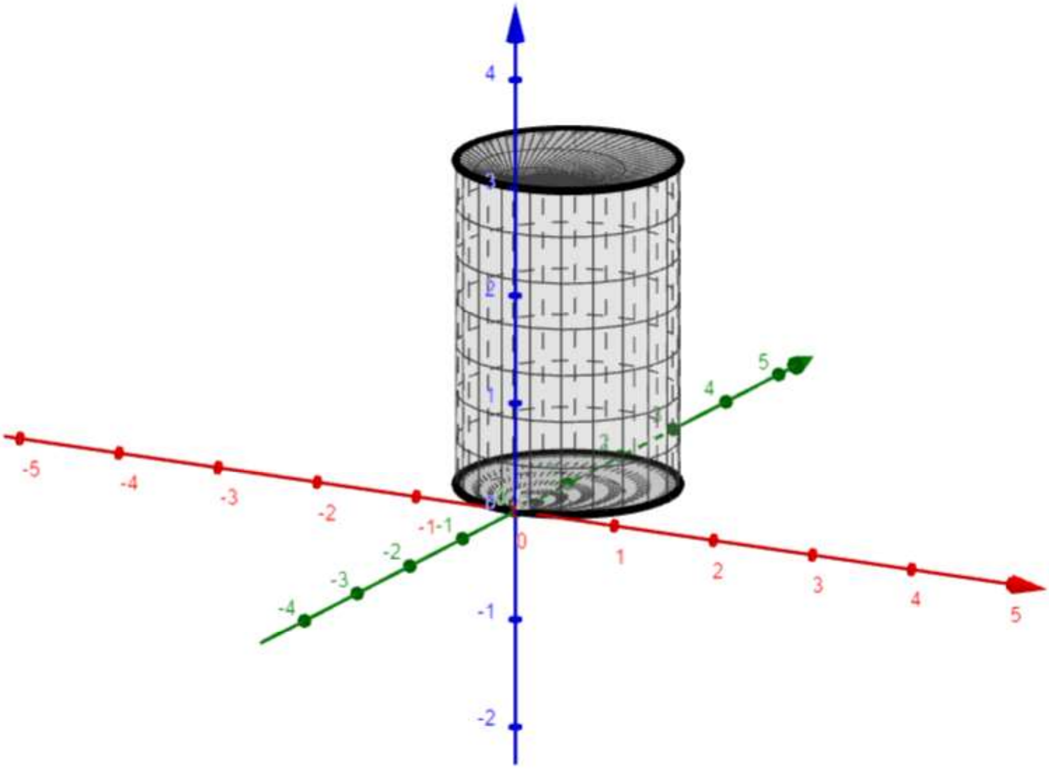
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho == \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^1 \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}.$$

□

Zadatak 3.43. Izračunajte moment inercije s obzirom na z-os tijela omeđenog plohama $x^2+(y-1)^2=1$, $z=0$ i $z=3$, ako mu je gustoća dana formulom $g(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Skicirajte tijelo.

Rješenje: Tijelo Ω je kružni cilindar visine 3 s bazom koja je krug radijusa 1 sa središtem u točki $(0,1)$ (pogledajte sliku 3.24).



Slika 3.24: Tijelo Ω

Moment inercije tijela obzirom na os z ćemo računati pomoću cilindričnih koordinata:

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^3\mathrm{d}z=3\int_0^\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=3\,\frac{8}{3}\int_0^\pi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=8\underbrace{\int_0^\pi(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{t=\cos\varphi,\ dt=-\sin\varphi d\varphi}$$

$$= 8\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-t^2)}_{parnafunkcija} \mathrm{d}t = 8\cdot 2\int_0^1 (1-t^2)\mathrm{d}t$$

$$= 16\Big(t - \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = 16\Big(1-\frac{1}{3}\Big) = \frac{32}{3}.$$

□

Zadatak 3.44. Izračunajte moment inercije homogene kugle $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ s obzirom na z-os.

Rješenje: Tijelo Ω je kugla sa središtem u ishodištu radijusa $r = 2$ i stoga ćemo za računanje momenta inercije u odnosu na os z koristiti sferne koordinate:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^2\sin^2\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^2 r^4 \mathrm{d}r = 2\pi\, \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 \underbrace{\int_0^{\pi} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}_{t=\cos\vartheta,\, dt=-\sin\vartheta d\vartheta}$$

$$= \frac{64\pi}{5}\,\frac{4}{3} = \frac{256\pi}{15}.$$

□